

50X1-HUM

INFORMATION REPORT INFORMATION REPORT

CENTRAL INTELLIGENCE AGENCY

This material contains information affecting the National Defense of the United States within the meaning of the Espionage Laws, Title 18, U.S.C. Secs. 793 and 794, the transmission or revelation of which in any manner to an unauthorized person is prohibited by law.

S-E-C-R-E-T

50X1-HUM

COUNTRY USSR

REPORT

SUBJECT Soviet Publications Concerning Aviation Designs and Radar

DATE DISTR. 13 November 1959

NO. PAGES 1

REFERENCES RD

50X1-HUM

DATE OF INFO.

PLACE & DATE ACQ.

SOURCE EVALUATIONS ARE DEFINITIVE. APPRAISAL OF CONTENT IS TENTATIVE.

Russian-language publications

50X1-HUM

- a. Voprosy Rascheta Elementov Aviatsionnykh Konstruktsiy, A. Ya. Aleksandrov, State Publishing House of Defense Industry, Moscow, 1959.
- b. Radiolokatsionnyy Obzor, B.M. Stepanov, Military Publishing House, Ministry of Defense, Moscow, 1959.

50X1-HUM

S-E-C-R-E-T

50X1-HUM

STATE	X	ARMY	X	NAVY	X	AIR	X	FBI	X	AEC				
-------	---	------	---	------	---	-----	---	-----	---	-----	--	--	--	--

(Note: Washington distribution indicated by "X"; Field distribution by "-".)

**ВОПРОСЫ РАСЧЕТА
ЭЛЕМЕНТОВ АВИАЦИОННЫХ
КОНСТРУКЦИЙ**

**РАСЧЕТ ТРЕХСЛОЙНЫХ
ПАНЕЛЕЙ И ОБОЛОЧЕК**

**ОБОРОНГИЗ
1959**

В статьях сборника освещаются вопросы расчета трехслойных панелей с легкими заполнителями: задачи об устойчивости криволинейных панелей, расчет заполнителя с учетом отрыва, результаты испытаний панелей на прочность. Кроме того, рассматриваются вопросы расчета на кручение и изгиб цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами, а также расчета нестационарных температур в двутавровом элементе.

Сборник рассчитан на научных работников и инженеров, работающих в области расчета на прочность элементов авиационных конструкций.

Авторские исправления

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
41	3 снизу	$\left(\frac{\partial u_{\beta}}{\partial x} + \frac{\partial v_{\beta}}{\partial y}\right)$	$\left(\frac{\partial u_{\beta}}{\partial y} + \frac{\partial v_{\beta}}{\partial x}\right)$
84	18 снизу	6960	5950
97	На фиг. 7	2 β	2 θ
115	4 снизу	$u_h = \sum_{n=2}^{\infty} \left[\dots \right]$	$u_h = - \sum_{n=2}^{\infty} \left[\dots \right]$
127	12 сверху в числителе	$\beta_{4n}^{-k} (k-m) D_{4n}^{(m)}$	$\beta_{4n}^{-k} (k-m) D_{4n}^{(m)}$
127	7 снизу в числителе	$(\beta_{2n} - 1)^2$	$(\beta_{2n} - 1)^3$
135	5 и 6 снизу	осевых сил,	касательных сил,
160	в формулах (2.19)	$\left(\frac{d\Delta}{dP}\right)_m$	$\left(\frac{d\Delta}{dP}\right)_{Im}$ для A_m^I и B_m^I $\left(\frac{d\Delta}{dP}\right)_{IIIm}$ для A_m^{II} и B_m^{II} $\left(\frac{d\Delta}{dP}\right)_{IIIIm}$ для A_m^{III} и B_m^{III}

Заказ 540/9249

Зав. редакцией инж. А. С. Займовская

А. Я. АЛЕКСАНДРОВ, Л. Э. БРЮККЕР

В статьях сборника освещаются вопросы расчета трехслойных панелей с легкими заполнителями: задачи об устойчивости криволинейных панелей, расчет заполнителя с учетом отрыва, результаты испытаний панелей на прочность. Кроме

ИСПЫТАНИЕ НА ПРОЧНОСТЬ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПАНЕЛЕЙ С ЗАПОЛНИТЕЛЯМИ ИЗ ПЕНОПЛАСТОВ

С целью проверки разработанных методов расчета проведено экспериментальное исследование прочности трехслойных панелей с легкими заполнителями из пенопластов на продольное сжатие. Результаты экспериментов сопоставлены с расчетными данными. Испытывались плоские и цилиндрические панели с неармированными и армированными пенопластами типа ФК.

КОНСТРУКЦИЯ ПАНЕЛЕЙ

Опытные трехслойные панели для испытаний на продольное сжатие состояли из двух внешних слоев дуралюмина Д16Т одинаковой толщины и слоя заполнителя (фиг. 1). Две нагруженные кромки панели усиливали клеей между внешними слоями. Вдоль двух других сторон между внешними слоями вклеивали короткие бруски для предотвращения значительного сближения внешних слоев, которое в условиях опирания панели по четырем сторонам могло бы возникнуть ввиду малой жесткости заполнителя.

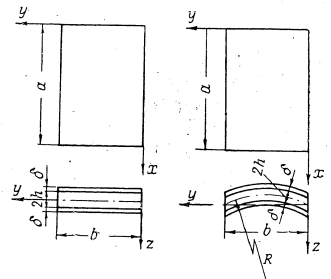
Размеры панелей и результаты испытаний приведены в табл. 1—5 (см. ниже).

Заполнитель применяли нескольких видов:

1. Из неармированного пенопласта типа ФК.
2. Из пенопласта типа ФК, армированного шпоном.
3. Из пенопласта типа ФК, армированного дуралюминовой решеткой.

Пенопласт изготовляли различной плотности для получения различных жесткостных характеристик заполнителя.

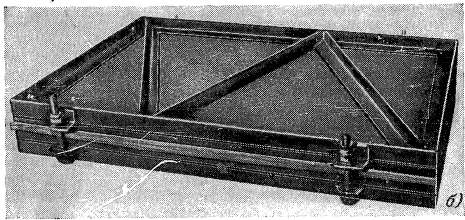
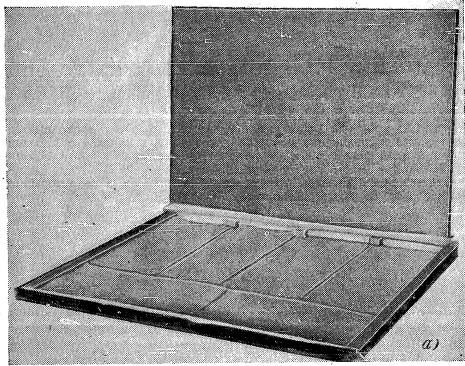
Панели с неармированным заполнителем. К дуралюминовому внешнему слою, предварительно покрытому со стороны, обращенной внутрь, слоем клея БФ-2 (с просушкой в термощафу), прикрепляли деревянные планки и бруски требуемой толщины. На слой клея, покрывающий дуралюмин, укладывали свальцованные пластины исходной композиции таким образом, чтобы вся поверхность дуралюмина была закрыта ими (фиг. 2, а).



Фиг. 1.

Зав. редакцией инж. А. С. Займовская

Толщину этих пластин выбирали так чтобы пенопласт, который получается после вспенивания и заполнения всего пространства между внешними слоями, обладал требуемым удельным весом¹. Далее сверху к деревянным планкам и брусьям прикрепляли второй дуралюминовый слой. Во избежание выброса пенопласта при вспенивании к боковым сторонам панели, оставшимся незакрытыми, приколачивали деревянные планки,



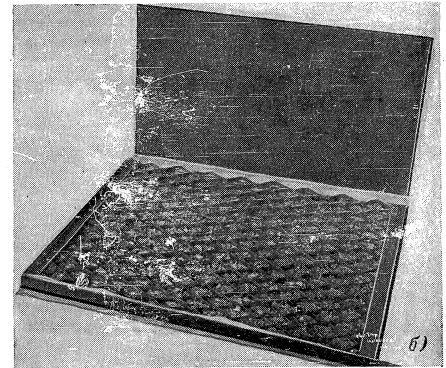
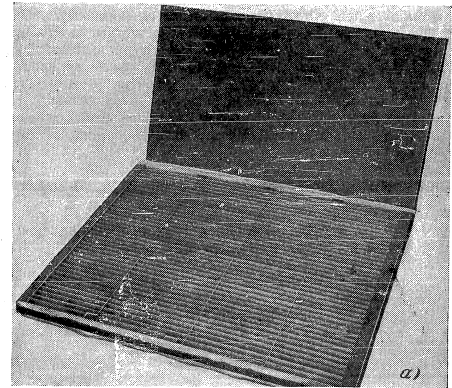
Фиг. 2.

которые после термообработки удаляли (чтобы к этим планкам пенопласт не прилипал, их обертывали бумагой). Собранную таким образом трехслойную панель зажимали двумя металлическими ограничительными плитами (фиг. 2, б) и нагревали в термошкафу.

Панели с наполнителем, армированным шпоном. В прорези деревянных планок, прикрепленных к одному дуралюминовому внешнему слою (предварительно покрытому клеем), вставляли полоски

¹ Ранее нами применялся способ введения композиции в полость панели в измельченном виде. Однако при этом композиция распределялась неравномерно по площади панели и пенопласт получался неравномерной плотности.

шпона толщиной 0,5 мм с расстоянием между ними 15 мм (фиг. 3, а). Ширина полосок была равна требуемой толщине слоя заполнителя. В промежутки между полосками закладывали пластинки из композиции. Далее



Фиг. 3.

прикрепляли второй слой дуралюмина и обрабатывали, как в предыдущем случае.

Панели с наполнителем, армированным дуралюминовой решеткой, изготавливали аналогично, с той лишь разни-

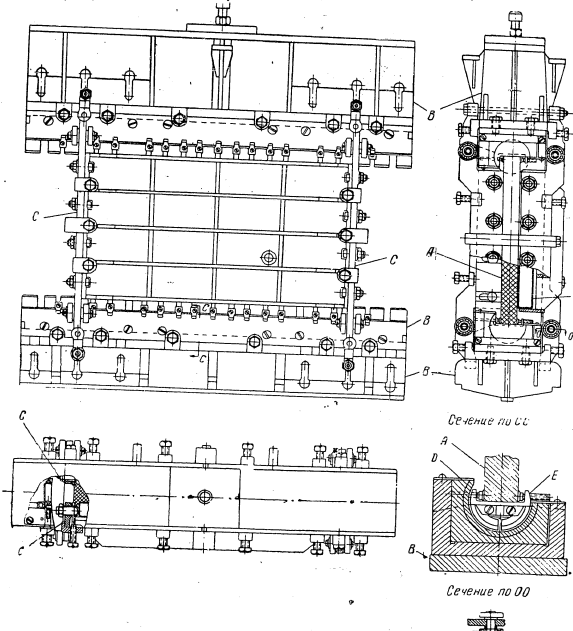
пей, что вместо полосок шпона между деревянными планками вставляли решетку из склепанных полосок дуралюмина толщиной 0,3 мм. Ширина полосок была равна требуемой толщине слоя заполнителя (фиг. 3, б). Форма ячеек сетки — примерно ромбовидная, большую диагональ ячейки (длиной 70 мм) располагали по направлению действия продольной силы, меньшую диагональ (длиной 35 мм) — поперек панели. Измельченную композицию засыпали в ячейки этой решетки.

Отметим, что армирование пенопласта дуралюминовой решеткой весьма удобно для криволинейных панелей, так как до вспенивания пенопласта эти решетки достаточно легко изгибаются в двух плоскостях, а после вспенивания придают панели большую жесткость.

Конструкция цилиндрических панелей отличается от конструкции плоских только формой ограничителей и планок, располагаемых между внешними слоями.

ПРИСПОСОБЛЕНИЕ ДЛЯ ИСПЫТАНИЯ ПАНЕЛЕЙ

Испытания проводили на универсальной 50-тонной машине с помощью приспособления (фиг. 4), позволяющего производить продольное сжатие, поперечный и продольно-поперечный изгиб.



Фиг. 4.

Испытываемую панель *A* устанавливали в вертикальном положении между траверсами *B*, передающими на нее продольную нагрузку. Верхняя траверса выполнена самоустанавливающейся в плоскости панели. Траверсы оборудованы сменными устройствами для воспроизведения защемления и свободного опирания горизонтальных кромок панели. Защемление осуществляется установкой приторцованной горизонтальной кромки панели на плоскость траверсы, а свободное опирание — установкой горизонтальной кромки панели на монтируемые на траверсах устройства с разрезанными подшипниками качения *E*.

Между траверсами *B*, устанавливали стойки *C*, к которым прикрепляли обработанные по цилиндрической поверхности планки, позволяющие осуществить свободное опирание вертикальных кромок панели. При проведении испытаний со свободными вертикальными кромками стойки *C* снимали. Стойки *C* выполнены сменными (нескольких размеров), а расстояние между ними можно устанавливать различное — по размеру панелей.

При испытании на поперечный или продольно-поперечный изгиб поперечные нагрузки на панель создаются избыточным давлением в мешке *F*.

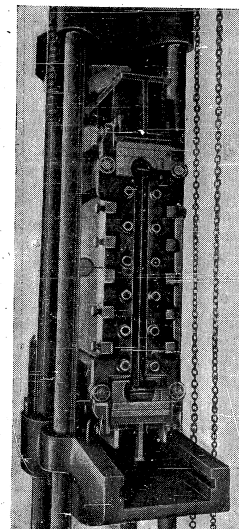
Модуль сдвига заполнителя *G*, который необходимо знать для сопоставления результатов испытания панелей с расчетными данными, определяли из испытаний с помощью специального приспособления образцов, вырезанных из панелей после испытания на продольное сжатие.

ИСПЫТАНИЕ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПАНЕЛЕЙ НА ПРОДОЛЬНОЕ СЖАТИЕ¹

С помощью индикатора, установленного в центре панели (фиг. 5), при испытаниях измеряли деформация выпучивания панелей по мере их нагружения. Критические нагрузки ($2T_k$) определяли по моменту резкого возрастания прогибов панелей. Этот момент почти во всех случаях наших испытаний практически совпадал с моментом, когда нагрузки достигали максимального значения, т. е. с моментом разрушения панелей.

На фиг. 5 показана установка для испытания панелей на продольное сжатие при свободном опирании по четырем кромкам.

В табл. 1—5 даны размеры панелей (см. фиг. 1), модули сдвига заполнителя (для панелей с армированным заполнителем — модули сдвига $G_{сз}$ и $G_{сз2}$) и критические силы сжатия $2T_k$ — расчетные и экспериментальные. Расчетные критические силы находили по формулам, полученным А. П. Прусаквым в его диссертации².



Фиг. 5.

¹ В испытаниях принимал участие также Л. М. Куршва.

² А. П. Прусак, Устойчивость трехслойных пластин с легким заполнителем, Диссертация, Институт строительной механики, АН УССР, 1958.

Таблица 1
Плоские панели с четырьмя свободно опертыми кромками. Заполнитель изотропный. Сжатие вдоль размера *a*

<i>a</i> см	<i>b</i> см	δ см	<i>2h</i> см	<i>G</i> кг/см ²	<i>2T_к</i>		Расхождение между расчетным и экспериментальным значениями в % экспериментального
					расчетное <i>m</i>	экспериментальное <i>m</i>	
60	40	0,05	0,85	99,4	3,77	3,60	5,0
60	40	0,05	0,80	102,9	3,72	3,14	18,5
60	40	0,10	1,30	149,6	9,04	8,25	9,5
60	40	0,10	1,30	179,8	10,88	9,52	14,0
60	40	0,10	1,30	124,6	7,54	6,52	15,5
60	40	0,10	2,80	110,0	13,20	11,00	20,0
60	40	0,10	2,80	107,6	12,90	12,00	7,5
60	40	0,10	2,80	110,4	13,30	13,70	-3,0
40	60	0,10	1,40	87,1	8,43	7,02	20,0
40	60	0,10	1,40	117,1	11,30	12,30	-8,0
40	60	0,10	1,80	253,9	30,50	23,80	28,0
40	60	0,10	2,80	96,5	17,40	16,00	9,0
40	60	0,10	2,80	101,3	18,20	16,10	13,0
40	60	0,10	2,80	99,6	17,90	15,90	12,5
80	60	0,05	0,90	83,9	4,81	4,75	1,0
80	60	0,05	0,90	73,5	4,37	4,00	9,0
80	60	0,05	0,90	74,1	4,38	4,10	7,0
80	60	0,10	0,90	124,4	8,30	7,00	18,5
80	60	0,10	1,90	62,5	7,88	7,70	2,0
60	80	0,10	1,90	62,9	10,60	8,70	22,0
60	80	0,10	1,90	63,6	10,70	8,90	20,0
60	80	0,10	1,90	60,9	10,30	8,80	17,0
60	40	0,20	3,00	265,6	36,20	35,20	3,0
60	40	0,20	3,00	314,9	43,00	41,20	4,0

Таблица 2
Плоские панели с четырьмя свободно опертыми кромками. Заполнитель ортотропный—пенопласт, армированный шпоном. Сжатие вдоль размера *a*

<i>a</i> см	<i>b</i> см	δ см	<i>2h</i> см	<i>G_{xz}</i> кг/см ²	<i>G_{yz}</i> кг/см ²	<i>2T_к</i>		Расхождение между расчетным и экспериментальным значениями в % экспериментального
						расчетное <i>m</i>	экспериментальное <i>m</i>	
60	40	0,05	0,90	140	101,0	5,28	5,85	-9,5
60	40	0,05	0,90	430	211,0	9,84	9,60	2,5
60	40	0,10	1,30	307	150,0	17,40	14,50	20,0
60	40	0,10	1,45	211	112,0	13,70	12,80	7,0
60	40	0,10	1,40	251	193,0	16,20	14,20	14,0

Продолжение

<i>a</i> см	<i>b</i> см	δ см	<i>2h</i> см	<i>G_{xz}</i> кг/см ²	<i>G_{yz}</i> кг/см ²	<i>2T_к</i>		Расхождение между расчетным и экспериментальным значениями в % экспериментального
						расчетное <i>m</i>	экспериментальное <i>m</i>	
60	40	0,10	1,40	278	105,0	16,70	15,55	7,5
60	40	0,25	2,50	390	103,0	46,50	46,70	-0,5
60	40	0,10	1,00	292	208,0	13,50	13,50	—
60	40	0,25	2,30	337	97,0	38,20	36,50	4,5
60	40	0,10	1,00	308	188,0	13,80	9,95	39,0
40	60	0,05	1,00	118	94,7	6,47	8,10	-20,0
40	60	0,05	0,90	244	138,0	7,68	6,25	23,0
40	60	0,10	1,00	290	62,0	12,30	11,50	7,0
40	60	0,10	1,40	178	248,0	17,00	14,40	18,0
40	60	0,10	1,50	291	91,8	21,80	18,75	16,0
40	60	0,10	1,30	171	199,0	15,40	13,65	13,0
40	60	0,10	1,00	394	77,5	16,80	14,60	15,0
40	60	0,10	1,40	185	96,8	16,20	14,35	13,0
80	60	0,10	2,00	165	29,8	18,30	16,20	13,0
80	60	0,10	1,90	138	78,6	17,30	15,25	13,0
60	80	0,10	1,95	217	31,2	22,70	21,90	3,5

Таблица 3

Плоские панели с четырьмя свободно опертыми кромками. Заполнитель ортотропный—пенопласт, армированный дуралюминовой решеткой. Сжатие вдоль размера *a*

<i>a</i> см	<i>b</i> см	δ см	<i>2h</i> см	<i>G_{xz}</i> кг/см ²	<i>G_{yz}</i> кг/см ²	<i>2T_к</i>		Расхождение между расчетным и экспериментальным значениями в % экспериментального
						расчетное <i>m</i>	экспериментальное <i>m</i>	
60	40	0,05	0,9	177	110	6,27	5,35	17,0
60	40	0,05	0,9	172	104	5,38	5,50	-2,0
60	40	0,05	0,9	162	106	5,16	5,15	—
60	40	0,10	1,4	255	205	16,50	13,10	26,0
60	40	0,10	1,4	240	214	15,80	11,90	33,0
60	40	0,10	1,4	244	209	15,80	12,35	28,0
40	60	0,05	0,9	178	103	6,68	5,50	21,0
40	60	0,10	1,4	232	204	21,40	17,00	26,0
40	60	0,10	1,4	268	200	22,70	18,10	25,0
80	60	0,05	1,9	227	176	11,20	10,20	10,0
60	80	0,10	1,9	184	152	14,70	17,60	-16,5
60	80	0,10	1,9	202	152	15,30	17,30	-11,5

Таблица 4
Плоские панели с двумя защемленными нагруженными кромками и двумя свободно опертными ненагруженными кромками. Заполнитель изотропный
Сжатие вдоль размера *a*

<i>a</i> см	<i>b</i> см	δ см	<i>2h</i> см	<i>G</i> кг/см ²	<i>2T_к</i>		Расхождение между расчетным и экспериментальным значениями в % экспериментального
					расчетное <i>m</i>	экспериментальное <i>m</i>	
40	60	0,05	0,50	308,0	6,50	7,65	-15,0
40	60	0,05	0,45	320,0	6,01	6,80	-11,5
40	60	0,05	0,50	490,0	7,67	7,70	-0,5
40	60	0,05	0,80	110,0	5,68	4,48	26,5
40	60	0,10	1,40	83,0	7,95	8,45	-6,0
40	60	0,10	1,00	104,0	7,60	8,30	-8,5
40	60	0,10	1,30	109,0	9,85	10,60	-7,0
40	60	0,10	1,00	126,0	9,18	8,55	7,0
40	60	0,10	0,95	136,0	9,50	8,50	12,0
40	60	0,10	1,00	148,0	10,82	11,50	-6,0
40	60	0,10	1,00	308,0	20,40	19,40	5,0
40	60	0,10	1,00	460,0	30,00	28,10	6,5
40	60	0,10	0,50	535,0	35,00	33,20	5,5
60	40	0,05	0,50	318,0	4,87	5,00	-2,5
60	40	0,05	0,50	435,0	5,47	5,90	-7,0
60	40	0,10	1,00	90,2	4,43	4,80	-7,5
60	40	0,10	1,00	98,5	4,80	5,00	-4,0
80	60	0,05	1,80	68,4	7,76	6,85	13,0
80	60	0,05	1,80	70,3	7,98	6,65	20,0
80	60	0,10	0,80	126,3	7,65	6,82	12,0
80	60	0,10	1,00	79,4	5,74	5,70	0,5
80	60	0,10	1,00	88,7	6,46	6,82	-5,0

Таблица 5
Цилиндрические панели с защемленными нагруженными криволинейными кромками и двумя свободно опертными ненагруженными прямолинейными кромками. Заполнитель изотропный
Сжатие вдоль размера *a*
Радиус кривизны *R*=100 см

<i>a</i> см	<i>b</i> см	δ см	<i>2h</i> см	<i>G</i> кг/см ²	<i>2T_к</i>		Расхождение между расчетным и экспериментальным значениями в % экспериментального
					расчетное <i>m</i>	экспериментальное <i>m</i>	
60	40	0,1	1,00	32,6	5,10	4,40	16,0
60	40	0,1	0,95	40,0	5,35	4,62	16,0
60	40	0,1	1,00	79,5	7,38	8,60	-14,0

Продолжение

<i>a</i> см	<i>b</i> см	δ см	<i>2h</i> см	<i>G</i> кг/см ²	<i>2T_к</i>		Расхождение между расчетным и экспериментальным значениями в % экспериментального
					расчетное <i>m</i>	экспериментальное <i>m</i>	
60	40	0,1	1,50	81,3	9,10	8,20	11,0
60	40	0,1	1,50	84,0	9,30	7,80	19,0
60	40	0,1	1,45	89,0	9,46	11,50	-8,0
60	40	0,1	0,45	92,0	5,96	5,00	19,0
60	40	0,1	1,00	93,3	8,05	8,45	-4,5
60	40	0,1	1,40	104,0	10,25	8,55	20,0
60	40	0,1	0,40	121,0	6,49	5,96	8,5
60	40	0,1	1,30	124,0	11,05	11,60	-4,5
60	40	0,1	1,50	124,0	12,10	9,20	32,0
60	40	0,1	0,40	127,0	6,64	6,28	5,5
60	40	0,1	1,00	141,0	10,37	9,25	12,0
60	40	0,1	0,95	150,0	10,50	8,90	18,0
60	40	0,1	0,40	178,0	7,86	6,50	21,0
60	40	0,1	1,00	270,0	16,52	18,50	-10,5
60	40	0,1	0,50	304,0	11,99	10,20	17,5
60	40	0,1	0,40	566,0	16,46	14,60	12,5

При расчете цилиндрических панелей с неармированным наполнителем использовали формулы, полученные Л. М. Куршиным с учетом изгибной жесткости внешних слоев¹.

Из рассмотрения табл. 1—5 можно заключить, что расхождение расчетных и экспериментальных данных находится в допустимых пределах.

ИСПЫТАНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН НА ВЫНОСЛИВОСТЬ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ

Испытанию на выносливость при симметричном цикле были подвержены образцы, свободно опертые по двум противоположным кромкам при двух свободных кромках².

Параметры образцов следующие:

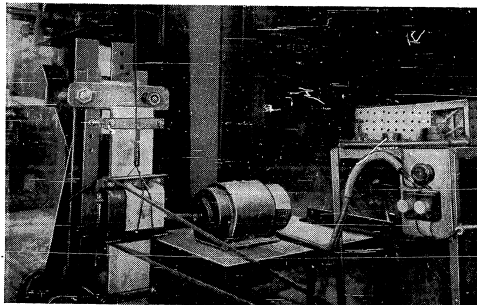
- Длина образца 700 мм
- Длина рабочей части (между опорами) *l* = 605
- Ширина образца *b* = 150
- Толщина внешних слоев δ = 1,0
- Толщина внутреннего слоя *2h* = 17,8

Материал внешних слоев — Д16Т, материал наполнителя — неармированный пенопласт ФК с удельным весом 0,2.

¹ Л. М. Куршин, Об учете изгибной жесткости внешних слоев трехслойной криволинейной панели, работающей на продольное сжатие (помещена в этом сборнике).

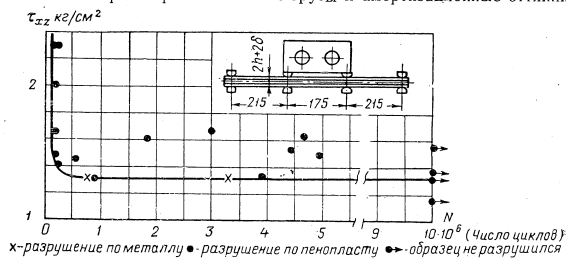
² Испытание образцов проводили В. Д. Дементьев и В. Б. Лампер.

Пластины испытывались на установке, изображенной на фиг. 6, где в качестве возбудителя периодической силы применялся вибратор 2 ВЭ 500/5000. Схема установки образцов и вибратора показана на фиг. 7. Вибратор был подвешен на амортизационных шнурах для исключения



Фиг. 6.

влияния его веса и закреплен на испытываемом образце, зажатом на стенде. Частота колебаний составляла 1500 циклов/мин (частота собственных колебаний пластины значительно выше). Для устранения нежелательных крутильных колебаний (следствие некоторой массовой и жесткостной несимметрии системы «пластина — вибратор») были использованы несимметрично расположенные грузы и амортизационные оттяжки.



Фиг. 7.

При испытании разрушение образцов происходило, как правило, по пенопласту (в местах действия наибольших касательных напряжений — вблизи зажимов).

Касательные напряжения в заполнителе при изгибе пластины под действием силы P , приложенной в середине пластины, определялись по формуле

$$\tau = \frac{P}{2b(2h + \delta)}$$

Сила P определялась по амплитуде колебания, которая в свою очередь измерялась мерными клиньями, наклеенными по обе стороны вибратора.

Результаты испытания образцов сведены в график $\tau=f(N)$, где N — число циклов (см. фиг. 7).

Полученные пределы выносливости $\tau_f=1,3 \text{ кг/см}^2$ можно считать вполне удовлетворительными для легкого заполнителя.

Однако следует отметить, что должен быть исследован вопрос о необходимой базе испытаний пенопластов (здесь было принято $N=10 \cdot 10^6$ без специального исследования этого вопроса).

А. Я. АЛЕКСАНДРОВ

ВВЕДЕНИЕ

Эксперименты показывают, что разрушение трехслойных пластин с легкими заполнителями, как правило, происходит за счет разрушения заполнителя. При этом обращает на себя внимание тот факт, что при испытаниях пластин на продольное сжатие иногда происходит разрушение заполнителя при действии на пластину нагрузок, меньших, нежели критические. Между тем при обычном расчете принимается, что напряжения в заполнителе до потери пластиной устойчивости равны нулю.

Объяснение такому разрушению можно искать в том, что реальная трехслойная пластина обладает некоторой начальной погибью и некоторой начальной волнистостью внешних слоев. Вследствие этого при нагружении пластины продольными сжимающими нагрузками в заполнителе возникают напряжения сдвига и отрыва внешних слоев, являющиеся причиной разрушения.

Вопрос о расчете на прочность легкого заполнителя трехслойных пластин рассматривался в ряде работ, но достаточного разрешения не получил.

В работе А. П. Вороновича составлены общие выражения напряжений, возникающих при начальной погнби и волнистости, но не получены формулы для определения расчетных напряжений.

В работе А. Я. Александрова, Л. М. Куршина, А. П. Прусакова рассматривается случай только кососимметричной начальной погнби пластины. В работе Вэна¹ рассматривается случай только симметричной погнби, причем принятые здесь допущения таковы, что результаты расчета применимы лишь для наименее интересного случая.

В настоящей работе разрабатывается методика расчета на прочность легкого заполнителя трехслойных пластин с учетом напряжений сдвига и отрыва, возникающих по поверхности склейки внешних слоев с заполнителем. Рассматривается работа пластины на продольное сжатие. Показывается, что при некоторых условиях расчетные формулы, полученные для продольного сжатия, могут быть обобщены на другие случаи расчета.

РАСЧЕТ ЗАПОЛНИТЕЛЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН С УЧЕТОМ ОТРЫВА

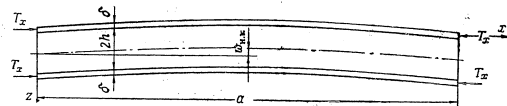
Работа посвящена разработке методики расчета на прочность легкого заполнителя трехслойных пластин с учетом напряжений сдвига и отрыва, возникающих по поверхности склейки внешних слоев с заполнителем. Получены расчетные формулы для пластин, работающих на продольное сжатие и продольно-поперечный изгиб.

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- a, b — размеры прямоугольной пластины в плане
- δ — толщина внешнего слоя
- $2h$ — толщина заполнителя трехслойной пластины
- E — модуль нормальной упругости изотропного заполнителя
- G — модуль сдвига изотропного заполнителя
- μ — коэффициент Пуассона изотропного заполнителя
- \bar{E} — модуль нормальной упругости материала внешних слоев
- $\bar{\mu}$ — коэффициент Пуассона материала внешних слоев
- $E_{пр} = \frac{\bar{E}}{1 - \bar{\mu}^2}$ — приведенный модуль нормальной упругости материала внешних слоев
- $B = \frac{\bar{E}b}{1 - \bar{\mu}^2}$ — жесткость внешнего слоя при растяжении (сжатии) на единицу ширины
- $D = \frac{\bar{E}b^3}{12(1 - \bar{\mu}^2)}$ — жесткость внешнего слоя при изгибе на единицу ширины
- $w_{н.к}$ — стрела начального прогиба трехслойной пластины (или начальной кососимметричной погнби внешних слоев)
- $w_{к.к}$ — стрела прогиба трехслойной пластины (или кососимметричный прогиб внешних слоев) под нагрузкой
- $w_{н.с}$ — стрела начальной симметричной волнистости внешних слоев пластины
- $w_{к.с}$ — стрела симметричной волнистости внешних слоев пластины под нагрузкой
- $\sigma_{к.с}, \sigma_{н.к}$ — критическое напряжение сжатия внешнего слоя при симметричной и кососимметричной формах потери устойчивости пластины соответственно
- σ — напряжения продольного сжатия внешнего слоя
- $[\sigma]$ — допускаемые напряжения для заполнителя при работе на растяжение или сжатие
- $\sigma_{расч}$ — расчетное напряжение растяжения или сжатия в заполнителе
- $\sigma_{z сим}, \tau_{xz сим}$ — напряжения отрыва и сдвига, возникающие в заполнителе вследствие начальной симметричной волнистости внешних слоев или начальной кососимметричной погнби всей пластины
- $\sigma_{z кос макс}, \tau_{xz кос макс}$ — максимальные напряжения отрыва и сдвига, возникающие в заполнителе вследствие начальной волнистости внешних слоев или начальной кососимметричной погнби всей пластины.

§ 1. НАПРЯЖЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПО СКЛЕЙКЕ СЛОЕВ С ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ВСЛЕДСТВИЕ НАЧАЛЬНОЙ КОСОСИММЕТРИЧНОЙ ПОГНБИ ПЛАСТИНЫ

Для прямоугольной трехслойной пластины с заполнителем постоянной модуля упругости, свободно опертой по контуру и нагруженной



Фиг. 1.

в направлении размера a равномерно распределенной сжимающей нагрузкой (фиг. 1), напряжения, возникающие вследствие начальной кососим-

¹ А. П. Воронович, Устойчивость обшивки с заполнителем при сжатии на сдвиге, Диссертация, ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 1948.
C. C. Wan, Face Buckling and Core Strength Requirement in Sandwich Construction, JAS, 1947, N. 9.

метричной погиби пластины по склейке внешних слоев с заполнителем, выражаются формулами¹:

$$\sigma_{z \text{ кос}} = 2G\gamma \sin \alpha x \sin \beta y \times \frac{2(1-\mu) \left(\text{sh}^2 \gamma h + \frac{\gamma^2}{2} \text{sh} \gamma h \text{ ch} \gamma h \right) + \left(\frac{2G}{\gamma B} - \frac{\gamma^2}{2} \right) (\text{sh} \gamma h \text{ ch} \gamma h - \gamma h)}{\frac{4G}{\gamma B} (1-\mu) \text{ch}^2 \gamma h + 4(1-\mu) \text{sh} \gamma h \text{ ch} \gamma h - (\text{sh} \gamma h \text{ ch} \gamma h - \gamma h)} \times \frac{\frac{\sigma}{\sigma_{\text{к.к}} - \sigma} \omega_{\text{н.к}}}{\sigma_{\text{к.к}} - \sigma} \omega_{\text{н.к}}} \quad (1.1)$$

$$\tau_{xz \text{ кос}} = 2G\alpha \cos \alpha x \sin \beta y \times \frac{2(1-\mu) \left(\frac{\gamma^2}{2} \text{ch}^2 \gamma h + \text{sh} \gamma h \text{ ch} \gamma h \right) - (\text{sh} \gamma h \text{ ch} \gamma h - \gamma h)}{\frac{4G}{\gamma B} (1-\mu) \text{ch}^2 \gamma h + 4(1-\mu) \text{sh} \gamma h \text{ ch} \gamma h - (\text{sh} \gamma h \text{ ch} \gamma h - \gamma h)} \frac{\frac{\sigma}{\sigma_{\text{к.к}} - \sigma} \omega_{\text{н.к}}}{\sigma_{\text{к.к}} - \sigma} \omega_{\text{н.к}} \quad (1.2)$$

где

$$\sigma_{\text{к.к}} = D \frac{\gamma^4}{\delta a^2} + \frac{2G\gamma}{\delta a^2} \times \frac{2(1-\mu) \left(\frac{\gamma^2}{2} \text{ch}^2 \gamma h + \text{sh} \gamma h \right)^2 + \left(\frac{2G}{\gamma B} - \gamma^2 \right) (\text{sh} \gamma h \text{ ch} \gamma h - \gamma h)}{\frac{4G}{\gamma B} (1-\mu) \text{ch}^2 \gamma h + 4(1-\mu) \text{sh} \gamma h \text{ ch} \gamma h - (\text{sh} \gamma h \text{ ch} \gamma h - \gamma h)} \quad (1.3)$$

$$\alpha = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta = \frac{n\pi}{b}, \quad \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

При кососимметричной деформации пластин с практически возможными параметрами можно принять, что $\text{sh} \gamma h \approx \gamma h$, $\text{ch} \gamma h = 1$, и привести выражения (1.1)–(1.3) к виду

$$\sigma_{z \text{ кос}} = G \sin \alpha x \sin \beta y \frac{(\gamma h)^2 + \frac{1}{2} \gamma^2 \gamma h}{\frac{G}{\gamma^2 B} + h} \frac{\frac{\sigma}{\sigma_{\text{к.к}} - \sigma} \omega_{\text{н.к}}}{\sigma_{\text{к.к}} - \sigma} \omega_{\text{н.к}} \quad (1.4)$$

$$\tau_{xz \text{ кос}} = \alpha G \cos \alpha x \sin \beta y \frac{h + \frac{\delta}{2}}{\frac{G}{\gamma^2 B} + h} \frac{\frac{\sigma}{\sigma_{\text{к.к}} - \sigma} \omega_{\text{н.к}}}{\sigma_{\text{к.к}} - \sigma} \omega_{\text{н.к}} \quad (1.5)$$

$$\sigma_{\text{к.к}} = \frac{D}{\delta} \frac{\gamma^4}{a^2} + \frac{\gamma^4}{a^2} \frac{B \left(h + \frac{\delta}{2} \right)^2}{\delta \left(1 + \frac{\gamma^2 h B}{G} \right)} \quad (1.6)$$

В последнем выражении первым членом по сравнению со вторым можно пренебречь (см. упомянутую работу А. П. Вороновича).

¹ Выражение $\omega_{\text{н.к}} = \omega_{\text{н.к}} \frac{\sigma}{\sigma_{\text{к.к}} - \sigma}$, которое обычно выводят без учета влияния поперечной силы, справедливо и при учете этого влияния, если $\sigma_{\text{к.к}}$ определять с учетом перерезывающей силы. Формулы (1.1) взяты из работы А. П. Вороновича.

Подставляя $\sigma_{\text{к.к}}$ и принимая $\sin \beta y = 1$, из выражений (1.4) и (1.5) получим

$$\sigma_{z \text{ кос}} = \omega_{\text{н.к}} \frac{\sigma}{\sigma_{\text{к.к}} - \sigma} \sin \alpha x \frac{(\gamma h)^2 + \frac{1}{2} \gamma^2 \gamma h}{\frac{\gamma^2}{\delta a^2} \left(h + \frac{\delta}{2} \right)^2 - \sigma \left(\frac{1}{\gamma^2 B} + \frac{h}{G} \right)}; \quad (1.7)$$

$$\tau_{xz \text{ кос}} = \omega_{\text{н.к}} \frac{\sigma}{\sigma_{\text{к.к}} - \sigma} \cos \alpha x \frac{\frac{\delta}{2} + h}{\frac{\gamma^2}{\delta a^2} \left(h + \frac{\delta}{2} \right)^2 - \sigma \left(\frac{1}{\gamma^2 B} + \frac{h}{G} \right)}. \quad (1.8)$$

При фиксированном значении α напряжения $\sigma_{z \text{ кос}}$ и $\tau_{xz \text{ кос}}$ будут наибольшими в том случае, когда первый член знаменателя выражений (1.7) и (1.8) имеет минимум, а второй — максимум, т. е. при минимальном значении γ . Так как

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2},$$

то $\sigma_{z \text{ кос}}$ и $\tau_{xz \text{ кос}}$ будут наибольшими при $n=1$. Учитывая это и вводя обозначения

$$\xi = \frac{\pi^2 h B}{b^2 G}; \quad k = \frac{a}{b m},$$

перепишем выражения (1.7) и (1.8) следующим образом:

$$\sigma_{z \text{ кос}} = \frac{\pi^2 \omega_{\text{н.к}} h \left(h + \frac{\delta}{2} \right)}{b^2 k^2} \times \frac{1 + k^2}{\frac{1}{\delta b} \left(h + \frac{\delta}{2} \right)^2 (1 + k^2) - \left(\frac{h}{G} + \frac{b^2}{\pi^2 B} \frac{k^2}{1 + k^2} \right)} \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (1.9)$$

$$\tau_{xz \text{ кос}} = \frac{\pi G \omega_{\text{н.к}}}{b h} \frac{\left(h + \frac{\delta}{2} \right)}{k \left[\frac{G}{\delta b h} \left(h + \frac{\delta}{2} \right)^2 (1 + k^2) - 1 - \frac{k^2}{\xi (1 + k^2)} \right]} \cos \frac{m\pi x}{a}. \quad (1.10)$$

Была сделана попытка найти m в выражениях (1.9) и (1.10) исходя из получения максимума напряжений $\sigma_{z \text{ кос}}$ и $\tau_{xz \text{ кос}}$. Однако такое решение приводит к совершенно нереальной начальной кососимметричной погиби пластины (с малой длиной волны). Поэтому практически надо выбрать такое значение m , которое соответствует минимуму критической нагрузки кососимметричной формы потерн устойчивости. Для определения m можно использовать график, приведенный на фиг. 2.

Значение m указано на участке кривой, на который попадает точка, определяемая по двум параметрам $\frac{a}{b}$ и $\xi = \frac{\pi^2 h B}{b^2 G}$.

В первом приближении можно принимать: $k = a/b$ при a/b , равном или близком к единице, а также при $a/b < 1$; $k = 0,8$ при $a \gg b$ (см. работу А. П. Вороновича).

Таблица 1

№ по пор.	Параметры пластин			Кососимметричное выпучивание					
	δ см	E кг/см ²	G кг/см ²	$\sigma_{к.к}$ кг/см ²	σ_x кг/см ²	σ_z кос макс	τ_{xz} кос макс	τ_{xz} кос макс	τ_{xz} кос макс
	$a=50$ см, $b=\infty$, $h=1$ см, $E=7 \cdot 10^8$ кг/см ² , $\mu=0,3$, $\mu=0,4$			по формуле (1.6)	по формуле (1.13)	по формуле (1.11)	по формуле (1.12)	при $w_{н.к} = 0,1$ см	
1	0,1	280	100	832	552	0,221	0,652	10,38	1,038
2	0,1	560	200	1332	885	0,708	1,080	17,18	1,718
3	0,1	1400	500	2085	1387	2,775	1,770	28,18	2,818
4	0,1	2800	1000	2570	1711	6,844	2,267	36,08	3,608
5	0,1	5600	2000	2909	1937	15,500	2,625	41,78	4,178
6	0,1	14000	5000	3159	2104	42,080	2,916	46,42	4,642
7	0,1	28000	10000	3252	2166	86,640	3,023	48,11	4,811
8	0,2	280	100	530	344	0,137	0,752	11,96	1,196
9	0,2	560	200	920	603	0,482	1,347	21,44	2,144
10	0,2	1400	500	1669	1101	2,202	2,576	41,00	4,100
11	0,2	2800	1000	2296	1519	6,077	3,700	58,89	5,889
12	0,2	5600	2000	2828	1875	15,000	4,733	75,34	7,534
13	0,2	14000	5000	3286	2182	43,640	5,689	90,54	9,054
14	0,2	28000	10000	3474	2308	92,330	6,099	97,07	9,707
15	0,3	280	100	420	261	0,104	0,799	12,71	1,271
16	0,3	560	200	746	475	0,380	1,477	23,50	2,350
17	0,3	1400	500	1446	938	1,876	3,040	48,38	4,838
18	0,3	2800	1000	2124	1389	5,558	4,692	74,68	7,468
19	0,3	5600	2000	2782	1829	14,640	6,449	102,60	10,260
20	0,3	14000	5000	3420	2259	45,180	8,326	132,50	13,250
21	0,3	28000	10000	3703	2450	98,000	9,207	146,50	14,650
22	0,5	280	100	356	188	0,075	0,837	13,32	1,332
23	0,5	560	200	615	355	0,284	1,603	25,51	2,551
24	0,5	1400	500	1239	760	1,520	3,555	56,58	5,658
25	0,5	2800	1000	1947	1225	4,900	5,965	94,94	9,494
26	0,5	5600	2000	2760	1766	14,130	9,041	143,90	14,390
27	0,5	14000	5000	3703	2403	48,060	13,100	208,50	20,850
28	0,5	28000	10000	4183	2731	109,200	15,390	245,00	24,500

В случае бесконечно широкой пластины, когда $b=\infty$ и $\alpha=\gamma$ выражения (1.9) и (1.10) упрощаются

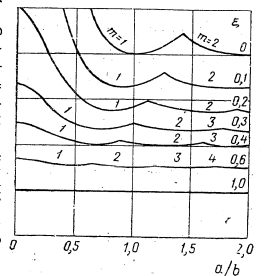
$$\sigma_z \text{ кос} = \frac{h}{2\delta b} \frac{\pi^2}{a^2} (b+2h) w_{н.к} \sin \frac{\pi x}{a}; \quad (1.11)$$

$$\tau_{xz} \text{ кос} = \frac{(2h+\delta) \pi}{2\delta b} \frac{w_{н.к}}{a} \cos \frac{\pi x}{a}. \quad (1.12)$$

В качестве примера в табл. 1 даны напряжения, найденные по приведенным формулам для различных параметров бесконечно широкой опертой по двум кромкам пластины, сжимаемой равномерно распределенными нагрузками, перпендикулярными к этим кромкам и составляющими $2/3$ от критических нагрузок.

В графе 5 приведены найденные по формуле (1.6) критические напряжения $\sigma_{к.к}$. В графе 6 приведены сжимающие напряжения во внешних слоях ($\sigma = 2/3 \sigma_{к.к}$). В графах 8 и 9 даны максимальные значения напряжений сдвига и отрыва по поверхности склейки, отнесенные к величине начальной погнби $w_{н.к}$ ($\sigma_z/w_{н.к}$ и $\tau_{xz}/w_{н.к}$, найдены по формулам (1.11) и (1.12) при $\sin(\pi x/a)=1$ и $\cos(\pi x/a)=1$ соответственно). В графе 7 даны значения напряжений сжатия в заполнителе σ_z , возникающих от общего сжатия всей пластины и приближенно равных

$$\sigma_x = \sigma \frac{E}{E}. \quad (1.13)$$



Фиг. 2.

Значения σ_z и τ_{xz} находили умножением чисел граф 8 и 9 на $w_{н.к}$ в см. Для примера в графе 10 даны значения τ_{xz} при $w_{н.к}=0,1$ см.

§ 2. НАПРЯЖЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПО СКЛЕЙКЕ ВНЕШНИХ СЛОЕВ С ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ВСЛЕДСТВИЕ НАЧАЛЬНОЙ ВОЛНИСТОСТИ ВНЕШНИХ СЛОЕВ ПЛАСТИНЫ

Если внешний слой трехслойной пластины обладает некоторой симметричной начальной волнистостью (фиг. 3)

$$z_{н.с} = w_{н.с} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (2.1)$$

то после нагружения этого внешнего слоя продольными равномерно распределенными нагрузками T_x , действующими поперек складок, волнистость этого слоя будет

$$z_{к.с} = w_{к.с} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (2.2)$$

¹ Так как в данном случае рассматривается бесконечно широкая пластина ($b = \infty$; $m=1$), то $\gamma = \alpha = \pi/a$.

Прогиб внешнего слоя пластины, возникающий под воздействием продольных усилий, будет

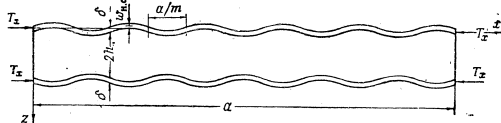
$$w = w_{к.с} - w_{н.с} = w_{н.с} \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{к.с} - \bar{\sigma}}, \quad (2.3)$$

где

$$\bar{\sigma} = \frac{T_x}{b}.$$

Выражение (2.3) справедливо для пластин на упругом основании для внешнего слоя трехслойной пластины, для пластинки на подкрепляющем слое и т. д., если $\sigma_{к.с}$ — критическое напряжение внешнего слоя, найденное с учетом работы упругого основания при форме выпучивания, совпадающей с формой волны начальной волнистости, определяемой выражением (2.1).

Так как $w_{к.с}$ мало по сравнению с толщиной заполнителя пластины (или толщиной подкрепляющего слоя), то можно записать напряжение по поверхности склейки заполнителя с внешними слоями через $w_{н.с}$,



Фиг. 3.

пользуясь известными выражениями, полученными для трехслойной пластины, работающей на продольное сжатие, для пластинки на подкрепляющем слое, для трехслойной пластины, работающей на продольно-поперечный изгиб, и т. д. Если заданы начальная волнистость слоев $w_{н.с}$ и значение продольных нагрузок T_x , действующих по этим слоям, то с помощью формул из указанных выше работ можно найти $w_{н.с}$ и далее напряжения по склейке заполнителя с внешними слоями, возникающие вследствие начальной симметричной волнистости внешних слоев как для случая сжатия трехслойной пластины, так и для других случаев.

Ниже эти напряжения записаны для работающей на продольное сжатие прямоугольной трехслойной пластины с заполнителем постоянного модуля упругости¹.

$$\begin{aligned} \sigma_{z \text{ сжм}} &= 2G\gamma \sin \alpha x \sin \beta y \times \\ &\times \frac{2(1-\mu) \left(\text{ch}^2 \gamma h + \frac{\gamma^2 b}{2} \text{sh} \gamma h \text{ch} \gamma h \right) + \left(\frac{2G}{\gamma B} - \frac{\gamma^2 b}{2} \right) (\text{sh} \gamma h \text{ch} \gamma h + \gamma h)}{\frac{4G}{\gamma B} (1-\mu) \text{sh}^2 \gamma h + 4(1-\mu) \text{sh} \gamma h \text{ch} \gamma h - (\text{sh} \gamma h \text{ch} \gamma h + \gamma h)} \times \\ &\times \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{к.с} - \bar{\sigma}} w_{н.с} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz \text{ сжм}} &= 2G\alpha \cos \alpha x \sin \beta y \times \\ &\times \frac{2(1-\mu) \left(\frac{\gamma^2 b}{2} \text{sh}^2 \gamma h + \text{sh} \gamma h \text{ch} \gamma h \right) - (\text{sh} \gamma h \text{ch} \gamma h + \gamma h)}{\frac{4G}{\gamma B} (1-\mu) \text{sh}^2 \gamma h + 4(1-\mu) \text{sh} \gamma h \text{ch} \gamma h - (\text{sh} \gamma h \text{ch} \gamma h + \gamma h)} \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{к.с} - \bar{\sigma}} w_{н.с} \end{aligned} \quad (2.5)$$

¹ Как будет показано ниже, расчетные формулы, которые мы получим исходя из выражений, записанных для работающей на продольное сжатие трехслойной пластины, могут быть использованы и в ряде других случаев. Формулы (2.4)–(2.5) взяты из работы А. П. Вороновича.

где

$$\sigma_{к.с} = D \frac{\gamma^4}{2a^2} + \frac{2G\gamma}{b a^2} \frac{2(1-\mu) \left(\frac{\gamma^2 b}{2} \text{sh} \gamma h + \text{ch} \gamma h \right)^2 + \left(\frac{2G}{\gamma B} - \gamma^2 b \right) (\text{sh} \gamma h \text{ch} \gamma h + \gamma h)}{4G (1-\mu) \text{sh}^2 \gamma h + 4(1-\mu) \text{sh} \gamma h \text{ch} \gamma h - (\text{sh} \gamma h \text{ch} \gamma h + \gamma h)} \quad (2.6)$$

Как и раньше,

$$\alpha = \frac{m\pi}{a};$$

$$\beta = \frac{n\pi}{b};$$

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Как известно, при симметричной форме выпучивания внешних слоев прямоугольных трехслойных пластин как критические нагрузки, так и напряжения в заполнителе мало зависят от условий закрепления на кромках пластины. Поэтому будет законным использование для прямоугольных пластин с разными условиями закрепления кромок выражений интересующих нас напряжений по склейке внешних слоев с заполнителем, записанных для бесконечно широкой пластины, свободно опертой по двум кромкам, к которым приложены сжимающие нагрузки. В силу этого в выражениях (2.4)–(2.5) можно принять (полагая, что сжимающие нагрузки действуют вдоль размера a), $b = \infty$, $\gamma = \alpha$ и $\sin \beta y = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_{z \text{ сжм}} &= 2G\alpha \sin \alpha x \times \\ &\times \frac{2(1-\mu) \left(\text{ch}^2 \alpha h + \frac{\alpha^2 b}{2} \text{sh} \alpha h \text{ch} \alpha h \right) + \left(\frac{2G}{\alpha B} - \frac{\alpha^2 b}{2} \right) (\text{sh} \alpha h \text{ch} \alpha h + \alpha h)}{\frac{4G}{\alpha B} (1-\mu) \text{sh}^2 \alpha h + 4(1-\mu) \text{sh} \alpha h \text{ch} \alpha h - (\text{sh} \alpha h \text{ch} \alpha h + \alpha h)} \times \\ &\times \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{к.с} - \bar{\sigma}} w_{н.с} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz \text{ сжм}} &= 2G\alpha \cos \alpha x \times \\ &\times \frac{2(1-\mu) \left(\frac{\alpha^2 b}{2} \text{sh}^2 \alpha h + \text{sh} \alpha h \text{ch} \alpha h \right) - (\text{sh} \alpha h \text{ch} \alpha h + \alpha h)}{\frac{4G}{\alpha B} (1-\mu) \text{sh}^2 \alpha h + 4(1-\mu) \text{sh} \alpha h \text{ch} \alpha h - (\text{sh} \alpha h \text{ch} \alpha h + \alpha h)} \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{к.с} - \bar{\sigma}} w_{н.с} \end{aligned} \quad (2.8)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{к.с} &= \frac{D\alpha^2}{b} + \\ &+ \frac{2G}{b a} \frac{2(1-\mu) \left(\frac{\alpha^2 b}{2} \text{sh} \alpha h + \text{ch} \alpha h \right)^2 + \left(\frac{2G}{\alpha B} - \alpha^2 b \right) (\text{sh} \alpha h \text{ch} \alpha h + \alpha h)}{4G (1-\mu) \text{sh}^2 \alpha h + 4(1-\mu) \text{sh} \alpha h \text{ch} \alpha h - (\text{sh} \alpha h \text{ch} \alpha h + \alpha h)} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Выражения (2.7)–(2.8) дают возможность найти напряжения по поверхности склейки заполнителя с внешними слоями работающей на продольное сжатие трехслойной пластины, если задана начальная волнистость внешних слоев ($w_{н.с}$) и длина полу волны начальной волнистости (a/m).

Однако эти выражения громоздки, их надо упростить и, самое главное, так как длина волны начальной волнистости может при изготовлении пластин получиться различной, то следует найти ту длину волны,

при которой напряжения будут максимальными, и записать расчетные формулы для этой длины волны.

Сделаем это для работающей на продольное сжатие трехслойной пластины с заполнителем постоянного модуля упругости для двух предельных случаев — для случая, когда параметры пластины таковы, что ah мало, и для случая, когда ah велико¹.

А. Случай, когда ah мало

Принимая в этом случае $sh ah \approx ah$, $ch ah \approx 1$ и опуская в выражениях (2.7) и (2.9) члены, содержащие множитель $4G/\alpha B$, получим²

$$\sigma_{z \text{ сим}} = G \sin \alpha x \frac{2(1-\mu) - \mu \delta ah}{(1-2\mu)h} \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{к.с} - \bar{\sigma}} \omega_{н.с}; \quad (2.10)$$

$$\sigma_{к.с} = \frac{\bar{E}(\alpha h)^2}{12(1-\mu^2)} + \frac{2G}{ah} \frac{1-\mu}{(1-2\mu)ah}. \quad (2.11)$$

Выражение $\tau_{xz \text{ сим}}$, полученное подобным путем, записывать не будем ввиду того, что при ah малом значения $\tau_{xz \text{ сим}}$ получаются настолько незначительными по сравнению с $\sigma_{z \text{ сим}}$, что находить их не имеет смысла.

Из условия $\partial \sigma_{z \text{ сим}} / \partial \alpha = 0$ найдем значение параметра начальной волнистости $\alpha \delta$, соответствующее максимуму $\sigma_{z \text{ сим}}$.

Приняв $\sin \alpha x = 1$, находим

$$(\alpha \delta)^4 \left[\frac{(1-\mu) \delta E_{np}}{6} - \bar{\sigma} h \mu \right] + (\alpha \delta)^2 \frac{4G(1-\mu) \delta \mu}{(1-2\mu)} - \frac{4G(1-\mu)^2 \delta^2}{h(1-2\mu)} = 0. \quad (2.12)$$

Действительный положительный корень этого уравнения будет

$$\alpha \delta = \sqrt{\frac{G(1-\mu) \delta \mu}{1-2\mu} + \sqrt{\left[\frac{G(1-\mu) \delta \mu}{1-2\mu} \right]^2 + \left[\frac{(1-\mu) \delta E_{np}}{6} - \bar{\sigma} h \mu \right] \frac{G(1-\mu) \delta^2}{h(1-2\mu)}}} \cdot \frac{1}{\left[\frac{(1-\mu) \delta E_{np}}{6} - \bar{\sigma} h \mu \right]}. \quad (2.13)$$

Анализ показывает, что $\alpha \delta$, найденные по формуле (2.13), соответствуют максимуму $\sigma_{z \text{ сим}}$.

С помощью выражений (2.10), (2.11) и (2.13) можно найти напряжение отрыва для случая наиболее неблагоприятной длины волны начальной волнистости внешнего слоя, если известно $\omega_{н.с}$.

Возможен и иной подход: можно предполагать, что $\omega_{н.с}$ может быть представлен в зависимости от длины волны начальной волнистости и от толщины внешнего слоя, а именно, что

$$\omega_{н.с} = \frac{k_1}{\alpha \delta^2}, \quad (2.14)$$

где k_1 — некоторый эмпирический коэффициент³.

¹ Как будет показано ниже, эти результаты можно будет использовать, кроме сжатия, для ряда других случаев нагружения пластины.

² Пределы применимости этих допущений будут оценены ниже.

³ Такая зависимость была введена Донделем при исследовании потери устойчивости тонких цилиндров при осевом сжатии, она же использована и в других работах, например, Вэна. По данным Вэна, $k_1 \approx 0,015$.

Если ввести (2.11) в (2.10), то вместо уравнения (2.12) для определения значения $\alpha \delta$, соответствующего максимуму $\sigma_{z \text{ сим}}$, в этом случае получим

$$(\alpha \delta)^4 \frac{E_{np} \delta h}{6 \delta} - (\alpha \delta)^2 \frac{2(1-\mu) E_{np}}{3} + 4 \bar{\sigma} (1-\mu) - \frac{4G(1-\mu) \mu}{(1-2\mu)} = 0. \quad (2.15)$$

Выражение (2.15) можно использовать для расчета, если имеются достаточные данные для оценки k_1 .

Б. Случай, когда ah велико

В этом случае можно положить $sh ah \approx ch ah$. Членом, содержащим множитель $4G/\alpha B$, по сравнению с другими членами можно пренебречь. Можно также пренебречь ah по сравнению с $sh^2 ah$.

Тогда выражения (2.7)–(2.9) примут вид

$$\sigma_{z \text{ сим}} = 2G \alpha \delta \sin \alpha x \frac{2(1-\mu) \left(1 + \frac{\alpha \delta}{2}\right) - \alpha \delta}{4(1-\mu) - 1} \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{к.с} - \bar{\sigma}} \frac{\omega_{н.с}}{\delta}, \quad (2.16)$$

$$\tau_{xz \text{ сим}} = 2G \alpha \delta \cos \alpha x \frac{2(1-\mu) \left(1 + \frac{\alpha \delta}{2}\right) - 1}{4(1-\mu) - 1} \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{к.с} - \bar{\sigma}} \frac{\omega_{н.с}}{\delta}, \quad (2.17)$$

$$\sigma_{к.с} = \frac{(\alpha \delta)^2 E_{np}}{12} + \frac{2G}{\alpha \delta} \frac{2(1-\mu) \left(1 + \frac{\alpha \delta}{2}\right) - \alpha \delta}{4(1-\mu) - 1}. \quad (2.18)$$

Найдем значение параметра начальной волнистости $\alpha \delta$, соответствующее максимуму $\sigma_{z \text{ сим}}$. Из условия $\partial \sigma_{z \text{ сим}} / \partial \alpha = 0$ (приняв $\sin \alpha x = 1$) находим

$$\begin{aligned} (\alpha \delta)^3 \left[\frac{G(1-\mu) \left(\frac{1}{2} - \mu\right)}{4(1-\mu) - 1} - \frac{E_{np}(1-\mu)}{6} \right] + \\ + (\alpha \delta)^2 \left[\frac{8G \left(\frac{1}{2} - \mu\right)^2}{4(1-\mu) - 1} - 2\bar{\sigma} \left(\frac{1}{2} - \mu\right) \right] + \\ + (\alpha \delta) \left[\frac{20G(1-\mu) \left(\frac{1}{2} - \mu\right)}{4(1-\mu) - 1} - 2\bar{\sigma}(1-\mu) \right] + \frac{16G(1-\mu)^2}{4(1-\mu) - 1} = 0. \quad (2.19) \end{aligned}$$

В этом уравнении члены с множителями $\alpha \delta$ и $(\alpha \delta)^2$ для реально возможных параметров пластин малы по сравнению с остальными членами. Поэтому с достаточной точностью решение уравнения (2.19) можно записать так²

$$\alpha \delta \approx \sqrt[3]{\frac{96G(1-\mu)(1-\mu^2)}{\bar{E}(3-4\mu)}}. \quad (2.20)$$

Анализ показывает, что значения $\alpha \delta$, найденные по формуле (2.20), соответствуют максимуму $\sigma_{z \text{ сим}}$.

¹ Пределы применимости этих допущений будут оценены ниже.
² Ниже дано сравнение подсчетов по формуле (2.20) с результатами точного решения уравнения (2.19).

Приняв $\sin \alpha x = 1$, из условия $\partial \tau_{xz \text{ сим}} / \partial \alpha$ находим уравнение для определения значения $\alpha \delta$, соответствующего максимуму $\tau_{xz \text{ сим}}$

$$\begin{aligned}
 & (\alpha \delta)^3 \left[\frac{G(1-\mu)^2}{4(1-\mu)-1} - \frac{E_{\text{нр}} \left(\frac{1}{2} - \mu \right)}{6} \right] + \\
 & + (\alpha \delta)^2 \left[\frac{8G(1-\mu) \left(\frac{1}{2} - \mu \right)}{4(1-\mu)-1} - 2\bar{\sigma}(1-\mu) \right] + \\
 & + (\alpha \delta) \left[\frac{12G(1-\mu)^2}{4(1-\mu)-1} + \frac{8G \left(\frac{1}{2} - \mu \right)^2}{4(1-\mu)-1} - 2\bar{\sigma} \left(\frac{1}{2} - \mu \right) \right] + \\
 & + \frac{16G \left(\frac{1}{2} - \mu \right) (1-\mu)}{4(1-\mu)-1} = 0. \quad (2.21)
 \end{aligned}$$

Аналогично тому, как это было сделано выше, можно ввести предположение (2.14). Тогда выражение (2.19), откуда находится $\alpha \delta$, соответствующее максимуму $\sigma_{xz \text{ сим}}$, заменится таким

$$\begin{aligned}
 & (\alpha \delta)^3 \frac{E_{\text{нр}} \left(\frac{1}{2} - \mu \right)}{6} + (\alpha \delta)^2 \left[\frac{G(1-\mu)(1/2-\mu)}{4(1-\mu)-1} - \frac{E_{\text{нр}}(1-\mu)}{2} \right] - \\
 & - \alpha \delta \frac{4G(1-\mu)^2}{4(1-\mu)-1} - \frac{4G(1-\mu) \left(\frac{1}{2} - \mu \right)}{4(1-\mu)-1} + 2(1-\mu)\bar{\sigma} = 0. \quad (2.22)
 \end{aligned}$$

Если ввести зависимость (2.14) в выражение (2.17), то выражение (2.21), определяющее значение $\alpha \delta$, соответствующее максимуму $\tau_{xz \text{ сим}}$, заменится таким

$$\begin{aligned}
 & - (\alpha \delta)^3 \frac{E_{\text{нр}}(1-\mu)}{6} + (\alpha \delta)^2 \left[\frac{G(1-\mu)^2}{4(1-\mu)-1} - \frac{E_{\text{нр}}(1-2\mu)}{4} \right] - \\
 & - \alpha \delta \frac{2G(1-\mu)(1-2\mu)}{4(1-\mu)-1} + \frac{2G(1-2\mu^2)}{4(1-\mu)-1} + \bar{\sigma}(1-2\mu) = 0. \quad (2.23)
 \end{aligned}$$

Выражениями (2.22) и (2.23) можно пользоваться для расчета, если имеются данные, достаточные для оценки k_1 .

В. Оценка области применимости формул для определения напряжений, возникающих вследствие начальной волнистости внешних слоев, полученных для случаев, когда ah мало и ah велико

Для оценки области применимости формул, полученных в случаях, когда ah мало и ah велико, и оценки величин для напряжений, возникающих вследствие начальной волнистости внешних слоев работающей на сжатие трехслойной пластины, был произведен ряд расчетов, результаты которых сведены в табл. 2 и 3.

Для расчетов были взяты такие же пластины, как и для расчета на случай начальной коссимметричной погиби (см. табл. 1).

Таблица 2

№ по пор.	Параметры пластин				Симметричное выпучивание (пластины, для которых $ah < 2$)					
	$a=50 \text{ см}, b=\infty, h=1 \text{ см}, E=7 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, \mu=0,3, \nu=0,4$				$\alpha \delta$ находится из условий максимума $\sigma_{xz \text{ сим}}$					
	δ см	E кг/см ²	G кг/см ²	$\alpha \delta$ по формуле (2.13)	$\alpha h = \alpha \delta \frac{h}{b}$	$\sigma_{xz \text{ сим}} \text{ макс}$ по формуле (2.7)	$\tau_{xz \text{ сим}} \text{ макс}$ по формуле (2.8)	$\sigma_{xz \text{ сим}} \text{ макс}$ по формуле (2.16)	$\sigma_{xz \text{ сим}} \text{ макс}$ при $\nu_{\text{нр}} = 0,02 \text{ см}$	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	0,1	280	100	0,1673	1,6730	79,79	3,573	89,18	1,784	
2	0,1	560	200	0,1956	1,9560	191,80	23,820	197,70	3,955	
3	0,1	1400	500							
4	0,1	2800	1000							
5	0,1	5600	2000							
6	0,1	14000	5000							
7	0,1	28000	10000							
8	0,2	280	100	0,2011	1,0050	31,99	5,331	37,95	0,759	
9	0,2	560	200	0,2359	1,1800	79,27	7,389	91,97	1,840	
10	0,2	1400	500	0,2888	1,4440	232,20	5,657	251,50	5,031	
11	0,2	2800	1000	0,3329	1,6650	456,30	51,94	456,50	9,130	
12	0,2	5600	2000							
13	0,2	14000	5000							
14	0,2	28000	10000							
15	0,3	280	100	0,2238	0,7579	20,96	4,759	24,29	0,486	
16	0,3	560	200	0,2631	0,8771	52,30	9,976	60,25	1,206	
17	0,3	1400	500	0,3235	1,0780	158,80	16,410	178,20	3,563	
18	0,3	2800	1000	0,3750	1,2500	328,70	5,289	351,50	7,029	
19	0,3	5600	2000	0,4299	1,4330	605,00	46,600	600,10	12,000	
20	0,3	14000	5000							
21	0,3	28000	10000							
22	0,5	280	100	0,2558	0,5117	14,73	3,419	15,96	0,319	
23	0,5	560	200	0,3015	0,6030	35,11	8,137	38,49	0,770	
24	0,5	1400	500	0,3724	0,7448	108,30	21,920	119,10	2,361	
25	0,5	2800	1000	0,4341	0,8683	235,40	35,960	255,10	5,101	
26	0,5	5600	2000	0,5018	1,0040	458,10	34,810	481,90	9,638	
27	0,5	14000	5000	0,5767	1,1530	945,70	12,810	901,20	18,020	
28	0,5	28000	10000	0,6660	1,3320	1451,00	184,000	1263,00	25,260	

Таблица 3

№ по пор.	Параметры пластин $a=50$ см, $b=\infty$, $h=1$ см, $E=7 \cdot 10^5$ кг/см ² $\mu=0,3$, $\nu=0,4$			Симметричное выпучивание (пластины, аб находилось из условия					
	см	кг/см ²	кг/см ²	аб	по формуле (2.20)	$ah=ab \cdot \frac{h}{\delta}$	$\sigma_{xz \text{ сим max}}$	$\tau_{xz \text{ сим max}}$	$w_{н.с}$
							по формуле (2.7)	по формуле (2.8)	по формуле (2.16)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,1	280	100						
2	0,1	560	200						
3	0,1	1400	500	0,2991	0,2991	2,991	499,9	140,9	492,5
4	0,1	2800	1000	0,3625	0,3767	3,767	925,3	305,9	921,9
5	0,1	5600	2000	0,4749	0,4746	4,746	1530,0	609,0	1585,0
6	0,1	14000	5000	0,6449	0,6443	6,443	3017,0	1378,0	3017,0
7	0,1	28000	10000	0,8132	0,8117	8,117	4604,0	2493,0	4779,0
8	0,2	280	100						
9	0,2	560	200						
10	0,2	1400	500						
11	0,2	2800	1000						
12	0,2	5600	2000	0,4749	0,4746	2,373	758,6	252,4	768,7
13	0,2	14000	5000	0,6449	0,6443	3,222	1588,0	699,3	1573,0
14	0,2	28000	10000	0,8132	0,8117	4,059	2559,0	1330,0	2553,0
15	0,3	280	100						
16	0,3	560	200						
17	0,3	1400	500						
18	0,3	2800	1000						
19	0,3	5600	2000						
20	0,3	14000	5000	0,6449	0,6443	2,148	966,6	481,6	1093,0
21	0,3	28000	10000	0,8132	0,8117	2,706	1861,0	903,8	1819,0
22	0,5	280	100						
23	0,5	560	200						
24	0,5	1400	500						
25	0,5	2800	1000						
26	0,5	5600	2000						
27	0,5	14000	5000						
28	0,5	28000	10000						

для которых $ah > 2$)									
максимума $\sigma_{xz \text{ сим}}$			аб находилось из условия максимума $\tau_{xz \text{ сим}}$						
$\tau_{xz \text{ сим max}}$	$\sigma_{xz \text{ сим max}}$	$\tau_{xz \text{ сим max}}$	аб	$ah=ab \cdot \frac{h}{\delta}$	$\sigma_{xz \text{ сим max}}$	$\tau_{xz \text{ сим max}}$	$\sigma_{xz \text{ сим max}}$	$\tau_{xz \text{ сим max}}$	$\sigma_{xz \text{ сим max}}$
по формуле (2.17)	при $w_{н.с} = 0,02$ см	при $w_{н.с} = 0,02$ см			по формуле (2.21)	по формуле (2.16)	по формуле (2.17)	при $w_{н.с} = 0,02$ см	при $w_{н.с} = 0,02$ см
11	12	13	14	15	16	17	18	18	-19
151,9	9,85	3,04	0,365	3,646	461,8	156,4	9,23	3,13	
317,3	18,44	6,35	0,510	5,102	829,5	335,6	16,59	6,71	
616,1	31,71	12,32	0,731	7,309	1350,0	677,1	27,00	13,54	
1400,0	60,34	27,99	1,218	12,180	2327,0	1639,0	46,55	32,77	
2558,0	95,39	51,15	1,878	18,780	3308,0	3163,0	66,17	63,26	
298,7	15,37	5,97	0,734	3,669	653,7	328,7	13,07	6,57	
729,5	31,45	14,59	1,213	6,067	1215,0	853,0	24,29	17,06	
1369,0	51,07	27,38	1,870	9,351	1773,0	1691,0	35,47	33,81	
507,3	21,87	10,15	1,209	4,029	845,6	592,3	16,91	11,85	
975,3	36,38	19,51	1,861	6,203	1266,0	1202,0	25,31	24,04	

В графе 5 табл. 2 даны значения $a\delta$, соответствующие максимуму $\sigma_{z \text{ сим}}$, найденные по формуле (2.13), выведенной для случая, когда ah мало. В графах 7 и 8 даны значения $\sigma_{z \text{ сим max}}/\omega_{н.с}$ и $\tau_{xz \text{ сим max}}/\omega_{н.с}$, найденные при этих $a\delta$ по точным формулам (2.7) и (2.8), а в графе 9 — значения $\sigma_{z \text{ сим max}}/\omega_{н.с}$, найденные по приближенной формуле (2.10). При этих подсчетах в формулы (2.7), (2.8) и (2.10) вводили значение σ , равное 2/3 критического напряжения при кососимметричной форме потери устойчивости соответствующей пластины (см. графу 6 табл. 1), а $\sin \alpha x$ или $\cos \alpha x$ принимали равным единице.

Сопоставляя значения $\sigma_{z \text{ сим max}}/\omega_{н.с}$, найденные по формуле (2.7) — (графа 7) и по приближенной формуле (2.10) — (графа 9), можно заключить, что если $ah \leq 2$, приближенной формулой (2.10) можно пользоваться.

Из сопоставления граф 7 и 8 видно, что при $ah \leq 2$ $\tau_{xz \text{ сим max}}/\omega_{н.с}$ по сравнению с $\sigma_{z \text{ сим max}}/\omega_{н.с}$ настолько мало, что его можно не учитывать.

Чтобы найти напряжения отрыва, возникающие в пластине, внешние слои которой обладают начальной волнистостью с наиболее невыгодным значением длины волны, надо значения графы 7 умножить на $\omega_{н.с}$. В графе 10 даны значения $\sigma_{z \text{ сим max}}$ при $\omega_{н.с} = 0,02 \text{ см}$. Как видно, эти напряжения таковы, что, имея в виду низкую прочность заполнителя, их следует учитывать.

В графе 6 табл. 3 даны значения $a\delta$, соответствующие максимуму $\sigma_{z \text{ сим}}$ для случая, когда ah велико, найденные по приближенной формуле (2.20), а в графе 5 даны значения $a\delta$, найденные для этого случая решением уравнения (2.19). Как видно, формула (2.20) дает вполне приемлемые результаты.

В табл. 3 для случая, когда ah велико, даны значения $\sigma_{z \text{ сим max}}/\omega_{н.с}$ и $\tau_{xz \text{ сим max}}/\omega_{н.с}$, подсчитанные для $a\delta$, соответствующих максимуму $\sigma_{z \text{ сим}}$ (графа 6); значения напряжений, найденные по точным формулам (2.7) и (2.8) даны в графах 8 и 9, а значения, найденные по приближенным формулам (2.16) и (2.17), даны в графах 10 и 11. При этих подсчетах в формулы вводили значение σ , равное 2/3 критического напряжения при кососимметричной форме потери устойчивости, соответствующей пластины (см. графу 6 табл. 1), а $\sin \alpha x$ или $\cos \alpha x$ принимали равными единице.

Как видно из сопоставления граф 8 и 10, а также 9 и 11 результаты подсчетов по приближенным формулам (2.16) и (2.17) при $ah > 2$ достаточно близки к результатам подсчетов по формулам (2.7) и (2.8).

Чтобы найти напряжения отрыва и сдвига, возникающие в пластине, внешние слои которой обладают волнистостью с наиболее невыгодным значением длины волны, надо значения граф 10 и 11 умножить на $\omega_{н.с}$. В графах 12 и 13 даны найденные таким путем значения $\sigma_{z \text{ сим max}}$ и $\tau_{xz \text{ сим max}}$ при $\omega_{н.с} = 0,02 \text{ см}$.

В графе 14 даны значения $a\delta$, найденные из уравнения (2.21) и соответствующие максимуму $\tau_{xz \text{ сим}}$ (при ah большом). В графах 16 и 17 даны $\sigma_{z \text{ сим max}}/\omega_{н.с}$ и $\tau_{xz \text{ сим max}}/\omega_{н.с}$, найденные при этих значениях $a\delta$ по формулам (2.16) и (2.17), а в графах 18 и 19 — значения $\sigma_{z \text{ сим max}}$ и $\tau_{xz \text{ сим max}}$ при $\omega_{н.с} = 0,02 \text{ см}$.

Сопоставляя графы 12 и 18, а также 13 и 19, можно видеть различие в значениях напряжений, найденных при $a\delta$, соответствующих в одном случае максимуму $\sigma_{z \text{ сим}}$, а в другом — максимуму $\tau_{xz \text{ сим}}$.

Формула (2.20) и уравнение (2.21) для определения значений параметров $a\delta$, при которых достигают максимума напряжения отрыва и сдвига, а также формулы (2.16) и (2.17) для определения этих напряжений выведены для работающей на сжатие трехслойной пластины.

Однако при $ah > 2$ взаимное влияние слоев, обладающих начальной симметричной волнистостью, мало. Поэтому эти формулы можно использовать и для сжатого слоя трехслойной пластины, работающей на поперечный или продольно-поперечный изгиб, если только параметры этой пластины таковы, что $ah > 2$, или выполнится условие [которое можно записать, используя формулу (2.20)]:

$$\left(\frac{h}{b}\right)^3 \frac{96G(1-\nu)(1-\nu^2)}{E(3-4\nu)} > 8. \quad (2.24)$$

Формулы (2.13) и (2.10) можно использовать для работающей на сжатие пластины при $ah < 2$, т. е. при

$$\left(\frac{h}{b}\right)^3 \frac{96G(1-\nu)(1-\nu^2)}{E(3-4\nu)} < 8. \quad (2.25)$$

До сих пор речь шла о пластине, внешние слои которой нагружены продольными усилиями, действующими в одном направлении. Полученные результаты можно распространить и на случай, когда внешние слои пластины нагружены продольными усилиями, действующими одновременно в двух направлениях (параллельно кромкам пластины), и сдвигающими нагрузками.

В этом случае из внешнего слоя всегда можно выделить прямоугольный элемент, нагруженный двумя продольными нагрузками, действующими параллельно его сторонам. Если положить, что начальная волнистость внешнего слоя такова, что одна из этих нагрузок перпендикулярна к образующим цилиндрической поверхности волн, а другая действует вдоль этих образующих, то напряжения отрыва будут определяться лишь первой нагрузкой.

§ 3. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ОТРЫВА И СДВИГА, ВОЗНИКАЮЩИХ ПО СКЛЕЙКЕ ВНЕШНИХ СЛОЕВ С ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ВСЛЕДСТВИЕ НАЧАЛЬНОЙ ВОЛНИСТОСТИ ВНЕШНИХ СЛОЕВ ПЛАСТИНЫ

А. Формула для напряжений отрыва

Положим, что начальная симметричная волнистость внешних слоев

$$z_{н.с} = \omega_{н.с} \sin \frac{m\pi x}{a}$$

такова, что длина ее полуволны a/m совпадает с той длиной, которая соответствует минимуму критической нагрузки симметричной формы потери устойчивости.

Тогда после нагружения внешних слоев сжимающими равномерно распределенными вдоль кромок нагрузками волнистость этих слоев будет

$$z_{к.с} = \omega_{к.с} \sin \frac{m\pi x}{a},$$

а максимальные прогибы внешних слоев будут

$$w = \omega_{к.с} - \omega_{н.с} = \omega_{н.с} \frac{\sigma}{\sigma_{к.с} - \sigma}. \quad (3.1)$$

При

$$\frac{h}{b} \leq 0,325 \sqrt{\frac{E}{E} \frac{1}{1-\nu^2}} \quad (3.2)$$

критическое напряжение внешнего слоя

$$\sigma_{к.с} = 0,58 \sqrt{\frac{E\bar{E}}{1-\mu^2}} \frac{b}{h} \quad (3.3)$$

При

$$\frac{h}{b} \geq 1,13 \sqrt{\frac{\bar{E}}{E} \frac{1}{1-\mu^2}} \quad (3.4)$$

критическое напряжение внешнего слоя

$$\sigma_{к.с} = E \left(0,65 \sqrt{\frac{\bar{E}}{E}} + 0,33 \right) \quad (3.5)$$

В последнем случае, т. е. при достаточно толстом слое заполнителя, можно также пользоваться следующей формулой, полученной для пластинки, лежащей на полубесконечном упругом основании постоянного модуля упругости

$$\sigma_{к.с} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{2E^2\bar{E}} \quad (3.6)$$

Примем, что для практически применяемых толщин слоя заполнителя напряжения растяжения заполнителя в поперечном направлении (напряжения отрыва), возникающие вследствие появления прогибов w внешних слоев, распределены равномерно по толщине слоя заполнителя (хотя и неравномерно по длине) и равны

$$\sigma_z = \frac{w}{h} E \quad (3.7)$$

Из этого равенства, пользуясь выражениями (3.1) и (3.3), получим

$$\sigma_{z \text{ сим max}} = \frac{E w_{н.с}}{h} \frac{1}{0,575 \sqrt{\frac{E\bar{E}b}{h} - 1}} \quad (3.8)$$

а пользуясь выражениями (3.1) и (3.6), получим

$$\sigma_{z \text{ сим max}} = \frac{E w_{н.с}}{h} \frac{1}{0,63 \sqrt[3]{E^2\bar{E}} - 1} \quad (3.9)$$

В графах 5 и 6 табл. 4 даны результаты подсчетов $\sigma_{z \text{ сим max}}$ по формулам (3.8) и (3.9).

Из сопоставления с данными граф 8 табл. 3 и 7 табл. 2 (найденными по формулам, выведенным выше) видно, что формула (3.8) дает в большинстве случаев приемлемые результаты даже тогда, когда условие (3.2) не выполняется. Погрешность достигает больших значений только при весьма жестких заполнителях (при $E > 10\,000 \text{ кг/см}^2$). Формула (3.9) дает менее удовлетворительные результаты.

Таблица 4

№ по пор.	Параметры пластин $a=50 \text{ см}, b=\infty,$ $h=1 \text{ см},$ $\bar{E}=7 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2$ $\mu=0,3, \mu=0,4$			Симметричное выпучивание			
	b см.	E кг/см ²	G кг/см ²	$\sigma_{z \text{ сим max}}$ $w_{н.с}$	$\sigma_{z \text{ сим max}}$ $w_{н.с}$	$\tau_{xz \text{ сим max}}$ $w_{н.с}$	$\tau_{xz \text{ сим max}}$ $w_{н.с}$
				по формуле (3.8)	по формуле (3.9)	по формуле (3.16)	по формуле (3.17)
1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,1	280	100	77,5	83,9	(20,00)	(16,98)
2	0,1	560	200	182,6	170,0	(56,04)	(43,35)
3	0,1	1400	500	451,2	346,1	174,20	119,70
4	0,1	2800	1000	755,8	509,5	347,00	222,20
5	0,1	5600	2000	1148,0	690,8	626,80	379,60
6	0,1	14000	5000	1853,0	969,3	1272,00	722,80
7	0,1	28000	10000	2604,0	1227,0	2126,00	1153,00
8	0,2	280	100	29,6	46,9	(4,54)	(4,75)
9	0,2	560	200	75,2	105,6	(13,75)	(13,47)
10	0,2	1400	500	221,8	261,3	(51,00)	(45,23)
11	0,2	2800	1000	431,2	443,4	(117,70)	(96,68)
12	0,2	5600	2000	738,3	666,2	239,70	183,0
13	0,2	14000	5000	1313,0	1008,0	536,10	375,7
14	0,2	28000	10000	1918,0	1312,0	931,10	616,1
15	0,3	280	100	17,6	34,2	(1,99)	(2,31)
16	0,3	560	200	46,2	80,0	(6,22)	(6,80)
17	0,3	1400	500	147,2	216,7	(24,93)	(25,01)
18	0,3	2800	1000	310,0	400,1	(62,44)	(58,15)
19	0,3	5600	2000	572,7	648,0	(137,20)	(118,70)
20	0,3	14000	5000	1094,0	1046,0	329,20	260,00
21	0,3	28000	10000	1648,0	1396,0	589,80	437,40
22	0,5	280	100	9,6	23,9	(0,74)	(0,97)
23	0,5	560	200	25,8	57,7	(2,37)	(2,94)
24	0,5	1400	500	88,9	170,5	(10,26)	(11,80)
25	0,5	2800	1000	204,5	346,9	(28,08)	(30,26)
26	0,5	5600	2000	417,5	623,1	(68,17)	(68,46)
27	0,5	14000	5000	888,9	1118,0	(182,50)	(166,80)
28	0,5	28000	10000	1410,0	1566,0	(344,70)	(294,10)

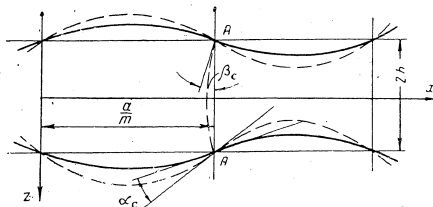
Б. Формула для напряжений сдвига

Положим, что до нагружения продольными усилиями внешние слои имели начальную симметричную волнистость, изображенную на фиг. 4 сплошными линиями. Пусть после нагружения волнистость внешних слоев приобрела вид, изображенный на фиг. 4 пунктирными линиями. При этом касательная к поверхности склейки заполнителя и внешнего слоя в точке А (где касательные напряжения $\tau_{xz \text{ сим}}$ достигают максимума) повернется на угол α_c . Точки заполнителя, которые до нагружения пластины располагались по прямой АА, сместятся и линия АА искривится так, что касательная к ней в точке А повернется на угол β_c .

Угол сдвига заполнителя в точке А будет

$$\gamma_c = \alpha_c - \beta_c. \quad (3.10)$$

Если бы точки заполнителя, лежащие на линии АА, не получили смещений в плоскости пластины, то сдвиг γ_c был бы равен α_c . Если



Фиг. 4.

бы α_c было равно β_c , то сдвиг γ_c был бы равен нулю. Очевидно, что в действительности

$$\alpha_c > \beta_c > 0.$$

Приближенно примем, что $\beta_c = \alpha_c/2$. Тогда

$$\gamma_c = \frac{\alpha_c}{2}. \quad (3.11)$$

Имея в виду, что

$$\alpha_c = \frac{d}{dx} \left(w \sin \frac{m\pi x}{a} \right) \Big|_{x=0} = w \frac{m\pi}{a},$$

можно записать

$$\gamma_c = w \frac{m\pi}{2a} \quad (3.12)$$

и

$$\tau_{xz \text{ сим max}} = \gamma_c G = \gamma_c \frac{E}{2(1+\nu)} = w \frac{m\pi E}{4a(1+\nu)}. \quad (3.13)$$

Как и в предыдущем случае, считаем, что начальная симметричная волнистость внешних слоев такова, что длина ее волны a/m совпадает с той длиной, которая соответствует минимуму критической нагрузки симметричной формы потери устойчивости.

При условии (3.2) — (см. работу А. П. Вороновича).

$$\frac{m}{a} = \frac{1}{\pi} \sqrt[4]{\frac{E}{hD}}. \quad (3.14)$$

При условии (3.4)

$$\frac{m}{a} = \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{E}{3D}}. \quad (3.15)$$

Вводя выражения (3.1), (3.3) и (3.14) в формулу (3.13), получим, что при соблюдении условия (3.2)

$$\tau_{xz \text{ сим max}} = \frac{E w_{н.с}}{4(1+\nu)} \sqrt[4]{\frac{E}{hD}} \frac{1}{0,575 \sqrt[3]{\frac{E E \delta^3}{h}}} \quad (3.16)$$

Вводя выражения (3.1), (3.6), (3.12) в формулу (3.13), получим, что при соблюдении условия (3.4)

$$\tau_{xz \text{ сим max}} = \frac{E w_{н.с}}{4(1+\nu)} \sqrt[3]{\frac{E}{3D}} \frac{1}{0,63 \sqrt[3]{\frac{E E \delta^3}{h}}} \quad (3.17)$$

В графах 7 и 8 табл. 4 даны результаты подсчетов τ_{xz} по формулам (3.16) и (3.17).

Как показано выше, у пластин, для которых $ah < 2$, можно значения $\tau_{xz \text{ сим max}}$, приводимые в графе 8 табл. 2, вообще не учитывать. При $ah > 2$ совпадение результатов, полученных по формуле (3.16), с результатами подсчетов по полученным выше формулам (см. графы 9, 17 табл. 3 и 8 табл. 2) можно считать для первого грубого приближения приемлемыми для всех практически возможных параметров пластин (если учесть, что значения $\tau_{xz \text{ сим max}}$, стоящие в графах 7 и 8 в скобках, малы по сравнению с $\sigma_{z \text{ сим max}}$).

§ 4. НАПРЯЖЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПО СКЛЕЙКЕ ВНЕШНИХ СЛОЕВ С ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ВСЛЕДСТВИЕ НАЧАЛЬНОЙ КОСОСИММЕТРИЧНОЙ ПОГИБИ ПЛАСТИНЫ И НАЧАЛЬНОЙ СИММЕТРИЧНОЙ ВОЛНИСТОСТИ ЕЕ ВНЕШНИХ СЛОЕВ

Реальная трехслойная пластина обладает начальной кососимметричной погибю и начальной симметричной волнистостью внешних слоев. Ввиду малости деформаций, возникающих при нагружении пластины, можно наложить решения, полученные отдельно для случаев начальной кососимметричной погиби пластины и начальной симметричной волнистости внешних слоев.

По третьей теории прочности (максимальных касательных напряжений) для пластин, работающих на продольное сжатие, можно записать

$$\sigma_{\text{расч}} = \sqrt{(\sigma_{z \text{ сим}} + \sigma_{z \text{ кос}} + \sigma_x)^2 + 4(\tau_{xz \text{ сим}} + \tau_{xz \text{ кос}})^2} \leq [\sigma]. \quad (4.1)$$

Здесь $[\sigma]$ — допустимое напряжение заполнителя при работе на растяжение или сжатие;

$\sigma_{z \text{ сим}}$ и $\tau_{xz \text{ сим}}$ — напряжения отрыва и сдвига, возникающие по склейке вследствие начальной симметричной волнистости внешних слоев;

$\sigma_z \text{ кос}$ и $\tau_{xz \text{ кос}}$ — напряжения отрыва и сдвига, возникающие по склейке вследствие начальной кососимметричной погиби пластины;

σ_x — напряжение, возникающее в заполнителе у склейки от общего сжатия всей пластины (формула 1.13). Напряжения σ_z надо брать с тем же знаком, что и σ_x .

Сопоставляя графы 8 табл. 1 и 10 табл. 3 или 7 табл. 2 и учитывая, что в реальных конструкциях $w_{н.с} \ll w_{н.к}$, замечаем, что значением $\sigma_z \text{ кос}$ по сравнению с $\sigma_z \text{ сим}$ можно пренебречь. При $ah \leq 2$ можно также пренебречь $\tau_{xz \text{ сим}}$ ($\tau_{xz \text{ сим макс}}/w_{н.с}$ см. в графе 8 табл. 2) по сравнению с $\tau_{xz \text{ кос}}$ (см. графу 10 табл. 1). При $ah > 2$ значения $\tau_{xz \text{ сим}}$ и $\tau_{xz \text{ кос}}$ сопоставимы и должны учитываться оба.

Следует иметь в виду, что входящие в формулу (4.1) значения напряжений не являются постоянными по длине пластины и зависят от x .

Напряжение $\tau_{xz \text{ кос}}$ будет максимальным вблизи кромок пластин (для свободно опертой пластины). Напряжение σ_x в случае работы пластины на продольное сжатие будет примерно постоянным по длине пластины, а напряжения $\sigma_z \text{ сим}$ и $\tau_{xz \text{ сим}}$ будут изменяться от нуля до максимума на протяжении коротких по сравнению с длиной пластин волн (см. формулы 2.7, 2.8, 2.10, 2.16, 2.17). Поэтому в выражении $\tau_{xz \text{ кос}}$ при введении его в формулу (4.1) можно принять $\cos \alpha x = 1$.

В связи со сказанным формулу (4.1) можно переписать так

$$\sigma_{\text{расч}} = \sqrt{(\sigma_z \text{ сим макс} \sin \alpha x + \sigma_x)^2 + 4(\tau_{xz \text{ сим макс} \cos \alpha x + \tau_{xz \text{ кос макс}})^2}. \quad (4.2)$$

Здесь σ_x находится по формуле (1.13) (σ_z и σ_x следует брать с одним знаком);

$\tau_{xz \text{ кос макс}}$ находится по формуле (1.12) при $\cos \alpha x = 1$. Остальные напряжения находятся по формулам:

при $ah > 2$ или при соблюдении условия (2.24):

$\sigma_z \text{ сим макс}$ находится по формуле (2.16) при $\sin \alpha x = 1$;

$\tau_{xz \text{ сим макс}}$ находится по формуле (2.17) при $\cos \alpha x = 1$;

при $ah < 2$ или при соблюдении условия (2.25):

$\sigma_z \text{ сим макс}$ находится по формуле (2.10) при $\sin \alpha x = 1$;

$\tau_{xz \text{ сим макс}}$ принимается равным нулю.

При $ah < 2$, когда $\tau_{xz \text{ сим макс}}$ можно пренебрегать, максимуму $\sigma_{\text{расч}}$ очевидно будет соответствовать случай $\sin \alpha x = 1$. При этом следует находить ah из условия максимума $\sigma_z \text{ сим}$, т. е. из формулы (2.13).

При $ah > 2$, когда $\tau_{xz \text{ сим макс}}$ следует учитывать, значения x и a , соответствующие максимуму $\sigma_{\text{расч}}$, можно найти из условий

$$\frac{\partial \sigma_{\text{расч}}}{\partial x} = 0; \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\text{расч}}}{\partial a} = 0. \quad (4.4)$$

Взяв $\sigma_{\text{расч}}$ по формуле (4.2), получим из условия (4.3) уравнение, откуда находится ax , соответствующее максимуму $\sigma_{\text{расч}}$

$$(\sigma_z^2 \text{ сим макс} - 4\tau_{xz \text{ сим макс}}^2) \sin \alpha x \cos \alpha x + \sigma_x \sigma_z \text{ кос макс} \cos \alpha x - 4\tau_{xz \text{ кос макс}} \tau_{xz \text{ сим макс}} \sin \alpha x = 0. \quad (4.5)$$

Если для легких заполнителей пренебречь в первом приближении значением σ_z , то уравнение (4.5) имеет два решения:

1) $\sin \alpha x = 0$;

2) $\cos \alpha x = \frac{4\tau_{xz \text{ сим макс}} \tau_{xz \text{ кос макс}}}{\sigma_z^2 \text{ сим макс} - 4\tau_{xz \text{ сим макс}}^2}. \quad (4.6)$

В тех случаях, когда

$$\frac{4\tau_{xz \text{ сим макс}} \tau_{xz \text{ кос макс}}}{\sigma_z^2 \text{ сим макс} - 4\tau_{xz \text{ сим макс}}^2} \geq 1$$

из физических соображений следует принимать $\cos \alpha x = 1$.

Надо взять большее из двух значений $\sigma_{\text{расч}}$, найденных с учетом условий (4.6).

Вместо выполнения условия (4.4) для выбора ah можно поступить следующим образом. Как видно из сопоставления граф 13 и 19 табл. 3, значения $\tau_{xz \text{ сим макс}}$ соответствующие значениям ah , найденным из условия максимума $\sigma_z \text{ сим макс}$ и из условия максимума $\tau_{xz \text{ сим макс}}$ различаются не слишком сильно.

Если $\cos \alpha x$ из уравнения (4.5) получается близким к нулю, то ah лучше находить из условия максимума $\sigma_z \text{ сим}$ (формула 2.20), так как в этом случае $\sigma_z \text{ сим макс}$ больше влияет на значение $\sigma_{\text{расч}}$.

Если $\cos \alpha x$ из уравнения (4.5) получается близким к единице, то ah лучше находить из условия максимума $\tau_{xz \text{ сим}}$ (уравнение 2.21), так как в этом случае $\tau_{xz \text{ сим}}$ больше влияет на значение $\sigma_{\text{расч}}$.

В табл. 5 даны значения $\sigma_{\text{расч}}$, найденные по формуле (4.2), причем графа 8 относится к случаю, когда $ah < 2$, а графы 5-7 — к случаю, когда $ah > 2$.

В графе 5 приведены результаты подсчетов, проведенных при принятии $\cos \alpha x = 0$, и определения ah по формуле (2.20) из условия максимума $\sigma_z \text{ сим}$. В графе 6 приведены результаты подсчетов, проведенных при принятии $\cos \alpha x = 1$ и определении ah по уравнению (2.21) из условия максимума $\tau_{xz \text{ сим}}$. В графе 7 приведены результаты подсчетов при принятии $\cos \alpha x = 0,71$ и ah , взятом как среднее из значений, найденных из условий максимума $\sigma_z \text{ сим}$ и $\tau_{xz \text{ сим}}$.

Как видно из сопоставления граф, при $ah > 2$ можно при расчете практически принимать $\cos \alpha x = 0$ и ah находить по формуле (2.20).

Таким образом, расчет пластин на действие напряжений, возникающих по склейке внешних слоев с заполнителем вследствие начальной кососимметричной погиби всей пластины и начальной симметричной волнистости внешних слоев, может производиться по следующим формулам.

а) Приближенный расчет пластин, работающих на продольное сжатие, производится по формулам:

$$\sigma_{\text{расч}} = \sqrt{(\sigma_z \text{ сим макс} + \sigma_x)^2 + 4(\tau_{xz \text{ кос макс}} + \tau_{xz \text{ сим макс}})^2} \leq [\sigma],$$

где

$$\sigma_z \text{ сим макс} = \frac{E w_{н.с}}{h} \frac{1}{0,575 \frac{\sigma}{E} \sqrt{\frac{E \delta}{E \delta} - 1}},$$

$$\sigma_x = \sigma \frac{E}{E},$$

$$\tau_{xz \text{ сим макс}} = \frac{E w_{н.с}}{4(1+\mu)} \sqrt{\frac{E}{h D}} \frac{1}{0,575 \frac{\sigma}{E} \sqrt{\frac{E \delta}{E \delta} - 1}},$$

Таблица 5

№ по пор.	Параметры пластин $a=50$ см, $b=\infty$, $h=1$ см, $E=7 \cdot 10^5$ кг/см ² $\mu=0,3$, $\nu=0,4$			Одновременное симметричное и косимметричное выпучивание			
				Пластин, для которых $\alpha h > 2$		Пластин, для которых $\alpha h < 2$	
				$\sigma_{\text{расч}}$ кг/см ²			
	см	кг/см ²	кг/см ²	по формуле (4.2) при $\cos \alpha x = 0$	по формуле (4.2) при $\cos \alpha x = 1$	по формуле (4.2) при $\cos \alpha x = 0,7$	по формуле (4.2) при $\sin \alpha x = 1$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,1	280	100				2,885
2	0,1	560	200				5,792
3	0,1	1400	500	13,82	12,21	13,60	
4	0,1	2800	1000	26,29	21,88	24,92	
5	0,1	5600	2000	47,94	38,68	44,40	
6	0,1	14000	5000	102,80	85,86	90,79	
7	0,1	28000	10000	182,30	161,30	169,00	
8	0,2	280	100				2,554
9	0,2	560	200				4,876
10	0,2	1400	500				10,940
11	0,2	2800	1000				19,240
12	0,2	5600	2000	33,89	31,95	33,18	
13	0,2	14000	5000	77,24	68,05	74,54	
14	0,2	28000	10000	144,70	126,90	136,50	
15	0,3	280	100				2,610
16	0,3	560	200				4,961
17	0,3	1400	500				11,100
18	0,3	2800	1000				19,540
19	0,3	5600	2000				33,620
20	0,3	14000	5000	72,10	67,54	71,90	
21	0,3	28000	10000	137,60	124,90	132,20	
22	0,5	280	100				2,693
23	0,5	560	200				5,210
24	0,5	1400	500				11,970
25	0,5	2800	1000				18,990
26	0,5	5600	2000				37,320
27	0,5	14000	5000				78,130
28	0,5	28000	10000				143,100

[σ] — допускаемое напряжение для заполнителя на растяжение; для прямоугольной пластины (сжатие вдоль размера a) —

$$\tau_{xz \text{ кос max}} = \frac{\pi G w_{н.к}}{bh} \frac{\left(h + \frac{\delta}{2}\right)}{k \left[\frac{G}{\delta h} \left(h + \frac{\delta}{2}\right)^2 (1+k^2) - 1 - \frac{k^2}{\xi(1+k^2)} \right]}$$

где $k = \frac{a}{b m}$, $\xi = \frac{\pi^2 h B}{b^2 G}$, m — находится по графику фиг. 2; для бесконечно широкой пластины —

$$\tau_{xz \text{ кос max}} = \frac{2h + \delta}{(2h + \delta)^2} \frac{2h}{2\delta} \frac{2a^2}{G} \frac{\pi}{\pi^2 B} w_{н.к.}$$

б) Окончательный расчет пластин, работающих на продольное сжатие, в случае

$$\left(\frac{h}{\delta}\right)^3 \frac{96G(1-\mu)(1-\mu^2)}{E(3-4\mu)} < 8$$

производится по формуле

$$\sigma_{\text{расч}} = \sqrt{(\sigma_{z \text{ сим max}} + \sigma_x)^2 + 4\tau_{xz \text{ кос max}}^2} \leq [\sigma].$$

Здесь

$$\sigma_{z \text{ сим max}} = G \frac{2(1-\mu) - \mu \delta \alpha h}{(1-2\mu)h} \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{к.с} - \bar{\sigma}} w_{н.к.};$$

$$\sigma_{к.с} = \frac{E(\alpha h)^2}{12(1-\mu^2)} + \frac{2G}{\alpha h} \frac{1-\mu}{(1-2\mu)\alpha h};$$

$$\alpha \delta = \sqrt{\frac{G(1-\mu)\delta\mu}{1-2\mu} + \sqrt{\frac{G(1-\mu)\delta\mu}{1-2\mu} + \left[\frac{(1-\mu)\delta E_{н.п}}{6} - \bar{\sigma} h \mu \right] \frac{G(1-\mu)\delta^2}{h(1-2\mu)}}}$$

$$\alpha h = \frac{\alpha \delta}{\delta} h;$$

$$\sigma_x = \frac{E}{E};$$

$\tau_{xz \text{ кос max}}$ находится по формулам п. "а".

в) Окончательный расчет пластин, работающих на продольное сжатие, в случае

$$\left(\frac{h}{\delta}\right)^3 \frac{96G(1-\mu)(1-\mu^2)}{E(3-4\mu)} > 8,$$

производится по формуле

$$\sigma_{\text{расч}} = \sqrt{(\sigma_{z \text{ сим max}} + \sigma_x)^2 + 4(\tau_{xz \text{ кос max}} + \tau_{xz \text{ сим max}})^2} \leq [\sigma].$$

Здесь

$$\sigma_{z \text{ сим max}} = 2G\alpha\delta \frac{2(1-\mu) \left(1 + \frac{\alpha\delta}{2}\right) - \frac{\alpha\delta}{2}}{4(1-\mu) - 1} \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{к.с} - \bar{\sigma}} \frac{w_{н.к.}}{\delta};$$

$$\tau_{xz \text{ сим max}} = 2G\alpha\delta \frac{2(1-\mu) \left(1 + \frac{\alpha\delta}{2}\right) - 1}{4(1-\mu) - 1} \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{к.с} - \bar{\sigma}} \frac{w_{н.к.}}{\delta};$$

Л. М. КУРШИН

$$\sigma_{н.с} = \frac{(a\delta)^2 E_{np}}{12} + \frac{2G}{a\delta} \frac{2(1-\mu) \left(1 + \frac{a\delta}{2}\right)^2 - a\delta}{4(1-\mu) - 1};$$

$$\alpha\delta = \sqrt[3]{\frac{96G(1-\mu)(1-\mu^2)}{E(3-4\mu)}};$$

$$\alpha h = \frac{a\delta}{b} h;$$

$$\sigma_x = \sigma \frac{E}{E};$$

$\tau_{xz \text{ кас макс}}$ — находится по формулам п. «а».

г) Расчет пластин, работающих на продольно-поперечный изгиб, в случае

$$\left(\frac{h}{b}\right)^3 \frac{96G(1-\mu)(1-\mu^2)}{E(3-4\mu)} > 8$$

можно производить по формулам п. «в» с той лишь разницей, что в выражении $\sigma_{расч}$ вместо $\tau_{xz \text{ кас макс}}$ следует ввести слагаемое $\tau_{xz \text{ кас макс}}$ — касательные напряжения, возникающие от общего изгиба пластины.

В этом случае σ — напряжение в наиболее сжатом внешнем слое в точке, для которой определяется $\sigma_{расч}$. Так как σ и $\tau_{xz \text{ изг}}$ могут достигать максимума в различных точках, то приходится путем попыток находить наиболее опасную точку, где $\sigma_{расч}$ достигает максимума, либо в запас прочности вводить в формулу для определения $\sigma_{расч}$ максимальные значения σ и $\tau_{xz \text{ изг}}$.

БОЛЬШИЕ ПРОГИБЫ ТРЕХСЛОЙНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

В работе вариационным путем получена система нелинейных уравнений для конечных прогибов трехслойных цилиндрических оболочек. По нелинейной теории решена задача о продольном сжатии трехслойной цилиндрической панели, свободно опертой по четырем кромкам. Результаты решения позволяют сделать вывод о том, что для трехслойных оболочек с легким наполнителем уменьшение нагрузки после потери устойчивости меньше, чем для однослойных оболочек той же толщины.

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

u_1, v_1, w_1 — смещения точек срединной поверхности верхнего наружного слоя
 u_2, v_2, w_2 — смещения точек срединной поверхности нижнего наружного слоя
 δ_n — толщина наружного слоя
 $2h$ — толщина наполнителя
 R — радиус срединной поверхности наполнителя
 E_n, μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона наружных слоев
 E_c, G — модуль упругости и модуль сдвига наполнителя

$$B = \frac{E_n \delta_n}{1 - \mu^2}, \quad D = \frac{E_n \delta_n^3}{12(1 - \mu^2)}, \quad B_c = \frac{E_c h}{1 - \mu_c^2}, \quad D_c = \frac{E_c h^3}{3(1 - \mu_c^2)},$$

q — поперечная нагрузка
 a, b — размеры панели по образующей и по дуге

ВВЕДЕНИЕ

Задачи устойчивости трехслойных пластин и оболочек обычно рассматриваются в линейной постановке. Такой подход позволяет составить достаточно простые уравнения как для пластин, так и для оболочек. Однако известно, что для обычных оболочек решение по нелинейной теории может дать существенно меньшую нагрузку после потери устойчивости — явление так называемого хлопка. Представляет интерес исследовать исходя из нелинейных уравнений это явление для трехслойных оболочек.

Уравнения в конечных смещениях были получены для трехслойных пластин и оболочек в ряде работ^{1,2}. К числу допущений, принятых в этих работах, относятся такие, как пренебрежение изгибной жесткостью внешних слоев и пренебрежение работой наполнителя на продольные силы и моменты. Эти упрощения вполне допустимы при решении задач устойчивости по линейной теории, но становятся неудобными при исследовании

¹ M. Stein, J. Mayers, A Small Deflection Theory for Curved Sandwich Plates, NACA, Rep. 1008, 1951.

² E. Reissner, Finite Deflections of Sandwich plates, J. A. S. 1948, vol. 15, N 7.

довании явления хлопка, когда возникает необходимость перехода к крайним случаям: очень легкого заполнителя или, наоборот, очень жесткого заполнителя. В связи с этим в настоящей работе даны уравнения для трехслойной оболочки в конечных смещениях, свободные от этих допущений.

При выводе уравнений будем считать для внешних слоев оболочки справедливой гипотезу Кирхгофа—Лява и положим, что смещения в заполнителе меняются линейно по высоте. Это допущение, позволяющее учесть как деформации сдвига заполнителя, так и его работу на продольные силы и моменты для трехслойных пластин было впервые введено в ряде работ, опубликованных в 1943 и 1949 гг.¹ Линейные уравнения изгиба и устойчивости трехслойных пластин при использовании этого допущения были получены и опубликованы в 1952 г.² В поперечном направлении будем считать заполнитель недеформируемым. Оболочку будем считать полой, используя для деформаций при конечных прогибах известные упрощенные формулы и пренебрегая толщиной оболочки по сравнению с радиусом кривизны.

§ 1. ВАРИАЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ИЗГИБА ТРЕХСЛОЙНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Рассмотрим трехслойную цилиндрическую оболочку, состоящую из двух тонких наружных слоев и промежуточного слоя — заполнителя с относительно небольшим модулем упругости.

Полагая для внешних слоев справедливой гипотезу Кирхгофа—Лява, будем иметь для перемещений точек верхнего слоя ($h \leq z \leq h + \delta_n$):

$$w = w_1; \quad u = u_1 - \left(z - h - \frac{\delta_n}{2}\right) \frac{\partial w_1}{\partial x}; \quad v = v_1 - \left(z - h - \frac{\delta_n}{2}\right) \frac{\partial w_1}{\partial y} \quad (1.1)$$

и нижнего слоя ($-h - \delta_n \leq z \leq -h$):

$$w = w_2; \quad u = u_2 - \left(z + h + \frac{\delta_n}{2}\right) \frac{\partial w_2}{\partial x}; \quad v = v_2 - \left(z + h + \frac{\delta_n}{2}\right) \frac{\partial w_2}{\partial y} \quad (1.2)$$

Мы считаем, что при деформации заполнителя прямые линии, перпендикулярные к срединной поверхности среднего слоя, остаются прямыми, но не остаются нормальными к срединной поверхности. Учитывая, что отношение h/R мало по сравнению с единицей, и в поперечном направлении заполнитель не деформируется ($w_1 = w_2 = w$), для смещений среднего слоя будем иметь

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \left[u_1 + u_2 + \frac{z}{h} (u_1 - u_2 + \delta_n \frac{\partial w}{\partial x}) \right], \\ v &= \frac{1}{2} \left[v_1 + v_2 + \frac{z}{h} (v_1 - v_2 + \delta_n \frac{\partial w}{\partial y}) \right]. \end{aligned} \quad (1.3)$$

¹ D. M. Leggett, H. G. Hopkins, Sandwich Panels and Cylinders under Compression End Loads, ARC, R & N 2262, 1949. ² A. C. Eringen, Stabilität geschichteter Streifen, Nat. Luchtvaarlaboratorium, Amsterdam, Rep. Nr. S284, 1943.
³ A. C. Eringen, Bending and Buckling of Rectangular Sandwich Plates, Proc. First U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., 1952.

Для деформаций слоев оболочки при больших прогибах будем использовать выражения:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

а для напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_x + \mu \epsilon_y); \quad \tau_{xz} = G \gamma_{xz}; \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_y + \mu \epsilon_x); \quad \tau_{yz} = G \gamma_{yz}; \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy}, \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

полагая внешние слои изотропными, а заполнитель трансверсально-изотропным.

Потенциальная энергия верхнего наружного слоя запишется в виде

$$V_1 = -\frac{1}{2} \iiint [\sigma_{x1} \epsilon_{x1} + \sigma_{y1} \epsilon_{y1} + \tau_{xy1} \gamma_{xy1}] dx dy dz, \quad (1.6)$$

а нижнего — в виде

$$V_2 = -\frac{1}{2} \iiint [\sigma_{x2} \epsilon_{x2} + \sigma_{y2} \epsilon_{y2} + \tau_{xy2} \gamma_{xy2}] dx dy dz. \quad (1.7)$$

Вводя в эти формулы выражения напряжений (1.5) и деформаций (1.4), учитывая выражения (1.1) и (1.2) и выполнив интегрирование по z , получим для потенциальной энергии верхнего и нижнего наружных слоев:

$$\left. \begin{aligned} V_1 + V_2 &= -B \iint \left\{ \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \right. \\ &+ \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \\ &+ 2\mu \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \\ &+ 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \\ &+ \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \Big\} dx dy - \\ &- D \iint \left\{ \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy. \right\} \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Здесь были введены обозначения

$$\left. \begin{aligned} u_\alpha &= \frac{u_1 + u_2}{2}, & v_\alpha &= \frac{v_1 + v_2}{2}; \\ u_\beta &= \frac{u_1 - u_2}{2}, & v_\beta &= \frac{v_1 - v_2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

Потенциальная энергия деформации заполнителя запишется в виде:

$$V_3 = -\frac{1}{2} \iiint [\sigma_{x3} \epsilon_{x3} + \sigma_{y3} \epsilon_{y3} + \tau_{xy3} \gamma_{xy3} + \tau_{xz3} \gamma_{xz3} + \tau_{yz3} \gamma_{yz3}] dx dy dz. \quad (1.10)$$

Учитывая выражения напряжений (1.5), деформаций (1.4) и смещений (1.3), интегрируя по z от $-h$ до h и вводя обозначения (1.9), получим:

$$\begin{aligned} V_3 = & -B_c \iint \left[\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right)^2 + \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial y} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right)^2 + \right. \\ & + 2\mu \left[\frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \left[\frac{\partial v_\alpha}{\partial y} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \\ & \left. + \frac{1-\mu}{2} \left[\frac{\partial v_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right]^2 \right] dx dy - \\ & - \frac{D_c}{h^2} \iint \left[\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x} + \frac{v_n}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_\beta}{\partial y} + \frac{v_n}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ & + 2\mu \left[\frac{\partial u_\beta}{\partial x} + \frac{v_n}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \left[\frac{\partial v_\beta}{\partial y} + \frac{v_n}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + \frac{1-\mu}{2} \left[\frac{\partial u_\beta}{\partial y} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x} + \frac{v_n}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]^2 \Big] dx dy - \\ & - \frac{G}{h} \iint \left[\left[u_\beta + \left(h + \frac{v_n}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right]^2 + \left[v_\beta + \left(h + \frac{v_n}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right]^2 \right] dx dy. \quad (1.11) \end{aligned}$$

Обозначив через δA работу внешних сил, приложенных к контуру трехслойной панели, на возможных перемещениях в соответствии с принципом Лагранжа составим вариационное уравнение трехслойной оболочки

$$\delta(U_1 + U_2 + U_3) + \delta A + \int \int q \delta w dx dy = 0. \quad (1.12)$$

Вводя сюда выражения (1.8) и (1.11) и выполнив интегрирование по частям, запишем вариационное уравнение в виде

$$\begin{aligned} & 2(B + B_c) \iint \left[\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial x \partial y} + \frac{\mu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \right. \\ & \left. + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \delta u_\alpha dx dy + \\ & + 2(B + B_c) \iint \left[\frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial y} + \right. \\ & \left. + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \delta v_\alpha dx dy + \\ & + 2 \frac{G}{h} \iint \left[\left(\frac{h}{G} \left(B + \frac{D_c}{h^2} \right) \left[\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v_\beta}{\partial x \partial y} \right] + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{D_c v_n}{2Gh} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \left[u_\beta + \left(h + \frac{v_n}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right] \right] \delta u_\beta dx dy + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + 2 \frac{G}{h} \iint \left[\left(\frac{h}{G} \left(B + \frac{D_c}{h^2} \right) \left[\frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v_\beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_\beta}{\partial y^2} \right] + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{D_c v_n}{2Gh} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \left[v_\beta + \left(h + \frac{v_n}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right] \right] \delta v_\beta dx dy + \\ & + \iint 2(B + B_c) \left\{ - \left[\frac{\partial v_\alpha}{\partial y} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \mu \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} \frac{1}{R} + \\ & + \frac{\partial w}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial x \partial y} + \frac{\mu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \right. \\ & \left. + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right] + \\ & + \frac{\partial w}{\partial y} \left[\frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial y} + \right. \\ & \left. + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + \\ & + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left[\frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \mu \frac{\partial v_\alpha}{\partial y} + \mu \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \\ & + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left[\frac{\partial v_\alpha}{\partial y} + \frac{w}{R} + \mu \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \\ & + (1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left[\frac{\partial v_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \delta w dx dy - \\ & - \iint \left[2 D \Delta \Delta w + \frac{D_c v_n}{h^2} \Delta \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x} + \frac{\partial v_\beta}{\partial y} \right) + \frac{D_c v_n^2}{2h^2} \Delta \Delta w - \right. \\ & \left. - 2 \frac{G}{h} \left(h + \frac{v_n}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left[u_\beta + \left(h + \frac{v_n}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right] - \right. \\ & \left. - 2 \frac{G}{h} \left(h + \frac{v_n}{2} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left[v_\beta + \left(h + \frac{v_n}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right] - q \right] \delta w dx dy - \\ & - \int_0^a 2(B + B_c) \int_0^b \left[\frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \mu \frac{\partial v_\alpha}{\partial y} + \mu \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \delta u_\alpha dy + \\ & + (1-\mu)(B + B_c) \int_0^b \left[\frac{\partial v_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \delta v_\alpha dy + \\ & + 2 \int_0^b \left[\left(B + \frac{D_c}{h^2} \right) \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x} + \mu \frac{\partial v_\beta}{\partial y} \right) + \frac{D_c v_n^2}{2h^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \delta u_\beta dy + \\ & + \int_0^b \left[(1-\mu) \left(B + \frac{D_c}{h^2} \right) \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial y} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x} \right) + (1-\mu) \frac{D_c v_n}{h^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \delta v_\beta dy + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^b \left\{ - \left(2D + \frac{D_c \delta_n^2}{2h^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \right. \\
 & + 2(B+B_c) \left[\frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) + \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{w}{R} + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \\
 & \quad + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \\
 & \quad - \frac{D_c \delta_n}{h^2} \left(\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_\beta}{\partial x \partial y} + (1-\mu) \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial y^2} \right) + \\
 & \quad + 2 \frac{G}{h} \left(h + \frac{\delta_n}{2} \right) \left[u_\beta + \left(h + \frac{\delta_n}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right] \delta w \, dy + \\
 & + \int_0^b \left[\left(2D + \frac{D_c \delta_n^2}{2h^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{D_c \delta_n}{h^2} \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x} + \mu \frac{\partial v_\beta}{\partial y} \right) \right] \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dy - \\
 & \quad - \left\{ (1-\mu)(B+B_c) \int_0^a \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \delta u_x \, dx + \right. \\
 & + 2(B+B_c) \int_0^a \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \mu \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \delta v_x \, dx + \\
 & + \int_0^a \left[(1-\mu) \left(B + \frac{D_c}{h^2} \right) \left(\frac{\partial v_\beta}{\partial y} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x} \right) + (1-\mu) \frac{D_c \delta_n}{h^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \delta u_\beta \, dx + \\
 & + 2 \int_0^a \left[\left(B + \frac{D_c}{h^2} \right) \left(\frac{\partial v_\beta}{\partial y} + \mu \frac{\partial u_\beta}{\partial x} \right) + \frac{D_c \delta_n}{2h^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] \delta v_\beta \, dx + \\
 & + \int_0^a \left\{ - \left(2D + \frac{D_c \delta_n^2}{2h^2} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \right. \\
 & + 2(B+B_c) \left[\frac{\partial w}{\partial y} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) + \mu \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \delta v_x \, dx + \\
 & \quad + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \\
 & \quad - \frac{D_c \delta_n}{h^2} \left(\frac{\partial^2 v_\beta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x \partial y} + (1-\mu) \frac{\partial^2 v_\beta}{\partial x^2} \right) + \\
 & \quad + 2 \frac{G}{h} \left(h + \frac{\delta_n}{2} \right) \left[v_\beta + \left(h + \frac{\delta_n}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right] \delta w \, dx + \\
 & \quad + \int_0^a \left[\left(2D + \frac{D_c \delta_n^2}{2h^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \right. \\
 & \quad + \frac{D_c \delta_n}{h^2} \left(\frac{\partial v_\beta}{\partial y} + \mu \frac{\partial u_\beta}{\partial x} \right) \left. \right] \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) dx - \\
 & \left. - \left\{ \left[(1-\mu) \left(4D + \frac{D_c \delta_n^2}{h^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + (1-\mu) \frac{D_c \delta_n}{h^2} \left(\frac{\partial v_\beta}{\partial x} + \frac{\partial u_\beta}{\partial y} \right) \right] \delta w \right\} + \right. \\
 & \quad \left. + \delta A = 0. \right. \tag{1.13}
 \end{aligned}$$

Из этого вариационного уравнения можно получить дифференциальные уравнения и граничные условия.

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Из вариационного уравнения (1.13) получим дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial y} + \frac{\mu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\
 & \quad + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} = 0; \\
 & \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial y} + \\
 & \quad + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \\
 & \frac{h}{G} \left(B + \frac{D_c}{h^2} \right) \left[\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v_\beta}{\partial x \partial y} \right] + \\
 & \quad + \frac{D_c \delta_n}{2Gh} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = u_\beta + \left(h + \frac{\delta_n}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial x}; \\
 & \frac{h}{G} \left(B + \frac{D_c}{h^2} \right) \left[\frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v_\beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_\beta}{\partial y^2} \right] + \\
 & \quad + \frac{D_c \delta_n}{2Gh} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = v_\beta + \left(h + \frac{\delta_n}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial y}; \\
 & 2(B+B_c) \left\{ - \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \mu \frac{\partial u_x}{\partial x} + \right. \right. \\
 & \quad + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left. \right] \frac{1}{R} + \frac{\partial w}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial y} + \right. \\
 & \quad + \frac{\mu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \left. \right] + \\
 & \quad + \frac{\partial w}{\partial y} \left[\frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} + \right. \\
 & \quad + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left. \right] + \\
 & \quad + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \\
 & \quad + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{w}{R} + \mu \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \\
 & \quad + (1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] - \\
 & \quad - \left(2D + \frac{D_c \delta_n^2}{2h^2} \right) \Delta \Delta w - \frac{D_c \delta_n}{h^2} \Delta \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x} + \frac{\partial v_\beta}{\partial y} \right) + \\
 & \quad + \frac{2G}{h} \left(h + \frac{\delta_n}{2} \right) \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[u_\beta + \left(h + \frac{\delta_n}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left[v_\beta + \left(h + \frac{\delta_n}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right] \right\} + q = 0.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Упростим последнее уравнение этой системы при помощи двух первых и, кроме того, введем в него выражения продольных усилий в сечении трехслойной оболочки.

Интегрируя выражения напряжений (1.5) по толщине трехслойной оболочки и учитывая выражения (1.4), (1.1), (1.2), (1.3) и обозначения (1.9), для продольных сил будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} T_x &= 2(B+B_c) \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\mu}{R} w + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]; \\ T_y &= 2(B+B_c) \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \mu \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]; \\ S_{xy} &= (1-\mu)(B+B_c) \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} (2.2)$$

Последнее уравнение системы (2.1) запишется теперь в виде

$$\begin{aligned} -\frac{1}{R} T_y + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} T_x + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} T_y + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} S_{xy} - \left(2D + \frac{D_c \delta_n^2}{2h^2} \right) \Delta \Delta w - \\ - \frac{D_c \delta_n}{h^2} \Delta \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x} + \frac{\partial v_\beta}{\partial y} \right) + \frac{2G}{h} \left(h + \frac{\delta_n}{2} \right) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left[u_\beta + \left(h + \frac{\delta_n}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left[v_\beta + \left(h + \frac{\delta_n}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right] \right] + q = 0. \end{aligned} (2.3)$$

Введем функцию напряжений Φ , полагая:

$$T_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad T_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad S_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}; \quad (2.4)$$

Учитывая выражения (2.2), убедимся, что первых два уравнения системы (2.1) удовлетворяются тождественно.

Введем новую функцию

$$\Psi = \frac{\partial u_\beta}{\partial x} + \frac{\partial v_\beta}{\partial y}. \quad (2.5)$$

Исключая из третьего и четвертого уравнений (2.1) и уравнения (2.3) функции u_β и v_β , а из выражений (2.2) u_x и v_x и учитывая при этом выражения (2.4) и (2.5), получим в итоге систему из трех дифференциальных уравнений для конечных прогибов трехслойной оболочки

$$\left. \begin{aligned} \Delta \Delta \Phi &= 2(1-\mu^2)(B+B_c) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]; \\ \frac{h}{G} \left(B + \frac{1}{3} B_c \right) \Delta \Psi + \frac{D_c \delta_n}{2Gh} \Delta \Delta w &= \Psi + \left(h + \frac{\delta_n}{2} \right) \Delta w; \\ \left(2D - \frac{D_c \delta_n}{h} \right) \Delta \Delta w + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \\ + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - 2 \left[B \left(h + \frac{\delta_n}{2} \right) + B_c \frac{h}{3} \right] \Delta \Psi - q &= 0. \end{aligned} \right\} (2.6)$$

Из этой системы уравнений можно получить в качестве частных случаев уравнения для конечных прогибов однослойных пластин¹ и оболочек², а также уравнения для конечных прогибов трехслойных пластин.

¹ С. П. Тимошенко, Устойчивость упругих систем, Гостехиздат, 1946.
² А. С. Вольмир, Гибкие пластинки и оболочки, Гостехиздат, 1956.

§ 3. СЖАТИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПАНЕЛИ, СВОБОДНО ОПЕРТОЙ ПО ЧЕТЫРЕМ КРОМКАМ

Граничные условия для рассматриваемого случая получим из вариационного уравнения (1.13). Учитывая выражения (2.2) и (2.4), запишем эти граничные условия в виде:

$$[w]_{x=0,a} = 0; \quad (3.1)$$

$$\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right]_{x=0,a} = -T; \quad (3.2)$$

$$\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right]_{x=0,a} = 0; \quad (3.3)$$

$$\left[\left(B + \frac{D_c}{h^2} \right) \frac{\partial u_\beta}{\partial x} + \mu \frac{\partial v_\beta}{\partial y} + \frac{D_c \delta_n}{2h^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right]_{x=0,a} = 0; \quad (3.4)$$

$$[v_\beta]_{x=0,a} = 0; \quad (3.5)$$

$$\left[\left(2D + \frac{D_c \delta_n^2}{2h^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{D_c \delta_n}{h^2} \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x} + \mu \frac{\partial v_\beta}{\partial y} \right) \right]_{x=0,a} = 0; \quad (3.6)$$

$$[w]_{y=0,b} = 0; \quad (3.7)$$

$$\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right]_{y=0,b} = 0; \quad (3.8)$$

$$\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right]_{y=0,b} = 0; \quad (3.9)$$

$$[u_\beta]_{y=0,b} = 0; \quad (3.10)$$

$$\left[\left(B + \frac{D_c}{h^2} \right) \frac{\partial v_\beta}{\partial y} + \mu \frac{\partial u_\beta}{\partial x} + \frac{D_c \delta_n}{2h^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right]_{y=0,b} = 0; \quad (3.11)$$

$$\left[\left(2D + \frac{D_c \delta_n^2}{2h^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{D_c \delta_n}{h^2} \left(\frac{\partial v_\beta}{\partial y} + \mu \frac{\partial u_\beta}{\partial x} \right) \right]_{y=0,b} = 0. \quad (3.12)$$

Для простоты ограничимся рассмотрением квадратной панели. Решая задачу приближенно, будем считать (так как рассматриваемая оболочка полая и имеет квадратную форму), что при деформации панели происходит образование одной полуовалны как вдоль образующей, так и по дуге, и зададим прогиб в виде

$$w = f \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (3.13)$$

Граничные условия (3.1) и (3.7), очевидно, выполняются.

При интегрировании дифференциальных уравнений (2.6) мы будем первых два уравнения интегрировать точно, а последнее приближенно, пользуясь методом Зубова-Галеркина. Этот прием применялся для решения нелинейных задач устойчивости однослойных оболочек А. С. Вольмиром¹.

Введем (3.13) в первое уравнение (2.6). Интеграл полученного уравнения возьмем в виде

$$\frac{1}{2(1-\mu^2)(B+B_c)} \Phi = \frac{f^2}{32} \left(\cos 2 \frac{\pi x}{a} + \cos 2 \frac{\pi y}{a} \right) - \frac{f}{4R} \frac{a^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} - \frac{T y^2}{4(1-\mu^2)(B+B_c)}. \quad (3.14)$$

¹ См. сноски «2» на стр. 46.

Вводя выражение прогиба (3.13) во второе уравнение (2.6) и интегрируя, найдем

$$\Psi = 2 \frac{\pi^2}{a^2 r} \left[\left(h + \frac{\delta_n}{2} \right) + \frac{D_c \delta_n \pi^2}{G h a^2} \right] f \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}, \quad (3.15)$$

где

$$r = 1 + 2 \frac{\pi^2 h}{a^2 G} \left(B + \frac{1}{3} B_c \right).$$

Очевидно, что граничные условия (3.4), (3.5), (3.6), (3.10), (3.11) и (3.12) выполняются.

Так как граничные условия (3.2), (3.3), (3.8), (3.9) выполняются по краям панели лишь в среднем, то при интегрировании последнего уравнения (2.6) по методу Галеркина учтем их, представив это уравнение согласно (1.13) в виде

$$\begin{aligned} & \iint \left(2D - \frac{D_c \delta_n}{h} \right) \Delta \Delta w + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \\ & + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - 2 \left[B \left(h + \frac{\delta_n}{2} \right) + B_c \frac{h}{3} \right] \Delta \Psi \delta w \, dx \, dy + \\ & + \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + T \right) \delta u_x \, dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \delta u_y \, dx + \\ & + \int_0^b \int_0^a \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \delta v_x \, dx - \int_0^b \int_0^a \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \delta v_y \, dy = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Вводя сюда выражения (3.14) и (3.15), определив u_x и v_x при помощи выражений (2.2) и (2.4), и выполнив интегрирование, получим уравнение, связывающее значение сжимающей нагрузки T с величиной прогиба в середине панели f ,

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^4}{16a^2} (B + B_c) (1 - \mu^2) f^3 + \frac{1 - \mu (1 - \mu^2) (B + B_c)}{2R} f^2 + \\ & + \frac{(1 - \mu^2) (B + B_c) a^2}{8R^2} f + 2 \left(\frac{B \delta_n^2}{12} - \frac{B_c h \delta_n}{6} \right) \frac{\pi^4}{a^2} f + \\ & + 2 \frac{\pi^4}{a^2 r} \left[\left(h + \frac{\delta_n}{2} \right) + \frac{B_c h \delta_n}{3G} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \right] \left[B \left(h + \frac{\delta_n}{2} \right) + B_c \frac{h}{3} \right] f - T \frac{\pi^2}{4} f = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} T = & 8 \left[\frac{B \delta_n^2}{12} - \frac{B_c h \delta_n}{6} \right] \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 + \frac{(1 - \mu^2) (B + B_c) a^2}{2R^2} + \\ & + 8 \frac{\pi^2}{a^2 r} \left[\left(h + \frac{\delta_n}{2} \right) + \frac{B_c h \delta_n}{3G} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \right] \left[B \left(h + \frac{\delta_n}{2} \right) + B_c \frac{h}{3} \right] + \\ & + 2(1 - \mu) \frac{(1 - \mu^2) (B + B_c)}{\pi^2 R} f + \frac{\pi^2}{4a^2} (B + B_c) (1 - \mu^2) f^2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Из зависимости сжимающей нагрузки от прогиба следует, что, как и для однослойных оболочек¹, выпучивание трехслойной панели будет происходить в направлении центра кривизны ($f < 0$).

¹ А. С. Вольмир, Гибкие пластинки и оболочки, Гостехиздат, 1956.

Опуская в уравнении (3.17) нелинейные члены, получим

$$\begin{aligned} T_*^+ = & 8 \frac{\pi^2}{a^2 r} \left[\left(h + \frac{\delta_n}{2} \right) + \frac{B_c h \delta_n}{3G} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \right] \left[B \left(h + \frac{\delta_n}{2} \right) + B_c \frac{h}{3} \right] + \\ & + \frac{2}{3} [B \delta_n^2 - 2B_c h \delta_n] \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 + \frac{(1 - \mu^2) (B + B_c) a^2}{2R^2}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Это значение сжимающей нагрузки является решением линейной задачи устойчивости и соответствует верхнему значению критической нагрузки.

Минимизируя выражение (3.18) по f , найдем нижнее значение критической нагрузки

$$T_*^- = T_*^+ - \frac{4(1 - \mu^2)(1 - \mu)^2 a^2 (B + B_c)}{\pi^6 R^2}. \quad (3.20)$$

Уменьшение сжимающей нагрузки после потери устойчивости характеризуется величиной отношения

$$\gamma = \frac{T_*^+}{T_*^-}. \quad (3.21)$$

Исследуя это отношение, можно сделать вывод, что ослабление работы среднего слоя на нормальные напряжения у трехслойной оболочки по сравнению с однослойной приводит к уменьшению величины γ . С другой стороны, уменьшение жесткости сдвига среднего слоя приводит к обратному явлению — увеличению γ .

Действительно, рассмотрим трехслойную оболочку, у которой средний слой слабо работает на нормальные напряжения ($E_c \ll E_n$), но на сдвиг работает как в однослойной оболочке ($G = \infty$). Получим из выражений (3.19), (3.20) и (3.21)

$$\left. \begin{aligned} \gamma = \frac{1}{1 - \epsilon}; \quad \epsilon = \frac{4(1 - \mu^2)(1 - \mu)^2 a^2}{\pi^6 R^2 \left[8\lambda \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{1 - \mu^2}{2R^2} \frac{a^2}{\pi^2} \right]}; \\ \lambda = \frac{B \left[\left(h + \frac{\delta_n}{2} \right)^2 + \frac{1}{12} \delta_n^2 \right] + B_c \frac{1}{3} h^2}{B + B_c}. \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

Величина λ — отношение жесткости оболочки на изгиб к жесткости ее на растяжение. Для однородной оболочки ($E_n = E_c$) имеем

$$\lambda = \frac{1}{3} (h + \delta_n)^2.$$

С уменьшением модуля упругости заполнителя E_c , величина λ растет, в соответствии с чем величина γ уменьшается.

Рассмотрим теперь трехслойную оболочку с легким заполнителем, когда величиной B_c можно пренебречь по сравнению с B . Получим

$$\gamma_1 = \frac{1}{1 - \epsilon_1}; \quad \epsilon_1 = \frac{4(1 - \mu^2)(1 - \mu)^2 a^2}{\pi^6 R^2 \left[8\lambda_1 \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{2}{3} \delta_n^2 \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{(1 - \mu^2) a^2}{2R^2} \frac{a^2}{\pi^2} \right]}, \quad (3.23)$$

где

$$\lambda_1 = \frac{\left(h + \frac{\delta_n}{2} \right)^2}{1 + 2 \frac{\pi^2 h B}{G a^2}}.$$

Отсюда следует, что при уменьшении G величина γ увеличивается. При $G=0$ получим значение γ для изолированного внешнего слоя — оболочки толщиной δ_n , которое, очевидно, больше, нежели значение γ для однослойной оболочки толщиной $2(h+\delta_n)$.

Таким образом, нелинейный характер работы трехслойной оболочки, характеризуемый величиной γ , в зависимости от жесткости растяжения и сдвига среднего слоя может быть как более, так и менее существенным, чем для однослойной оболочки той же толщины.

Выясним, при каких параметрах трехслойной оболочки с легким заполнителем величина γ для нее меньше, чем для однослойной оболочки. Из выражений (3.22) при $E_n=E_c$ и (3.23) получим неравенство, которое должно для этого выполняться. После упрощений, сводящихся к отбрасыванию δ_n по сравнению с h , это неравенство приводится к виду

$$\frac{\pi^2 h B}{G a^2} < 1. \quad (3.24)$$

Итак, для трехслойных оболочек с легким заполнителем при условии (3.24) уменьшение нагрузки после потери устойчивости меньше, чем для однослойных оболочек той же толщины. (Заметим, что условие (3.24), полученное на примере квадратной панели, может служить лишь ориентировочным критерием.)

В заключение отметим, что попытка качественно оценить склонность трехслойных оболочек к хлопку была сделана ранее в работе Вань Чи-Дзе и Рао¹, где рассматривалась модель трехслойной оболочки в виде трехслойного сжатого стержня с промежуточными опорами, имеющими нелинейные характеристики. В этой работе был сделан неправильный вывод о том, что уменьшение склонности к хлопку трехслойных оболочек по сравнению с однослойными объясняется уменьшением жесткости сдвига среднего слоя. В действительности это происходит за счет ослабления работы среднего слоя на нормальные напряжения.

¹ Wang Chi-teh, G. V. R. Rao, A Study of an Analogous Model Giving the Nonlinear Characteristics in the Buckling Theory of Sandwich Cylinders, JAS, 1952 vol. 19, N2.

Л. М. КУРШИН

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ СЖАТИИ ТРЕХСЛОЙНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СВОБОДНО ОПЕРТОЙ ПАНЕЛИ И ЦИЛИНДРА С ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ИЗ ГОФРА

В работе получены уравнения устойчивости трехслойной цилиндрической оболочки, состоящей из двух тонких наружных слоев и среднего слоя из гофра. Решены задачи устойчивости трехслойной криволинейной панели, свободно опертой по четырем кромкам, и цилиндра при сжатии.

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

u_1, v_1, w_1 — перемещения точек срединных поверхностей наружных слоев
 u_2, v_2, w_2 — перемещения точек среднего слоя
 δ — толщина наружного слоя
 $2h$ — толщина заполнителя
 R — радиус срединной поверхности заполнителя
 E_n, μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона наружных слоев
 E_c — приведенный модуль упругости гофра в направлении ребер гофра
 G — приведенный модуль сдвига гофра в плоскости, перпендикулярной ребрам гофра

$$B = \frac{E_n \delta}{1 - \mu^2} \text{ — жесткость внешнего слоя при растяжении}$$

$$D = \frac{12(1 - \mu^2)}{2T_x, 2T_y, 2S} \text{ — жесткость внешнего слоя при изгибе}$$

$2T_x, 2T_y, 2S$ — продольные погонные усилия в трехслойной оболочке
 $2T_k$ — критическая нагрузка сжатия

§ 1. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ТРЕХСЛОЙНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ИЗ ГОФРА

Трехслойную панель с гофрированным заполнителем можно рассматривать при расчете как панель со сплошным ортотропным заполнителем с некоторыми приведенными жесткостными характеристиками. Параметры упругости такого ортотропного заполнителя определяют расчетным путем.

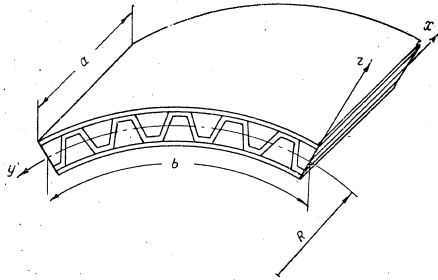
При выводе уравнений устойчивости трехслойных панелей с заполнителем из гофра внешние слои считают работающими по гипотезе прямых нормалей. Для учета влияния сдвига считают, что при деформации заполнителя прямые линии, перпендикулярные к его срединной поверхности до деформации, остаются прямыми и после деформации, но перпендикулярность за счет сдвига нарушается.

4*

51

Рассмотрим трехслойную круговую цилиндрическую оболочку, состоящую из двух тонких наружных слоев, связанных между собой посредством гофра (фиг. 1). Ребра гофра направлены параллельно образующим. В расчете будем считать, что гофри заменен некоторым осредненным по всему объему сплошным наполнителем, имеющим эквивалентные упругие параметры.

Обозначим через E_z модуль упругости такого наполнителя в направлении ребер гофра и через G модуль сдвига наполнителя в плоскости, перпендикулярной ребрам гофра. Для ребристых наполнителей можно считать модуль сдвига в плоскости ребер бесконечно большим (в этом направлении справедливо положение о сохранении прямыми нормалей к срединной поверхности), а модуль нормальной упругости наполнителя в направлении, перпендикулярном ребрам гофра, равным нулю.



Фиг. 1.

Полагая для внешних слоев справедливой гипотезу Кирхгофа—Лява, запишем перемещения точек верхнего слоя ($h \leq z \leq h + \delta$):

$$\left. \begin{aligned} w &= w_1; \\ u &= u_1 - \left(z - h - \frac{\delta}{2}\right) \frac{\partial w_1}{\partial x}; \\ v &= v_1 - \left(z - h - \frac{\delta}{2}\right) \frac{\partial w_1}{\partial y}; \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

и нижнего слоя ($-h - \delta \leq z \leq -h$):

$$\left. \begin{aligned} w &= w_2; \\ u &= u_2 - \left(z + h + \frac{\delta}{2}\right) \frac{\partial w_2}{\partial x}; \\ v &= v_2 - \left(z + h + \frac{\delta}{2}\right) \frac{\partial w_2}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Для пологих оболочек ($h/R \ll 1$) при рассмотрении общей потери устойчивости можно считать наполнитель в поперечном направлении недеформируемым

$$w_1 = w_2 = w. \quad (1.3)$$

Выражения перемещений среднего слоя можем представить в соответствии с исходными положениями в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \left[u_1 + u_2 + \frac{z}{h} \left(u_1 - u_2 + \delta \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]; \\ v &= \frac{1}{2} \left[v_1 + v_2 + \frac{z}{h} \left(v_1 - v_2 + \delta \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Введем обозначения

$$u_\alpha = \frac{u_1 + u_2}{2}; \quad v_\alpha = \frac{v_1 + v_2}{2}; \quad u_\beta = \frac{u_1 - u_2}{2}; \quad v_\beta = \frac{v_1 - v_2}{2}.$$

Выражения перемещений (1.1), (1.2) и (1.4) можно представить тогда в виде:

верхний слой

$$\left. \begin{aligned} u &= u_\alpha + u_\beta - \left(z - h - \frac{\delta}{2}\right) \frac{\partial w}{\partial x}; \\ v &= v_\alpha + v_\beta - \left(z - h - \frac{\delta}{2}\right) \frac{\partial w}{\partial y}; \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

нижний слой

$$\left. \begin{aligned} u &= u_\alpha - u_\beta - \left(z + h + \frac{\delta}{2}\right) \frac{\partial w}{\partial x}; \\ v &= v_\alpha - v_\beta - \left(z + h + \frac{\delta}{2}\right) \frac{\partial w}{\partial y}; \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

средний слой

$$\left. \begin{aligned} u &= u_\alpha + \frac{z}{h} \left(u_\beta + \frac{\delta}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right); \\ v &= v_\alpha + \frac{z}{h} \left(v_\beta + \frac{\delta}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

В плоскости ребер гофра было принято $G_{\alpha\beta} = \infty$. Следовательно, в наполнителе

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (1.8)$$

что дает

$$u_\beta = - \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (1.9)$$

Пользуясь этим выражением u_β , представим перемещения в виде:

верхний слой

$$\left. \begin{aligned} u &= u_\alpha - z \frac{\partial w}{\partial x}; \\ v &= v_\alpha + v_\beta - \left(z - h - \frac{\delta}{2}\right) \frac{\partial w}{\partial y}; \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

нижний слой

$$\left. \begin{aligned} u &= u_\alpha - z \frac{\partial w}{\partial x}; \\ v &= v_\alpha - v_\beta - \left(z + h + \frac{\delta}{2}\right) \frac{\partial w}{\partial y}; \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

средний слой

$$\left. \begin{aligned} u &= u_\alpha - z \frac{\partial w}{\partial x}; \\ v &= v_\alpha + \frac{z}{h} \left(v_\beta + \frac{\delta}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

Для деформаций слоев оболочки будем использовать выражения

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

Запишем потенциальную энергию деформации верхнего слоя

$$V_1 = -\frac{E_n}{2(1-\mu^2)} \int \int \int_{-h}^{h/2} \left[\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + 2\mu \epsilon_x \epsilon_y + \frac{1-\mu}{2} \gamma_{xy}^2 \right] dx dy dz. \quad (1.14)$$

Учитывая выражения (1.13) и (1.10) и выполнив интегрирование по z , получим

$$\begin{aligned} V_1 = & -\frac{E_n \delta}{2(1-\mu^2)} \int \int \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} - \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]^2 + \right. \\ & \left. + 2\mu \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} - \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1-\mu}{2} \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]^2 \right] dx dy - \\ & - \frac{E_n \delta^3}{24(1-\mu^2)} \int \int \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \right. \\ & \left. + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Аналогичным образом для потенциальной энергии нижнего слоя получим

$$\begin{aligned} V_3 = & -\frac{E_n \delta}{2(1-\mu^2)} \int \int \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]^2 + \right. \\ & \left. + 2\mu \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} + \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1-\mu}{2} \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]^2 \right] dx dy - \\ & - \frac{E_n \delta^3}{24(1-\mu^2)} \int \int \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ & \left. + 2\mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Потенциальную энергию ребристого заполнителя в соответствии с исходными положениями для него:

$$E_x = E_c, \quad E_y = 0; \quad E_z = \infty; \quad G_{xz} = \infty; \quad G_{yz} = G; \quad G_{xy} = 0$$

можем представить в виде

$$V_2 = -\frac{1}{2} \int \int \int_{-h}^h [E_c \epsilon_x^2 + G \gamma_{yz}^2] dx dy dz. \quad (1.17)$$

Вводя сюда выражения (1.13) и (1.12), получим

$$\begin{aligned} V_2 = & -\int \int \left\{ E_c h \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^2 + \frac{E_c h^3}{3} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{G}{h} \left[v_y + \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right]^2 \right\} dx dy. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Потенциальная энергия трехслойной оболочки будет

$$\begin{aligned} V = & V_1 + V_2 + V_3 = -B \int \int \left\{ \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^2 + \left(h + \frac{\delta}{2} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + 2\mu \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{w}{R} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] - 2\mu \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{1-\mu}{2} \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right]^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1-\mu}{2} \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} - \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]^2 \right\} dx dy - D \int \int \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ & \left. + 2\mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy - \\ & - \int \int \left\{ E_c h \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^2 + \frac{E_c h^3}{3} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{G}{h} \left[v_y + \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right]^2 \right\} dx dy. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Запишем вариационное уравнение изгиба трехслойной оболочки

$$\delta V + \delta A + \int \int q \delta w dx dy = 0. \quad (1.20)$$

Здесь δA — работа внешних сил, приложенных к контуру, на возможных перемещениях; q — распределенная поперечная нагрузка.

Введя в это уравнение выражение потенциальной энергии (1.19) и выполнив интегрирование по частям, получим дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned}
 & B \left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial y} + \frac{\mu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right] + E_c h \left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = 0; \\
 & \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial y} + \\
 & \quad + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \\
 & \frac{Bh}{G} \left[\frac{\partial^2 v_\beta}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v_\beta}{\partial x^2} - \frac{1+\mu}{2} \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] = v_\beta + \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial y}; \\
 & \quad - \frac{B}{R} \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{w}{R} + \mu \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \\
 & \quad + B \frac{\partial w}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial y} + \frac{\mu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right] + E_c h \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \\
 & \quad + B \frac{\partial w}{\partial y} \left[\frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + \\
 & \quad + B \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \mu \frac{v_x}{\partial y} + \mu \frac{w}{R} + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \\
 & \quad + E_c h \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + B \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{w}{R} + \mu \frac{\partial u_x}{\partial x} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + B(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \\
 & \quad - D \Delta \Delta w - \frac{E_c h^3}{3} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - B \left[\left(h + \frac{\delta}{2} \right)^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{1-\mu}{2} \left(h + \frac{\delta}{2} \right)^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - \right. \\
 & \quad \left. - \mu \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial^3 v_\beta}{\partial x^2 \partial y} - \frac{1-\mu}{2} \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial^3 v_\beta}{\partial x^2 \partial y} \right] + \\
 & \quad + \frac{G}{h} \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left[v_\beta + \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right] + q = 0.
 \end{aligned}
 \tag{1.21}$$

Здесь

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Интегрируя по толщине оболочки напряжения

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_x + \mu \epsilon_y); \\
 \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_y + \mu \epsilon_x); \\
 \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy}
 \end{aligned} \right\}
 \tag{1.22}$$

и учитывая выражения (1.1) — (1.4), получим выражения для усилий в трехслойной оболочке

$$\left. \begin{aligned}
 T_x &= B \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\mu}{R} w + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \\
 & \quad + E_c h \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]; \\
 T_y &= B \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \mu \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]; \\
 S &= \frac{B(1-\mu)}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right).
 \end{aligned} \right\}
 \tag{1.23}$$

Через T_x , T_y , S здесь обозначены усилия, приходящиеся на половину толщины трехслойной оболочки.

Преобразуем последнее из уравнений (1.21) при помощи двух первых и введем в него при помощи (1.23) величины T_x , T_y , и S . Получим систему уравнений изгиба в виде

$$\left. \begin{aligned}
 & B \left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial y} + \frac{\mu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right] + E_c h \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0; \\
 & \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial y} + \\
 & \quad + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \\
 & \frac{Bh}{G} \left[\frac{\partial^2 v_\beta}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v_\beta}{\partial x^2} - \frac{1+\mu}{2} \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] = v_\beta + \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial y}; \\
 & \quad - \frac{B}{R} \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{w}{R} + \mu \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} T_x + \\
 & \quad + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} T_y + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} S - D \Delta \Delta w - \frac{E_c h^3}{3} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \\
 & \quad - B \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \left[\left(h + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{1-\mu}{2} \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^3 v_\beta}{\partial x^2 \partial y} \right] + \\
 & \quad + \frac{G}{h} \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left[v_\beta + \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right] + q = 0.
 \end{aligned} \right\}
 \tag{1.24}$$

Из этих уравнений получим уравнения устойчивости оболочки.

Критической нагрузке соответствует момент наступления возможности раздвоения решения задачи. Два положения равновесия, ей соответствующие, будут лишь бесконечно мало отличаться друг от друга. Обозначим через u_x^0 , v_x^0 , w^0 , v_β^0 смещения, соответствующие положению потери устойчивости. Смещения, соответствующие положению после потери устойчивости, будут $u_x^0 + \epsilon u_x$, ..., $v_\beta^0 + \epsilon v_\beta$.

Функции $\bar{u}^a, \dots, \bar{v}_\beta$ будем считать конечными, а коэффициент ϵ бесконечно малой величиной. Вводя в уравнения (1.24) смещения, соответствующие двум рассматриваемым положениям, вычитая из уравнений в деформированном состоянии уравнения до потери устойчивости, опускаем члены, содержащие ϵ^2 , и сокращая затем все уравнения на ϵ , получим уравнения устойчивости трехслойной оболочки с заполнителем из гофра:

$$\left. \begin{aligned} B \left[\frac{\partial^2 u_a}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u_a}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v_a}{\partial x \partial y} + \frac{\mu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \right] + E_c h \frac{\partial^2 u_a}{\partial x^2} &= 0; \\ \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u_a}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v_a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_a}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} &= 0; \\ \frac{Bh}{G} \left[\frac{\partial^2 v_\beta}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v_\beta}{\partial x^2} - \frac{1+\mu}{2} \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y} \right] = v_\beta + \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial y}; \\ - \frac{B}{R} \left[\frac{\partial v_a}{\partial y} + \frac{w}{R} + \mu \frac{\partial u_a}{\partial x} \right] + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} T_x + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} T_y + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} S - \\ - D \Delta \Delta w - \frac{E_c h^3}{3} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{G}{h} \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left[v_\beta + \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right] - \\ - B \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \left[\left(h + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{1-\mu}{2} \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - \right. \\ \left. - \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v_\beta}{\partial x^2 \partial y} \right] &= 0. \end{aligned} \right\} (1.25)$$

Сравним полученную систему уравнений с уравнениями, выведенными в работе Штейна и Мейерса¹, где рассматривается трехслойная цилиндрическая оболочка с заполнителем разной жесткости в направлениях x и y . В этой работе считается, что трехслойная панель имеет общую изгибную жесткость $\frac{D_x}{1-\mu_x \mu_y}$ в направлении обрабатываемой, жесткость $\frac{D_y}{1-\mu_x \mu_y}$ в тангенциальном направлении и крутильную жесткость D_{xy} . В расчет вводятся также суммарные жесткости всех трех слоев при растяжении и сдвиге

$$\frac{E_x}{1-\mu_x \mu_y}, \quad \frac{E_y}{1-\mu_x \mu_y}, \quad G_{xy}.$$

Панель рассматривается как цельная, но имеющая жесткостные характеристики, соответствующие трехслойной панели. Влияние среднего слоя учитывается введением в расчет деформаций сдвига в плоскостях xz и yz , для чего вводятся обобщенные жесткости сдвига панели D_{Q_x} и D_{Q_y} .

Уравнения устойчивости такой ортотропной панели выводятся статическим путем. Для этого записываются пять уравнений равновесия элемента трехслойной панели и шесть соотношений между усилиями и моментами, отнесенными к срединной поверхности, и смещениями. После линеаризации и упрощений была получена система из пяти уравнений. В случае, когда жесткость сдвига в плоскости xz велика (заполнитель из

гофра с ребрами, параллельными оси x), в уравнениях можно положить $D_{Q_x} = \infty$. Система сократится до четырех уравнений и будет иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu_y \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\mu_y}{R} \frac{\partial w}{\partial x} + (1 - \mu_x \mu_y) \frac{G_{xy}}{E_x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) &= 0; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} + \mu_x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (1 - \mu_x \mu_y) \frac{G_{xy}}{E_y} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) &= 0; \\ Q_y + \frac{D_y}{1 - \mu_x \mu_y} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \frac{1}{D_{Q_y}} \frac{\partial^2 Q_y}{\partial y^2} + \mu_x \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) + \\ + \frac{1}{2} D_{xy} \left(2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{1}{D_{Q_y}} \frac{\partial^2 Q_y}{\partial x^2} \right) &= 0; \\ \frac{D_x}{1 - \mu_x \mu_y} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left(\frac{\mu_y D_x}{1 - \mu_x \mu_y} + 2D_{xy} + \frac{\mu_x D_y}{1 - \mu_x \mu_y} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \\ + \frac{D_y}{1 - \mu_x \mu_y} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{E_y}{R(1 - \mu_x \mu_y)} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} + \mu_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \\ - (N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}) - \\ - \frac{1}{D_{Q_y}} \left[\frac{D_y}{1 - \mu_x \mu_y} \frac{\partial^3 Q_y}{\partial y^3} + \left(\frac{\mu_y D_x}{1 - \mu_x \mu_y} + D_{xy} \right) \frac{\partial^3 Q_y}{\partial x^2 \partial y} \right] &= 0. \end{aligned} \right\} (1.26)$$

Эти уравнения совпадут с полученной нами системой (1.25), если для входящих туда жесткостных параметров принять:

$$\left. \begin{aligned} \frac{D_x}{1 - \mu_x \mu_y} &= \frac{2}{3} E_c h^3 + 2B \left(h + \frac{\delta}{2} \right)^2; \\ \frac{D_y}{1 - \mu_x \mu_y} &= 2B \left(h + \frac{\delta}{2} \right)^2; \\ D_{xy} &= 2(1 - \mu) B \left(h + \frac{\delta}{2} \right)^2; \\ \mu_x &= \mu, \quad \mu_y D_y = \mu_x D_x; \\ \frac{E_x}{1 - \mu_x \mu_y} &= 2E_c h + 2B; \\ \frac{E_y}{1 - \mu_x \mu_y} &= 2B; \\ G_{xy} &= (1 - \mu) B; \\ \mu_x &= \mu; \quad \mu_y E_x = \mu_x E_y; \\ D_{Q_y} &= 2 \frac{G \left(h + \frac{\delta}{2} \right)^2}{h}. \end{aligned} \right\} (1.28)$$

При этом в третье и четвертое уравнения (1.26) нужно ввести вместо функции Q_y новую функцию v_β по формуле

$$Q_y = \frac{D_{Q_y}}{\left(h + \frac{\delta}{2} \right)} \left[v_\beta + \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right]$$

и, положив в последнем уравнении

$$N_x = 2T_x, \quad N_y = 2T_y, \quad N_{xy} = 2S,$$

¹ M. Stein, J. Mayers. Small Deflection Theory for Curved Sandwich Plates. NACA, Rep. 1008, 1951.

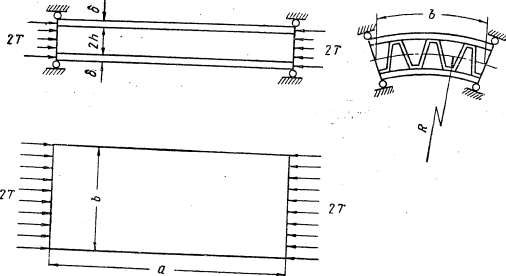
преобразовать его при помощи третьего уравнения. Расхождение будет состоять в том, что член $D\Delta\Delta w$, фигурирующий в последнем уравнении (1.25), будет отсутствовать в уравнениях (1.26). Отсутствие этого члена объясняется тем, что в работе Штейна и Мейерса при рассмотрении трехслойной оболочки как цельной не учитывалась изгибная жесткость внешних слоев.

§ 2. УСТОЙЧИВОСТЬ ПАНЕЛИ, СВОБОДНО ОПЕРТОЙ ПО ЧЕТЫРЕМ КРОМКАМ, И ЦИЛИНДРА ПРИ СЖАТИИ

Рассмотрим сжатую вдоль образующей свободно опертую панель (фиг. 2). В уравнениях (1.25) имеем $T_y=S=0$; $T_x=-T_k$. Примем также $D=0$ ¹. Решение уравнений (1.25) для случая свободного описания можно искать в виде

$$\left. \begin{aligned} w &= A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \\ u_x &= B \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \\ v_x &= C \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}; \\ v_y &= D \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

где $m, n=1, 2, 3, \dots$



Фиг. 2.

Вводя выражения (2.1) в уравнения (1.25), сокращая и приравнявая нулю определитель системы однородных уравнений, получим уравнение

$$\begin{aligned} &-\frac{1-\mu}{2} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 \frac{B}{R^2} \left[1 + \frac{Bh}{G} \left[\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\right] \left[(1-\mu^2) + \frac{E_c h}{B}\right] + \\ &+ \left[\frac{E_c h}{B} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left[\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right] + \right. \end{aligned}$$

¹ Пределы применимости допущения о пренебрежении изгибной жесткостью внешних слоев ($D=0$) зависят от жесткости сдвига среднего слоя трехслойной панели. Для панелей с наполнителем типа «гофр», у которых сопротивление среднего слоя сдвигу в одной из плоскостей весьма велико, это допущение можно считать приемлемым.

$$\begin{aligned} &+ \frac{1-\mu}{2} \left[\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]^2 \left\{1 + \frac{Bh}{G} \left(\frac{n^2\pi^2}{b^2} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{1-\mu}{2} \frac{m^2\pi^2}{a^2}\right)\right\} \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 T_k - \frac{E_c h^3}{3} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4\right] - B \left(h + \frac{\delta}{2}\right)^2 \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right] \left[1 + \frac{Bh}{G} \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right] = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из этого уравнения определим критическую нагрузку

$$\begin{aligned} T_k &= \frac{E_c h^3}{3} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \frac{B \left(h + \frac{\delta}{2}\right)^2 \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)^2 \left[1 + \frac{Bh}{G} \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]}{\frac{m^2\pi^2}{a^2} \left[1 + \frac{Bh}{G} \left(\frac{n^2\pi^2}{b^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{m^2\pi^2}{a^2}\right)\right]} + \\ &+ \frac{\frac{B}{R^2} \frac{1-\mu}{2} \left[\frac{E_c h}{B} + (1-\mu^2)\right] \frac{m^2\pi^2}{a^2}}{\frac{E_c h}{B} \frac{m^2\pi^2}{a^2} \left(\frac{n^2\pi^2}{b^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{m^2\pi^2}{a^2}\right) + \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Введем обозначения

$$\frac{a}{b} = \lambda; \quad \frac{E_c h}{B} = \psi; \quad \frac{\pi^2 B h}{b^2 G} = k; \quad \frac{b^4 (1-\mu^2)}{\pi^4 R^2 \left(h + \frac{\delta}{2}\right)^2} = \alpha^2. \quad (2.4)$$

Критическую нагрузку (2.3) можно записать в виде

$$T_k = m_l \frac{\pi^2 B \left(h + \frac{\delta}{2}\right)^2}{b^2}. \quad (2.5)$$

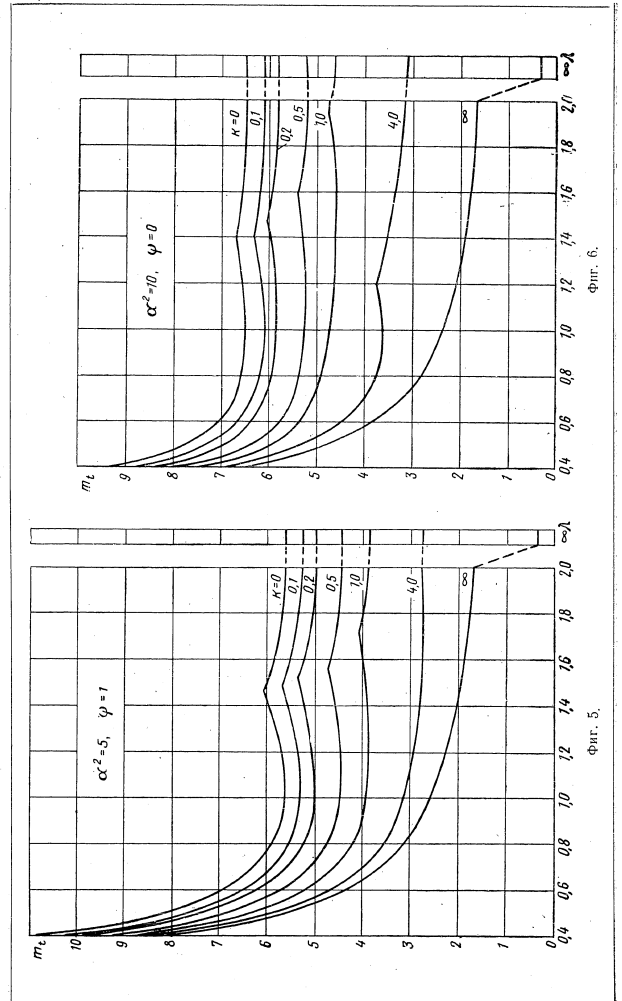
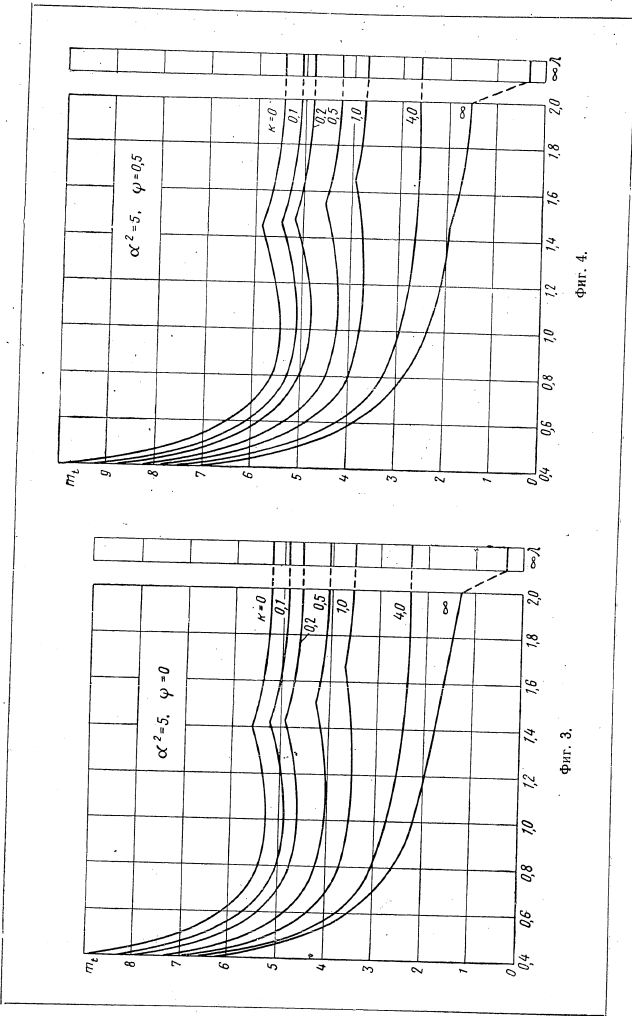
Здесь

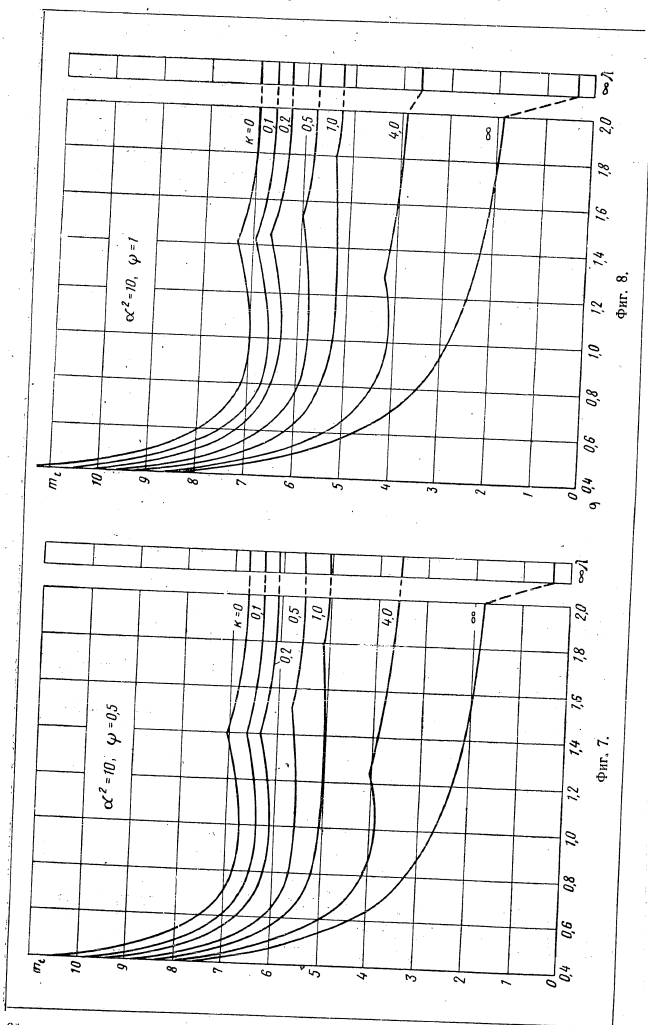
$$\begin{aligned} m_l &= \frac{1}{3} \frac{\psi}{\left(1 + \frac{\delta}{2h}\right)^2} \frac{m^2}{\lambda^2} + \frac{(m^2 + n^2\lambda^2)^2 \left[1 + \frac{1-\mu}{2} \frac{m^2}{\lambda^2} k\right]}{m^2\lambda^2 \left[1 + k \left(n^2 + \frac{1-\mu}{2} \frac{m^2}{\lambda^2}\right)\right]} + \\ &+ \alpha^2 \frac{\left(1 + \frac{\psi}{1-\mu^2}\right) m^2\lambda^2}{\psi m^2 \left(\frac{2}{1-\mu} n^2\lambda^2 + m^2\right) + (m^2 + n^2\lambda^2)^2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Целые числа m и l выбирают таким образом, чтобы получить наименьшее значение m_l ; его можно определять по графикам (фиг. 3-14)¹. Параметры α, ψ, λ и k при пользовании графиками определяют по формулам (2.4). Все кривые построены для $\delta/h=0,1$. Расчет показывает, что этими же графиками можно пользоваться и при $\delta/h=0,2$. Случай бесконечно длинной панели ($\lambda=\infty$) приведен на фиг. 3-14 особо.

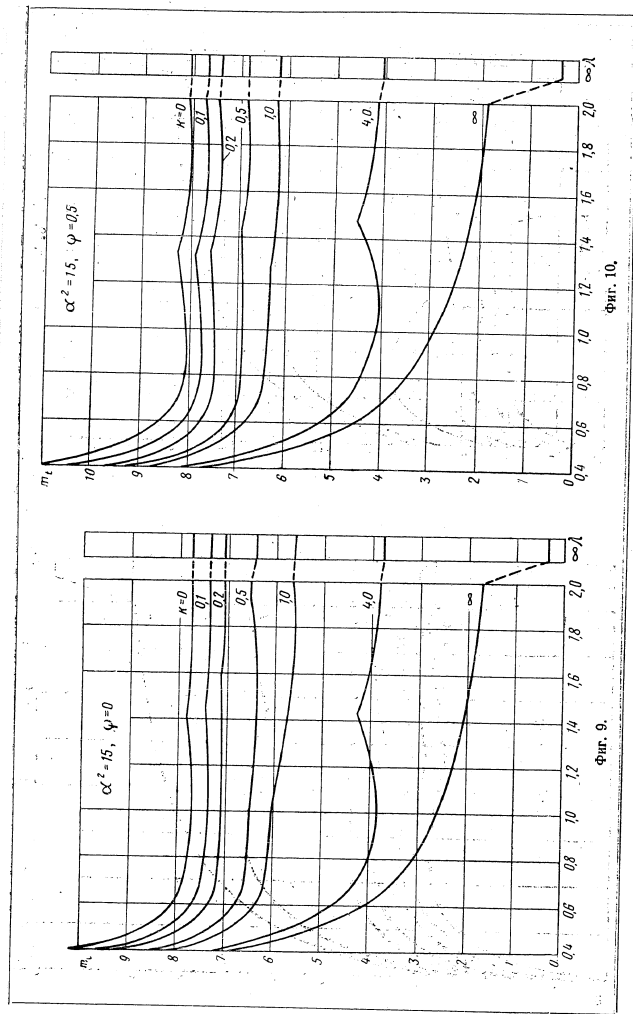
В случае трехслойного цилиндра, равномерно сжатого вдоль образующей, критическую нагрузку можно определять по формуле (2.3), полагая в ней $b=2\pi R$.

¹ Расчеты при построении графиков выполнены Э. П. Трофимовой.

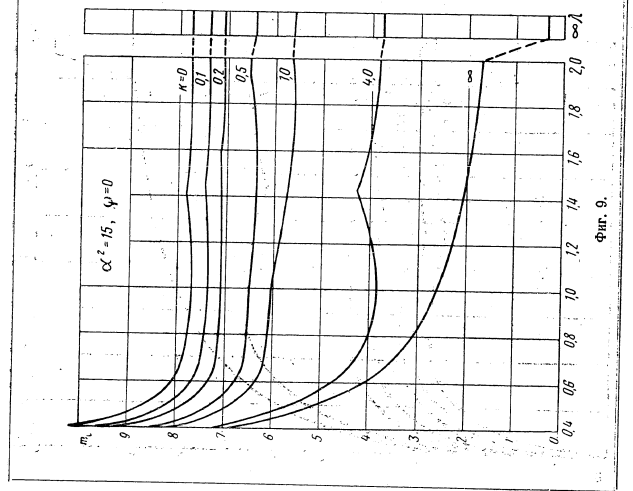
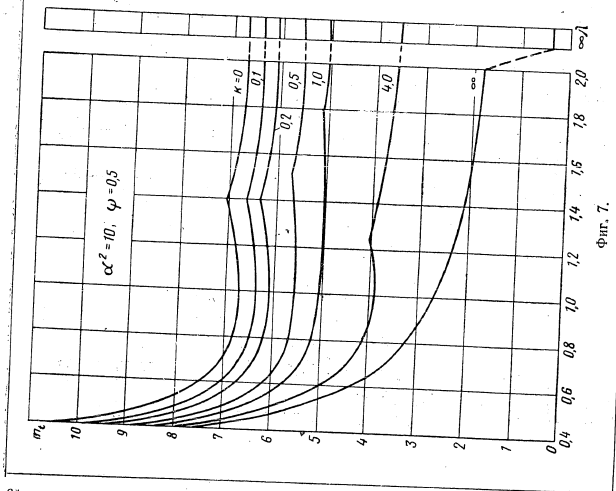




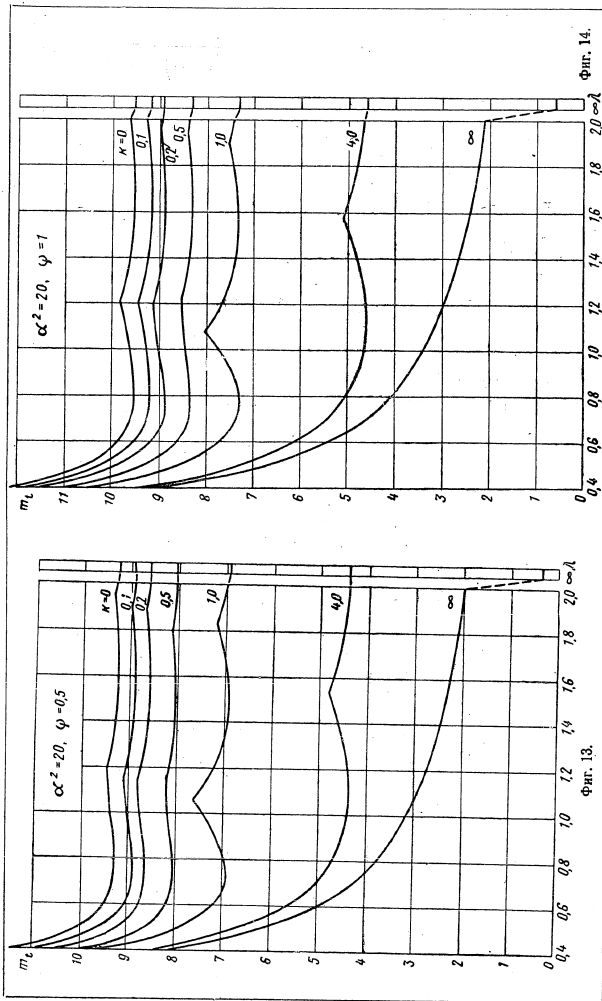
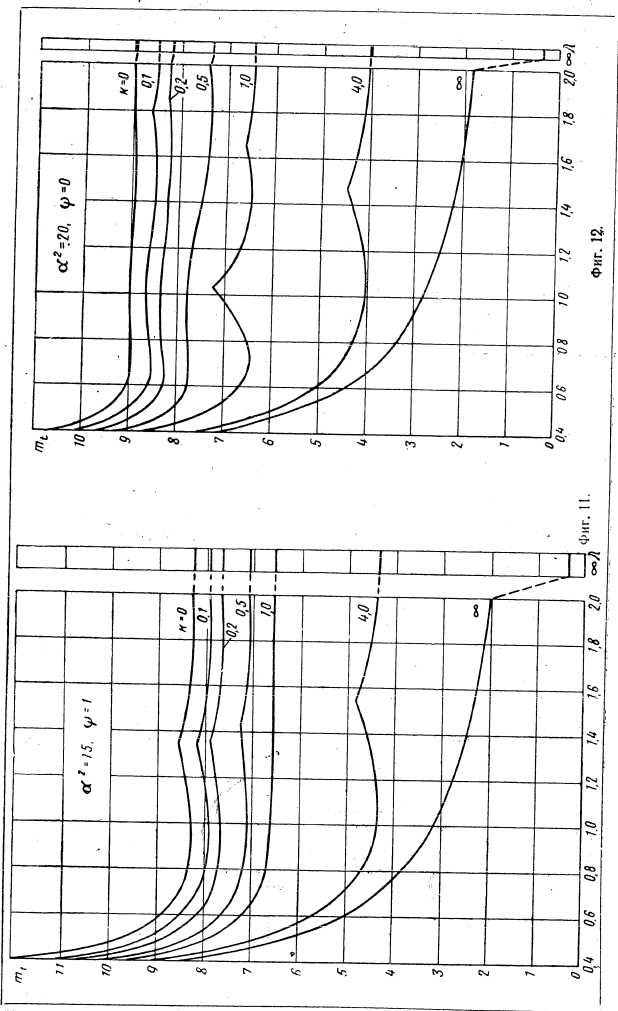
64



5 540



65



Введя обозначения

$$\frac{a}{2R\pi} = \lambda; \quad \frac{Ech}{B} = \psi; \quad \frac{Bh}{4R^2G} = k; \quad \frac{16R^2(1-\mu^2)}{\left(h + \frac{\delta}{2}\right)^2} = \alpha^2 \quad (2.7)$$

для критической нагрузки, получим

$$T_k = m_l \frac{\pi^2 B \left(h + \frac{\delta}{2}\right)^2}{4\pi^2 R^2}, \quad (2.8)$$

где

$$m_l = \frac{1}{3} \frac{\psi}{\left(1 + \frac{\delta}{2h}\right)^2} \frac{m^2}{\lambda^2} + \frac{(m^2 + n^2 \lambda^2)^2 \left[1 + \frac{1-\mu}{2} k \frac{m^2}{\lambda^2}\right]}{m^2 \lambda^2 \left[1 + k \left(n^2 + \frac{1-\mu}{2} \frac{m^2}{\lambda^2}\right)\right]} + \alpha^2 \frac{\left(1 + \frac{\psi}{1-\mu^2}\right) m^2 \lambda^2}{\psi m^2 \left(\frac{2}{1-\mu} n^2 \lambda^2 + m^2\right) + (m^2 + n^2 \lambda^2)^2} \quad (2.9)$$

Целые числа $m=1, 2, 3, \dots$; $n=0, 4, 6, 8, \dots$ выбирают таким образом, чтобы получить наименьшее значение m_l .

Л. М. КУРШИН

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ СЖАТИИ ТРЕХСЛОЙНОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ, ПОПЕРЕЧНЫЕ КРОМКИ КОТОРОЙ ЗАЩЕМЛЕНА, А ПРОДОЛЬНЫЕ СВОБОДНО ОПЕРТЫ

Решается задача устойчивости трехслойной цилиндрической панели с легким изотропным наполнителем при равномерном продольном сжатии в случае, когда поперечные кромки защемлены, а продольные свободно оперты.

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

δ — толщина наружного слоя

$2h$ — толщина наполнителя

R — радиус средней поверхности

E, μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона наружных слоев

G — модуль сдвига наполнителя

$$B = \frac{E\delta}{1-\mu^2} \text{ — жесткость внешнего слоя при растяжении}$$

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} \text{ — жесткость внешнего слоя при изгибе}$$

u_1, v_1, u_3, v_3 — смещения средних поверхностей внешних слоев оболочки

$$u_a = \frac{u_1 + u_3}{2}; \quad v_a = \frac{v_1 + v_3}{2}; \quad u_p = \frac{u_1 - u_3}{2}; \quad v_p = \frac{v_1 - v_3}{2}$$

w — прогиб

T_k — критическая нагрузка сжатия на один внешний слой

§ 1. О ТОЧНОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПАНЕЛИ С ДВУМА СВОБОДНО ОПЕРТЫМИ И ДВУМА ЗАЩЕМЛЕННЫМИ КРОМКАМИ

Уравнения устойчивости трехслойной цилиндрической оболочки с легким наполнителем при сжатии при допущении $D=0$ ¹ имеют вид²

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial y} + \frac{\mu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} &= 0; \\ \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

¹ Допущение $D=0$ приемлемо при $\alpha^2 < \frac{1-k}{k^2}$ (см. в этом сборнике статью «Об учете изгибной жесткости внешних слоев трехслойной криволинейной панели, работающей на продольное сжатие»).

² Уравнения устойчивости получены в нашей статье «Уравнения трехслойных цилиндрических оболочек», Известия АН СССР, ОТН № 3, 1958.

$$\left. \begin{aligned} \frac{Bh}{G} \left(\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v_\beta}{\partial x \partial y} \right) &= u_\beta + \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial x}; \\ \frac{Bh}{G} \left(\frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v_\beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_\beta}{\partial y^2} \right) &= v_\beta + \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial y}; \\ B \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v_\alpha}{\partial y} + \frac{\mu}{R} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \frac{w}{R^2} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} T_k &= B \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \Delta \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x} + \frac{\partial v_\beta}{\partial y} \right), \end{aligned} \right\} (1.1)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Граничные условия для цилиндрической панели (фиг. 1), кромки $y=0, b$ которой свободно оперты, а кромки $x=0, a$ защемлены, запишутся в виде

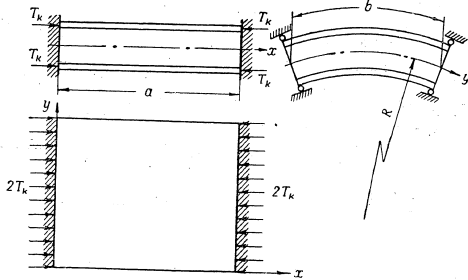
$$[w]_{x=0, a} = [w]_{y=0, b} = 0; \quad (1.2)$$

$$\left[\frac{\partial v_\alpha}{\partial y} + \mu \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \frac{w}{R} \right]_{y=0, b} = \left[\frac{\partial v_\beta}{\partial y} + \mu \frac{\partial u_\beta}{\partial x} \right]_{y=0, b} = 0; \quad (1.3)$$

$$\left[\frac{\partial u_\alpha}{\partial y} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial x} \right]_{x=0, a} = \left[\frac{\partial u_\beta}{\partial y} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x} \right]_{x=0, a} = 0; \quad (1.4)$$

$$[u_\alpha]_{y=0, b} = [u_\beta]_{y=0, b} = [u_\alpha]_{x=0, a} = [u_\beta]_{x=0, a} = 0. \quad (1.5)$$

Условия (1.3) и первые два условия (1.5) означают, что на кромках $y=0, b$ усилия во внешних слоях равны нулю и отсутствуют смещения в направлении касательной к контуру.



Фиг. 1.

Условия (1.4) и последние два условия (1.5) означают, что на кромках $x=0, a$ смещения по нормали отсутствуют и усилия сдвига во внешних слоях равны нулю.

Решение уравнений (1.1) при граничных условиях (1.2)–(1.5) будем искать в виде

$$\left. \begin{aligned} w &= f(x) \sin \gamma y; \\ u_\alpha &= \varphi_1(x) \sin \gamma y; \\ u_\beta &= \varphi_2(x) \sin \gamma y; \\ v_\alpha &= \psi_1(x) \cos \gamma y; \\ v_\beta &= \psi_2(x) \cos \gamma y. \end{aligned} \right\} (1.6)$$

Здесь $\gamma = n \frac{\pi}{b}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Введя выражения (1.6) в уравнения (1.1), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $f(x)$, $\varphi_1(x)$; $\varphi_2(x)$; $\psi_1(x)$; $\psi_2(x)$:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1''(x) - \frac{1-\mu}{2} \gamma^2 \varphi_1(x) - \frac{1+\mu}{2} \gamma^2 \psi_1'(x) + \frac{\mu}{R} f'(x) &= 0; \\ \frac{1+\mu}{2} \psi_1'(x) - \gamma^2 \varphi_1(x) + \frac{1+\mu}{2} \gamma^2 \psi_1'(x) + \frac{\gamma}{R} f(x) &= 0; \\ \frac{Bh}{G} \left[\varphi_2''(x) - \frac{1-\mu}{2} \gamma^2 \varphi_2(x) - \frac{1+\mu}{2} \gamma^2 \psi_2'(x) \right] &= \varphi_2(x) + \left(h + \frac{\delta}{2} \right) f'(x); \\ \frac{Bh}{G} \left[\frac{1+\mu}{2} \gamma^2 \psi_2'(x) + \frac{1-\mu}{2} \psi_2''(x) - \gamma^2 \varphi_2(x) \right] &= \psi_2(x) + \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \gamma f(x); \\ B \left[-\frac{\gamma}{R} \psi_1(x) + \frac{\mu}{R} \varphi_1'(x) + \frac{1}{R^2} f(x) \right] + f''(x) T_k &= \\ &= B \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \left[\varphi_2''(x) - \gamma^2 \varphi_2(x) - \gamma \psi_2'(x) + \gamma^3 \psi_2(x) \right]. \end{aligned} \right\} (1.7)$$

Решение этой системы уравнений запишется в виде

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^4 (C_i e^{\nu_i x} + A_i e^{-\nu_i x}); \\ \varphi_1(x) &= -\frac{1}{R} \sum_{i=1}^4 \frac{(\gamma^2 + \mu \nu_i^2) \nu_i}{(\nu_i^2 - \gamma^2)^2} (C_i e^{\nu_i x} - A_i e^{-\nu_i x}); \\ \varphi_2(x) &= \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\nu_i}{\frac{Bh}{G} (\nu_i^2 - \gamma^2) - 1} (C_i e^{\nu_i x} - A_i e^{-\nu_i x}) + \\ &\quad + C_5 e^{\nu_5 x} + A_5 e^{-\nu_5 x}; \\ \psi_1(x) &= \frac{\gamma}{R} \sum_{i=1}^4 \frac{\gamma^2 - (2+\mu) \nu_i^2}{(\nu_i^2 - \gamma^2)^2} (C_i e^{\nu_i x} + A_i e^{-\nu_i x}); \\ \psi_2(x) &= \gamma \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \sum_{i=1}^4 \frac{1}{\frac{Bh}{G} (\nu_i^2 - \gamma^2) - 1} (C_i e^{\nu_i x} + A_i e^{-\nu_i x}) + \\ &\quad + \frac{\nu_5}{\gamma} C_5 e^{\nu_5 x} - \frac{\nu_5}{\gamma} A_5 e^{-\nu_5 x}. \end{aligned} \right\} (1.8)$$

Здесь C_i, A_i — произвольные постоянные. Величины ν_i ($i=1, 2, 3, 4$) — различные корни уравнения

$$\left[\frac{B(1-\mu^2)\nu^4}{R^2} + \nu^2(\nu^2 - \gamma^2)^2 T_k \right] \left[-1 + \frac{Bh}{G} (\nu^2 - \gamma^2) \right] - B \left(h + \frac{\delta}{2} \right)^2 (\nu^2 - \gamma^2)^4 = 0, \quad (1.9)$$

а ν_5 — корень уравнения

$$-1 + \frac{Bh}{G} \frac{1-\mu}{2} (\nu^2 - \gamma^2) = 0. \quad (1.10)$$

Используя граничные условия на краях $x=0, a$, получим систему из десяти уравнений для постоянных C_i, A_i . Приравняв определитель этой системы нулю и выполнив ряд преобразований, получим уравнение:

$$\begin{vmatrix} \text{ch } \nu_1 a & \text{ch } \nu_2 a & \text{ch } \nu_3 a & \text{ch } \nu_4 a \\ a_1 \text{sh } \nu_1 a & a_2 \text{sh } \nu_2 a & a_3 \text{sh } \nu_3 a & a_4 \text{sh } \nu_4 a \\ b_1 \text{sh } \nu_1 a & b_2 \text{sh } \nu_2 a & b_3 \text{sh } \nu_3 a & b_4 \text{sh } \nu_4 a \\ d_1 \text{sh } \nu_1 a & d_2 \text{sh } \nu_2 a & d_3 \text{sh } \nu_3 a & d_4 \text{sh } \nu_4 a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 \text{sh } \nu_1 a & a_2 \text{sh } \nu_2 a & a_3 \text{sh } \nu_3 a & a_4 \text{sh } \nu_4 a \\ b_1 \text{sh } \nu_1 a & b_2 \text{sh } \nu_2 a & b_3 \text{sh } \nu_3 a & b_4 \text{sh } \nu_4 a \\ d_1 \text{sh } \nu_1 a & d_2 \text{sh } \nu_2 a & d_3 \text{sh } \nu_3 a & d_4 \text{sh } \nu_4 a \end{vmatrix} = 0; \quad (1.11)$$

где

$$a_i = \frac{\nu_i}{(\nu_i^2 - \gamma^2)^2}; \quad b_i = \frac{\nu_i}{\frac{Bh}{G}(\nu_i^2 - \gamma^2) - 1}; \quad d_i = \frac{\nu_i^3}{(\nu_i^2 - \gamma^2)^2};$$

$$i = 1, 2, 3, 4.$$

Введем обозначения

$$a^2 = \frac{(1 - \mu^2) b^4}{\pi^4 R^2 \left(h + \frac{\delta}{2}\right)^2};$$

$$m_i = \frac{T_k b^2}{\pi^2 B \left(h + \frac{\delta}{2}\right)^2};$$

$$k = \frac{\pi^2 Bh}{b^2 G};$$

$$\beta_i = \nu_i \frac{b}{\pi};$$

$$\varphi_i = \frac{a\pi}{2b} \beta_i.$$

Будем считать, что в поперечном направлении при потере устойчивости образуется одна полуволна ($n=1$), т. е. $\gamma = \pi/b$.
Уравнения (1.11) и (1.9) для определения параметра критической нагрузки m_i запишутся после некоторых преобразований в виде

$$[\alpha^2 \beta^4 + \beta^2 (\beta^2 - 1)^2 m_i] [-1 + k (\beta^2 - 1)] - (\beta^2 - 1)^4 = 0. \quad (1.13)$$

$$\begin{vmatrix} (\beta_1^2 - 1)^4 \text{ch } \varphi_1 & (\beta_2^2 - 1)^4 \text{ch } \varphi_2 & (\beta_3^2 - 1)^4 \text{ch } \varphi_3 & (\beta_4^2 - 1)^4 \text{ch } \varphi_4 \\ \beta_1 (\beta_1^2 - 1)^2 \text{sh } \varphi_1 & \beta_2 (\beta_2^2 - 1)^2 \text{sh } \varphi_2 & \beta_3 (\beta_3^2 - 1)^2 \text{sh } \varphi_3 & \beta_4 (\beta_4^2 - 1)^2 \text{sh } \varphi_4 \\ \beta_1^3 \text{sh } \varphi_1 & \beta_2^3 \text{sh } \varphi_2 & \beta_3^3 \text{sh } \varphi_3 & \beta_4^3 \text{sh } \varphi_4 \\ \beta_1^2 (\beta_1^2 - 1)^2 \text{sh } \varphi_1 & \beta_2^2 (\beta_2^2 - 1)^2 \text{sh } \varphi_2 & \beta_3^2 (\beta_3^2 - 1)^2 \text{sh } \varphi_3 & \beta_4^2 (\beta_4^2 - 1)^2 \text{sh } \varphi_4 \\ (\beta_1^2 - 1)^4 \text{sh } \varphi_1 & (\beta_2^2 - 1)^4 \text{sh } \varphi_2 & (\beta_3^2 - 1)^4 \text{sh } \varphi_3 & (\beta_4^2 - 1)^4 \text{sh } \varphi_4 \\ \beta_1 (\beta_1^2 - 1)^2 \text{ch } \varphi_1 & \beta_2 (\beta_2^2 - 1)^2 \text{ch } \varphi_2 & \beta_3 (\beta_3^2 - 1)^2 \text{ch } \varphi_3 & \beta_4 (\beta_4^2 - 1)^2 \text{ch } \varphi_4 \\ \beta_1^3 \text{ch } \varphi_1 & \beta_2^3 \text{ch } \varphi_2 & \beta_3^3 \text{ch } \varphi_3 & \beta_4^3 \text{ch } \varphi_4 \\ \beta_1^2 (\beta_1^2 - 1)^2 \text{ch } \varphi_1 & \beta_2^2 (\beta_2^2 - 1)^2 \text{ch } \varphi_2 & \beta_3^2 (\beta_3^2 - 1)^2 \text{ch } \varphi_3 & \beta_4^2 (\beta_4^2 - 1)^2 \text{ch } \varphi_4 \end{vmatrix} \times = 0. \quad (1.14)$$

Здесь $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ — корни уравнения (1.13). Величина m_i определяется совместным решением уравнений (1.13), (1.14). Из всех значений m_i для данных параметров панели должно быть выбрано наименьшее.

В вычислительном отношении использование этих уравнений представляет известные трудности, поэтому для практических целей получим приближенное выражение критической нагрузки при сжатии трехслойной цилиндрической панели с рассматриваемыми граничными условиями.

§ 2. ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

Полагая, что при потере устойчивости вдоль образующей возникает нечетное число выпучин, зададим прогиб в виде¹

$$w = A(1 - \cos \omega x) \sin \gamma y, \quad (2.1)$$

где

$$\omega = m \frac{\pi}{a}; \quad m = 2, 4, 6, \dots;$$

$$\gamma = n \frac{\pi}{b}; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Остальные смещения запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} u_\alpha &= \varphi_1(x) \sin \gamma y; \\ u_\beta &= \varphi_2(x) \sin \gamma y; \\ u_\alpha &= \psi_1(x) \cos \gamma y; \\ v_\beta &= \psi_2(x) \cos \gamma y. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Введя выражения (2.1) и (2.2) в первые четыре уравнения (1.1) и подчиняя решение граничным условиям, найдем

$$\left. \begin{aligned} u_\alpha &= -\frac{\omega}{R} \frac{(\gamma^2 - \omega^2)}{(\gamma^2 + \omega^2)^2} A \sin \omega x \sin \gamma y; \\ v_\alpha &= \left[-\frac{\gamma}{R} \frac{[\gamma^2 + (2 + \mu)\omega^2]}{(\gamma^2 + \omega^2)^2} \cos \omega x + \frac{1}{R\gamma} \right] A \cos \gamma y; \\ u_\beta &= -\frac{\omega \left(h + \frac{\delta}{2}\right)}{1 + \frac{Bh}{G}(\gamma^2 + \omega^2)} A \sin \omega x \sin \gamma y; \\ v_\beta &= \left[\frac{\gamma \left(h + \frac{\delta}{2}\right)}{1 + \frac{Bh}{G}(\gamma^2 + \omega^2)} \cos \omega x - \frac{\gamma \left(h + \frac{\delta}{2}\right)}{1 + \frac{Bh}{G}(\gamma^2 + \omega^2)} \right] A \cos \gamma y. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Пятое уравнение системы (1.1), поскольку все граничные условия выполнены, будем интегрировать по Галеркину

$$\iint \left\{ B \left[\frac{1}{R} \frac{\partial v_\alpha}{\partial y} + \frac{\mu}{R} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \frac{w}{R^2} \right] - B \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \Delta \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x} + \frac{\partial v_\beta}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} T_k \right\} \delta w \, dx \, dy = 0. \quad (2.4)$$

¹ При $m=4, 6$ возможно, что нечетному числу выпучин отвечает иная форма кривой прогибов. Этот вопрос не уточнен, так как практически расчет приходится проводить лишь при $m=2$.

Подставив сюда выражения (2.3) и (2.1) и выполнив интегрирование, найдем

$$T_K = \frac{2B \left(h + \frac{\delta}{2}\right)^2 \gamma^4}{\omega^2 \left(1 + \frac{Bh}{G} \gamma^2\right)} + \frac{B \left(h + \frac{\delta}{2}\right)^2 (\gamma^2 + \omega^2)^2}{\omega^2 \left[1 + \frac{Bh}{G} (\gamma^2 + \omega^2)\right]} + \frac{(1 - \mu^2) B}{R^2} \frac{\omega^2}{(\gamma^2 + \omega^2)^2} \quad (2.5)$$

Используя обозначения (1.12), запишем

$$m_i = \frac{2n^4 \lambda^2}{m^2 (1 + n^2 k)} + \frac{\lambda^2 \left(n^2 + \frac{m^2}{\lambda^2}\right)^2}{m^2 \left[1 + k \left(n^2 + \frac{m^2}{\lambda^2}\right)\right]} + a^2 \frac{m^2}{\lambda^2 \left(n^2 + \frac{m^2}{\lambda^2}\right)^2}, \quad (2.6)$$

где $\lambda = a/b$; $m = 2, 4, 6, \dots$; $n = 1, 2, 3, \dots$

Значения m и n определяются таким образом, чтобы получить наименьшее значение m_i . Расчет показывает, что для пологих панелей значение n следует брать равным единице.

Рассмотрим теперь случай, когда вдоль образующей возникает четное число выпучин. Так как поперечные кромки панели защемлены, то для приближенного решения задачи можно воспользоваться собственными функциями уравнения

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \rho^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = 0, \quad (2.7)$$

удовлетворяющими граничным условиям

$$[w]_{x=0, a} = [w']_{x=0, a} = 0. \quad (2.8)$$

Собственные функции будут иметь вид

$$w = 1 - \cos \rho x + \frac{2}{\rho a} (\sin \rho x - \rho x), \quad (2.9)$$

где собственные числа ρ являются корнями уравнения

$$\operatorname{tg} \frac{\rho a}{2} = \frac{\rho a}{2}. \quad (2.10)$$

Решая задачу устойчивости трехслойной панели с двумя защемленными и двумя свободно опертыми кромками, будем искать смещения в виде

$$\left. \begin{aligned} w &= A \left[1 - \cos \rho x + \frac{2}{\rho a} (\sin \rho x - \rho x) \right] \sin \gamma y; \\ u_x &= \varphi_3(x) \sin \gamma y; \\ u_y &= \varphi_4(x) \sin \gamma y; \\ v_x &= \psi_3(x) \cos \gamma y; \\ v_y &= \psi_4(x) \cos \gamma y, \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

где $\gamma = \frac{n\pi}{b}$; $n = 1, 2, 3, \dots$

Введя выражения (2.11) в первые четыре уравнения (1.1), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $\varphi_3(x)$;

$\varphi_4(x)$; $\psi_3(x)$; $\psi_4(x)$. Решая эту систему с учетом граничных условий, найдем

$$\left. \begin{aligned} u_x &= [C_1 \operatorname{sh} \gamma x + C_2 x \operatorname{sh} \gamma x + C_3 \operatorname{ch} \gamma x + C_4 x \operatorname{ch} \gamma x + \varphi_3(x)] \sin \gamma y; \\ v_x &= [C_3 \operatorname{sh} \gamma x + C_4 x \operatorname{sh} \gamma x + C_1 \operatorname{ch} \gamma x + C_2 x \operatorname{ch} \gamma x + \\ &+ \frac{3-\mu}{\gamma(1+\mu)} (C_2 \operatorname{sh} \gamma x + C_4 \operatorname{ch} \gamma x) + \bar{\psi}_3(x)] \cos \gamma y, \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

где

$$\bar{\varphi}_3(x) = A \left[\frac{\rho}{R} \frac{(\mu \rho^2 - \gamma^2)}{(\rho^2 + \gamma^2)^2} (\sin \rho x + \frac{2}{\rho a} \cos \rho x) + \frac{2}{Ra \gamma^2} \right];$$

$$\bar{\psi}_3(x) = A \left[\frac{\gamma}{R} \frac{[\gamma^2 + (2+\mu)\rho^2]}{(\gamma^2 + \rho^2)^2} \left(\frac{2}{\rho a} \sin \rho x - \cos \rho x \right) + \frac{1}{\gamma R} - \frac{2}{\gamma Ra} x \right];$$

$$C_1 = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \gamma a} \frac{A}{Ra} \left\{ (1+\mu) \frac{\rho^2 \gamma a}{\gamma^2 (\rho^2 + \gamma^2)} + \frac{2\rho^2 [\rho^2 + (2+\mu)\gamma^2]}{\gamma^2 (\rho^2 + \gamma^2)^2} \operatorname{sh} \gamma a \operatorname{ch} \gamma a + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{1+\mu}{4} \frac{2\gamma \rho a^2}{\rho^2 + \gamma^2} \operatorname{ch} \gamma a - \frac{\mu \rho^2 - \gamma^2}{(\rho^2 + \gamma^2)^2} \rho a \operatorname{sh} \gamma a \right] \left[\sin \rho a + \frac{2}{\rho a} \cos \rho a \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\gamma^2} [(1+\mu) \gamma a \operatorname{ch} \gamma a + 2 \operatorname{sh} \gamma a] \right\};$$

$$C_2 = \frac{1+\mu}{4} \frac{2\gamma A}{Ra} \frac{2\rho^2}{\gamma^2 (\rho^2 + \gamma^2)};$$

$$C_3 = -\frac{2A}{Ra} \frac{\rho^2 [\rho^2 + (2+\mu)\gamma^2]}{\gamma^2 (\rho^2 + \gamma^2)^2};$$

$$C_4 = \frac{1+\mu}{4} \frac{A}{\operatorname{sh} \gamma a} \left\{ -\frac{2\gamma}{Ra} \frac{2\rho^2}{\gamma^2 (\rho^2 + \gamma^2)} \operatorname{ch} \gamma a - \right.$$

$$\left. - \frac{2\gamma \rho}{R(\rho^2 + \gamma^2)} \left(\sin \rho a + \frac{2}{\rho a} \cos \rho a \right) + \frac{4}{Ra \gamma} \right\};$$

$$u_y = [D_1 \operatorname{sh} \eta x + D_2 \operatorname{ch} \eta x + \bar{\varphi}_4(x)] \sin \gamma y;$$

$$v_y = \left[\frac{\gamma}{\eta} (D_1 \operatorname{ch} \eta x + D_2 \operatorname{sh} \eta x) + \bar{\psi}_4(x) \right] \cos \gamma y;$$

$$\bar{\varphi}_4(x) = -A \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \left[\frac{1}{1 + \frac{Bh}{G} (\rho^2 + \gamma^2)} \left(\rho \sin \rho x + \frac{2}{a} \cos \rho x \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{a \left(1 + \frac{Bh}{G} \gamma^2 \right)} \right];$$

$$\bar{\psi}_4(x) = A \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \left[\frac{\gamma}{\rho \left[1 + \frac{Bh}{G} (\rho^2 + \gamma^2) \right]} \left(\rho \cos \rho x - \frac{2}{a} \sin \rho x \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\gamma}{1 + \frac{Bh}{G} \gamma^2} \left(\frac{2}{a} x - 1 \right) \right];$$

$$\eta = \sqrt{\frac{G}{Bh} + \gamma^2};$$

$$D_1 = \frac{A \left(h + \frac{b}{2} \right) \frac{2\rho^2}{a} \frac{Bh}{G} (1 - \text{ch } \gamma a)}{\left[\frac{Bh}{G} (\rho^2 + \gamma^2) + 1 \right] \left(1 + \frac{Bh}{G} \gamma^2 \right) \text{sh } \gamma a};$$

$$D_2 = \frac{A \left(h + \frac{b}{2} \right) \frac{2\rho^2}{a} \frac{Bh}{G}}{\left[\frac{Bh}{G} (\rho^2 + \gamma^2) + 1 \right] \left(1 + \frac{Bh}{G} \gamma^2 \right)}.$$

Выражения w, u_a, u_b, v_a, v_b введом в уравнение (2.4). Выполнив интегрирование, после ряда преобразований получим для критической нагрузки

$$T_k = \frac{1 - \mu^2}{R^2} \frac{B\rho^2}{(\rho^2 + \gamma^2)^2} \left\{ \frac{8(\rho^2 + 5\gamma^2)}{\gamma^3 a^3 (\rho^2 + \gamma^2)} \text{th } \frac{\gamma a}{2} - \frac{4}{\gamma^2 a^2 \text{ch}^2 \frac{\gamma a}{2}} - \frac{16}{a^2 (\rho^2 + \gamma^2)} + 1 \right\} +$$

$$+ \frac{B \left(h + \frac{b}{2} \right)^2}{\rho^2} \left\{ \frac{(\rho^2 + \gamma^2)^2}{1 + \frac{Bh}{G} (\rho^2 + \gamma^2)} + \frac{2\gamma^4}{3 \left(1 + \frac{Bh}{G} \gamma^2 \right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{(\eta^2 - \gamma^2)^2}{\eta} \frac{\frac{4\rho^2}{a^2} \frac{Bh}{G}}{\left[1 + \frac{Bh}{G} (\rho^2 + \gamma^2) \right] \left(1 + \frac{Bh}{G} \gamma^2 \right)} \left[-\frac{2\rho^2}{\gamma (\rho^2 + \gamma^2)} + \frac{4\rho^2}{a\gamma^2 (\rho^2 + \gamma^2)} \text{th } \frac{\gamma a}{2} \right] \right\}. \quad (2.13)$$

Введя обозначения (1.12) и положив $n=1$, получим

$$T_k = m_t \frac{\pi^2 B \left(h + \frac{b}{2} \right)^2}{b^2}, \quad (2.14)$$

где

$$m_t = \frac{(\psi^2 + \lambda^2)^2}{\psi^2 \lambda^2 \left[1 + k \left(1 + \frac{\psi^2}{\lambda^2} \right) \right]} + \frac{2\lambda^2}{3\psi^2 (1+k)} +$$

$$+ \frac{8\psi^2 k \left(-1 + \frac{2}{a\eta} \text{th } \frac{a\eta}{2} \right)}{\pi^2 \lambda^4 (1+k)^2 \left[1 + k \left(1 + \frac{\psi^2}{\lambda^2} \right) \right]^2} + \alpha^2 \frac{\psi^2 \lambda^2}{(\psi^2 + \lambda^2)^2} \left[1 + \right.$$

$$\left. + \frac{8(\psi^2 + 5\lambda^2)}{\pi^2 \lambda^3 (\psi^2 + \lambda^2)} \text{th } \frac{\pi\lambda}{2} - \frac{4}{\pi^2 \lambda^2 \text{ch}^2 \frac{\pi\lambda}{2}} - \frac{16}{\pi^2 (\psi^2 + \lambda^2)} \right]. \quad (2.15)$$

Здесь

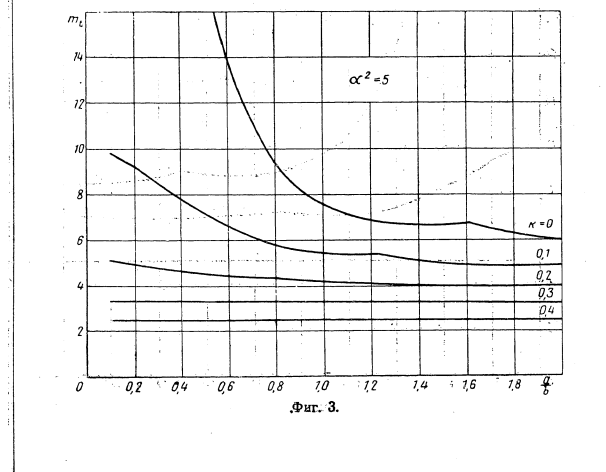
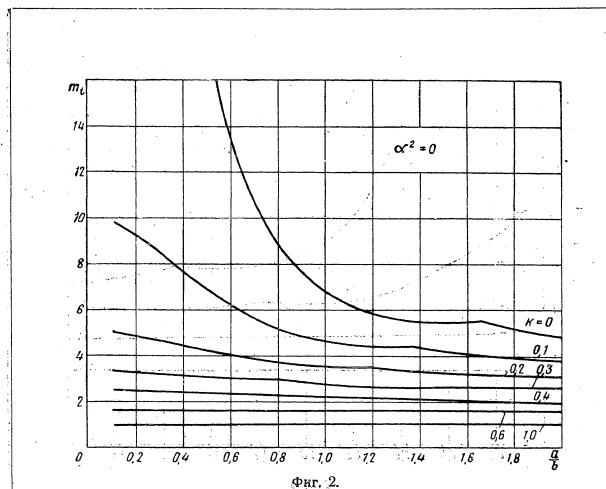
$$a\eta = \pi\lambda \sqrt{1 + \frac{1}{k}}; \quad \rho = \psi \frac{\pi}{a}; \quad \gamma = \frac{\pi}{b}; \quad \lambda = \frac{a}{b}; \quad k = \frac{\pi^2}{b^2} \frac{Bh}{G}.$$

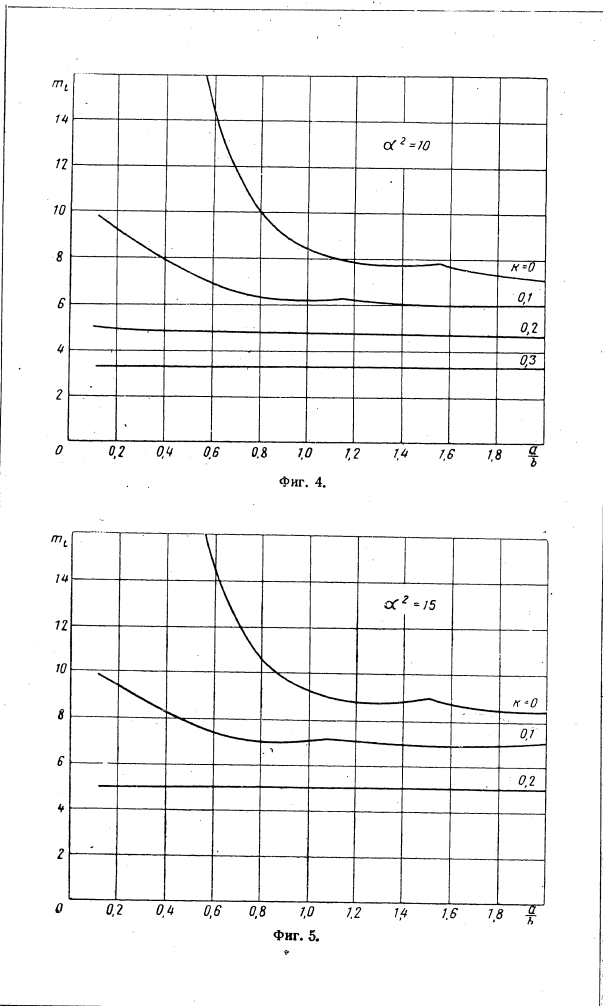
Величина ψ есть один из корней трансцендентного уравнения

$$\text{tg } \frac{\psi\pi}{2} = \frac{\psi\pi}{2}. \quad (2.16)$$

Выпишем первых три корня этого уравнения:

$$\frac{\psi_1\pi}{2} = 4,493; \quad \frac{\psi_2\pi}{2} = 7,725; \quad \frac{\psi_3\pi}{2} = 10,904.$$





Для заданных размеров панели в формулу (2.15) вводятся то значение φ , которое дает минимум m_c .

Таким образом, значение параметра критической нагрузки m_c в формуле (2.14) определяется по формулам (2.6) или (2.15). В расчет принимается та из них, которая дает меньшее значение m_c . Практически оказывается, что для коротких панелей ($a/b < 1$) наименьшее m_c дает формула (2.6) при $m=2$. При увеличении отношения a/b меньшее значение m_c может дать формула (2.15), причем при $a/b < 2$ следует брать для φ наименьший корень уравнения (2.16).

По формулам (2.6) и (2.15) были проведены расчеты наименьшего значения m_c для ряда параметров криволинейных сжатых панелей¹. Результаты расчета представлены на фиг. 2—5; на графиках обозначено:

$$\alpha^2 = \frac{(1-\nu^2)b^4}{\pi^4 R^2 \left(h + \frac{\delta}{2}\right)^2}; \quad m_c = \frac{T_k b^2}{\pi^2 B \left(h + \frac{\delta}{2}\right)^2}; \quad k = \frac{\pi^2 B h}{b^2 G}$$

¹ Расчеты выполнены Э. П. Трофимовой.

Л. М. КУРШИН

ОБ УЧЕТЕ ИЗГИБНОЙ ЖЕСТКОСТИ ВНЕШНИХ СЛОЕВ ТРЕХСЛОЙНОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПАНЕЛИ, РАБОТАЮЩЕЙ НА ПРОДОЛЬНОЕ СЖАТИЕ

Получена формула для расчета на продольное сжатие трехслойных криволинейных панелей с учетом собственной изгибной жесткости внешних слоев. Устанавливается область применимости допущения о равенстве нулю этой жесткости.

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- δ — толщина наружного слоя
- $2h$ — толщина заполнителя
- R — радиус срединной поверхности
- a, b — размеры панели по образующей и по дуге
- E, μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона наружных слоев
- G — модуль сдвига заполнителя
- $B = \frac{E\delta}{1-\mu^2}$ — жесткость внешнего слоя при растяжении
- $D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$ — жесткость внешнего слоя при изгибе
- u_1, v_1, u_3, v_3 — смещения срединных поверхностей внешних слоев оболочки
- $u_\alpha = \frac{u_1 + u_3}{2}; v_\alpha = \frac{v_1 + v_3}{2}; u_\beta = \frac{u_1 - u_3}{2}; v_\beta = \frac{v_1 - v_3}{2}; \alpha^2 = \frac{b^4(1-\mu^2)}{\pi^4 R^2 (h + \frac{\delta}{2})^2}; k = \frac{\pi^2 B h}{G b^2}$
- w — прогиб
- T_k — критическая нагрузка сжатия на один внешний слой

При решении задач устойчивости пластин и криволинейных панелей обычно изгибной жесткостью внешних слоев пренебрегают. Испытания трехслойных криволинейных панелей на сжатие, проведенные А. Я. Александровым и Л. Э. Бруккером, показали, что пренебрежение собственной изгибной жесткостью внешних слоев D при определении критических нагрузок возможно далеко не всегда. При этом, если для плоских панелей такое допущение возможно, как правило, при $k = \pi^2 B h / G b^2 < 1$, то для криволинейных панелей область его применимости уже и зависит от кривизны. В связи с этим в настоящей работе устанавливается область применимости допущения $D=0$ для сжатых криволинейных панелей и получена формула критической нагрузки для тех случаев, когда эта жесткость должна учитываться.

Уравнения устойчивости трехслойной цилиндрической панели с легким заполнителем при сжатии имеют вид¹

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial x \partial y} + \frac{\mu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} &= 0; \\ \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} &= 0; \\ \frac{Bh}{G} \left(\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v_\beta}{\partial x \partial y} \right) &= u_\beta + \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial x}; \\ \frac{Bh}{G} \left(\frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v_\beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_\beta}{\partial y^2} \right) &= v_\beta + \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial y}; \\ B \left[\frac{1}{R} \frac{\partial v_\alpha}{\partial y} + \frac{\mu}{R} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \frac{w}{R^2} \right] + D \Delta \Delta w + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} T_k &= \\ &= \left(h + \frac{\delta}{2} \right) B \Delta \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x} + \frac{\partial v_\beta}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} (1.1)$$

В этих уравнениях учтена собственная изгибная жесткость внешних слоев D .

Рассмотрим случай сжатия бесконечно длинной панели, свободно опертой по продольным кромкам. Для случая, когда изгибной жесткостью внешних слоев пренебрегают, формула критической нагрузки имеет вид

$$T_k = m_t \frac{\pi^2 B \left(h + \frac{\delta}{2} \right)^2}{b^2}, \quad (1.2)$$

где

$$m_t = \frac{(1+\lambda^2)^4 + \alpha^2 \lambda^4 [1+k(1+\lambda^2)]}{\lambda^2 (1+\lambda^2)^2 [1+k(1+\lambda^2)]}, \quad (1.3)$$

$$\alpha^2 = \frac{b^4(1-\mu^2)}{\pi^4 R^2 \left(h + \frac{\delta}{2} \right)^2}; \quad k = \frac{\pi^2 B h}{G b^2}. \quad (1.4)$$

Величина $\lambda = b/l_0$, где l_0 — длина волны потери устойчивости, определяется из условия минимума m_t .

Минимум выражения (1.3) имеет место при $l_0 \neq 0$ в случае если $\alpha^2 < \frac{1-k}{k^2}$. В случае же, когда $\alpha^2 \geq \frac{1-k}{k^2}$, минимум m_t имеет место при $l_0 = 0$ ($\lambda = \infty$) и равен $1/k$.

Таким образом, при $\alpha^2 \geq \frac{1-k}{k^2}$ вдоль образующей возникают волны, длина которых бесконечно мала. Нетрудно видеть, что этот результат является следствием допущения $D=0$.

¹ Куршин Л. М., Уравнения трехслойных цилиндрических оболочек, Известия АН СССР, ОТН № 3, 1958.

Определим из уравнений (1.1) критическую нагрузку, не пренебрегая D . Полагая для свободно опертой панели

$$\left. \begin{aligned} w &= A \sin \frac{\pi x}{l_0} \sin \frac{\pi y}{b}; \\ u_x &= B \cos \frac{\pi x}{l_0} \sin \frac{\pi y}{b}; \\ u_y &= C \cos \frac{\pi x}{l_0} \cos \frac{\pi y}{b}; \\ v_x &= D \sin \frac{\pi x}{l_0} \cos \frac{\pi y}{b}; \\ v_y &= E \sin \frac{\pi x}{l_0} \cos \frac{\pi y}{b}, \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

подставляя эти выражения в уравнения (1.1), приравняв нулю определитель системы и используя формулу (1.2), найдем

$$m_l = \frac{1}{12 \left(\frac{h}{b} + \frac{1}{2} \right)^2} \frac{(1+\lambda^2)^2}{\lambda^2} + \frac{(1+\lambda^2)^2}{\lambda^2 [1+k(1+\lambda^2)]} + \frac{\alpha^2 \lambda^2}{(1+\lambda^2)^2} \quad (1.6)$$

Как видим, при $l_0=0$ ($\lambda=\infty$) первый член этой формулы, появившийся в случае учета D , обращается в бесконечность. Таким образом, при учете D длина волны будет при $\alpha^2 \geq \frac{1-k}{k^2}$ хотя и весьма малой, но не бесконечно малой величиной, и при этом величина D существенно скажется на значении критической нагрузки.

Рассматривая случай, когда $\alpha^2 \geq \frac{1-k}{k^2}$, можно считать, что минимум выражения (1.6) имеет место при больших значениях λ . Так как с увеличением λ два последних члена в выражении (1.6) убывают, то для отыскания приближенного значения λ мы будем минимизировать выражение

$$\frac{1}{12 \left(\frac{h}{b} + \frac{1}{2} \right)^2} \frac{(1+\lambda^2)^2}{\lambda^2} + \frac{\alpha^2 \lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}.$$

Полагая $\frac{(1+\lambda^2)^2}{\lambda^2} = z$,

найдем, что минимум будет при

$$z = 2\alpha \sqrt{3} \left(\frac{h}{b} + \frac{1}{2} \right)$$

и

$$\lambda^2 = \frac{z-2}{2} + \sqrt{\left(\frac{z-2}{2} \right)^2 - 1} \approx z - 2.$$

Вводя значение λ в выражение (1.6), получим

$$m_{l \min} = \frac{\alpha}{\sqrt{3} \left(\frac{h}{b} + \frac{1}{2} \right)} + \frac{2\alpha \left(\frac{h}{b} + \frac{1}{2} \right) \sqrt{3}}{1+k \left[2\alpha \sqrt{3} \left(\frac{h}{b} + \frac{1}{2} \right) - 1 \right]} \approx \frac{1}{k} + \frac{\alpha}{\sqrt{3} \left(\frac{h}{b} + \frac{1}{2} \right)} \quad (1.7)$$

Очевидно, приближенный прием минимизации допустим тогда, когда величина λ действительно велика. Отсюда следует, что формулу (1.7) можно применять, когда

$$2\alpha \sqrt{3} \left(\frac{h}{b} + \frac{1}{2} \right) \gg 1,$$

т. е.

$$\alpha \gg \frac{1}{2\sqrt{3} \left(\frac{h}{b} + \frac{1}{2} \right)}.$$

Итак, при $\alpha^2 > \frac{1-k}{k^2}$ критическую нагрузку надо определять по формуле (1.7), полученной с учетом D .

При $\alpha^2 < \frac{1-k}{k^2}$ критическую нагрузку можно определять по формуле (1.3), пренебрегая величиной D .

В последнем случае величина D мало сказывается на значении критической нагрузки, в чем можно убедиться, исследуя крайний случай $\alpha^2 = \frac{1-k}{k^2}$. Тогда формула без учета D (1.3) дает

$$m_{l1} = \frac{1}{k},$$

а формула с учетом D (1.7) дает

$$m_{l2} = \frac{1}{k} + \frac{\sqrt{1-k}}{k \left(\frac{h}{b} + \frac{1}{2} \right) \sqrt{3}}.$$

Поправка составит

$$\gamma = \frac{m_{l2} - m_{l1}}{m_{l1}} = \frac{\sqrt{1-k}}{\sqrt{3} \left(\frac{h}{b} + \frac{1}{2} \right)} < \frac{1}{\sqrt{3} \left(\frac{h}{b} + \frac{1}{2} \right)}.$$

Так как при малой длине волны, при которой имеет смысл учитывать изгибную жесткость внешних слоев, граничные условия на поперечных кромках не могут сказываться существенно, то можно распространить критерий применимости допущения $D=0$ и на панели конечных размеров при условии, что продольные кромки панели свободно оперты.

В заключение приведем результаты испытаний на сжатие трехслойных панелей. Испытания проводились для панелей, у которых продольные кромки были свободно оперты, а поперечные защемлены¹. Для всех панелей выполняется критерий $\alpha^2 > \frac{1-k}{k^2}$. Данные испытаний сравниваются с результатами расчета по формуле (1.7). Как видим, формулу (1.7) можно считать приемлемой.

Результаты испытаний и данные расчетов приведены в таблице.

¹ Результаты испытаний заимствованы из работы А. Я. Александрова и Л. Э. Брюккера, «Испытание на прочность трехслойных панелей с заполнителями из пенопласта» (помещена в этом сборнике).

№ по пор.	$a=600 \text{ мм}; b=400 \text{ мм}; \delta=1 \text{ мм}; R=1 \text{ м}; B=79\,000 \text{ кг/см}$						
	$2h$ мм	G кг/см ²	$k = \frac{\pi^2 B h}{b^2 G}$	α	m_l	$P_{расч} = 2T_{kb}$ кг	$P_{экср}$ кг
1	15,0	81,3	4,500	1,93	0,365	9 110	8 200
2	15,0	124,0	2,950	1,93	0,482	12 050	9 200
3	15,0	84,0	4,360	1,93	0,372	9 300	7 800
4	9,5	150,0	1,540	2,94	0,975	10 500	8 900
5	10,0	93,3	2,610	2,81	0,682	8 050	8 450
6	10,0	79,5	3,070	2,81	0,625	7 380	8 600
7	4,0	127,0	0,768	6,18	2,720	6 640	6 280
8	4,0	121,0	0,807	6,18	2,660	6 490	6 960
9	4,0	566,0	0,172	6,18	6,750	16 460	14 600
10	4,5	92,0	1,193	6,62	2,020	5 960	5 000
11	4,0	178,0	0,548	6,18	3,220	7 860	6 500
12	5,0	304,0	0,401	5,15	3,410	11 990	10 200
13	15,0	159,0	2,300	1,93	0,578	14 400	8 400
14	14,5	89,0	3,970	1,99	0,404	9 460	11 500
15	13,0	124,0	2,560	2,21	0,577	11 050	11 600
16	14,5	429,0	0,825	1,99	1,356	31 800	16 000
17	15,0	282,0	1,300	1,93	0,91	22 700	15 700
18	15,0	315,0	1,160	1,93	1,00	25 050	20 700
19	10,0	32,6	7,480	2,81	0,431	5 080	4 400
20	9,5	40,0	5,790	2,94	0,499	5 350	4 620
21	10,0	270,0	0,904	2,81	1,399	16 500	18 500
22	10,0	141,0	1,730	2,81	0,878	10 400	9 250
23	20,0	72,6	6,720	1,47	0,232	9 980	7 300
24	20,0	159,0	3,070	1,47	0,411	17 670	13 200
25	14,0	104,0	3,280	2,06	0,467	10 250	8 550

С. И. ГАЛКИН

КРУЧЕНИЕ ОТКРЫТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ ШПАНГОУТАМИ

Рассматривается задача о кручении открытой цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами. Решение получено без введения каких-либо дополнительных гипотез, кроме общих допущений, связанных с представлением работы открытой оболочки как безмоментной. На основе этого решения указаны границы применимости гипотезы депланаций, нашедшей широкое распространение в задачах расчета открытых оболочек на кручение.

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- δ — толщина обшивки
- R — радиус оболочки
- l — длина отсека оболочки
- J — собственный момент инерции сечения шпангоута
- E — модуль упругости обшивки
- G — модуль сдвига обшивки
- E_0 — модуль упругости шпангоута
- F — площадь поперечного сечения бимса, подкрепляющего продольный край открытой оболочки
- u_k — продольные смещения поверхности обшивки в сечении, где расположен k -тый шпангоут
- v_k, w_k — смещения по касательной и по внутренней нормали сечения обшивки по k -тому шпангоуту
- Φ_k — погонные усилия сдвига в k -том отсеке оболочки, расположенном между шпангоутами $k-1$ и k
- T_k — погонные продольные (осевые) усилия в обшивке, в сечении, в котором расположен k -тый шпангоут
- $T^{(k)}$ — погонные продольные (осевые) усилия в обшивке в k -том отсеке оболочки, расположенном между шпангоутами $k-1$ и k
- T_k^0 — погонные продольные (осевые) усилия, возникающие в сечении бимса, подкрепляющего продольный край открытой оболочки

ВВЕДЕНИЕ

Вопросу расчета на кручение открытых круговых оболочек, подкрепленных шпангоутами, посвящено большое количество работ как отечественных, так и иностранных. Однако методы расчета, разработанные в большинстве из этих работ, основаны на применении тех или иных гипотез, значительно упрощающих задачу. Так, например, в работах В. З. Власова¹, получивших широкое признание как у нас, так и за границей, методы расчета открытых оболочек на кручение основаны на так называемой гипотезе депланаций, которой предполагается, что деформации сдвига срединной поверхности открытой оболочки при кручении равны

¹ В. З. Власов. Тонкостенные упругие стержни, Госстройиздат, 1940.

нулю. Эта гипотеза вместе с гипотезой о недеформируемости контура поперечного сечения позволяет относительно просто определить нормальные напряжения, а через них, из условия равновесия, вычислить поток касательных усилий, уравнивающих внешний крутящий момент.

В ряде работ, выполненных В. А. Марьиным¹, в основу расчета относительно коротких открытых оболочек, заделанных по краям, принимается так называемая гипотеза сдвига, которая предполагает, что поперечные сечения открытой оболочки при кручении остаются плоскими. Эта гипотеза вместе с гипотезой о недеформируемости контура поперечного сечения позволяет относительно просто вычислить поток касательных усилий, а через них из условий равновесия определить и нормальные напряжения. Следует заметить, что нормальные напряжения, определенные таким образом, не удовлетворяют всем интегральным условиям равновесия. Они, как правило, оставляют в сечениях открытой оболочки изгибающий момент, которого в действительности нет. В этом смысле гипотеза деформаций с математической точки зрения более оправдана; она позволяет удовлетворить всем интегральным условиям равновесия оболочки.

Наряду с вышеуказанными работами известны также и другие работы², в которых задача о кручении открытых оболочек решается иными путями, но также приближенными.

Расчет оболочки, выполненный на основе гипотезы деформаций, приводит к существенно различным результатам по сравнению с расчетом, в основу которого положена гипотеза сдвига. Так, например, координаты центров кручения, определенные указанными методами, значительно отличаются друг от друга.

Вопрос о том, в каких случаях применение одной из двух упомянутых гипотез приводит к более правильным результатам, до настоящего времени остается до конца не выясненным.

В настоящей работе при решении задачи о кручении открытой оболочки последняя рассматривается как безмоментная. Гипотеза о недеформируемости поперечного сечения оболочки в своей плоскости, а также гипотезы деформаций и сдвига не используются.

Все вычисления и графики, приведенные в работе, выполнены Г. П. Эскиной.

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

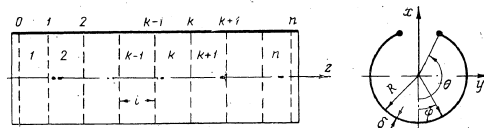
Рассмотрим открытую оболочку, состоящую из n равных отсеков, разделенных в своей плоскости упругими шпангоутами (фиг. 1). Продольные края оболочки подкреплены бимсами, имеющими площадь поперечного сечения F . Будем предполагать, что оболочка по поперечным краям нагружена крутящими моментами $M_{кр}$. При этих условиях задача состоит в определении напряжений и перемещений в любом отсеке открытой оболочки.

Эта задача решается при следующих предположениях. Обшивка рассматривается как тонкая безмоментная оболочка, воспринимающая поток сдвигающих усилий $\Phi_k(\varphi)$ и погонные осевые силы $T_k(\varphi)$ (фиг. 2). Коэффициент Пуассона обшивки для упрощения формул будем считать равным нулю. Это упрощение, как известно, не вносит больших погрешностей

¹ В. А. Марьин, Приближенный расчет коротких открытых цилиндрических оболочек, Сб. «Расчет пространственных конструкций», вып. 1, Машстройиздат, 1950.

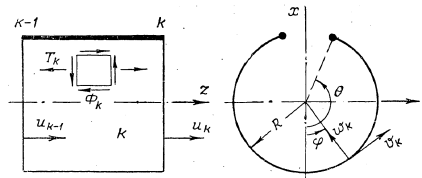
² М. М. Gololobov, Shear Distribution due to Twist in a Cylindrical Fuselage with a Cutout, JAS, 1947, vol. 14, N 4. H. L. Langhaar, C. R. Smith, Stresses in Cylindrical Semimonocoque Open Beams, JAS, 1947, vol. 14, N. 4.

в результате¹. Кроме того, предполагается, что бимсы, подкрепляющие продольные края оболочки, воспринимают только напряжения от растяжения и сжатия и не воспринимают перерезывающие силы и что напряжениями от собственного изгиба бимса можно пренебречь. Шпангоуты имеют одинаковые поперечные сечения и прикреплены непрерывно к контуру обшивки. Радиус нейтральной оси каждого шпангоута совпа-



Фиг. 1.

дает с радиусом средней поверхности обшивки. Предполагается также, что шпангоуты имеют конечную жесткость на изгиб в своей плоскости и равные нулю жесткости на кручение и изгиб в перпендикулярной к ней плоскости.



Фиг. 2.

При этих предположениях задача о кручении открытой оболочки сводится к отысканию функций $u(k, \varphi)$, $v(k, \varphi)$, $\Phi(k, \varphi)$, являющихся решением следующей системы дифференциально-разностных уравнений²

$$\left. \begin{aligned} v_k - v_{k-1} + \frac{l}{2R} \frac{d}{d\varphi} (u_k + u_{k-1}) &= \frac{l}{Gb} \left(\Phi_k - \frac{Gl^2}{12ER^2} \frac{d^2 \Phi_k}{d\varphi^2} \right); \\ \frac{Eb}{l} (2u_k - u_{k-1} - u_{k+1}) &= \frac{l}{2R} \frac{d}{d\varphi} (\Phi_k + \Phi_{k+1}); \\ E_0 J D_\varphi^2 v_k + R^4 (\Phi_{k+1} - \Phi_k) &= 0, \end{aligned} \right\} (1.1)$$

где

$$D_\varphi^2 = \frac{d^6(\cdot)}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4(\cdot)}{d\varphi^4} + \frac{d^2(\cdot)}{d\varphi^2}.$$

Функции $u(k, \varphi)$, $v(k, \varphi)$, $\Phi(k, \varphi)$, кроме того, должны удовлетворять некоторым граничным условиям, которые для данной задачи будут рассмотрены ниже.

Как показано в работе Л. И. Балабуха функции $u(k, \varphi)$, $v(k, \varphi)$, $\Phi(k, \varphi)$ полностью определяют напряженное состояние оболочки, под-

¹ Л. И. Балабуха, Прочность и устойчивость шпангоутов, связанных тонкой обшивкой, ЦАГИ, 1949.

² Вывод уравнений (1.1) при описанных выше предположениях дан в работе Л. И. Балабуха.

крепленной упругими шпангоутами. Так, например, изгибающие моменты, перерезывающие и осевые силы в шпангоутах будут

$$\left. \begin{aligned} M_k^0 &= -\frac{E_0 J}{R^2} \left(\frac{d^3 v_k}{d\varphi^3} + \frac{d v_k}{d\varphi} \right); \\ Q_k^0 &= \frac{E_0 J}{R^3} \left(\frac{d^4 v_k}{d\varphi^4} + \frac{d^2 v_k}{d\varphi^2} \right); \\ N_k^0 &= \frac{E_0 J}{R^4} \left(\frac{d^5 v_k}{d\varphi^5} + \frac{d^3 v_k}{d\varphi^3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Осевые усилия в отсеках оболочки

$$\left. \begin{aligned} T_k^{(k)} &= \frac{E_0 b}{l} (u_k - u_{k-1}) + \frac{l}{2R} \frac{d\Phi_k}{d\varphi}; \\ T_k^{(k+1)} &= \frac{E_0 b}{l} (u_{k+1} - u_k) - \frac{l}{2R} \frac{d\Phi_{k+1}}{d\varphi}, \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

где $T_k^{(k)}$ — осевые усилия в обшивке в сечении k -го шпангоута при подходе к нему со стороны k -го отсека;

$T_k^{(k+1)}$ — осевые усилия в обшивке в сечении k -го шпангоута при подходе к нему со стороны $(k+1)$ -го отсека.

Рассмотрим теперь граничные условия. Поток касательных усилий Φ_k и погонные осевые силы T_k должны удовлетворять шести интегральным условиям статического равновесия сил во всех отсеках оболочки. Это требование приводит к необходимости удовлетворения следующим шести интегральным условиям (см. фиг. 1):

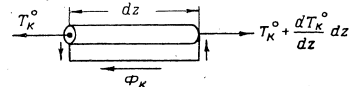
$$\left. \begin{aligned} \sum M_z &= 0 \quad \int_{-\theta}^{+\theta} \Phi_k d\varphi = \frac{M_{кр}}{R^2}; \\ \sum M_x &= 0 \quad R^2 \int_{-\theta}^{+\theta} T_k \sin \varphi d\varphi + T_k^0 R \sin \theta = 0; \\ \sum M_y &= 0 \quad R^2 \int_{-\theta}^{+\theta} T_k \cos \varphi d\varphi + T_k^0 R \cos \theta = 0; \\ \sum P_z &= 0 \quad \int_{-\theta}^{+\theta} T_k d\varphi = 0; \\ \sum P_x &= 0 \quad \int_{-\theta}^{+\theta} \Phi_k \sin \varphi d\varphi = 0; \\ \sum P_y &= 0 \quad \int_{-\theta}^{+\theta} \Phi_k \cos \varphi d\varphi = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Заметим, что в силу симметрии поперечного сечения относительно плоскости xOz (см. фиг. 1) Φ_k, v_k должны быть четными функциями относительно φ , а T_k и u_k — нечетными функциями. Поэтому из решения системы уравнений (1.1) следует удерживать для функций Φ_k и v_k четные члены относительно φ , а для функций u_k — нечетные члены. При этих условиях из шести соотношений (1.4) следует принимать во внимание только три: первое, второе и шестое, так как три оставшихся: третье, четвертое и пятое будут удовлетворены тождественно.

Граничные условия по продольным краям открытой оболочки, подкрепленные продольными элементами, можно получить из следующих соображений. Условие равновесия элемента подкрепления с прилегающей к нему обшивкой (фиг. 3) можно записать в виде

$$\left. \frac{dT_k^0}{dz} + \Phi_k \right|_{\varphi=\pm\theta} = 0. \quad (1.5)$$

С другой стороны, если считать, что обшивка и продольные подкрепления оболочки выполнены из одного материала¹, то принимая во внимание



Фиг. 3.

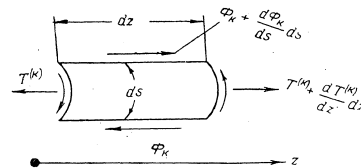
условие совместности деформаций бимса и прилегающей к нему обшивки ($\epsilon_0^0 = \epsilon_2 |_{\varphi=\pm\theta}$), осевые усилия T_k^0 можно выразить через усилия $T_k |_{\varphi=\pm\theta}$:

$$T_k^0 = \frac{T_k^{(k)} F}{\delta} \Big|_{\varphi=\pm\theta} \quad (1.6)$$

Усилия $T_k^{(k)}$ связаны с потоком касательных сил Φ_k следующей зависимостью:

$$\frac{dT_k^{(k)}}{dz} + \frac{1}{R} \frac{d\Phi_k}{d\varphi} = 0, \quad (1.7)$$

которую можно получить из условия равновесия элемента обшивки (фиг. 4). Подставляя зависимости (1.7), (1.6) в условие (1.5), в итоге



Фиг. 4.

получим граничные условия по продольным краям отсеков открытой оболочки в следующем виде:

$$\left[\Phi_k \pm \frac{F}{R\delta} \frac{d\Phi_k}{d\varphi} \right]_{\varphi=\pm\theta} = 0. \quad (1.8)$$

¹ Если материалы различные, то условие (1.6) будет: $T_k^0 = T_k \frac{F}{\delta} \frac{E_1}{E} \Big|_{\varphi=\pm\theta}$, где E_1 — модуль упругости подкрепления.

Кроме того, при $\varphi = \pm \theta$ должны быть равны нулю изгибающие моменты, перерезывающие и осевые силы в шпангоутах. Учитывая выражения (1.2), эти условия можно записать

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{d^3 v_k}{d\varphi^3} + \frac{dv_k}{d\varphi} \right]_{\varphi = \pm \theta} &= 0; \\ \left[\frac{d^4 v_k}{d\varphi^4} + \frac{d^2 v_k}{d\varphi^2} \right]_{\varphi = \pm \theta} &= 0; \\ \left[\frac{d^5 v_k}{d\varphi^5} + \frac{d^3 v_k}{d\varphi^3} \right]_{\varphi = \pm \theta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

Запишем теперь граничные условия для торцовых сечений оболочки. В случае абсолютно жесткого закрепления торцов граничные условия будут

$$u_0 = u_m = 0; \quad v_0 = 0; \quad w_0 = 0. \quad (1.10)$$

Таким образом, решение задачи о кручении открытой оболочки с жестко защемленными краями сводится к отысканию из решения системы дифференциально-разностных уравнений (1.1) функций $u(k, \varphi)$, $v(k, \varphi)$, $\Phi(k, \varphi)$, удовлетворяющих условиям

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\theta \Phi_k d\varphi &= \frac{M_{кр}}{2R^2}; \\ \int_0^\theta T_k \sin \varphi d\varphi + \frac{T_k^0 \sin \theta}{R} &= 0; \\ \int_0^\theta \Phi_k \cos \varphi d\varphi &= 0; \\ \left[\Phi_k \pm \frac{F}{R\delta} \frac{d\Phi_k}{d\varphi} \right]_{\varphi = \pm \theta} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{d^3 v_k}{d\varphi^3} + \frac{dv_k}{d\varphi} \right]_{\varphi = \pm \theta} &= 0; \\ \left[\frac{d^4 v_k}{d\varphi^4} + \frac{d^2 v_k}{d\varphi^2} \right]_{\varphi = \pm \theta} &= 0; \\ \left[\frac{d^5 v_k}{d\varphi^5} + \frac{d^3 v_k}{d\varphi^3} \right]_{\varphi = \pm \theta} &= 0; \\ u_0 = u_m = 0; \quad v_0 = \frac{dv_0}{d\varphi} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

§ 2. РЕШЕНИЕ УРАВНИЙ ДЛЯ ОБЛОЧКИ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ДВУХ ОТСЕКОВ

Решим задачу о кручении оболочки, состоящей из двух отсеков, торцовые сечения которых жестко защемлены (фиг. 5). Покажем, что система уравнений (1.1) в этом случае допускает строгое решение задачи при условии недеформируемости шпангоутов в своей плоскости. В самом деле перемещения шпангоутов v_k как абсолютно твердого тела следует искать из решения уравнения

$$E_0 J D_\varphi^2 v_k = 0, \quad (2.1)$$

интеграл которого будет

$$v_k = A_k \cos \varphi + D_k \sin \varphi + B_k + A_k^{(1)} \sin \varphi + D_k^{(1)} \varphi \cos \varphi + B_k^{(1)} \varphi. \quad (2.2)$$

Условия (1.12) будут удовлетворены с помощью этого выражения, если положить:

$$D_k = 0; \quad D_k^{(1)} = 0; \quad B_k^{(1)} = 0. \quad (2.3)$$

В данной задаче величина v_k должна быть четной функцией относительно φ , поэтому

$$A_k^{(1)} = 0.$$

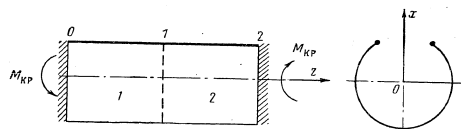
Таким образом, перемещения шпангоутов как абсолютно твердого тела при кручении оболочки можно записать в виде

$$v_k = A_k \cos \varphi + B_k. \quad (2.4)$$

Из третьего уравнения (1.1) теперь найдем

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k. \quad (2.5)$$

Отсюда видно, что при перемещении шпангоута как абсолютно твердого тела поток касательных усилий является функцией только φ и не зависит



Фиг. 5.

от номера отсека k . Второе уравнение (1.1) с учетом равенства (2.5) будет представлено теперь так:

$$2u_k - u_{k+1} - u_{k-1} = -\frac{l^2}{ER\delta} \frac{d\Phi}{d\varphi}. \quad (2.6)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде

$$u_k = C_k \frac{d\Phi}{d\varphi}. \quad (2.7)$$

Уравнение (2.6) будет удовлетворено с помощью такой зависимости, если коэффициенты C_k подчинить условию

$$2C_k - C_{k+1} - C_{k-1} = \frac{l^2}{ER\delta}. \quad (2.8)$$

Вводя теперь зависимости (2.4), (2.7) и (2.5) в первое уравнение (1.1), находим

$$\begin{aligned} (A_k - A_{k-1}) \cos \varphi + (B_k - B_{k-1}) + \frac{l}{2R} (C_k + C_{k-1}) \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = \\ = \frac{l}{G\delta} \left(\Phi - \frac{G l^2}{12 E R^2} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} \right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Чтобы функция Φ не зависела здесь от k , необходимо положить

$$A_k - A_{k-1} = A; \quad B_k - B_{k-1} = B; \quad C_k + C_{k-1} = C, \quad (2.10)$$

где A, B, C — некоторые постоянные, подлежащие определению.

Подставив их в уравнение (2.9), получим уравнение относительно Φ в следующем виде:

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} - \lambda_1^2 \Phi = -(A \cos \varphi + B) \frac{G\delta\lambda_1^2}{l}, \quad (2.11)$$

где

$$\lambda_1^2 = \frac{1}{G\delta \left(\frac{l^2}{12ER^2\delta} + \frac{C}{2R} \right)}. \quad (2.12)$$

Решением уравнения (2.11), как известно, будет

$$\Phi = D \operatorname{ch} \lambda_1 \varphi + \frac{G\delta}{l} \left(\frac{A\lambda_1^2}{1+\lambda_1^2} \cos \varphi + B \right), \quad (2.13)$$

где по условию задачи оставлены только четные члены. Решение (2.13) включает в себя четыре произвольных постоянных: A, B, D и λ_1 , которые должны быть определены из условий (1.11) и (1.13). Прежде чем определять эти коэффициенты, сначала покажем, что второе условие (1.11) является следствием третьего и четвертого условий (1.11) и поэтому является лишним.

Чтобы это показать, выразим осевые усилия T_k и T_k^0 с помощью выражений (1.3) через функцию Φ . Вводя зависимость (2.7) в (1.3), находим

$$\begin{aligned} T_k &= \left[\frac{E\delta}{l} (C_k - C_{k-1}) + \frac{l}{2R} \right] \frac{d\Phi}{d\varphi}, \\ T_k^0 &= \frac{F}{\delta} \left[\frac{E\delta}{l} (C_k - C_{k-1}) + \frac{l}{2R} \frac{d\Phi}{d\varphi} \right]_{\varphi=\pm\theta}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Принимая во внимание эти выражения, второе условие (1.11) можно записать теперь в виде

$$\int_0^\theta \frac{d\Phi}{d\varphi} \sin \varphi d\varphi + \frac{F}{R\delta} \left[\sin \varphi \frac{d\Phi}{d\varphi} \right]_{\varphi=\pm\theta} = 0. \quad (2.15)$$

Это условие можно также получить в результате линейной комбинации третьего и четвертого условий (1.11). В самом деле, умножив четвертое условие (1.11) на $\sin \theta$ и вычитая из него третье условие (1.11), находим

$$\left[\Phi \sin \varphi + \frac{F}{R\delta} \sin \varphi \frac{d\Phi}{d\varphi} \right]_{\varphi=\pm\theta} - \int_0^\theta \Phi \cos \varphi d\varphi = 0. \quad (2.16)$$

Интегрируя эту разность по частям, в итоге получим условие (2.15). Таким образом, если удовлетворены третье и четвертое условия (1.11), то при этом второе условие (1.11) удовлетворится тождественно.

Поэтому для определения постоянных решения (2.13) используем первое, третье и четвертое условия (1.11). Из этих условий после необходимых преобразований окончательно найдем

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{M_{кр} l (1+\lambda_1^2) \alpha_1}{R^2 G \delta \lambda_1 (\chi_1 + \lambda_1 \theta \psi_1)}; & B &= \frac{M_{кр} l^2 \lambda_1 \psi_1}{2R^2 G \delta (\chi_1 + \lambda_1 \theta \psi_1)}, \\ D &= \frac{M_{кр} \lambda_1 \beta (1+\lambda_1^2)}{2R^2 (\chi_1 + \lambda_1 \theta \psi_1)}, \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= (1+\lambda_1^2) \left(\operatorname{ch} \lambda_1 \theta + \frac{F}{R\delta} \lambda_1 \operatorname{sh} \lambda_1 \theta \right) \sin \theta - \lambda_1 \operatorname{sh} \lambda_1 \theta \cos \theta - \operatorname{ch} \lambda_1 \theta \sin \theta, \\ \beta &= \frac{2F}{R\delta} \sin^2 \theta + \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta; \\ \psi_1 &= 2 \left(\cos \theta - \frac{F}{R\delta} \sin \theta \right) (\lambda_1 \operatorname{sh} \lambda_1 \theta \cos \theta + \operatorname{ch} \lambda_1 \theta \sin \theta) - (1+\lambda_1^2) (\theta + \\ &+ \frac{1}{2} \sin 2\theta) \left(\operatorname{ch} \lambda_1 \theta + \frac{F}{R\delta} \lambda_1 \operatorname{sh} \lambda_1 \theta \right); & \chi_1 &= 2\alpha_1 \lambda_1 \sin \theta + \beta (1+\lambda_1^2) \operatorname{sh} \lambda_1 \theta. \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Параметр λ_1 зависит, как видно из выражения (2.12), от произвольного коэффициента C , подлежащего определению. Для его определения используем условия (2.8), (2.10), которые для оболочки, состоящей из двух отсеков, запишутся так

$$\left. \begin{aligned} 2C_1 - C_2 - C_0 &= \frac{l^2}{ER\delta}, \\ C_1 + C_0 &= C, \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

где C_0, C_1, C_2, C — произвольные коэффициенты, которые определим из этих выражений и первого условия (1.13).

Первое условие (1.13) будет удовлетворено, если, приняв во внимание зависимость (2.7), положить

$$C_0 = C_2 = 0. \quad (2.20)$$

Тогда получим

$$C_1 = C = \frac{l^2}{2ER\delta}. \quad (2.21)$$

Заменив отсюда C в выражении (2.12), после необходимых преобразований, получим

$$\lambda_1 = \frac{R}{l} \sqrt{\frac{3E}{G}}. \quad (2.22)$$

Из всех условий (1.11), (1.12), (1.13) осталось пока неудовлетворенным только второе условие (1.13), которое удовлетворим с помощью зависимостей (2.4) и (2.10).

В самом деле, перемещения v_k для трех шпангоутов рассматриваемой оболочки можно записать так

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= A_0 \cos \varphi + B_0; \\ v_1 &= A_1 \cos \varphi + B_1; \\ v_2 &= A_2 \cos \varphi + B_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

Произвольные коэффициенты $A_0, B_0, A_1, B_1, A_2, B_2$ связаны между собой следующей зависимостью, вытекающей из (2.10)

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= A + A_0; & B_1 &= B + B_0; \\ A_2 &= A + A_1; & B_2 &= B + B_1, \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

где A, B — коэффициенты, определяемые выражениями (2.17). Отсюда, второе условие (1.13) будет удовлетворено, если в (2.23) положить

$$A_0 = B_0 = 0. \quad (2.25)$$

Таким образом получаем следующие выражения для коэффициентов A_1, B_1, A_2, B_2 :

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{M_{кр} l^2 \alpha_1 (1 + \lambda_1^2)}{R^2 G \delta \lambda_1 (\chi_1 + \lambda_1 \theta \psi_1)}; & B_1 &= \frac{M_{кр} l \lambda_1 \psi_1}{2 R^2 G \delta (\chi_1 + \lambda_1 \theta \psi_1)}; \\ A_2 &= \frac{2 M_{кр} \alpha_1 (1 + \lambda_1^2)}{R^2 G \delta \lambda_1 (\chi_1 + \lambda_1 \theta \psi_1)} = 2 A_1; & B_2 &= 2 B_1. \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

Подставляя теперь выражения коэффициентов (2.17), (2.20), (2.21), (2.25), (2.26) в решения (2.4), (2.7), (2.13), получим решение для случая кручения открытой оболочки, состоящей из двух отсеков и с жестко зашумленными торцовыми сечениями в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \frac{M_{кр} l^2 \alpha_1}{2 R^2 (\chi_1 + \lambda_1 \theta \psi_1)} [(1 + \lambda_1^2) \beta \operatorname{ch} \lambda_1 \varphi + 2 \alpha_1 \cos \varphi + \psi_1]; \\ u_0 &= u_2 = 0; \\ u_1 &= \frac{M_{кр} \lambda_1 l^2}{4 R^2 E \delta (\chi_1 + \lambda_1 \theta \psi_1)} [(1 + \lambda_1^2) \lambda_1 \beta \operatorname{sh} \lambda_1 \varphi - 2 \alpha_1 \sin \varphi]; \\ v_0 &= 0; \\ v_1 &= \frac{M_{кр} l}{R^2 G \delta (\chi_1 + \lambda_1 \theta \psi_1)} \left[\frac{(1 + \lambda_1^2) \alpha_1}{\lambda_1} \cos \varphi + \frac{1}{2} \lambda_1 \psi_1 \right]; \\ v_2 &= 2 v_1. \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

Коэффициенты $\alpha, \beta, \psi_1, \chi_1$ и λ_1 следует определять соответственно из выражений (2.18), (2.22).

Используя эти формулы для преобразования выражений (2.14), получим выражения для определения осевых сил в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} T_0 &= -T_2 = \frac{M_{кр} \lambda_1 l}{2 R^3 (\chi_1 + \lambda_1 \theta \psi_1)} [(1 + \lambda_1^2) \lambda_1 \beta \operatorname{sh} \lambda_1 \varphi - 2 \alpha_1 \sin \varphi]; \\ T_1 &= 0; \\ T_0^0 &= -T_2^0 = \frac{M_{кр} \lambda_1 l F}{2 R^3 \delta (\chi_1 + \lambda_1 \theta \psi_1)} [(1 + \lambda_1^2) \lambda_1 \beta \operatorname{sh} \lambda_1 \theta - 2 \alpha_1 \sin \theta]; \\ T_1^0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

Таким образом, все компоненты упругой деформации жестко зашумленной по краям открытой оболочки при кручении последней легко могут быть определены по формулам (2.27) и (2.28).

Как известно, оболочку, шпангоуты которой перемещаются как абсолютно твердое тело, можно рассматривать как балку, сечения которой при кручении поворачиваются вокруг некоторой точки, центра кручения, лежащего в плоскости этого сечения. Положение центра кручения и величину относительного угла закручивания φ отсека легко определить из следующих простых рассуждений.

Перемещения точек $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$ шпангоута № 1 на основании формул (2.27) можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} v_1 |_{\varphi=0} &= \frac{M_{кр} l}{R^2 G \delta (\chi_1 + \lambda_1 \theta \psi_1)} \left[\frac{(1 + \lambda_1^2) \alpha_1}{\lambda_1} + \frac{1}{2} \lambda_1 \psi_1 \right]; \\ v_1 |_{\varphi=\pi} &= -\frac{M_{кр} l}{R^2 G \delta (\chi_1 + \lambda_1 \theta \psi_1)} \left[\frac{(1 + \lambda_1^2) \alpha_1}{\lambda_1} - \frac{1}{2} \lambda_1 \psi_1 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

С другой стороны, если пользоваться понятием центра кручения, то перемещения v_1 шпангоута № 1 в точках $\varphi=0, \varphi=\pi$ можно записать так (фиг. 6)

$$\left. \begin{aligned} v_1 |_{\varphi=0} &= -(\rho - R) \bar{\varphi}; \\ v_1 |_{\varphi=\pi} &= -(\rho + R) \bar{\varphi}, \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

где ρ — координата центра кручения сечения оболочки по шпангоуту № 1 с началом отсчета в точке 0 (см. фиг. 6);

$\bar{\varphi}$ — относительный угол закручивания отсека.

В силу симметрии центр кручения сечения оболочки располагается на оси Ox .

Из сравнения выражений (2.29) и (2.30) получим следующие уравнения для определения ρ и $\bar{\varphi}$:

$$\left. \begin{aligned} (\rho - R) \bar{\varphi} &= -\frac{M_{кр} l}{R^2 G \delta (\chi_1 + \lambda_1 \theta \psi_1)} \left[\frac{(1 + \lambda_1^2) \alpha_1}{\lambda_1} + \frac{1}{2} \lambda_1 \psi_1 \right]; \\ (\rho + R) \bar{\varphi} &= +\frac{M_{кр} l}{R^2 G \delta (\chi_1 + \lambda_1 \theta \psi_1)} \left[\frac{(1 + \lambda_1^2) \alpha_1}{\lambda_1} - \frac{1}{2} \lambda_1 \psi_1 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

После решения этой системы уравнений относительно ρ и $\bar{\varphi}$ окончательно найдем

$$\left. \begin{aligned} \rho &= -R \frac{2(1 + \lambda_1^2) \alpha_1}{\lambda_1^2 \psi_1}; \\ \bar{\varphi} &= +\frac{M_{кр} l \lambda_1 \psi_1}{2 R^2 G \delta (\chi_1 + \lambda_1 \theta \psi_1)}. \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

Таким образом, при кручении открытой оболочки с абсолютно жесткими шпангоутами положение центра кручения и величина угла закручивания отсека оболочки определяются соответственно формулами (2.32). Полный угол закручивания рассмотренной выше оболочки, состоящей из двух отсеков, будет

$$\bar{\varphi} = 2 \bar{\varphi} = +\frac{M_{кр} l \lambda_1 \psi_1}{R^2 G \delta (\chi_1 + \lambda_1 \theta \psi_1)} \quad (2.33)$$

До сих пор рассматривалась оболочка с жестко-зашумленными торцовыми сечениями. Так же может быть получено решение задачи о кручении открытой оболочки, крайние сечения которой упруго зашумлены. Такая постановка задачи приводит к изменению только одного — первого условия (1.13), которое в этом случае следует записать

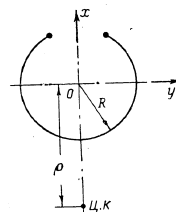
$$u_0 = u_m = \gamma \frac{l^2}{ER \delta} \frac{d\Phi}{d\varphi}, \quad (2.34)$$

где γ — некоторый параметр, характеризующий степень упругости заделки. Все остальные условия останутся без изменений. Условие (2.34) будет удовлетворено, если в зависимости (2.7) положить

$$C_0 = C_2 = \frac{\gamma l^2}{ER \delta}. \quad (2.35)$$

Тогда из условий (2.19) получим

$$C_1 = \frac{l^2 (2\gamma + 1)}{2ER \delta}; \quad C = \frac{l^2 (4\gamma + 1)}{2ER \delta}. \quad (2.36)$$



Фиг. 6.

Подставляя эти выражения в выражение (2.12), после преобразований получим для этого случая параметр λ_1 в следующем виде:

$$\lambda_1 = \frac{R}{l} \sqrt{\frac{3E}{G(1+3\nu)}} \quad (2.37)$$

Перемещения u_0, u_1, u_2 с учетом условий (2.35), (2.36) запишутся здесь так:

$$\left. \begin{aligned} u_0 = u_2 &= \frac{\gamma l^2}{ERb} \frac{d\phi}{d\varphi}; \\ u_1 &= \frac{l^2(2\gamma+1)}{2ERb} \frac{d\phi}{d\varphi}, \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

где

$$\frac{d\phi}{d\varphi} = \frac{M_{кр} \lambda_1}{2R^2(\lambda_1 + \lambda_1 \theta \psi_1)} [(1 + \lambda_1^2) \lambda_1 \beta \operatorname{sh} \lambda_1 \varphi - 2\alpha_1 \sin \varphi]. \quad (2.39)$$

Все прочие компоненты упругой деформации оболочки определяются и в этом случае по формулам (2.27), (2.28).

§ 3. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Сравним решение задачи о кручении открытой оболочки, полученное в настоящей работе, с другими известными решениями этой задачи, в частности, с двумя следующими, получившими наибольшее распространение в технической литературе.

1. Метод расчета, основанный на применении гипотезы об отсутствии сдвигов в срединной поверхности (гипотеза депланаций), разработанный В. З. Власовым¹. Эта гипотеза вместе с гипотезой о недеформируемости контура поперечного сечения приводит к следующим расчетным формулам:

$$\Phi = -\frac{M_{кр} S_{\omega}}{R^2 J_{\omega}}; \quad T = \frac{M_{кр} l}{R^2 R J_{\omega}}, \quad (3.1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} J_{\omega} &= 2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{R} \right)^2 \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) + \frac{2\rho}{R} (\sin \theta - \theta \cos \theta) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \theta^3 + \frac{F}{Rb} \left(\frac{\rho}{R} \sin \theta + \theta \right)^2 \right]; \\ S_{\omega} &= \frac{\rho}{R} (\cos \theta - \cos \varphi) - \frac{1}{2} (\theta^2 - \varphi^2) - \frac{F}{Rb} \left(\theta + \frac{\rho}{R} \sin \theta \right); \\ \omega &= \frac{\rho}{R} \sin \varphi + \varphi; \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

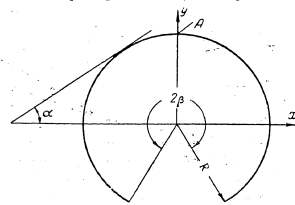
2. Метод расчета, основанный на применении гипотезы плоских сечений (гипотеза сдвига). Эта гипотеза приводит к следующим расчетным формулам (фиг. 7):

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \frac{M_{кр} (2\theta + \sin 2\theta - 4 \cos \alpha \sin \theta)}{4R^2 \left[\theta \left(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) - 2 \sin^2 \theta \right]}; \\ \frac{\rho}{R} &= \frac{4 \sin \theta}{2\theta + \sin 2\theta}. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

¹ В. З. Власов, Тонкостенные упругие стержни, Гостройиздат, 1940.

Решение, полученное в настоящей работе, свободно от указанных выше допущений и поэтому позволяет произвести оценку этих гипотез и определить границы применимости их.

Из общего сравнения этих решений видно, что напряжения, определяемые формулами (3.1), (3.3), (2.27), (2.28) зависят от различного количества параметров¹. Если из формул (3.1) следует, что распределение напряжений по сечениям оболочки зависит только от геометрических параметров θ и F/Rb , являющихся характеристиками сечения, то формулы (2.27), (2.28) показывают, что на распределение напряжений оказывают влияние не только θ и F/Rb , но и параметр λ_1 , который, в свою очередь, зависит, как видно из формулы (2.22), от относительных размеров отсека R/l и отношения модулей упругости E/G . При прочих равных условиях параметр λ_1 с увеличением длины отсека l уменьшается и наоборот, с уменьшением l — увеличивается. В табл. 1 приведены значения параметра λ_1 , вычисленные по формуле (2.22), для различных значений R/l при $E/G=2,6$.

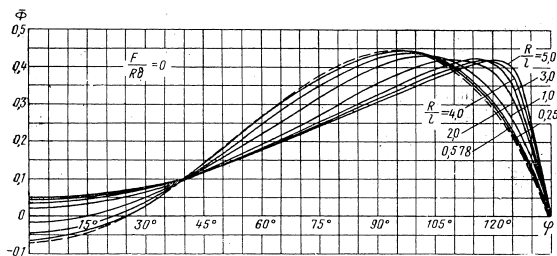


Фиг. 7.

Таблица 1

$\frac{R}{l}$	0,25	0,578	1	2	2,31	4	5
λ_1	0,57800	1,6142	2,7928	5,5856	6,4514	11,171	13,964

Влияние относительной длины отсека R/l на распределение напряжений по сечению открытой оболочки показано на фиг. 8—13. При этом на фиг. 8—10 приведены кривые распределения потока касательных сил, а на фиг. 11—13 даны кривые распределения осевых усилий. Расчет был



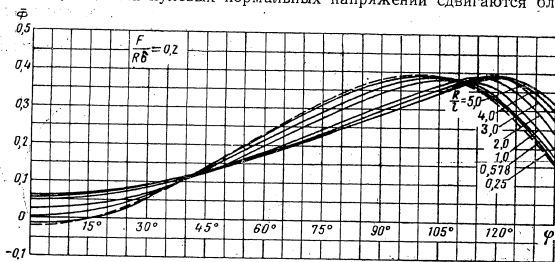
Фиг. 8.

произведен для открытой оболочки, имеющей угол $2\theta = 270^\circ$ при различных значениях параметра F/Rb . Сплошные кривые построены по данным формул (2.27), (2.28); пунктирные кривые — по формулам (3.1).

¹ Распределение напряжений, полученное на основе гипотезы сдвига, как видно из формул (3.3), вообще зависит только от одного параметра θ .

В результате рассмотрения приведенных кривых можно сделать следующие выводы:

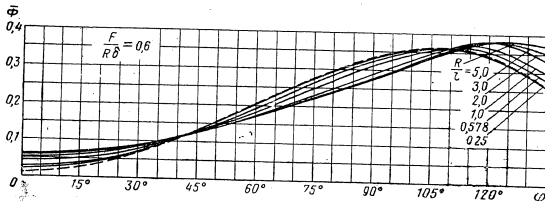
1. Относительная длина отсека R/l оказывает влияние на распределение касательных и нормальных напряжений по сечению оболочки. При этом с уменьшением относительной длины отсека (с ростом R/l) пик касательных и точка нулевых нормальных напряжений сдвигаются ближе



Фиг. 9.

к продольному краю выреза, благодаря чему у края выреза возрастают нормальные и касательные напряжения.

2. Кривые распределения касательных и нормальных напряжений по сечениям оболочки, полученные по формулам настоящей работы, отличаются от кривых распределения соответствующих напряжений, построенных по формулам (3.1). При этом с уменьшением относительной длины отсека (с ростом R/l) расхождения между соответствующими кривыми распределения напряжений возрастают, а при увеличении длины отсека — уменьшаются. При длине отсека, равной диаметру оболочки¹ и более, касательные и нормальные напряжения, вычисленные по формулам настоящей работы, как видно из фиг. 8—13, практически совпадают с напряжениями, определенными по теории В. З. Власова.

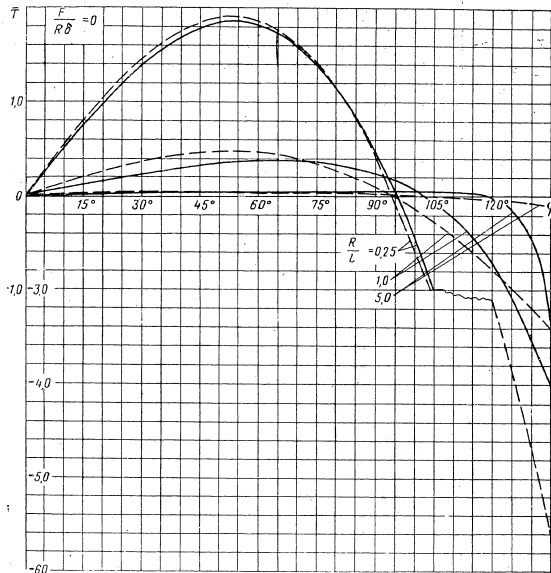


Фиг. 10.

3. Для относительно коротких оболочек теория В. З. Власова, как видно из фиг. 14², дает заниженные значения максимальных нормальных напряжений. С уменьшением длины отсека отношение \bar{T}/\bar{T} падает, достигая при $R/l=5$ (в зависимости от величины параметра $F/R\delta$) значений, равных $0,22 \div 0,65$.

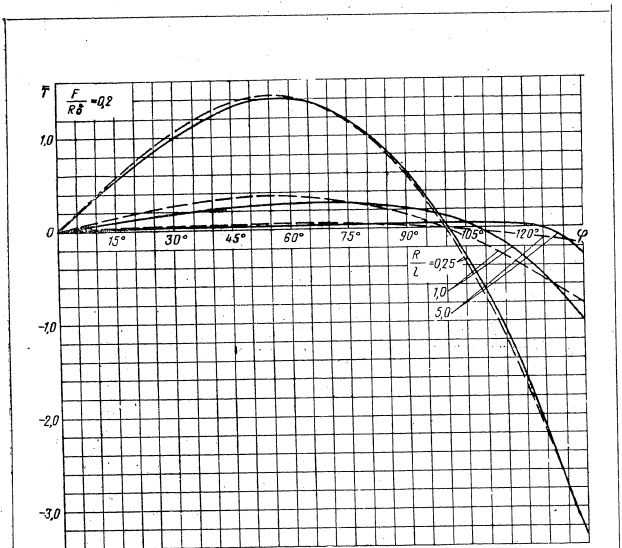
¹ Полная длина открытой оболочки в этом случае равна двум диаметрам оболочки.
² На фиг. 14 по оси ординат отложены отношения максимальных нормальных усилий, вычисленных по теории В. З. Власова и по формулам настоящей работы.

Таким образом, как показали результаты анализа, теория В. З. Власова, основанная на гипотезе об отсутствии сдвигов в срединной поверхности оболочки, дает практически приемлемые результаты при расчете относительно длинных круговых цилиндрических оболочек, у которых полная длина $2l$ не менее двух диаметров оболочки. Этот вывод получен из рассмотрения открытой оболочки, имеющей угол $2\theta=270^\circ$. При изменении угла θ границы применимости гипотезы деформаций могут измениться. Этот вопрос подлежит дополнительному исследованию.

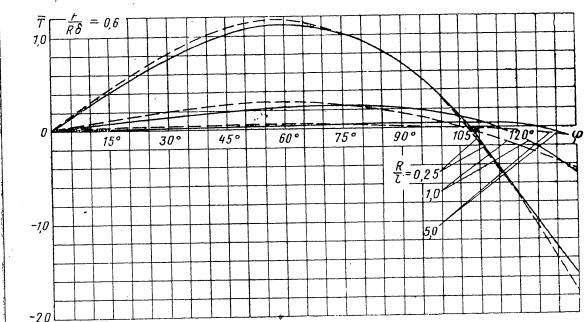


Фиг. 11.

В заключении остановимся на формуле (2.32), полученной в настоящей работе для определения центра кручения тонкостенного стержня открытого кругового профиля. Как известно, под центром кручения понимается такая точка поперечного сечения, которая не перемещается при кручении стержня. Вопросы определения центра кручения посвящено большое количество работ, на основании которых в технической литературе утвердилось мнение, что центр кручения тонкостенных стержней зависит только от формы и геометрических размеров поперечного сечения. Такая зависимость непосредственно вытекает, например, из последней формулы (3.2), полученной для круговой оболочки на основе гипотезы деформаций, а также и из формулы (3.3), полученной на основе гипотезы сдвига. В отличие от этого, формула (2.32), полученная в настоящей работе без введения дополнительных каких-либо гипотез, показывает,

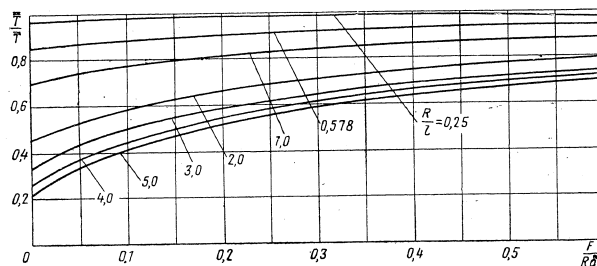


Фиг. 12.



Фиг. 13.

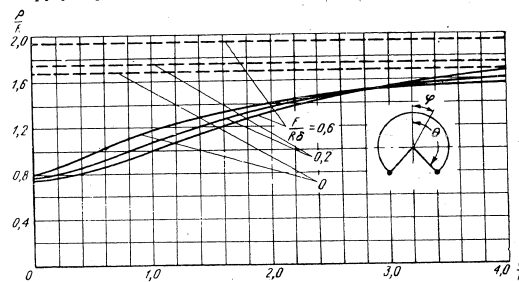
что центр кручения зависит не только от размеров поперечного сечения, но и в сильной степени, как видно из формул (2.22), (2.37), от относительной длины отсека R/l , отношения модулей упругости E/G и степени упругости заделки γ . На фиг. 15 показано влияние параметров R/l и $F/R\delta$ на положение центра кручения для оболочки, имеющей угол $2\theta =$



Фиг. 14.

$=270^\circ$. Сплошные кривые построены по формуле (2.32), пунктирная — по формуле (3.2). Из этой фигуры видно, что с уменьшением относительной длины отсека центр кручения все более удаляется от его положения, определенного по формуле (3.2).

При увеличении относительной длины отсека центры кручения, определенные по формулам (3.2) настоящей работы все более приближаются друг к другу. При $l > 4R$ они практически совпадают.



Фиг. 15.

Произведенный выше анализ сделан на примере рассмотрения открытой оболочки, имеющей угол $2\theta = 270^\circ$.

С. И. ГАЛКИН

КРУЧЕНИЕ И ИЗГИБ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ УПРУГИМИ ШПАНГОУТАМИ

Исследуется напряженное состояние круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной упругими шпангоутами, нагруженной по краям произвольной системой осевых и касательных усилий.

Получены расчетные формулы, позволяющие вычислить все компоненты упругой деформации при различных граничных условиях по краям оболочки. Исследовано влияние самоуравновешенных усилий на напряженное состояние оболочки в зависимости от жесткости шпангоутов. При этом показано, что самоуравновешенные напряжения затухают не очень интенсивно; зона распространения их в глубь оболочки практически равна длине контура поперечного сечения оболочки.

Приведен пример расчета оболочки на кручение с учетом упругости шпангоутов.

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- δ — толщина обшивки
- R — радиус оболочки
- l — длина отсека оболочки
- J — собственный момент инерции сечения шпангоута
- E — модуль упругости (при растяжении, сжатии) обшивки
- G — модуль сдвига обшивки
- E_0 — модуль упругости (при растяжении, сжатии) шпангоута
- u_k — продольные смещения поверхности обшивки в сечении, где расположен шпангоут
- v_k, w_k — смещения по касательной и по внутренней нормали сечения обшивки по k -тому шпангоуту
- Φ_k — погонные усилия сдвига в k -том отсеке оболочки, расположенном между шпангоутами $(k-1)$ и k
- T_k — погонные продольные (осевые) усилия в обшивке в сечении, где расположен k -тый шпангоут
- $T^{(k)}$ — погонные (осевые) усилия в обшивке k -того отсека оболочки, расположенного между шпангоутами $(k-1)$ и k

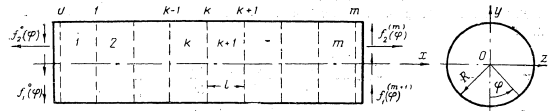
§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку, подкрепленную через равные промежутки l упругими шпангоутами (фиг. 1), нагруженную по краям произвольной системой касательных $f_1^{(k)}(\varphi)$, $f_2^{(k)}(\varphi)$ и осевых $f_3^{(k)}(\varphi)$, $f_4^{(k)}(\varphi)$ усилий, вызывающих в общем случае изгиб и кручение оболочки. Никаких ограничений на характер распределения указанных сил по контуру сечений накладывать не будем, за исключением условия статического равновесия оболочки под действием этих сил.

При этих условиях задача сводится к отысканию напряжений и перемещений, возникающих в отсеках и шпангоутах оболочки. К такой

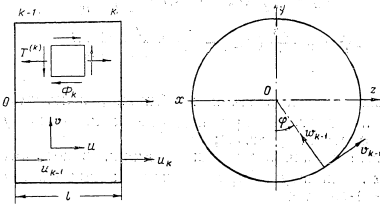
постановке сводятся многие задачи по расчету фюзеляжа самолета на прочность, в том числе и задача расчета замкнутой части фюзеляжа с большим прямоугольным вырезом¹.

При решении этой задачи принимаются следующие допущения: обшивка работает как тонкая безмоментная оболочка, воспринимающая



Фиг. 1.

осевые $T_k(\varphi)$ и касательные $\Phi_k(\varphi)$ погонные усилия, коэффициент Пуассона принимается равным нулю, шпангоуты имеют конечную жесткость на изгиб в своей плоскости и равные нулю жесткость на кручение и изгиб из своей плоскости. Кроме того, предполагается, что шпангоуты по контуру непрерывно связаны с обшивкой. Радиус нейтральной оси шпангоута принимается равным радиусу срединной поверхности обшивки.



Фиг. 2.

При этих предположениях задача о кручении и изгибе оболочки сводится к определению функций $u(k, \varphi)$, $v(k, \varphi)$, $\Phi(k, \varphi)$, являющихся решением системы дифференциально-разностных уравнений (фиг. 2)

$$\left. \begin{aligned} v_k - v_{k-1} + \frac{l}{2R} \frac{d}{d\varphi} (u_k + u_{k-1}) &= \frac{l}{G\delta} \left[\Phi_k - \frac{GJ}{12ER^2} \frac{d^2 \Phi_k}{d\varphi^2} \right]; \\ \frac{E\delta}{l} (2u_k - u_{k-1} - u_{k+1}) &= \frac{l}{2R} \frac{d}{d\varphi} (\Phi_k + \Phi_{k+1}); \\ E_0 J D_\varphi^2 v_k + K^4 (\Phi_{k+1} - \Phi_k) &= 0, \end{aligned} \right\} (1.1)$$

полученной Л. И. Балабухом при решении задачи о прочности и устойчивости шпангоутов, связанных тонкой обшивкой², где

$$D_\varphi^2 () = \frac{d^6 ()}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 ()}{d\varphi^4} + \frac{d^2 ()}{d\varphi^2}. \quad (1.2)$$

¹ Сечение замкнутой части фюзеляжа, примыкающее к вырезу, находится под воздействием осевых и касательных усилий, распределенных по этому сечению с большой степенью неравномерности.

² Л. И. Балабух. Прочность и устойчивость шпангоутов, связанных тонкой обшивкой, Труды МАП, № 681, 1949.

Функции $u(k, \varphi)$, $v(k, \varphi)$, $\Phi(k, \varphi)$ должны, кроме системы уравнений (1.1), удовлетворять некоторым граничным условиям, которые для данной задачи рассмотрим ниже.

Как показано в работе Л. И. Балабуха, функции $u(k, \varphi)$, $v(k, \varphi)$, $\Phi(k, \varphi)$ полностью определяют напряженное состояние оболочки, подкрепленной упругими шпангоутами. Так, например, изгибающие моменты, поперечные и осевые силы в шпангоутах определяются формулами

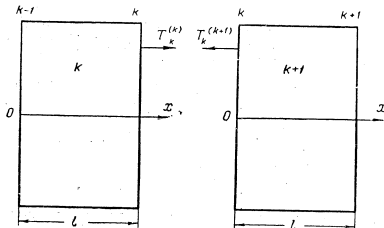
$$\left. \begin{aligned} M_k^0 &= -\frac{E_0 J}{R^2} \left(\frac{d^2 v_k}{d\varphi^2} + \frac{d v_k}{d\varphi} \right); \\ Q_k^0 &= \frac{E_0 J}{R^3} \left(\frac{d^3 v_k}{d\varphi^3} + \frac{d^2 v_k}{d\varphi^2} \right); \\ N_k^0 &= \frac{E_0 J}{R^4} \left(\frac{d^4 v_k}{d\varphi^4} + \frac{d^3 v_k}{d\varphi^3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Осевые усилия по краям отсеков оболочки будут

$$\left. \begin{aligned} T_k^{(k)} &= \frac{E b}{l} (u_k - u_{k-1}) - \frac{l}{2R} \frac{d\Phi_k}{d\varphi}; \\ T_k^{(k+1)} &= \frac{E b}{l} (u_{k+1} - u_k) + \frac{l}{2R} \frac{d\Phi_{k+1}}{d\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

где $T_k^{(k)}$ — осевые усилия в сечении обшивки, в котором расположен k -тый шпангоут, при подходе к последнему со стороны k -того отсека (фиг. 3);

$T_k^{(k+1)}$ — осевые усилия в сечении обшивки, в котором расположен k -тый шпангоут, при подходе к последнему со стороны $(k+1)$ -го отсека.



Фиг. 3.

Рассмотрим теперь граничные условия поставленной задачи. Но перед этим удобнее общую задачу об изгибе и кручении оболочки разбить на две частных, а именно: на задачу о кручении и задачу об изгибе, рассмотрев их самостоятельно. Общее решение будет найдено в результате суммирования этих решений.

При кручении оболочки необходимо, чтобы внешние усилия, загружающие края оболочки $k=0$ и $k=m+1$, удовлетворяли условиям (см. фиг. 1)

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} f_1^0(\varphi) d\varphi &= \int_0^{2\pi} f_1^{(m+1)}(\varphi) d\varphi = \frac{M_{кр}}{R^2}; \\ \int_0^{2\pi} f_1^0(\varphi) \cos \varphi d\varphi &= \int_0^{2\pi} f_1^{(m+1)}(\varphi) \cos \varphi d\varphi = 0; \\ \int_0^{2\pi} f_1^0(\varphi) \sin \varphi d\varphi &= \int_0^{2\pi} f_1^{(m+1)}(\varphi) \sin \varphi d\varphi = 0; \\ \int_0^{2\pi} f_2^0(\varphi) d\varphi &= \int_0^{2\pi} f_2^{(m)}(\varphi) d\varphi = 0; \\ \int_0^{2\pi} f_2^0(\varphi) \cos \varphi d\varphi &= \int_0^{2\pi} f_2^{(m)}(\varphi) \cos \varphi d\varphi = 0; \\ \int_0^{2\pi} f_2^0(\varphi) \sin \varphi d\varphi &= \int_0^{2\pi} f_2^{(m)}(\varphi) \sin \varphi d\varphi = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

которые представляют собой шесть интегральных уравнений статического равновесия сил.

Задачу о кручении будем решать для двух случаев граничных условий.

1. Торцовые сечения двух крайних отсеков оболочки ($k=0$ и $k=m+1$) нагружены произвольными потоками касательных усилий. В этом случае

$$\left. \begin{aligned} T_0 &= T_m = 0; \\ \Phi_0(\varphi) &= f_1^0(\varphi); \quad \Phi_{m+1}(\varphi) = f_1^{(m+1)}(\varphi). \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Подставляя выражения осевых усилий (1.4), получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{E b}{l} (u_1 - u_0) + \frac{l}{2R} \frac{d\Phi_1}{d\varphi} &= \frac{E b}{l} (u_m - u_{m-1}) - \frac{l}{2R} \frac{d\Phi_m}{d\varphi} = 0; \\ \Phi_0(\varphi) &= f_1^0(\varphi); \quad \Phi_{m+1}(\varphi) = f_1^{(m+1)}(\varphi). \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

2. Торцовые сечения двух крайних отсеков оболочки $k=0$ и $k=m+1$ нагружены произвольной системой самоуравновешенных осевых усилий. В этом случае

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \Phi_{m+1} = 0; \\ \frac{E b}{l} (u_1 - u_0) + \frac{l}{2R} \frac{d\Phi_1}{d\varphi} &= f_2^0(\varphi); \\ \frac{E b}{l} (u_m - u_{m-1}) - \frac{l}{2R} \frac{d\Phi_m}{d\varphi} &= f_2^{(m)}(\varphi). \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Таким образом, решение задачи о кручении оболочки сводится в нашем случае к отысканию из решения системы дифференциально-разностных уравнений (1.1) функций $u_k(\varphi)$; $v_k(\varphi)$; $\Phi_k(\varphi)$, удовлетворяющих условиям (1.7) или (1.8). Функции $f_1^0(\varphi)$, $f_1^{(m+1)}(\varphi)$ и $f_2^m(\varphi)$ должны при этом удовлетворять условиям (1.5).

При изгибе оболочки необходимо, чтобы внешние усилия, загружающие края $k=0$ и $k=m+1$ удовлетворяли условиям

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} F_1^0(\varphi) d\varphi &= \int_0^{2\pi} F_1^{(m+1)}(\varphi) d\varphi = 0; \\ \int_0^{2\pi} F_1^0(\varphi) \cos \varphi d\varphi &= \int_0^{2\pi} F_1^{(m+1)}(\varphi) \cos \varphi d\varphi = 0; \\ \int_0^{2\pi} F_1^0(\varphi) \sin \varphi d\varphi &= \int_0^{2\pi} F_1^{(m+1)}(\varphi) \sin \varphi d\varphi = 0; \\ \int_0^{2\pi} F_2^0(\varphi) d\varphi &= \int_0^{2\pi} F_2^{(m)}(\varphi) d\varphi = 0; \\ \int_0^{2\pi} F_2^0(\varphi) \cos \varphi d\varphi &= \int_0^{2\pi} F_2^{(m)}(\varphi) \cos \varphi d\varphi = -\frac{M_{изг}}{R^2}; \\ \int_0^{2\pi} F_2^0(\varphi) \sin \varphi d\varphi &= \int_0^{2\pi} F_2^{(m)}(\varphi) \sin \varphi d\varphi = 0, \end{aligned} \right\} (1.9)$$

которые, так же как и условия (1.5), представляют собой шесть интегральных уравнений статического равновесия сил. В этих уравнениях введены обозначения:

$F_1^0(\varphi); F_1^{(m+1)}(\varphi)$ — самоуравновешенные потоки касательных усилий, нагружающие торцовые сечения двух крайних отсеков оболочки;
 $F_2^0(\varphi); F_2^{(m)}(\varphi)$ — осевые усилия, нагружающие торцовые сечения двух крайних отсеков оболочки.

Задачу об изгибе будем решать для следующих граничных условий.

1. Торцовые сечения двух крайних отсеков оболочки $k=0$ и $k=m+1$ нагружены самоуравновешенными потоками касательных усилий. В этом случае

$$\left. \begin{aligned} \frac{E\delta}{l} (u_1 - u_0) + \frac{l}{2R} \frac{d\Phi_1}{d\varphi} &= \frac{E\delta}{l} (u_m - u_{m-1}) - \frac{l}{2R} \frac{d\Phi_m}{d\varphi} = 0; \\ \Phi_0(\varphi) &= F_1^0(\varphi); \quad \Phi_{m+1}(\varphi) = F_1^{(m+1)}(\varphi). \end{aligned} \right\} (1.10)$$

2. Торцовые сечения двух крайних отсеков $k=0$ и $k=m+1$ оболочки нагружены произвольной системой осевых сил. В этом случае

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0(\varphi) &= \Phi_{m+1}(\varphi) = 0; \\ \frac{E\delta}{l} (u_1 - u_0) + \frac{l}{2R} \frac{d\Phi_1}{d\varphi} &= F_2^0(\varphi); \\ \frac{E\delta}{l} (u_m - u_{m-1}) - \frac{l}{2R} \frac{d\Phi_m}{d\varphi} &= F_2^{(m)}(\varphi). \end{aligned} \right\} (1.11)$$

Таким образом, решение задачи об изгибе оболочки сводится в нашем случае к отысканию из решения системы дифференциально-разностных уравнений (1.1) функций $u_k(\varphi), v_k(\varphi), \Phi_k(\varphi)$, удовлетворяющих условиям (1.10) или (1.11). Функции $F_1^0(\varphi), F_1^{(m+1)}(\varphi), F_2^0(\varphi)$ и $F_2^{(m)}(\varphi)$ должны удовлетворять при этом условиям (1.9).

Граничные условия по переменному φ как в задаче о кручении, так и в задаче об изгибе оболочки заменяются условиями периодичности функций $u_k(\varphi), v_k(\varphi); \Phi_k(\varphi)$.

§ 2. КРУЧЕНИЕ ОБОЛОЧКИ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ УПРУГИМИ ШПАНГОУТАМИ

Будем искать решение задачи в виде

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_k &= A_k^{(1)} \sin \varphi + \sum_{n=2}^{\infty} A_k^{(n)} \sin n\varphi; \\ \bar{\Phi}_k &= B_k^{(0)} + B_k^{(1)} \cos \varphi + \sum_{n=2}^{\infty} B_k^{(n)} \cos n\varphi; \\ \bar{v}_k &= C_k^{(0)} + C_k^{(1)} \cos \varphi + \sum_{n=2}^{\infty} C_k^{(n)} \cos n\varphi, \end{aligned} \right\} (2.1)$$

где $A_k^{(n)}, B_k^{(n)}, C_k^{(n)}$ — коэффициенты рядов Фурье,

Выражения (2.1) удовлетворяют условиям периодичности функций u_k, Φ_k, v_k по переменной φ , которые, как уже отмечалось, должны удовлетворять также дифференциально-разностным уравнениям (1.1) и условиям (1.7) или (1.8).

Нетрудно показать, что выражения (2.1) можно разбить на две части, одна из которых

$$\left. \begin{aligned} u_k^0 &= A_k^{(1)} \sin \varphi; \\ \Phi_k^0 &= B_k^{(0)} + B_k^{(1)} \cos \varphi; \\ v_k^0 &= C_k^{(0)} + C_k^{(1)} \cos \varphi \end{aligned} \right\} (2.2)$$

соответствует нагружению торцовых сечений в двух крайних отсеках постоянным потоком касательных усилий, а другая

$$\left. \begin{aligned} u_k &= \sum_{n=2}^{\infty} A_k^{(n)} \sin n\varphi; \\ \Phi_k &= \sum_{n=2}^{\infty} B_k^{(n)} \cos n\varphi; \\ v_k &= \sum_{n=2}^{\infty} C_k^{(n)} \cos n\varphi \end{aligned} \right\} (2.3)$$

соответствует нагружению торцовых сечений оболочки самоуравновешенной системой осевых и касательных усилий.

В самом деле, уравнения (1.1) и условия (1.5) будут удовлетворены с помощью выражений (2.2), если в последних положить

$$\left. \begin{aligned} B_k^{(0)} &= \frac{M_{кр}}{2\pi R^2}; \quad C_k^{(0)} = \frac{M_{кр} k l}{2\pi R^2 G \delta}; \\ A_k^{(1)} &= B_k^{(1)} = C_k^{(1)} = 0. \end{aligned} \right\} (2.4)$$

Тогда получим

$$\left. \begin{aligned} \Phi_k^0 &= \frac{M_{кр}}{2\pi R^2}; \quad v_k^0 = \frac{M_{кр} k l}{2\pi R^2 G \delta}; \\ u_k^0 &= T_k^0 = 0, \end{aligned} \right\} (2.5)$$

где

$$M_{кр} = R^2 \int_0^{2\pi} f_1^0(\varphi) d\varphi = R^2 \int_0^{2\pi} f_1^{(m+1)}(\varphi) d\varphi. \quad (2.6)$$

Выражения (2.3) удовлетворяют при всех значениях k следующим условиям:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \Phi_k d\varphi = 0; \int_0^{2\pi} \Phi_k \cos \varphi d\varphi = 0; \int_0^{2\pi} \Phi_k \sin \varphi d\varphi = 0; \\ \int_0^{2\pi} T_k d\varphi = 0; \int_0^{2\pi} T_k \cos \varphi d\varphi = 0; \int_0^{2\pi} T_k \sin \varphi d\varphi = 0, \end{aligned} \right\} (2.7)$$

на основании чего можно заключить, что выражения (2.3) соответствуют нагружению торцовых сечений только самоуравновешенной системой осевых и касательных сил.

Пользуясь принципом независимости действия сил, целесообразно решение (2.5) выделить из общего решения (2.1) и в дальнейшем искать решение уравнений (1.1) для случая нагружения торцовых сечений оболочки только самоуравновешенной системой сил. Общее решение задачи о кручении оболочки будет найдено в результате суммирования этих двух решений.

Решение уравнений (1.1) в форме (2.3) для случая нагружения краев оболочки самоуравновешенной системой сил, полученное Л. И. Балабухом в виде:

$$\left. \begin{aligned} u_k = - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{j=1}^4 C_{jn} \frac{\beta_{jn} (\beta_{jn} + 1)}{(\beta_{jn} - 1)^3} \beta_{jn}^{-k} \lambda_{1n} V \sqrt{\lambda_{3n}} \sin n\varphi; \\ \Phi_k = - \frac{E\delta}{l} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{j=1}^4 C_{jn} \frac{\beta_{jn}}{\beta_{jn} - 1} \beta_{jn}^{-k} \lambda_{1n} \cos n\varphi; \\ v_k = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{j=1}^4 C_{jn} \beta_{jn}^{-k} \cos n\varphi. \end{aligned} \right\} (2.8)$$

как увидим далее, может быть распространено на граничные условия (1.7) или (1.8).

В выражениях (2.8) через β_{jn} обозначены корни алгебраического уравнения

$$\left(\beta_n + \frac{1}{\beta_n} \right)^2 - \left(\beta_n + \frac{1}{\beta_n} \right) [\lambda_{1n} (\lambda_2 - \lambda_{3n}) + 4] + 2 [\lambda_{1n} (\lambda_2 + 2\lambda_{3n}) + 2] = 0, \quad (2.9)$$

которое, как показано в работе Л. И. Балабуха, имеет или четыре действительных или две пары сопряженных комплексных корней, удовлетворяющих условиям

$$\beta_{1n} \beta_{2n} = 1; \quad \beta_{3n} \beta_{4n} = 1. \quad (2.10)$$

Кроме того, введены обозначения

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{1n} = cn^2 (n^2 - 1)^2; \\ \lambda_2 = \frac{E}{G}; \quad \lambda_{3n} = \frac{1}{6} d^2 n^2; \\ c = \frac{E_0 H}{ER^3}; \quad d = \frac{l}{R}. \end{aligned} \right\} (2.11)$$

C_{jn} — произвольные постоянные, подлежащие определению из граничных условий (1.7) или (1.8).

В работе Л. И. Балабуха показано, что если $\lambda_{1n} (\lambda_2 - \lambda_{3n})^2 - 24\lambda_{1n} \lambda_{3n} \geq 0$, то $\beta_{1n}, \beta_{2n}, \beta_{3n}, \beta_{4n}$ будут всегда иметь действительные значения, определяемые по формулам

$$\left. \begin{aligned} \beta_{(1,2)n} = \frac{1}{2} (2 + a_n + b_n \pm \sqrt{(2 + a_n + b_n)^2 - 4}); \\ \beta_{(3,4)n} = \frac{1}{2} (2 + a_n - b_n \pm \sqrt{(2 + a_n - b_n)^2 - 4}), \end{aligned} \right\} (2.12)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_n = \frac{1}{2} [\lambda_{1n} (\lambda_2 - \lambda_{3n})]; \\ b_n = \frac{1}{2} \sqrt{\lambda_{1n}^2 (\lambda_2 - \lambda_{3n})^2 - 24\lambda_{1n} \lambda_{3n}}. \end{aligned} \right\} (2.13)$$

Если $\lambda_{1n} (\lambda_2 - \lambda_{3n})^2 - 24\lambda_{1n} \lambda_{3n} < 0$, то $\beta_{1n}, \beta_{2n}, \beta_{3n}, \beta_{4n}$ будут комплексными

$$\left. \begin{aligned} \beta_{(1,3)n} = \alpha_{1n} \pm \gamma_{1n} i; \\ \beta_{(2,4)n} = \alpha_{2n} \pm \gamma_{2n} i. \end{aligned} \right\} (2.14)$$

Коэффициенты $\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \gamma_{1n}, \gamma_{2n}$ в зависимости от величины параметра $(2 + a_n)$ будут:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } (2 + a_n) > 0: \\ \alpha_{1n} = \frac{1}{2} (2 + a_n + \sqrt{\overline{B_n + \overline{A_n}}}); \quad \gamma_{1n} = \frac{1}{2} (b_n + \sqrt{\overline{B_n - \overline{A_n}}}); \\ \alpha_{2n} = \frac{1}{2} (2 + a_n - \sqrt{\overline{B_n - \overline{A_n}}}); \quad \gamma_{2n} = \frac{1}{2} (b_n - \sqrt{\overline{B_n + \overline{A_n}}}); \end{aligned} \right\} (2.15)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{при } (2 + a_n) < 0: \\ \alpha_{1n} = \frac{1}{2} (2 + a_n + \sqrt{\overline{B_n + \overline{A_n}}}); \quad \gamma_{1n} = \frac{1}{2} (b_n - \sqrt{\overline{B_n - \overline{A_n}}}); \\ \alpha_{2n} = \frac{1}{2} (2 + a_n - \sqrt{\overline{B_n + \overline{A_n}}}); \quad \gamma_{2n} = \frac{1}{2} (b_n + \sqrt{\overline{B_n - \overline{A_n}}}). \end{aligned} \right\} (2.16)$$

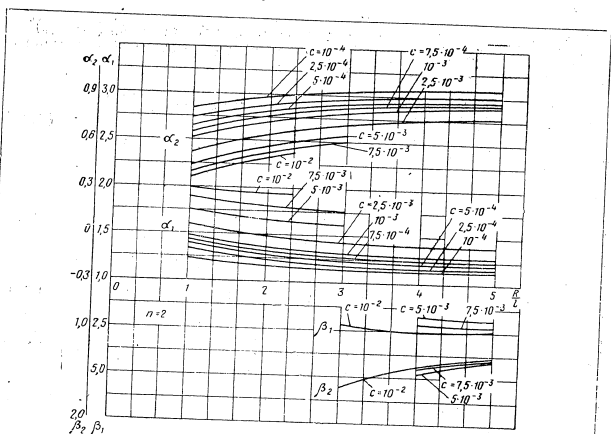
Здесь обозначено

$$\left. \begin{aligned} \overline{A_n} = \frac{1}{2} [a_n^2 + 4a_n - (b_n')^2]; \\ \overline{B_n} = \frac{1}{2} \sqrt{[a_n^2 + 4a_n - (b_n')^2]^2 + 4(2 + a_n)^2 (b_n')^2}; \\ i = \sqrt{-1}. \end{aligned} \right\} (2.17)$$

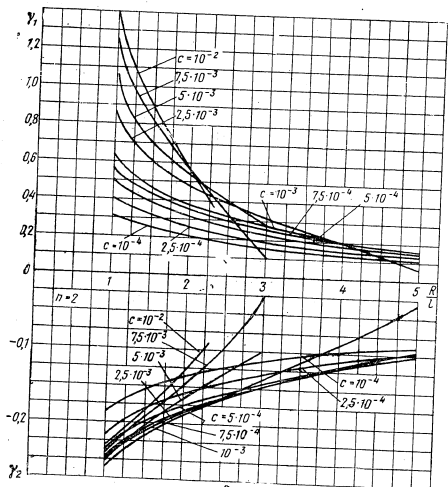
Корни $\beta_{(1,2,3,4)n}$, как видно из формул (2.12) — (2.17), зависят от параметров $\lambda_{1n}, \lambda_2, \lambda_{3n}$, которые в свою очередь зависят от коэффициентов c, d , определяемых выражениями (2.11).

Значения этих корней, вычисленные при $E/G = 2,6$, могут быть определены из графиков, приведенных на фиг. 4 — 11.

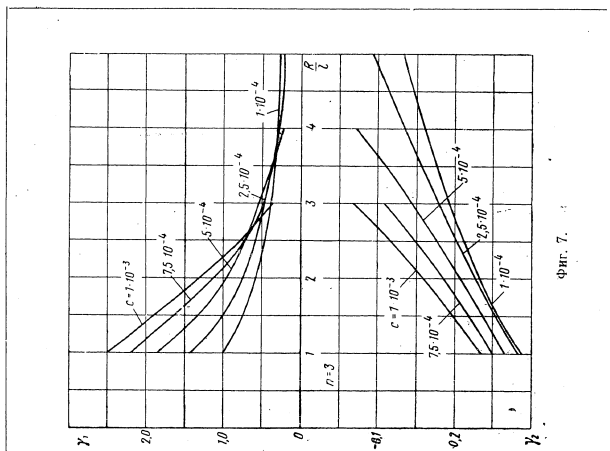
Решение (2.8) включает четыре произвольных постоянных C_{jn} , которые должны быть определены из граничных условий (1.7) или (1.8). Но прежде, чем переходить к их определению из (1.7) или (1.8), приведем выражения (2.8) для случая комплексных корней к действительной форме.



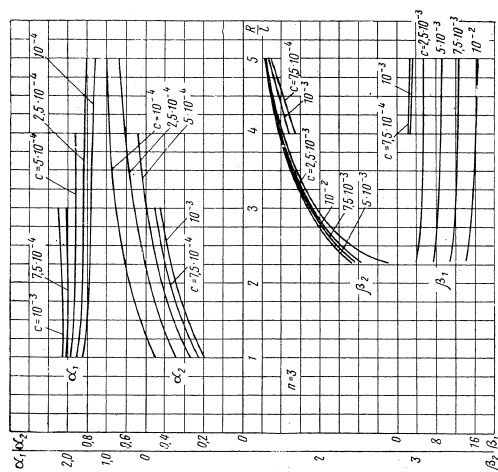
Фиг. 4.



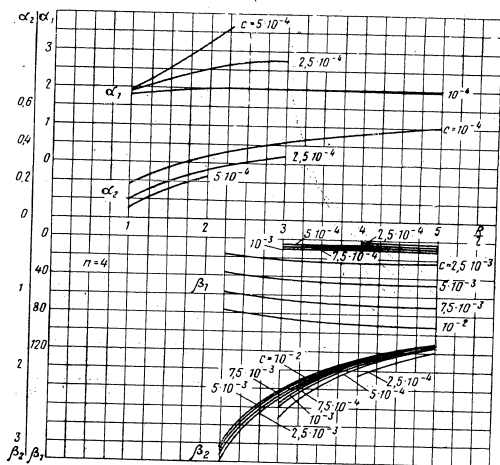
Фиг. 5.



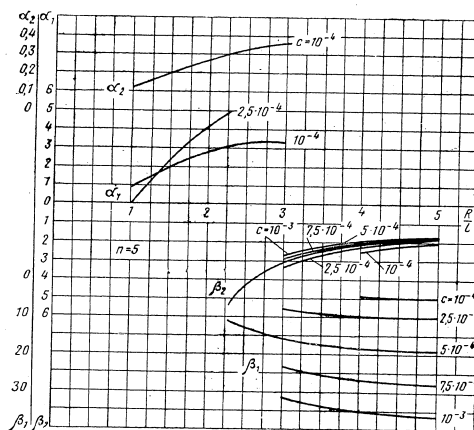
Фиг. 7.



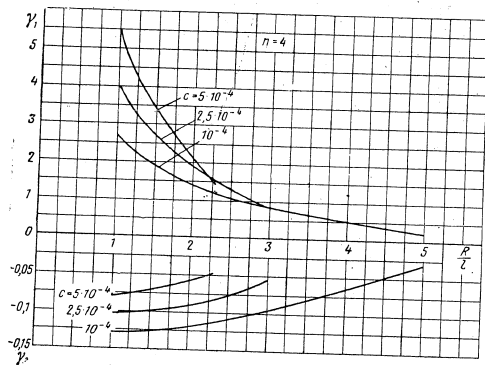
Фиг. 6.



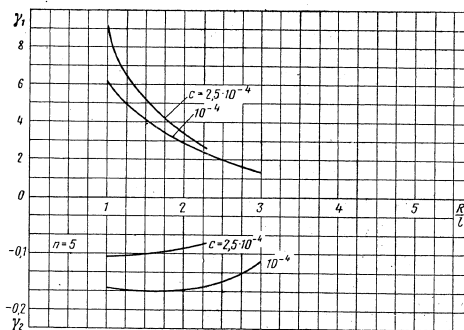
Фиг. 8.



Фиг. 10.



Фиг. 9.



Фиг. 11.

§ 3. ПРИВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ К ВИДУ, УДОБНОМУ ДЛЯ РАСЧЕТОВ

Так как уравнение (2.9) в некоторых случаях содержит комплексные корни, то выражения (2.8) в этих случаях будут также представлять собой комплексные функции. В связи с тем, что корни β_{jn} суть попарно сопряженные (см. § 2), выражения (2.8) можно привести к действительной форме, удобной для проведения вычислительных работ. С этой целью введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \beta_{1n} &= \alpha_{1n} + \gamma_{1n}i; & \beta_{3n} &= \alpha_{1n} - \gamma_{1n}i; \\ \beta_{2n} &= \alpha_{2n} + \gamma_{2n}i; & \beta_{4n} &= \alpha_{2n} - \gamma_{2n}i; \\ C_{1n} &= A_{1n} + B_{1n}i; & C_{3n} &= A_{1n} - B_{1n}i; \\ C_{2n} &= A_{2n} + B_{2n}i; & C_{4n} &= A_{2n} - B_{2n}i. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Подставив их в выражения (2.8), после преобразования получим

$$\left. \begin{aligned} u_k &= -2 \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{\rho_{1n}^{-k} [A_{1n} (\xi_{1n}^{(k)} \psi_{1n}^* + \gamma_{1n}^{(k)} \chi_{1n}) + B_{1n} (\gamma_{1n}^{(k)} \psi_{1n} - \xi_{1n}^{(k)} \chi_{1n})]}{[(\alpha_{1n} - 1)^2 + \gamma_{1n}^2] \{[(\alpha_{1n} - 1)^2 - \gamma_{1n}^2] + 4\gamma_{1n}^2(\alpha_{1n} - 1)^2\}} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\rho_{2n}^{-k} [A_{2n} (\xi_{2n}^{(k)} \psi_{2n}^* + \gamma_{2n}^{(k)} \chi_{2n}) + B_{2n} (\gamma_{2n}^{(k)} \psi_{2n} - \xi_{2n}^{(k)} \chi_{2n})]}{[(\alpha_{2n} - 1)^2 + \gamma_{2n}^2] \{[(\alpha_{2n} - 1)^2 - \gamma_{2n}^2] + 4\gamma_{2n}^2(\alpha_{2n} - 1)^2\}} \right\} \times \\ & \quad \times \lambda_{1n} \sqrt{\frac{3}{2} \lambda_{3n}} \sin n\varphi; \\ \Phi_k &= -\frac{2E\delta}{l} \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{\rho_{1n}^{-k} (A_{1n} \xi_{1n}^{(k)} + B_{1n} \gamma_{1n}^{(k)})}{(\alpha_{1n} - 1)^2 + \gamma_{1n}^2} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\rho_{2n}^{-k} (A_{2n} \xi_{2n}^{(k)} + B_{2n} \gamma_{2n}^{(k)})}{(\alpha_{2n} - 1)^2 + \gamma_{2n}^2} \right] \lambda_{1n} \cos n\varphi; \\ v_k &= 2 \sum_{n=2}^{\infty} [\rho_{1n}^{-k} (A_{1n} \cos k\psi_{1n} + B_{1n} \sin k\psi_{1n}) + \\ & \quad + \rho_{2n}^{-k} (A_{2n} \cos k\psi_{2n} + B_{2n} \sin k\psi_{2n})] \cos n\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \rho_{1n} &= \sqrt{\alpha_{1n}^2 + \gamma_{1n}^2}; & \psi_{1n} &= \arctg \frac{\gamma_{1n}}{\alpha_{1n}}; \\ \xi_{1n}^{(k)} &= [\alpha_{1n}(\alpha_{1n} - 1) + \gamma_{1n}^2] \cos k\psi_{1n} - \gamma_{1n} \sin k\psi_{1n}; \\ \gamma_{1n}^{(k)} &= [\alpha_{1n}(\alpha_{1n} - 1) + \gamma_{1n}^2] \sin k\psi_{1n} + \gamma_{1n} \cos k\psi_{1n}; \\ \psi_{1n}^* &= (\alpha_{1n} + 1) [(\alpha_{1n} - 1)^2 - \gamma_{1n}^2] + 2\gamma_{1n}^2(\alpha_{1n} - 1); \\ \chi_{1n} &= \gamma_{1n} [(\alpha_{1n} - 1)^2 - \gamma_{1n}^2 - 2(\alpha_{1n}^2 - 1)]. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Подставляя в выражения (3.3) всюду вместо индексов $1n$ индексы $2n$, получим выражения для коэффициентов ρ_{2n} , ψ_{2n} , $\xi_{2n}^{(k)}$, $\gamma_{2n}^{(k)}$, χ_{2n} , ψ_{2n}^* .

Таким образом, в случае комплексных корней следует пользоваться решением (3.2), записанным в действительной форме, а в случае действительных корней — выражениями (2.8). Эти решения полностью определяют напряженное состояние оболочки, подкрепленной упругими

шпангоутами и нагруженной по краям такой системой самоуравновешивающихся усилий, которая удовлетворяет условиям (2.7).

Рассмотрим некоторые особенности полученных решений. В выражениях (2.8) каждый член ряда $\sum_{n=2}^{\infty} [L_n] \sin n\varphi, \cos n\varphi$ при фиксированном n содержит четыре слагаемых, каждое из которых соответствует одному из четырех корней β_{jn} . Легко проследить, что эти слагаемые (при фиксированном n) по мере удаления от нагруженного края оболочки (например, $k=0$) ведут себя по разному. Именно, два из них по мере удаления от края оболочки $k=0$ убывают по степенному закону, а два других, наоборот, возрастают по степенному закону. В этом легко убедиться, если обратить внимание на выражения (2.10), из которых следует, что два корня имеют модули больше единицы, а модули двух других — меньше единицы. Условимся считать, что

$$|\rho_{1n}| > 1; |\rho_{3n}| > 1; |\rho_{2n}| < 1; |\rho_{4n}| < 1. \quad (3.4)$$

Отсюда видно, что те слагаемые, которые содержат множители $\rho_{1n}^{-k}, \rho_{3n}^{-k}$, будут, по мере удаления от края оболочки $k=0$, убывать по степенному закону, а слагаемые, содержащие множители $\rho_{2n}^{-k}, \rho_{4n}^{-k}$, наоборот, возрастать по степенному закону.

В этом смысле совершенно аналогично ведут себя слагаемые каждого члена ряда в выражениях (3.2), так как и комплексные корни, которым соответствует решение (3.2), удовлетворяют условию (2.10). Для случая комплексных корней условимся считать, что

$$\rho_{1n} > 1; \rho_{2n} < 1. \quad (3.5)$$

До сих пор мы рассматривали конечную оболочку, нагруженную по двум краям независимыми системами самоуравновешенных усилий, удовлетворяющими условиям (2.7), для которых и получено решение в форме (2.8) и (3.2). Если теперь рассмотреть полубесконечную оболочку, нагруженную по одному краю $k=0$ указанной системой самоуравновешенных нагрузок, то решение для нее можно получить из выражений (2.8) и (3.2), сохранив в них те слагаемые каждого члена ряда, которые убывают по мере удаления от нагруженного края оболочки. Учитывая при этом обозначения (3.4) и (3.5), решение для полубесконечной оболочки, нагруженной по краю $k=0$ самоуравновешенной системой нагрузок, можно записать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} u_k &= \sum_{n=2}^{\infty} \left[C_{1n} \rho_{1n}^{-k} \frac{\rho_{1n} (\beta_{1n} + 1)}{(\beta_{1n} - 1)^3} + C_{3n} \rho_{3n}^{-k} \frac{\rho_{3n} (\beta_{3n} + 1)}{(\beta_{3n} - 1)^3} \right] \times \\ & \quad \times \lambda_{1n} \sqrt{\frac{3}{2} \lambda_{3n}} \sin n\varphi; \\ \Phi_k &= -\frac{E\delta}{l} \sum_{n=2}^{\infty} \left[C_{1n} \rho_{1n}^{-k} \frac{\rho_{1n}}{\beta_{1n} - 1} + C_{3n} \rho_{3n}^{-k} \frac{\rho_{3n}}{\beta_{3n} - 1} \right] \lambda_{1n} \cos n\varphi; \\ v_k &= \sum_{n=2}^{\infty} (C_{1n} \rho_{1n}^{-k} + C_{3n} \rho_{3n}^{-k}) \cos n\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Случай комплексных корней.

$$\begin{aligned}
 u_k &= -2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\rho_{1n}^{-k} [A_{1n} \xi_{1n}^{(k)} \psi_{1n} + \eta_{1n}^{(k)} \chi_{1n}] + B_{1n} (\eta_{1n}^{(k)} \psi_{1n} - \xi_{1n}^{(k)} \chi_{1n})}{[(\alpha_{1n} - 1)^2 + \gamma_{1n}^2] \{[(\alpha_{1n} - 1)^2 - \gamma_{1n}^2]^2 + 4\gamma_{1n}^2 (\alpha_{1n} - 1)^2\}} \times \\
 &\quad \times \lambda_{1n} \sqrt{\gamma_{1n}} \sin n\varphi; \\
 \Phi_k &= -\frac{2E\delta}{l} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\rho_{1n}^{-k} (A_{1n} \xi_{1n}^{(k)} + B_{1n} \eta_{1n}^{(k)})}{(\alpha_{1n} - 1)^2 + \gamma_{1n}^2} \lambda_{1n} \cos n\varphi; \\
 v_k &= 2 \sum_{n=2}^{\infty} \rho_{1n}^{-k} (A_{1n} \cos k\psi_{1n} + B_{1n} \sin k\psi_{1n}) \cos n\varphi.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Оставшиеся в выражениях (2.8) и (3.2) члены, соответственно определяемые корнями $|\beta_{2n}| < 1$, $|\beta_{4n}| < 1$ и $\rho_{2n} < 1$, представляют собой решение для достаточно длинной оболочки¹, нагруженной по сечению $(m+1)$ -го отсека системой самоуравновешенных сил. Это решение можно записать так:

Случай действительных корней

$$\begin{aligned}
 u_k &= -\sum_{n=2}^{\infty} \left[C_{2n} \beta_{2n}^{-k} \frac{\beta_{2n} (\beta_{2n} + 1)}{(\beta_{2n} - 1)^3} + C_{4n} \beta_{4n}^{-k} \frac{\beta_{4n} (\beta_{4n} + 1)}{(\beta_{4n} - 1)^3} \right] \lambda_{1n} \sqrt{\gamma_{2n}} \sin n\varphi; \\
 \Phi_k &= -\frac{E\delta}{l} \sum_{n=2}^{\infty} \left(C_{2n} \beta_{2n}^{-k} \frac{\beta_{2n}}{\beta_{2n} - 1} + C_{4n} \beta_{4n}^{-k} \frac{\beta_{4n}}{\beta_{4n} - 1} \right) \lambda_{1n} \cos n\varphi; \\
 v_k &= \sum_{n=2}^{\infty} (C_{2n} \beta_{2n}^{-k} + C_{4n} \beta_{4n}^{-k}) \cos n\varphi;
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Случай комплексных корней

$$\begin{aligned}
 u_k &= -2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\rho_{2n}^{-k} [A_{2n} (\xi_{2n}^{(k)} \psi_{2n} + \eta_{2n}^{(k)} \chi_{2n}) + B_{2n} (\eta_{2n}^{(k)} \psi_{2n} - \xi_{2n}^{(k)} \chi_{2n})]}{[(\alpha_{2n} - 1)^2 + \gamma_{2n}^2] \{[(\alpha_{2n} - 1)^2 - \gamma_{2n}^2]^2 + 4\gamma_{2n}^2 (\alpha_{2n} - 1)^2\}} \times \\
 &\quad \times \lambda_{1n} \sqrt{\gamma_{2n}} \sin n\varphi; \\
 \Phi_k &= -\frac{2E\delta}{l} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\rho_{2n}^{-k} (A_{2n} \xi_{2n}^{(k)} + B_{2n} \eta_{2n}^{(k)})}{(\alpha_{2n} - 1)^2 + \gamma_{2n}^2} \lambda_{1n} \cos n\varphi; \\
 v_k &= 2 \sum_{n=2}^{\infty} \rho_{2n}^{-k} (A_{2n} \cos k\psi_{2n} + B_{2n} \sin k\psi_{2n}) \cos n\varphi.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

В выражениях (2.8) и (3.2), а также в (3.6), (3.7), (3.8) и (3.9) остались пока неопределенными коэффициенты: C_{1n} , C_{3n} , C_{2n} , C_{4n} — в случае действительных корней, и A_{1n} , B_{1n} , A_{2n} , B_{2n} — в случае комплексных корней. Эти постоянные следует определять из условия загрузки краев оболочки системами самоуравновешенных нагрузок.

Рассмотрим сначала способ определения постоянных для полубесконечной оболочки. В дальнейшем дадим метод определения постоянных для оболочки конечной длины.

¹ Длина оболочки должна быть настолько велика, чтобы приложенная к одному краю (например, в сечении $(m+1)$ -го отсека) система самоуравновешенных сил не вызвала появления сил больше любой наперед заданной величины в районе противоположного края оболочки $k=0$.

§ 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСТОЯННЫХ ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ОБОЛОЧКИ

1. Рассмотрим полубесконечную оболочку, нагруженную по краю $k=0$ самоуравновешенным потоком касательных сил $f_1^0(\varphi)$, который должен удовлетворять условиям (2.7). Как было показано в § 3, напряженное состояние этой оболочки будет полностью определено выражениями (3.6), (3.7), если постоянные C_{1n} , C_{3n} или A_{1n} , B_{1n} будут определены из граничных условий

$$\left. \begin{aligned}
 \Phi_k|_{k=0} &= \Phi_0 = f_1^0(\varphi); \\
 T_k|_{k=0} &= T_0 = 0.
 \end{aligned} \right\} \tag{4.1}$$

Осевые усилия, действующие в сечении оболочки, где расположен нулевой шангоут ($k=0$), можно получить из второй формулы (1.4) в следующем виде:

$$T_0 = \frac{E\delta}{l} (u_1 - u_0) + \frac{l}{2R} \frac{d\Phi_1}{d\varphi}. \tag{4.2}$$

Подставляя сюда выражения (3.6), (3.7) соответственно, получим: для случая действительных корней

$$\begin{aligned}
 T_0 &= +\frac{E\delta}{l} \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{C_{1n}}{\beta_{1n} - 1} \left[\frac{\sqrt{\beta_{1n}} \beta_{3n} (\beta_{1n} + 1)}{\beta_{1n} - 1} + \frac{ln}{2R} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{C_{3n}}{\beta_{3n} - 1} \left[\frac{\sqrt{\beta_{1n}} \beta_{3n} (\beta_{3n} + 1)}{\beta_{3n} - 1} + \frac{ln}{2R} \right] \right\} \lambda_{1n} \sin n\varphi;
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

для случая комплексных корней

$$\begin{aligned}
 T_0 &= -\frac{2E\delta}{l} \sum_{n=2}^{\infty} \rho_{1n}^{-1} \left[\frac{(A_{1n} H_{1n}^{(0)} + B_{1n} L_{1n}^{(0)}) \sqrt{\gamma_{2n}}}{K_{1n}} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{ln}{2R} \frac{(A_{1n} \xi_{1n}^{(1)} + B_{1n} \eta_{1n}^{(1)})}{(\alpha_{1n} - 1)^2 + \gamma_{1n}^2} \right] \lambda_{1n} \sin n\varphi.
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned}
 H_{1n}^{(0)} &= (\xi_{1n}^{(1)} - \rho_{1n} \xi_{1n}^{(0)}) \psi_{1n} + (\eta_{1n}^{(1)} - \rho_{1n} \eta_{1n}^{(0)}) \chi_{1n}; \\
 L_{1n}^{(0)} &= (\eta_{1n}^{(1)} - \rho_{1n} \eta_{1n}^{(0)}) \psi_{1n} - (\xi_{1n}^{(1)} - \rho_{1n} \xi_{1n}^{(0)}) \chi_{1n}; \\
 K_{1n} &= [(\alpha_{1n} - 1)^2 + \gamma_{1n}^2] \{[(\alpha_{1n} - 1)^2 - \gamma_{1n}^2]^2 + 4\gamma_{1n}^2 (\alpha_{1n} - 1)^2\}.
 \end{aligned} \right\} \tag{4.5}$$

Пользуясь формулами (3.6), (3.7), (4.3), (4.4), представим условие по краю оболочки $k=0$ (см. 4.1) в виде: для случая действительных корней

$$\begin{aligned}
 -\frac{E\delta}{l} \sum_{n=2}^{\infty} \left(C_{1n} \frac{\beta_{1n}}{\beta_{1n} - 1} + C_{3n} \frac{\beta_{3n}}{\beta_{3n} - 1} \right) \lambda_{1n} \cos n\varphi &= f_1^0(\varphi); \\
 \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{C_{1n}}{\beta_{1n} - 1} \left[\frac{\sqrt{\beta_{1n}} \beta_{3n} (\beta_{1n} + 1)}{\beta_{1n} - 1} + \frac{ln}{2R} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{C_{3n}}{\beta_{3n} - 1} \left[\frac{\sqrt{\beta_{1n}} \beta_{3n} (\beta_{3n} + 1)}{\beta_{3n} - 1} + \frac{ln}{2R} \right] \right\} \lambda_{1n} \sin n\varphi = 0;
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

для случая комплексных корней

$$-\frac{2E\delta}{l} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{A_{1n}\xi_{1n}^{(0)} + B_{1n}\eta_{1n}^{(0)}}{(\alpha_{1n}-1)^2 + \gamma_{1n}^2} \lambda_{1n} \cos n\varphi = f_1^0(\varphi);$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \rho_{1n}^{-1} \left[\frac{(A_{1n}H_{1n}^{(0)} + B_{1n}L_{1n}^{(0)}) \sqrt{\delta/2\lambda_{3n}}}{K_{1n}} - \frac{In}{2R} \frac{(A_{1n}\xi_{1n}^{(1)} + B_{1n}\eta_{1n}^{(1)})}{(\alpha_{1n}-1)^2 + \gamma_{1n}^2} \right] \lambda_{1n} \sin n\varphi = 0. \quad (4.7)$$

Задача свелась к определению C_{1n} , C_{3n} и A_{1n} , B_{1n} из условий (4.6), (4.7) соответственно, что не представляет принципиальных затруднений, так как задача по существу сводится к разложению функции $f_1^0(\varphi)$ в ряд Фурье при некоторых отношениях коэффициентов C_{1n}/C_{3n} , A_{1n}/B_{1n} , найденных соответственно из вторых условий (4.6), (4.7). Покажем это сначала для случая действительных корней. Из второго условия (4.6) имеем

$$C_{1n} = -C_{3n} \frac{\beta_{1n}-1}{\beta_{3n}-1} \frac{\sqrt{\frac{3}{2} \lambda_{3n} \frac{\beta_{3n}+1}{\beta_{3n}-1} + \frac{In}{2R}}}{\sqrt{\frac{3}{2} \lambda_{3n} \frac{\beta_{1n}+1}{\beta_{1n}-1} + \frac{In}{2R}}}. \quad (4.8)$$

Если ввести это выражение C_{1n} в первое условие (4.6), то после некоторых преобразований получим условие, в котором останется один неопределенный коэффициент C_{3n} , который легко будет найден после разложения функции $f_1^0(\varphi)$ в ряд Фурье.

Однако задачу определения коэффициентов C_{1n} , C_{3n} , A_{1n} , B_{1n} можно упростить, если предварительно произвести некоторые преобразования в решениях (3.6), (3.7). В самом деле, подставляя выражение (4.8) в решение (3.6) и производя необходимые преобразования, в итоге получим решение для полубесконечной оболочки, нагруженной по краю $k=0$ только потоком касательных сил, которое тождественно будет удовлетворять второму условию (4.1). Решение (3.6) в этом случае можно привести к следующему виду:

$$u_k = \sum_{n=2}^{\infty} C_{3n} (Q_{1n}\beta_{1n}^{-k} + Q_{3n}\beta_{3n}^{-k}) \sin n\varphi;$$

$$\Phi_k = \frac{E\delta}{l} \sum_{n=2}^{\infty} C_{3n} (P_{1n}\beta_{1n}^{-k} + P_{3n}\beta_{3n}^{-k}) \cos n\varphi; \quad (4.9)$$

$$v_k = \sum_{n=2}^{\infty} C_{3n} (R_{1n}\beta_{1n}^{-k} + R_{3n}\beta_{3n}^{-k}) \cos n\varphi,$$

где

$$Q_{1n} = \frac{\beta_{1n}(\beta_{1n}+1)}{(\beta_{1n}-1)^2(\beta_{3n}-1)} \frac{\sqrt{\frac{3}{2} \lambda_{3n} \frac{\beta_{3n}+1}{\beta_{3n}-1} + \frac{In}{2R}}}{\sqrt{\frac{3}{2} \lambda_{3n} \frac{\beta_{1n}+1}{\beta_{1n}-1} + \frac{In}{2R}}} \lambda_{1n} \sqrt{\delta/2\lambda_{3n}};$$

$$Q_{3n} = -\lambda_{1n} \sqrt{\frac{3}{2} \lambda_{3n} \frac{\beta_{3n}(\beta_{3n}+1)}{(\beta_{3n}-1)^2}};$$

$$P_{1n} = \frac{\beta_{1n}\lambda_{1n}}{\beta_{3n}-1} \frac{\sqrt{\frac{3}{2} \lambda_{3n} \frac{\beta_{3n}+1}{\beta_{3n}-1} + \frac{In}{2R}}}{\sqrt{\frac{3}{2} \lambda_{3n} \frac{\beta_{1n}+1}{\beta_{1n}-1} + \frac{In}{2R}}}; \quad (4.10)$$

$$P_{3n} = -\frac{\beta_{3n}\lambda_{1n}}{\beta_{3n}-1};$$

$$R_{1n}^0 = -\frac{\beta_{1n}-1}{\beta_{3n}-1} \frac{\sqrt{\frac{3}{2} \lambda_{3n} \frac{\beta_{3n}+1}{\beta_{3n}-1} + \frac{In}{2R}}}{\sqrt{\frac{3}{2} \lambda_{3n} \frac{\beta_{1n}+1}{\beta_{1n}-1} + \frac{In}{2R}}}.$$

Решение (4.9) можно привести к более удобному для практических расчетов виду, если ввести новую постоянную

$$C_n^0 = C_{3n} (P_{1n} + P_{3n}). \quad (4.11)$$

Тогда получим

$$u_k = -\sum_{n=2}^{\infty} C_n^0 \frac{(\beta_{1n}+1) \sqrt{\frac{3}{2} \lambda_{3n}}}{(\beta_{1n}-1)^2} \frac{\beta_{1n}^{-k} + D_{1n}^0 \beta_{3n}^{-k}}{1 + D_{2n}^0} \sin n\varphi;$$

$$\Phi_k = \frac{E\delta}{l} \sum_{n=2}^{\infty} C_n^0 \frac{\beta_{1n}^{-k} + D_{2n}^0 \beta_{3n}^{-k}}{1 + D_{2n}^0} \cos n\varphi; \quad (4.12)$$

$$v_k = -\sum_{n=2}^{\infty} C_n^0 \frac{\beta_{1n}-1}{\beta_{1n}\lambda_{1n}} \frac{\beta_{1n}^{-k} + \frac{\beta_{3n}^{-n}}{R_{1n}^0}}{1 + D_{2n}^0} \cos n\varphi,$$

где

$$D_{1n}^0 = -\frac{\beta_{3n}(\beta_{3n}+1)(\beta_{1n}-1)^2}{\beta_{1n}(\beta_{1n}+1)(\beta_{3n}-1)^2} \frac{\sqrt{\frac{3}{2} \lambda_{3n} \frac{\beta_{1n}+1}{\beta_{1n}-1} - \frac{In}{2R}}}{\sqrt{\frac{3}{2} \lambda_{3n} \frac{\beta_{3n}+1}{\beta_{3n}-1} - \frac{In}{2R}}};$$

$$D_{2n}^0 = -\frac{\beta_{3n}}{\beta_{1n}} \frac{\sqrt{\frac{3}{2} \lambda_{3n} \frac{\beta_{1n}+1}{\beta_{1n}-1} - \frac{In}{2R}}}{\sqrt{\frac{3}{2} \lambda_{3n} \frac{\beta_{3n}+1}{\beta_{3n}-1} - \frac{In}{2R}}}. \quad (4.13)$$

Таким образом, решение для полубесконечной оболочки, тождественно удовлетворяющее второму условию (4.1) в случае действительных корней, имеет вид (4.12). Постоянные C_n^0 определяются из первого условия (4.1), которое в этом случае запишется в виде

$$\frac{Eb}{l} \sum_{n=2}^{\infty} C_n^0 \cos n\varphi = f_1^0(\varphi). \quad (4.14)$$

Отсюда C_n^0 , как коэффициенты ряда Фурье, определяются по формуле

$$C_n^0 = \frac{2l}{Eb\pi} \int_0^{\pi} f_1^0(\varphi) \cos n\varphi d\varphi; \quad (n=2, 3, 4, \dots) \quad (4.15)$$

Аналогичные преобразования проведем и с решением (3.7), определяющим напряженное состояние полубесконечной оболочки в случае комплексных корней. Из второго условия (4.7) имеем

$$B_{1n} = -A_{1n} \frac{H_{1n}^{(0)} [(a_{1n}-1)^2 + \gamma_{1n}^2] - K_{1n} \xi_{1n}^{(1)}}{L_{1n}^{(0)} [(a_{1n}-1)^2 + \gamma_{1n}^2] - K_{1n} \eta_{1n}^{(1)}}. \quad (4.16)$$

Подставляя (4.16) в (3.7) и выполняя необходимые преобразования, вводя при этом новый коэффициент A_n^0

$$A_{1n} = A_n^0 \frac{(a_{1n}-1)^2 + \gamma_{1n}^2}{(\xi_{1n}^{(0)} - \eta_{1n}^{(0)} S_{1n}) 2\lambda_{1n}}, \quad (4.17)$$

в итоге и для случая комплексных корней получим решение полубесконечной оболочки, тождественно удовлетворяющее второму условию (4.1)

$$\left. \begin{aligned} u_k &= - \sum_{n=2}^{\infty} A_n^0 \rho_{1n}^{-k} \frac{[(a_{1n}-1)^2 + \gamma_{1n}^2] \sqrt{\frac{3}{2} \lambda_{3n}}}{(\xi_{1n}^{(0)} - \eta_{1n}^{(0)} S_{1n}) K_{1n}} [\xi_{1n}^{(k)} (\psi_{1n}^* + \chi_{1n} S_{1n}) + \\ &\quad + \eta_{1n}^{(k)} (\chi_{1n} - \psi_{1n}^* S_{1n})] \sin n\varphi; \\ \Phi_k &= - \frac{Eb}{l} \sum_{n=2}^{\infty} A_n^0 \rho_{1n}^{-k} \frac{\xi_{1n}^{(k)} - \eta_{1n}^{(k)} S_{1n}}{\xi_{1n}^{(0)} - \eta_{1n}^{(0)} S_{1n}} \cos n\varphi; \\ v_k &= \sum_{n=2}^{\infty} A_n^0 \rho_{1n}^{-k} \frac{[(a_{1n}-1)^2 + \gamma_{1n}^2] (\cos k\psi_{1n} - S_{1n} \sin k\psi_{1n})}{\lambda_{1n} (\xi_{1n}^{(0)} - \eta_{1n}^{(0)} S_{1n})} \cos n\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

где

$$S_{1n} = \frac{H_{1n}^{(0)} [(a_{1n}-1)^2 + \gamma_{1n}^2] - K_{1n} \xi_{1n}^{(1)}}{L_{1n}^{(0)} [(a_{1n}-1)^2 + \gamma_{1n}^2] - K_{1n} \eta_{1n}^{(1)}}. \quad (4.19)$$

Постоянные A_n^0 определяются из первого условия (4.1), которое в этом случае будет иметь вид

$$- \frac{Eb}{l} \sum_{n=2}^{\infty} A_n^0 \cos n\varphi = f_1^0(\varphi). \quad (4.20)$$

Отсюда

$$A_n^0 = - \frac{2l}{Eb\pi} \int_0^{\pi} f_1^0(\varphi) \cos n\varphi d\varphi; \quad (n=2, 3, 4, \dots). \quad (4.21)$$

Итак, напряженное состояние полубесконечной оболочки, нагруженной по краю $k=0$ только потоком касательных усилий $f_1^0(\varphi)$, удовлетворяющим условиям (1.5), полностью определяется суммированием решений (2.5) и (4.12) для случая действительных корней или (2.5) и (4.18) — для случая комплексных корней.

Как уже было показано, решения (4.12), (4.18) определяют напряженное состояние полубесконечной оболочки, нагруженной по краю $k=0$ самоуравновешенным потоком касательных сил. С целью определения влияния самоуравновешенных касательных сил на напряженное состояние оболочки на фиг. 12—13 построены кривые, характеризующие изменение наибольших касательных и осевых сил по длине оболочки для случая нагружения края $k=0$. Эти кривые построены для первых членов ряда при $C_n^0 = A_n^0 = 1$, $R/l = 2,31$ для нескольких значений параметра s , характеризующего жесткость шпангоутов. Из этих фигур видно, что наибольшие касательные напряжения по мере удаления от края $k=0$ убывают, распространяясь на значительную длину. Так, например, на расстоянии, равном девяти отсекам от края оболочки, что равно в данном случае диаметру оболочки ($R/l = 2,31$), наибольшее касательное напряжение составляет 15% от наибольших напряжений, действующих по краю. И только при удалении от края на 15 отсеков, что равно длине дуги контура ($2\pi R$), касательные напряжения практически затухают, достигая здесь 5% от наибольших напряжений, действующих по краю оболочки. При увеличении жесткости шпангоутов интенсивность затухания самоуравновешенных напряжений возрастает, но не очень сильно. Так, например, при увеличении жесткости шпангоутов в 6,7 раза зона распространения самоуравновешенных напряжений в глубь оболочки сокращается всего лишь на 20%. Нормальные напряжения при этом, как видно из фиг. 13, сначала возрастают, достигая наибольшей величины на границе между 4 и 5 отсеком, затем убывают, практически затухая в районе 15 отсека.

2. Рассмотрим теперь второй случай, соответствующий нагружению края оболочки $k=0$ системой самоуравновешивающихся осевых сил $f_2^0(\varphi)$, удовлетворяющей условиям (3.1). Граничные условия в этом случае будут:

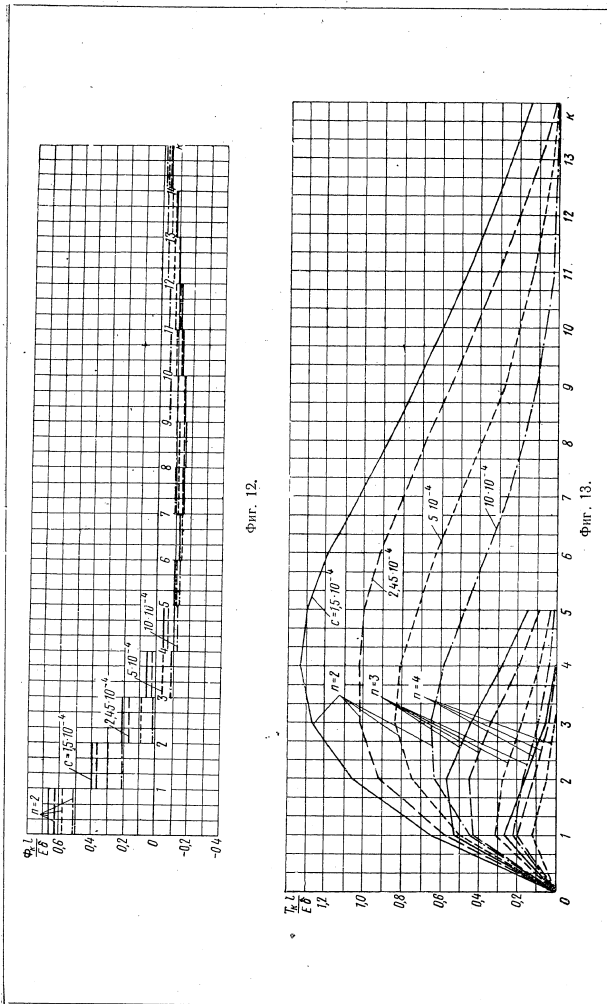
$$\left. \begin{aligned} \Phi_{k|k=0} &= \Phi_0 = 0; \\ T_{k|k=0} &= T_0 = f_2^0(\varphi). \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

Как и в первом случае, преобразуем решения (3.6), (3.7) так, чтобы они тождественно удовлетворяли первому условию (4.22). Первое условие (4.22) будет удовлетворено, если положить

$$\left. \begin{aligned} C_{3n} &= - \frac{\beta_{1n} (\beta_{3n} - 1)}{\beta_{3n} (\beta_{1n} - 1)} C_{1n} - \text{случай действительных корней}; \\ A_{1n} &= - \frac{\gamma_{1n}^{(0)}}{\xi_{1n}^{(0)}} B_{1n} - \text{случай комплексных корней}. \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

Подставляя (4.23) соответственно в (3.6) и (3.7) и выполнив ряд преобразований, получим после введения новых коэффициентов

$$\left. \begin{aligned} D_n^0 &= C_{1n} A_{3n} \left(1 - \beta_{1n} - D_{3n} \frac{ln}{2R} \right) (\beta_{1n}^{-1} + D_{3n} \beta_{3n}^{-1}); \\ B_n^0 &= B_{1n} 2\lambda_{1n} S_{2n} \rho_{1n}^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$



Фиг. 12.

Фиг. 13.

следующие решения для полубесконечной оболочки, нагруженной по краю $k=0$ системой самоуравновешенных осевых сил: случай действительных корней

$$\begin{aligned}
 u_k &= \sum_{n=2}^{\infty} D_n^0 \frac{\beta_{1n}^{-k} + D_{3n}^0 \beta_{3n}^{-k}}{(1 - \beta_{1n} - D_{3n} \frac{in}{2R})(\beta_{1n}^{-1} + D_{6n}^0 \beta_{3n}^{-1})} \sin n\varphi; \\
 \Phi_k &= \frac{E\delta}{l} \sum_{n=2}^{\infty} D_n^0 \frac{(\beta_{1n}^{-k} - \beta_{3n}^{-k}) D_{3n}^0}{(1 - \beta_{1n} - D_{3n} \frac{in}{2R})(\beta_{1n}^{-1} + D_{6n}^0 \beta_{3n}^{-1})} \cos n\varphi; \\
 v_k &= \sum_{n=2}^{\infty} D_n^0 \frac{\beta_{1n}^{-k} - \frac{\beta_{1n}(\beta_{3n}-1)}{\beta_{3n}(\beta_{1n}-1)} \beta_{3n}^{-k}}{A_{3n}^0 (1 - \beta_{1n} - D_{3n} \frac{in}{2R})(\beta_{1n}^{-1} + D_{6n}^0 \beta_{3n}^{-1})} \cos n\varphi;
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

где

$$\begin{aligned}
 D_{3n}^0 &= -\frac{(\beta_{1n}-1)^2}{\sqrt{\frac{3}{2} \lambda_{3n} (\beta_{1n}+1)}}; \\
 D_{4n}^0 &= -\frac{(\beta_{1n}-1)^2 (\beta_{3n}+1)}{(\beta_{3n}-1)^2 (\beta_{1n}+1)}; \\
 D_{6n}^0 &= \frac{(\beta_{3n}-1)^2}{(\beta_{3n}+1) \sqrt{\frac{3}{2} \lambda_{3n}}}; \\
 D_{6n}^0 &= D_{4n} \frac{1 - \beta_{3n} + D_{6n} \frac{in}{2R}}{1 - \beta_{1n} - D_{3n} \frac{in}{2R}}; \\
 A_{3n}^0 &= \lambda_{1n} \sqrt{\frac{3}{2} \lambda_{3n} \frac{\beta_{1n}(\beta_{1n}+1)}{(\beta_{1n}-1)^3}};
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

случай комплексных корней:

$$\begin{aligned}
 u_k &= - \sum_{n=2}^{\infty} B_n^0 \rho_{1n}^{-k} \frac{(\eta_{1n}^{(k)} \psi_{1n}^* - \xi_{1n}^{(k)} \gamma_{1n}) - \frac{\eta_{1n}^{(0)}}{\xi_{1n}^{(0)}} (\xi_{1n}^{(k)} \psi_{1n}^* + \eta_{1n}^{(k)} \lambda_{1n})}{K_{1n} S_{2n}} \times \\
 &\quad \times \sqrt{\frac{3}{2} \lambda_{3n}} \sin n\varphi; \\
 \Phi_k &= - \frac{E\delta}{l} \sum_{n=2}^{\infty} B_n^0 \rho_{1n}^{-k} \frac{(\gamma_{1n}^{(k)} - \frac{\eta_{1n}^{(0)} \xi_{1n}^{(k)}}{\xi_{1n}^{(0)}})}{[(\alpha_{1n}-1)^2 + \eta_{1n}^2] S_{2n}} \cos n\varphi; \\
 v_k &= \sum_{n=2}^{\infty} B_n^0 \rho_{1n}^{-k} \frac{(\sin k\psi_{1n} - \frac{\eta_{1n}^{(0)}}{\xi_{1n}^{(0)}} \cos k\psi_{1n})}{\lambda_{1n} S_{2n}} \cos n\varphi,
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

где

$$S_{2n} = \frac{\left(L_{1n}^{(0)} - \frac{\eta_{1n}^0}{\xi_{1n}^{(0)}} H_{1n}^{(0)} \right) \sqrt{\frac{3}{2} \lambda_{3n}} + \ln \left(\frac{\eta_{1n}^{(1)} - \frac{\eta_{1n}^{(0)}}{\xi_{1n}^{(0)}} \xi_{1n}^{(1)}}{(\alpha_{1n} - 1)^2 + \eta_{1n}^2} \right)}{K_{1n}} + \frac{\ln}{2R} \quad (4.28)$$

Осевые усилия T_0 , действующие по краю оболочки $k=0$, можно вычислить по формуле (4.2), если подставить сюда формулы (4.25) или (4.27). После преобразований получим:

$$\left. \begin{aligned} T_0 &= \frac{Eb}{l} \sum_{n=2}^{\infty} D_n^0 \sin n\varphi - \text{случай действительных корней;} \\ T_0 &= \frac{Eb}{l} \sum_{n=2}^{\infty} B_n^0 \sin n\varphi - \text{случай комплексных корней.} \end{aligned} \right\} (4.29)$$

В соответствии с этим второе условие (4.22) будет представлено в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{Eb}{l} \sum_{n=2}^{\infty} D_n^0 \sin n\varphi &= f_2^0(\varphi) - \text{случай действительных корней;} \\ \frac{Eb}{l} \sum_{n=2}^{\infty} B_n^0 \sin n\varphi &= f_2^0(\varphi) - \text{случай комплексных корней.} \end{aligned} \right\} (4.30)$$

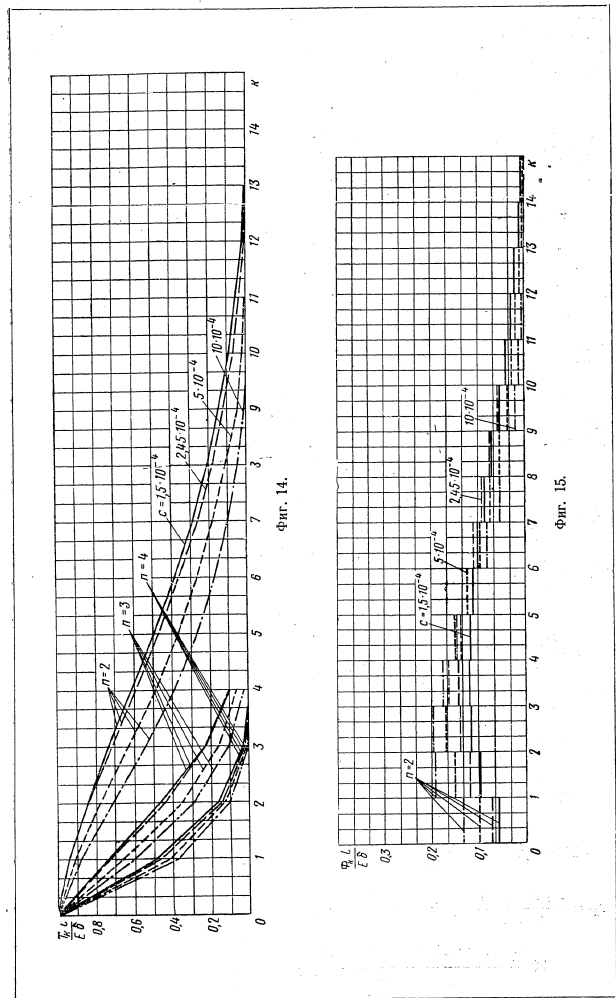
Отсюда D_n^0, B_n^0 как коэффициенты рядов Фурье, определяется по формулам

$$\left. \begin{aligned} D_n^0 &= \frac{2l}{Eb\pi} \int_0^{\pi} f_2^0(\varphi) \sin n\varphi d\varphi; \quad (n=2, 3, \dots); \\ B_n^0 &= \frac{2l}{Eb\pi} \int_0^{\pi} f_2^0(\varphi) \sin n\varphi d\varphi \quad (n=2, 3, 4, \dots). \end{aligned} \right\} (4.31)$$

На фиг. 14 и 15 построены кривые, характеризующие изменение наибольших осевых и касательных сил по длине оболочки по мере удаления от нагруженного края $k=0$. Эти кривые построены для первых четырех членов рядов (4.25) или (4.27) при $D_n^0 = B_n^0 = 1, R/l = 2,31$ и для некоторых значений параметра $c = E_0 l / ER^3$, характеризующего жесткость шпангоутов. Значения корней β_{1n}, β_{2n} или α_{1n}, γ_{1n} для соответствующих значений параметра c и R/l сняты с кривых фиг. 4-11. Из приведенных фигур видно, что наибольшие осевые усилия по мере удаления от края $k=0$ убывают, практически затухая в районе 12 и 13 отсеков, что почти равно длине контура оболочки. При увеличении жесткости шпангоутов интенсивность затухания самоуравновешенных осевых усилий возрастает, но не очень значительно. Касательные напряжения в этом случае сначала возрастают, достигая наибольших значений в 3-4 отсеках, затем убывают, практически затухая в районе 13-14 отсеков. Интересно отметить, что с увеличением жесткости шпангоутов наибольшие касательные напряжения возрастают, что видно из фиг. 15.

3. Если по краю $k=0$ полубесконечной оболочки действуют одновременно поток касательных усилий $f_1^0(\varphi)$ и система самоуравновешенных осевых сил $f_2^0(\varphi)$, то граничные условия в этом случае запишутся так

$$\left. \begin{aligned} \Phi_k|_{k=0} &= \Phi_0 = f_1^0(\varphi); \\ T_k|_{k=0} &= T_0 = f_2^0(\varphi). \end{aligned} \right\} (4.32)$$



Решение этой задачи легко может быть получено в результате суммирования решений (2.5), (4.12), (4.25) в случае действительных корней или (2.5), (4.18), (4.27) — в случае комплексных корней. Коэффициенты M_{2n} , C_n , D_n вычисляются соответственно по формулам (2.6), (4.15), (4.31), а коэффициенты A_n , B_n — по формулам (4.21) и (4.31).

4. В заключение рассмотрим достаточно длинную оболочку, нагруженную по краю $k=m+1$ (см. фиг. 1). Как было показано в § 3, напряженное состояние такой оболочки будет полностью определено решениями (3.8), (3.9). Коэффициенты C_{2n} , C_{4n} , A_{2n} , B_{2n} должны быть определены из следующих граничных условий:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_k|_{k=m+1} &= \Phi_{m+1} = f_1^{(m+1)}(\varphi); \\ T_k|_{k=m} &= T_m = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_k|_{k=m+1} &= \Phi_{m+1} = 0, \\ T_k|_{k=m} &= T_m = f_2^{(m)}(\varphi). \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

Как и ранее, решения (3.8), (3.9) преобразуем таким образом, чтобы одно из них тождественно удовлетворяло второму условию (4.33), а второе — первому условию (4.34). Эти преобразования сводятся к таким же выкладкам, которые были проделаны выше, поэтому повторять их не будем. Отметим только, что осевые усилия T_m определяются здесь не по формуле (4.2), а по формуле

$$T_m = \frac{E\delta}{l} (u_m - u_{m-1}) - \frac{l}{2R} \frac{d\Phi_m}{d\varphi}, \quad (4.35)$$

тогда решение для очень длинной оболочки, тождественно удовлетворяющее второму условию (4.33), будет иметь следующий вид: случай действительных корней:

$$\left. \begin{aligned} u_k &= - \sum_{n=2}^{\infty} C_n^m \frac{\beta_{2n}(\beta_{2n}+1) \sqrt{\frac{3}{2} \lambda_{3n}}}{(\beta_{2n}-1)^2} \frac{\beta_{2n}^{-(k-m)} + D_{1n} \beta_{4n}^{-(k-m)}}{1 + D_{2n}^m} \sin n\varphi; \\ \Phi_k &= \frac{M_{кр}}{2\pi R^2} + \frac{E\delta}{l} \sum_{n=2}^{\infty} C_n^m \frac{\beta_{2n}^{-(k-m-1)} + D_{2n}^m \beta_{4n}^{-(k-m)}}{1 + D_{2n}^m} \cos n\varphi; \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

$$v_k = \frac{M_{кр}(k-m)l}{2\pi R^2 G\delta} + \sum_{n=2}^{\infty} C_n^m \frac{\beta_{2n}-1}{\lambda_{1n}} \frac{\beta_{2n}^{-(k-m)} + \frac{\beta_{4n}^{-(k-m)}}{R_{1n}}}{1 + D_{2n}^m} \cos n\varphi;$$

(коэффициенты D_{1n} , D_{2n} , R_{1n} — см. (4.10) и (4.13));

Случай комплексных корней:

$$\left. \begin{aligned} u_k &= \sum_{n=2}^{\infty} A_n^m \rho_{2n}^{-(k-m-1)} \frac{[(a_{2n}-1)^2 + \eta_{2n}^2] \sqrt{\frac{3}{2} \lambda_{3n}}}{K_{2n} [\xi_{2n}^{(m+1)} - S_{3n} \eta_{2n}^{(m+1)}]} \times \\ &\quad \times [\xi_{2n}^{(k)} (\psi_{2n}^* + S_{3n} \chi_{2n}) + \eta_{2n}^{(k)} (\chi_{2n} - S_{3n} \psi_{2n}^*)] \sin n\varphi; \\ \Phi_k &= \frac{M_{кр}}{2\pi R^2} - \frac{E\delta}{l} \sum_{n=2}^{\infty} A_n^m \rho_{2n}^{-(k-m-1)} \frac{\xi_{2n}^{(k)} - S_{3n} \eta_{2n}^{(k)}}{\xi_{2n}^{(m+1)} - S_{3n} \eta_{2n}^{(m+1)}} \cos n\varphi; \\ v_k &= \frac{M_{кр}(k-m)l}{2\pi R^2 G\delta} + \sum_{n=2}^{\infty} A_n^m \rho_{2n}^{-(k-m-1)} \times \\ &\quad \times \frac{[(a_{2n}-1)^2 + \eta_{2n}^2] (\cos k\psi_{2n} - S_{3n} \sin k\psi_{2n})}{\lambda_{1n} [\xi_{2n}^{(m+1)} - S_{3n} \eta_{2n}^{(m+1)}]} \cos n\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

где

$$\left. \begin{aligned} S_{3n} &= \frac{H_{2n}^{(m)} \sqrt{\frac{3}{2} \lambda_{3n} [(a_{2n}-1)^2 + \eta_{2n}^2] - \frac{l n}{2R} K_{2n} \xi_{2n}^{(m)}}}{L_{2n}^{(m)} \sqrt{\frac{3}{2} \lambda_{3n} [(a_{2n}-1)^2 + \eta_{2n}^2] - \frac{l n}{2R} K_{2n} \xi_{2n}^{(m)}}}; \\ H_{2n}^{(m)} &= [\xi_{2n}^{(m)} - \rho_{2n} \xi_{2n}^{(m-1)}] \psi_{2n}^* + [\eta_{2n}^{(m)} - \rho_{2n} \eta_{2n}^{(m-1)}] \chi_{2n}; \\ L_{2n}^{(m)} &= [\eta_{2n}^{(m)} - \rho_{2n} \eta_{2n}^{(m-1)}] \psi_{2n}^* - [\xi_{2n}^{(m)} - \rho_{2n} \xi_{2n}^{(m-1)}] \chi_{2n}. \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

Входящие в эти формулы коэффициенты определяются по формулам (3.3) и (4.5) при условии, если в последних вместо индекса «1» всюду внести индекс «2». Коэффициенты Фурье C_n^m и A_n^m определяются по формулам (4.15) и (4.21).

Решение, тождественно удовлетворяющее первому условию (4.34), запишется здесь так:

Случай действительных корней:

$$\left. \begin{aligned} u_k &= \sum_{n=2}^{\infty} D_n^m \frac{\beta_{2n}^{-(k-m)} + \beta_{4n}^{-(k-m)} D_{1n}^{(m)}}{(1 - D_{3n}^{(m)} \beta_{2n}) (1 + D_{4n}^{(m)} \frac{1 - D_{5n}^{(m)} \beta_{4n}}{1 - D_{3n}^{(m)} \beta_{2n}})} \sin n\varphi; \\ \Phi_k &= - \frac{E\delta}{l} \sum_{n=2}^{\infty} D_n^m \times \\ &\quad \times \frac{[\beta_{2n}^{-(k-m-1)} - \beta_{4n}^{-(k-m-1)}] (\beta_{2n}-1)^2 \cos n\varphi}{(1 - D_{3n}^{(m)} \beta_{2n}) (1 + D_{4n}^{(m)} \frac{1 - D_{5n}^{(m)} \beta_{4n}}{1 - D_{3n}^{(m)} \beta_{2n}})} (\beta_{2n}+1) \sqrt{\frac{3}{2} \lambda_{3n}}; \\ v_k &= \sum_{n=2}^{\infty} D_n^m \frac{(\beta_{2n}-1)^2}{(\beta_{2n}+1) \lambda_{1n}} \sqrt{\frac{3}{2} \lambda_{3n}} \times \\ &\quad \times \frac{\beta_{2n}^{-(k-m)} - \beta_{4n}^{-(k-m)} \frac{\beta_{4n}-1}{\beta_{2n}-1}}{(1 - D_{3n}^{(m)} \beta_{2n}) (1 + D_{4n}^{(m)} \frac{1 - D_{5n}^{(m)} \beta_{4n}}{1 - D_{3n}^{(m)} \beta_{2n}})} \cos n\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (4.39)$$

где

$$\left. \begin{aligned} D_{3n}^{(m)} &= 1 - \frac{(\beta_{2n}-1)^2}{(\beta_{2n}+1) \sqrt{\frac{3}{2} \lambda_{3n}}} \frac{l n}{2R}; \\ D_{4n}^{(m)} &= - \frac{(\beta_{4n}+1) (\beta_{2n}-1)^2}{(\beta_{4n}-1)^2 (\beta_{2n}+1) \beta_{4n}}; \\ D_{5n}^{(m)} &= 1 - \frac{\beta_{4n} (\beta_{4n}-1)^2}{(\beta_{4n}+1) \sqrt{\frac{3}{2} \lambda_{3n}}} \frac{l n}{2R}; \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

Случай комплексных корней:

$$u_k = \sum_{n=2}^{\infty} B_n^m \rho_{2n}^{-(k-m)} \frac{[\eta_{2n}^{(k)} \psi_{2n} - \xi_{2n}^{(k)} \chi_{2n}] - \frac{\eta_{2n}^{(m+1)}}{\xi_{2n}^{(m+1)}} [\xi_{2n}^{(k)*} \psi_{2n} + \eta_{2n}^{(k)} \chi_{2n}]}{K_{2n} S_{4n}} \times \sqrt{\frac{3}{2} \lambda_{3n} \sin n\varphi};$$

$$\Phi_k = -\frac{E\delta}{l} \sum_{n=2}^{\infty} B_n^m \rho_{2n}^{-(k-m)} \frac{[\eta_{2n}^{(k)} - \frac{\eta_{2n}^{(m+1)}}{\xi_{2n}^{(m+1)}} \xi_{2n}^{(k)}]}{[(a_{2n}-1)^2 + \eta_{2n}^2] S_{2n}} \cos n\varphi;$$

$$v_k = \sum_{n=2}^{\infty} B_n^m \rho_{2n}^{-(k-m)} \frac{\sin k\psi_{2n} - \frac{\eta_{2n}^{(m+1)}}{\xi_{2n}^{(m+1)}} \cos k\psi_{2n}}{\lambda_{1n} S_{4n}} \cos n\varphi;$$

(4.41)

где

$$S_{4n} = \frac{L_{2n}^{(m)} - \frac{\eta_{2n}^{(m+1)}}{\xi_{2n}^{(m+1)}} H_{2n}^{(m)}}{K_{2n}} - \frac{ln \left[\frac{\eta_{2n}^{(m)} - \eta_{2n}^{(m+1)}}{\xi_{2n}^{(m+1)}} \xi_{2n}^{(m)} \right]}{2R \left[(a_{2n}-1)^2 + \eta_{2n}^2 \right]} \quad (4.42)$$

Коэффициенты Фурье D_n^m, B_n^m определяются по формулам (4.31).

§ 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСТОЯННЫХ ДЛЯ ОБОЛОЧКИ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Рассмотрим два случая граничных условий. 1. Оболочка нагружена в сечениях крайних отсеков $k=0$ и $k=m+1$ (см. фиг. 1) потоками касательных усилий $f_1^0(\varphi)$ и $f_1^{m+1}(\varphi)$, которые удовлетворяют условиям (1.5). Граничные условия этой задачи будут:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_k|_{k=0} = \Phi_0 = f_1^{(0)}(\varphi); \quad T_k|_{k=0} = T_0 = 0; \\ \Phi_k|_{k=m+1} = \Phi_{m+1} = f_1^{(m+1)}(\varphi); \quad T_k|_{k=m} = T_m = 0. \end{aligned} \right\} (5.1)$$

Для того чтобы оболочка находилась в равновесии, должно быть:

$$\int_0^{2\pi} f_1^{(0)}(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} f_1^{(m+1)}(\varphi) d\varphi = \frac{M_{кр}}{R^2}. \quad (5.2)$$

Условия (5.1) будут удовлетворены, если взять сумму решений (2.5), (4.12), (4.36) в случае действительных корней или сумму решений (2.5), (4.18), (4.37) в случае комплексных корней. Соответственно сумма этих решений имеет вид

$$\Phi_k = \frac{M_{кр}}{2\pi R^2} + \frac{E\delta}{l} \sum_{n=2}^{\infty} C_n^0 \frac{\beta_{1n}^{-k} + D_{2n}^0 \beta_{2n}^{-k}}{1 + D_{2n}^0} \cos n\varphi + \frac{E\delta}{l} \sum_{n=2}^{\infty} C_n^m \frac{\beta^{-(k-m-1)} + D_{2n}^m \beta^{-(k-m-1)}}{1 + D_{2n}^m} \cos n\varphi;$$

$$\Phi_k = \frac{M_{кр}}{2\pi R^2} - \frac{E\delta}{l} \sum_{n=2}^{\infty} A_n^0 \rho_{1n}^{-k} \frac{\xi_{1n}^{(k)} - \eta_{1n}^{(k)} S_{1n}}{\xi_{1n}^{(0)} - \eta_{1n}^{(0)} S_{1n}} \cos n\varphi - \frac{E\delta}{l} \sum_{n=2}^{\infty} A_n^m \rho_{2n}^{-(k-m-1)} \frac{\xi_{2n}^{(k)} - \eta_{2n}^{(k)} S_{2n}}{\xi_{2n}^{(m+1)} - \eta_{2n}^{(m+1)} S_{2n}} \cos n\varphi.$$

(5.3)

Тогда соответственно получим: при $k=0$

$$\frac{M_{кр}}{2\pi R^2} + \frac{E\delta}{l} \sum_{n=2}^{\infty} C_n^0 \cos n\varphi + \frac{E\delta}{l} \sum_{n=2}^{\infty} C_n^m \frac{\beta_{2n}^{m+1} + D_{2n}^m \beta_{2n}^{m+1}}{1 + D_{2n}^m} \times \cos n\varphi = f_1^{(0)}(\varphi);$$

$$\frac{M_{кр}}{2\pi R^2} - \frac{E\delta}{l} \sum_{n=2}^{\infty} A_n^0 \cos n\varphi - \frac{E\delta}{l} \sum_{n=2}^{\infty} A_n^m \frac{\beta_{2n}^{m+1} (\xi_{2n}^0 - \eta_{2n}^0 S_{2n})}{\xi_{2n}^{m+1} - \eta_{2n}^{m+1} S_{2n}} \times \cos n\varphi = f_1^{(0)}(\varphi);$$

(5.4)

при $k=m+1$

$$\frac{M_{кр}}{2\pi R^2} + \frac{E\delta}{l} \sum_{n=2}^{\infty} C_n^0 \frac{\beta_{1n}^{-(m+1)} + D_{2n}^0 \beta_{2n}^{-(m+1)}}{1 + D_{2n}^0} \cos n\varphi + \frac{E\delta}{l} \sum_{n=2}^{\infty} C_n^m \cos n\varphi = f_1^{(m+1)}(\varphi);$$

$$\frac{M_{кр}}{2\pi R^2} - \frac{E\delta}{l} \sum_{n=2}^{\infty} A_n^0 \rho_{1n}^{-(m+1)} \frac{\xi_{1n}^{(m+1)} - \eta_{1n}^{(m+1)} S_{1n}}{\xi_{1n}^0 - \eta_{1n}^0 S_{1n}} \cos n\varphi - \frac{E\delta}{l} \sum_{n=2}^{\infty} A_n^m \cos n\varphi = f_1^{(m+1)}(\varphi).$$

(5.5)

Для определения постоянных C_n^0, C_n^m или A_n^0, A_n^m из условий (5.4), (5.5) воспользуемся методом последовательных приближений. В первом приближении, полагая в выражениях (5.4) $C_n^m=0$ или $A_n^m=0$, получим

$$C_{1n}^0 = \frac{2l}{E\delta\pi} \int_0^{\pi} f_1^{(0)}(\varphi) \cos n\varphi d\varphi; \quad (n=2, 3, 4, \dots);$$

$$A_{1n}^0 = -\frac{2l}{E\delta\pi} \int_0^{\pi} f_1^{(0)}(\varphi) \cos n\varphi d\varphi; \quad (n=2, 3, 4, \dots).$$

(5.6)

Вводя эти выражения в выражения (5.5), соответственно находим

$$C_{1n}^m = \frac{2l}{E\delta\pi} \int_0^{\pi} f_1^{(m+1)}(\varphi) \cos n\varphi d\varphi - C_{1n}^0 \frac{\beta_{1n}^{-(m+1)} + D_{2n}^0 \beta_{2n}^{-(m+1)}}{1 + D_{2n}^0};$$

$$A_{1n}^m = -\frac{2l}{E\delta\pi} \int_0^{\pi} f_1^{(m+1)}(\varphi) \cos n\varphi d\varphi - A_{1n}^0 \rho_{1n}^{-(m+1)} \frac{\xi_{1n}^{(m+1)} - \eta_{1n}^{(m+1)} S_{1n}}{\xi_{1n}^0 - \eta_{1n}^0 S_{1n}};$$

(n=2, 3, 4, ...).

(5.7)

Подставляя теперь эти выражения в выражения (5.4), найдем коэффициенты C_{2n}^0, A_{2n}^0 второго приближения

$$\left. \begin{aligned} C_{2n}^0 &= \frac{2l}{E\beta\pi} \int_0^\pi f_1^{(0)}(\varphi) \cos n\varphi d\varphi - C_{1n}^m \frac{\beta_{2n}^{m+1} + D_{2n}^m \beta_{4n}^{m+1}}{1 + D_{2n}^m}; \\ A_{2n}^0 &= -\frac{2l}{E\beta\pi} \int_0^\pi f_1^{(0)}(\varphi) \cos n\varphi d\varphi - A_{1n}^m \rho_{2n}^{m+1} \frac{\epsilon_{2n}^0 - \gamma_{2n}^0 S_{3n}}{\epsilon_{2n}^{m+1} - \gamma_{2n}^{m+1} S_{3n}}. \end{aligned} \right\} (5.8)$$

Вводя эти выражения в выражения (5.5), находим коэффициенты C_{2n}^m, A_{2n}^m второго приближения, которые следует ввести опять в выражения (5.4) и т. д. Коэффициенты $C_{jn}^0, A_{jn}^0, C_{jn}^m, A_{jn}^m$ j -того приближения запишутся в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} C_{jn}^0 &= \frac{2l}{E\beta\pi} \int_0^\pi f_1^{(0)}(\varphi) \cos n\varphi d\varphi - C_{(j-1)n}^m \frac{\beta_{2n}^{m+1} + D_{2n}^m \beta_{4n}^{m+1}}{1 + D_{2n}^m}; \\ A_{jn}^0 &= -\frac{2l}{E\beta\pi} \int_0^\pi f_1^{(0)}(\varphi) \cos n\varphi d\varphi - \\ &\quad - A_{(j-1)n}^m \rho_{2n}^{m+1} \frac{\epsilon_{2n}^0 - \gamma_{2n}^0 S_{3n}}{\epsilon_{2n}^{(m+1)} - \gamma_{2n}^{(m+1)} S_{3n}}; \end{aligned} \right\} (5.9)$$

$$\left. \begin{aligned} C_{jn}^m &= \frac{2l}{E\beta\pi} \int_0^\pi f_1^{(m+1)}(\varphi) \cos n\varphi d\varphi - C_{jn}^0 \frac{\beta_{2n}^{-(m+1)} + D_{2n}^m \beta_{4n}^{-(m+1)}}{1 + D_{2n}^m}; \\ A_{jn}^m &= -\frac{2l}{E\beta\pi} \int_0^\pi f_1^{(m+1)}(\varphi) \cos n\varphi d\varphi - \\ &\quad - A_{jn}^0 \rho_{2n}^{-(m+1)} \frac{\epsilon_{2n}^{m+1} - \gamma_{2n}^{m+1} S_{3n}}{\epsilon_{2n}^0 - \gamma_{2n}^0 S_{3n}}; \end{aligned} \right\} (5.10)$$

($n=2, 3, 4, \dots$).

Отсюда видно, что процесс последовательных приближений сходится тем быстрее, чем длиннее оболочка.

2. Рассмотрим второй случай. Оболочка нагружена в сечениях крайних отсеков $k=0$ и $k=m+1$ системами самоуравновешенных осевых усилий $f_2^{(0)}(\varphi)$ и $f_2^{(m)}(\varphi)$. Граничные условия в этом случае будут:

$$\left. \begin{aligned} T_{k|k=0} &= T_0 = f_2^{(0)}(\varphi); \\ T_{k|k=m} &= T_m = f_2^{(m)}(\varphi). \end{aligned} \right\} (5.11)$$

Функции $f_2^{(0)}(\varphi)$ и $f_2^{(m)}(\varphi)$ должны при этом удовлетворять условиям (1.5). В этом случае условия (5.11) будут выполнены, если взять сумму решений (4.25), (4.39) в случае действительных корней или сумму решений (4.27), (4.41) в случае комплексных корней в виде:

действительные корни

$$\left. \begin{aligned} u_k &= \sum_{n=2}^{\infty} D_n^0 u_1(k, n) \sin n\varphi + \sum_{n=2}^{\infty} D_n^m u_2(k, n) \sin n\varphi; \\ \Phi_k &= \frac{E\beta}{l} \sum_{n=2}^{\infty} D_n^0 \Phi_1(k, n) \cos n\varphi + \frac{E\beta}{l} \sum_{n=2}^{\infty} D_n^m \Phi_2(k, n) \cos n\varphi; \end{aligned} \right\} (5.12)$$

комплексные корни

$$\left. \begin{aligned} u_k &= \sum_{n=2}^{\infty} B_n^0 \bar{u}_1(k, n) \sin n\varphi + \sum_{n=2}^{\infty} B_n^m \bar{u}_2(k, n) \sin n\varphi; \\ \Phi_k &= \frac{E\beta}{l} \sum_{n=2}^{\infty} B_n^0 \bar{\Phi}_1(k, n) \cos n\varphi + \frac{E\beta}{l} \sum_{n=2}^{\infty} B_n^m \bar{\Phi}_2(k, n) \cos n\varphi. \end{aligned} \right\} (5.13)$$

где

$$\left. \begin{aligned} u_1(k, n) &= \frac{\beta_{1n}^{-k} + D_{4n}^0 \beta_{3n}^{-k}}{(1 - \beta_{1n} - D_{3n}^0 \frac{ln}{2R})(\beta_{1n}^{-1} + D_{6n}^0 \beta_{3n}^{-1})}; \\ \Phi_1(k, n) &= \frac{(\beta_{1n}^{-k} - \beta_{3n}^{-k}) D_{3n}^0}{(1 - \beta_{1n} - D_{3n}^0 \frac{ln}{2R})(\beta_{1n}^{-1} + D_{6n}^0 \beta_{3n}^{-1})}; \\ u_2(k, n) &= \frac{\beta_{2n}^{-(k-m)} + \beta_{4n}^{-(k-m)} D_{4n}^m}{(1 - D_{3n}^m \beta_{2n}^m)(1 + D_{4n}^m \frac{1 - D_{3n}^m \beta_{4n}^m}{1 - D_{3n}^m \beta_{2n}^m})}; \\ \Phi_2(k, n) &= -\frac{(\beta_{2n} - 1)^2 [\beta_{2n}^{-(k-m-1)} - \beta_{4n}^{-(k-m-1)}]}{(\beta_{2n} + 1) \sqrt{\frac{3\lambda_{3n}}{2} (1 - \beta_{2n} D_{3n}^m)} \left(1 + D_{4n}^m \frac{1 - \beta_{4n} D_{5n}^m}{1 - \beta_{2n} D_{3n}^m}\right)}; \end{aligned} \right\} (5.14)$$

$$\bar{u}_1(k, n) = -\rho_{1n}^{-k} \frac{(\gamma_{1n}^{(k)*} \psi_{1n} - \xi_{1n}^{(k)} \chi_{1n}) - \frac{\gamma_{1n}^0}{\xi_{1n}^{(0)}} (\xi_{1n}^{(k)*} \psi_{1n} + \gamma_{1n}^{(k)} \chi_{1n})}{K_{1n} S_{2n}} \times \sqrt{\frac{3}{2} \lambda_{3n}};$$

$$\bar{\Phi}_1(k, n) = -\rho_{1n}^{-k} \frac{(\gamma_{1n}^{(k)} - \gamma_{1n}^{(0)} \xi_{1n}^{(k)})}{[(\alpha_{1n} - 1)^2 + \gamma_{1n}^2] S_{2n}};$$

$$\bar{u}_2(k, n) = \rho_{2n}^{-(k-m)} \frac{(\gamma_{2n}^{(k)*} \psi_{2n} - \xi_{2n}^{(k)} \chi_{2n}) - \frac{\gamma_{2n}^{(m+1)}}{\xi_{2n}^{(m+1)}} (\xi_{2n}^{(k)*} \psi_{2n} + \gamma_{2n}^{(k)} \chi_{2n})}{K_{2n} S_{4n}} \times \sqrt{\frac{3}{2} \lambda_{3n}};$$

$$\bar{\Phi}_2(k, n) = -\rho_{2n}^{-(k-m)} \frac{(\gamma_{2n}^{(k)} - \gamma_{2n}^{(m+1)} \xi_{2n}^{(k)})}{[(\alpha_{2n} - 1)^2 + \gamma_{2n}^2] S_{4n}}.$$

Принимая во внимание формулы (5.12), (5.13), (4.35), (4.2) и (5.11), получим условия для определения коэффициентов D_n^0 , D_n^m или B_n^0 , B_n^m в следующем виде:
при $k=0$

$$\left. \begin{aligned} \frac{E\delta}{l} \sum_{n=2}^{\infty} D_n^0 \sin n\varphi + \frac{E\delta}{l} \sum_{n=2}^{\infty} D_n^m [u_2(1, n) - u_2(0, n) - \frac{ln}{2R} \Phi_2(1, n)] \sin n\varphi = f_2^{(0)}(\varphi); \\ \frac{E\delta}{l} \sum_{n=2}^{\infty} B_n^0 \sin n\varphi + \frac{E\delta}{l} \sum_{n=2}^{\infty} B_n^m [\bar{u}_2(1, n) - \bar{u}_2(0, n) - \frac{ln}{2R} \bar{\Phi}_2(1, n)] \sin n\varphi = f_2^{(0)}(\varphi); \end{aligned} \right\} (5.16)$$

при $k=m+1$

$$\left. \begin{aligned} \frac{E\delta}{l} \sum_{n=2}^{\infty} D_n^m \sin n\varphi + \frac{E\delta}{l} \sum_{n=2}^{\infty} D_n^0 [u_1(m, n) - u_1(m-1, n) + \frac{ln}{2R} \Phi_1(m, n)] \sin n\varphi = f_2^{(m)}(\varphi); \\ \frac{E\delta}{l} \sum_{n=2}^{\infty} B_n^m \sin n\varphi + \frac{E\delta}{l} \sum_{n=2}^{\infty} B_n^0 [\bar{u}_1(m, n) - \bar{u}_1(m-1, n) + \frac{ln}{2R} \bar{\Phi}_1(m, n)] \sin n\varphi = f_2^{(m)}(\varphi). \end{aligned} \right\} (5.17)$$

Условия (5.11), записанные в виде (5.17), (5.16), ничем не отличаются от условий (5.4), (5.5). Поэтому метод определения коэффициентов D_n^0 , D_n^m или B_n^0 , B_n^m также не будет отличаться от рассмотренного выше. Коэффициенты D_{jn}^0 , D_{jn}^m или B_{jn}^0 , B_{jn}^m j -того приближения должны вычисляться по формулам

$$\left. \begin{aligned} D_{jn}^0 = \frac{2l}{E\delta\pi} \int_0^{\pi} f_2^{(0)}(\varphi) \sin n\varphi d\varphi - \\ - D_{(j-1)n}^m [u_2(1, n) - u_2(0, n) - \frac{ln}{2R} \Phi_2(1, n)]; \\ B_{jn}^0 = \frac{2l}{E\delta\pi} \int_0^{\pi} f_2^{(0)}(\varphi) \sin n\varphi d\varphi - \\ - B_{(j-1)n}^m [\bar{u}_2(1, n) - \bar{u}_2(0, n) - \frac{ln}{2R} \bar{\Phi}_2(1, n)]; \end{aligned} \right\} (5.18)$$

$$\left. \begin{aligned} D_{jn}^m = \frac{2l}{E\delta\pi} \int_0^{\pi} f_2^{(m)}(\varphi) \sin n\varphi d\varphi - \\ - D_{jn}^0 [u_1(m, n) - u_1(m-1, n) + \frac{ln}{2R} \Phi_1(m, n)]; \\ B_{jn}^m = \frac{2l}{E\delta\pi} \int_0^{\pi} f_2^{(m)}(\varphi) \sin n\varphi d\varphi - \\ - B_{jn}^0 [\bar{u}_1(m, n) - \bar{u}_1(m-1, n) + \frac{ln}{2R} \bar{\Phi}_1(m, n)]. \end{aligned} \right\} (5.19)$$

Если края оболочки нагружены одновременно потоками касательных усилий $f_k^{(0)}(\varphi)$, $f_k^{(m+1)}(\varphi)$ и системами самоуравновешенных осевых усилий $f_2^{(0)}(\varphi)$, $f_2^{(m)}(\varphi)$, то в этом случае граничные условия будут

$$\left. \begin{aligned} \Phi_k|_{k=0} = \Phi_0 = f_1^{(0)}(\varphi); \quad \Phi_k|_{k=m+1} = \Phi_{m+1} = f_1^{(m+1)}(\varphi); \\ T_k|_{k=0} = T_0 = f_2^{(0)}(\varphi); \quad T_k|_{k=m} = T_m = f_2^{(m)}(\varphi). \end{aligned} \right\} (5.20)$$

Решение этой задачи может быть найдено в результате суммирования выражений (5.3), (5.12) и (5.13). Коэффициенты C_n^0 , C_n^m , A_n^0 , A_n^m , D_n^0 , D_n^m , B_n^0 , B_n^m вычисляются по формулам (5.9), (5.10), (5.18), (5.19).

§ 6. ИЗГИБ ОБОЛОЧКИ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ УПРУГИМИ ШПАНГОУТАМИ

Как уже отмечалось, решение задачи об изгибе оболочки сводится к отысканию из решения системы дифференциально-разностных уравнений (1.1) функций $u_k(\varphi)$, $v_k(\varphi)$, $\Phi_k(\varphi)$, удовлетворяющих условиям (1.10) или (1.11). Функции $F_1^{(0)}(\varphi)$, $F_1^{(m+1)}(\varphi)$, $F_2^{(0)}(\varphi)$, $F_2^{(m)}(\varphi)$ должны удовлетворять при этом (1.9). Решение системы (1.1) будем искать в виде

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_k = A_k^0 + A_k^{(1)} \cos \varphi + \sum_{n=2}^{\infty} A_k^{(n)} \cos n\varphi; \\ \bar{\Phi}_k = B_k^{(1)} \sin \varphi + \sum_{n=2}^{\infty} B_k^{(n)} \sin n\varphi; \\ \bar{v}_k = C_k^{(1)} \sin \varphi + \sum_{n=2}^{\infty} C_k^{(n)} \sin n\varphi; \end{aligned} \right\} (6.1)$$

где A_k^n , $B_k^{(n)}$, $C_k^{(n)}$ — коэффициенты рядов Фурье.

Нетрудно показать, что это решение можно разбить на две части, одна из которых

$$\left. \begin{aligned} u_k^0 = A_k^0 + A_k^1 \cos \varphi; \\ \Phi_k^0 = B_k^1 \sin \varphi; \\ v_k^0 = C_k^1 \sin \varphi. \end{aligned} \right\} (6.2)$$

соответствует нагружению торцовых сечений двух крайних отсеков нагрузки¹, которая вызывает в оболочке только напряжения, соответствующие поперечному изгибу оболочки как балки, а другая:

$$\left. \begin{aligned} u_k &= \sum_{n=2}^{\infty} A_k^{(n)} \cos n\varphi; \\ \phi_k &= \sum_{n=2}^{\infty} B_k^{(n)} \sin n\varphi; \\ v_k &= \sum_{n=2}^{\infty} C_k^{(n)} \sin n\varphi \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

соответствует нагружению торцовых сечений двух крайних отсеков оболочки только самоуравновешенной системой сил.

В самом деле уравнения (1.1) и условия (1.9) будут удовлетворены с помощью формулы (6.2), если в последних положить:

$$\left. \begin{aligned} A_k^{(0)} &= 0; \quad A_k^{(1)} = \frac{M_{изг} k l}{\pi R^2 E b}; \\ B_k^{(1)} &= 0; \\ C_k^{(1)} &= \frac{M_{изг} k^2 l^2}{2\pi R^2 E b} \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

Тогда получаем решение задачи об изгибе оболочки, нагруженной изгибающим моментом $M_{изг}$, в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} u_k^0 &= \frac{M_{изг} \cos \varphi}{\pi} \frac{k l}{R^2 E b}; \\ \phi_k^0 &= 0; \\ v_k^0 &= \frac{M_{изг} \sin \varphi}{\pi} \frac{k^2 l^2}{2 R^2 E b} \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

Осевые усилия, возникающие в обшивке, при этом будут

$$\gamma^0 = \frac{M_{изг} \cos \varphi}{\pi R^2} \quad (6.6)$$

Как нетрудно проверить, выражения (6.3) при всех значениях k удовлетворяют условиям (2.7), на основании чего можно заключить, что система (6.3) оставляет на краях оболочки только самоуравновешенную систему осевых и касательных сил. Пользуясь принципом независимости действия сил, целесообразно систему (6.5) выделить из общего решения (6.1) и в дальнейшем искать решение уравнений (1.1) так же, как и при рассмотрении задачи о кручении оболочки только от действия самоуравновешенной системы сил.

¹ Здесь изгибающие моменты в сечении любого шпангоута тождественно равны нулю.

$$M_k(\varphi) = -\frac{E_0 J}{R^2} \left(\frac{d^3 v_k^0}{d\varphi^3} + \frac{d v_k^0}{d\varphi} \right) = 0.$$

Подставляя формулы (6.3) в уравнения (1.1) и приравнявая коэффициенты при $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$, получим следующую систему однородных уравнений относительно коэффициентов $A_k^{(n)}$, $B_k^{(n)}$, $C_k^{(n)}$:

$$\left. \begin{aligned} C_k^{(n)} - C_{k-1}^{(n)} - \frac{l n}{2R} (A_k^{(n)} - A_{k-1}^{(n)}) &= B_k^{(n)} \left(\frac{l}{G b} + \frac{n^2 l^3}{12 E R^2 b} \right); \\ 2A_k^{(n)} - A_{k+1}^{(n)} - A_{k-1}^{(n)} &= \frac{l^2 n}{2 E R b} (B_k^{(n)} + B_{k+1}^{(n)}); \\ B_{k+1}^{(n)} - B_k^{(n)} - \frac{E_0 J n^2 (n^2 - 1)^2}{R^4} C_k^{(n)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

Решение этой системы будем искать в виде

$$\left. \begin{aligned} A_k^{(n)} &= A_n \beta_n^{-k}; \\ B_k^{(n)} &= B_n \beta_n^{-k}; \\ C_k^{(n)} &= C_n \beta_n^{-k}; \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

где A_n , B_n , C_n , β_n — произвольные коэффициенты, подлежащие определению.

После преобразований получим

$$\left. \begin{aligned} A_n \frac{l n}{2R} (1 + \beta_n) + B_n \left(\frac{l}{G b} + \frac{n^2 l^3}{12 E R^2 b} \right) + C_n (\beta_n - 1) &= 0; \\ A_n \left(\beta_n - 2 + \frac{1}{\beta_n} \right) + B_n \frac{n l^2}{2 E R b} \left(1 + \frac{1}{\beta_n} \right) &= 0; \\ B_n \left(1 - \frac{1}{\beta_n} \right) + C_n \frac{E_0 J n^2 (n^2 - 1)^2}{R^4} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

Приравняв нулю детерминант этой системы, в итоге найдем следующие алгебраические уравнения относительно коэффициентов β_n :

$$\left(\beta_n + \frac{1}{\beta_n} \right)^2 - [\lambda_{1n} (\lambda_2 - \lambda_{3n}) + 4] \left(\beta_n + \frac{1}{\beta_n} \right) + 2 [\lambda_{1n} (\lambda_2 + 2\lambda_{3n}) + 2] = 0. \quad (6.10)$$

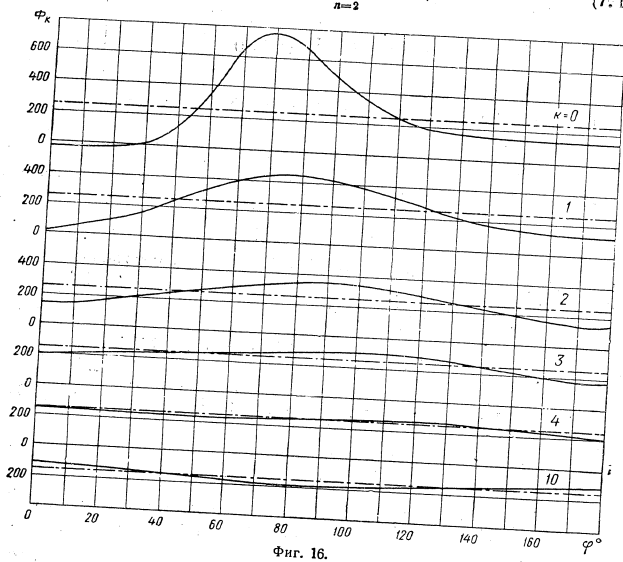
Параметры λ_{1n} , λ_2 , λ_{3n} определяются по формулам (2.11).

Сравнивая уравнения (6.10) и (2.9), видим, что они полностью совпадают. Следовательно, корни уравнения (6.10) можно вычислять по формулам (2.12), (2.14), (2.15), (2.16). Это значит, что и коэффициенты в рядах (6.3) и (2.3) будут соответственно равны друг другу. Поэтому решение (2.8) целиком можно распространить и на случай нагружения краев оболочки симметричным потоком самоуравновешенных осевых сил и кососимметричной самоуравновешенной системой осевых сил, если в нем предварительно заменить $\sin n\varphi$ на $\cos n\varphi$, а $\cos n\varphi$ на $\sin n\varphi$. В силу тех же причин в случае поперечного изгиба оболочки можно пользоваться всеми формулами, полученными в § 3—5, если предварительно заменить в них $\sin n\varphi$ на $\cos n\varphi$, $\cos n\varphi$ на $\sin n\varphi$, а также в выражениях u_k изменить всюду знак на обратный.

§ 7. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА

В качестве примера был произведен расчет полубесконечной оболочки, край которой $k=0$ нагружен симметричным относительно оси Oy потоком касательных сил. Закон изменения нагрузки по контуру был задан в виде тригонометрического полинома

$$f_1^{(0)}(\varphi) = A_0 + \sum_{n=2}^9 A_n^0 \cos n\varphi, \quad (7.1)$$



Фиг. 16.

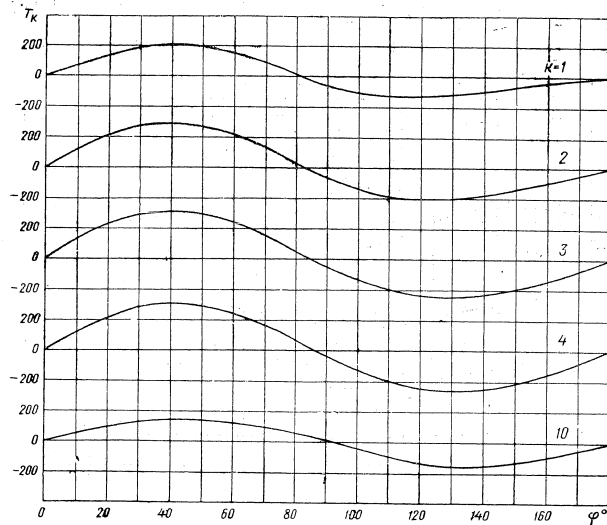
числовые значения коэффициентов A_n^0 которого приведены в следующей таблице.

n	0	2	3	4	5	6	7	8	9
A_n^0	247	-269,9	-166,1	53,1	116,5	47,5	-5,3	-17,9	-21,5

Распределение потока касательных сил (7.1) по сечению отсека $k=0$ приведено на фиг. 16 (верхняя кривая). Оболочка имела следующие исходные параметры:

$$c = 2,45 \cdot 10^{-4}; \quad \lambda_2 = \frac{E}{G} = 2,6; \quad \frac{R}{l} = 2,31. \quad (7.2)$$

Расчет производился по формулам (6.12), (6.18). Результаты расчета приведены на фиг. 16 и 17 в виде кривых, характеризующих распределение соответственно касательных и осевых усилий в сечениях, лежащих в различных отсеках оболочки. Из фиг. 16 видно, что распределение потока касательных усилий в сечениях оболочки по мере удаления от нагруженного края постепенно приближается к равномерному, при котором напряжения определяются по формуле Бредта. Однако процесс затухания местных напряжений осуществляется неинтенсивно. Так, например, в сечении 10 отсека, удаленном от нагруженного



Фиг. 17.

края более, чем на два диаметра оболочки, наибольшие напряжения отличаются от бредтовских на 16%.

Из фиг. 17 видно, что осевые усилия, по мере удаления от нагруженного края, сначала возрастают, достигая наибольших значений в сечениях 3 и 4 отсеков, затем убывают, распространяясь на значительное расстояние от нагруженного края оболочки.

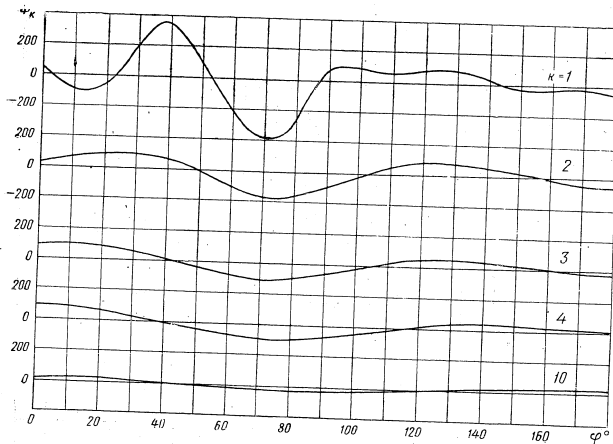
Рассмотрим второй пример. Край оболочки $k=0$ нагружен косинусоидальной относительно оси Oy системой осевых усилий, закон изменения которых по контуру задан в виде тригонометрического полинома

$$f_2^{(0)}(\varphi) = \sum_{n=2}^9 B_n^0 \sin n\varphi. \quad (7.3)$$

Числовые значения коэффициентов B_n^0 приведены в таблице.

n	2	3	4	5	6	7	8	9
B_n^0	202,6	179	-117,6	-251	-144	71,8	211,4	179

Характер распределения усилий (7.3) по сечению отсека $k=0$ показан верхней кривой на фиг. 19.



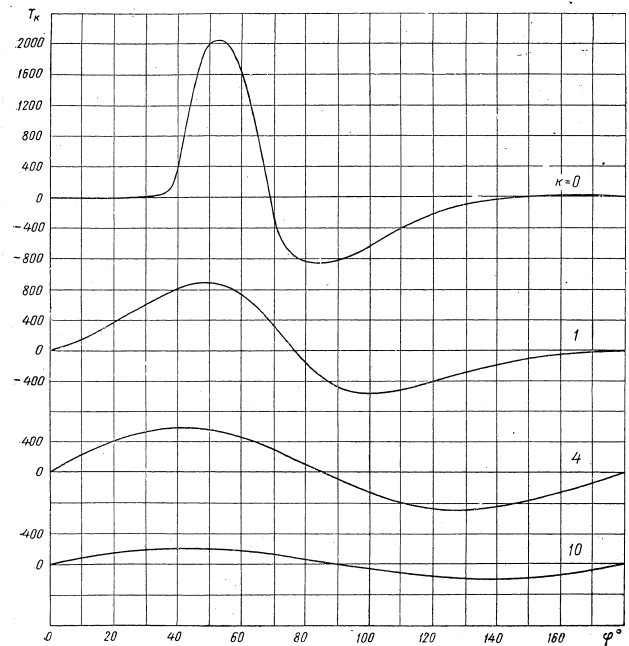
Фиг. 18.

Расчет для этого случая производился по формулам (4.25), (4.27). Результаты расчета приведены на фиг. 18, 19.

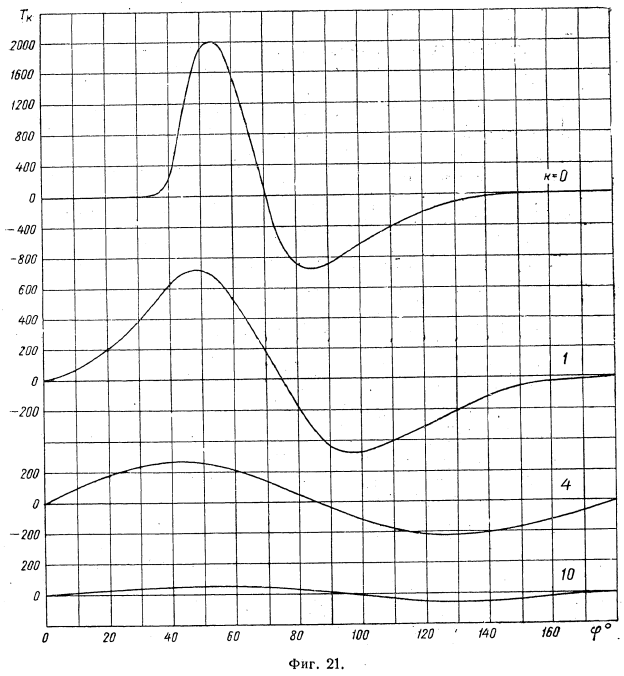
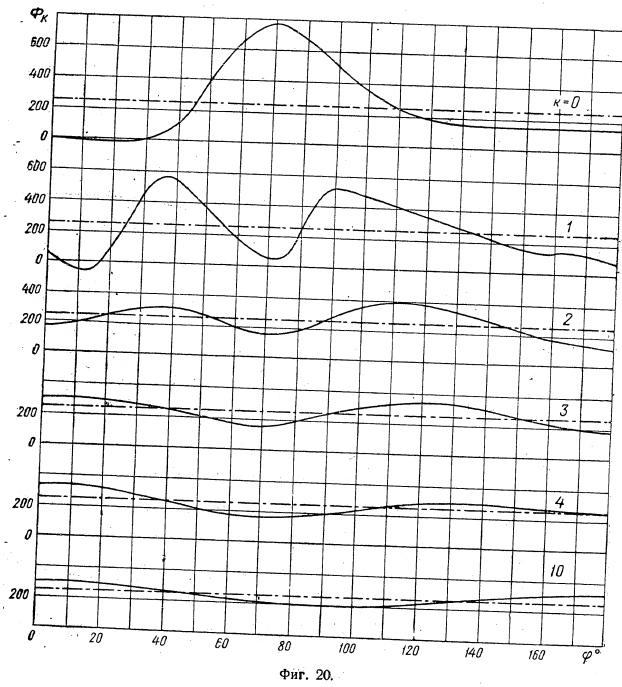
Из фиг. 18 видно, что касательные напряжения достигают наибольших значений в сечении первого отсека, затем по мере удаления от нагруженного края постепенно убывают, распространяясь, как и осевые усилия (см. фиг. 19), на значительное расстояние от края оболочки.

На фиг. 20, 21 приведены кривые распределения касательных и осевых сил по сечениям оболочки при одновременном нагружении края $k=0$ системами усилий (7.1), (7.3). Принятая в расчете система усилий (7.1), (7.3) обычно имеет место при кручении оболочки с прямоугольным вырезом в сечении, расположенном на стыке открытой и замкнутой частей.

Полученные кривые распределения касательных и осевых усилий в различных сечениях оболочки (см. фиг. 20, 21) с качественной стороны хорошо подтверждаются экспериментом.



Фиг. 19.



Н. И. НАЗАРОВ, М. С. ПОВАРНИЦЫН, Е. В. ЮРЛОВА

РАСЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕМПЕРАТУР В ДВУТАВРОВИИ ЭЛЕМЕНТЕ

В работе дан расчет температурных полей в двутавровом элементе (представляющем, в частности, типичную часть многослойного крыла) двумя методами: методом непосредственного интегрирования уравнений теплопроводности и методом элементарных балансов.

Рассмотрены случаи симметричного и несимметричного нагрева таких элементов через внешние поверхности полков, а также случаи разных толщин полков.

Решение задачи дано в предположении, что физические характеристики материала, а также коэффициенты теплопередачи не зависят от изменения температуры.

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

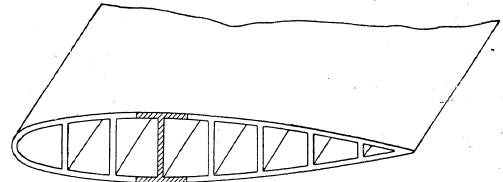
- x, y, z — декартовы координаты
- t — время
- T — температура
- $T_{\text{в}}, T_{\text{н}}$ — температура верхнего и нижнего пограничных слоев, соответственно
- $T_{\text{ст}}$ — температура стенки
- T_0 — начальная температура
- $T_{\text{в.п}}, T_{\text{н.п}}$ — температура верхней и нижней полков, соответственно
- T_i — температура в i -той точке
- Q — количество тепла
- q — тепловой поток
- λ — коэффициент теплопроводности
- h — коэффициент теплопередачи
- $k = \lambda / c\gamma$ — коэффициент температуропроводности
- $H = h / c\gamma b$ — приведенный коэффициент теплопередачи
- c — теплоемкость
- γ — удельный вес
- $2a$ — высота стенки
- $2b$ — ширина полки
- d — толщина стенки
- $\delta_{\text{в}}, \delta_{\text{н}}$ — толщины верхней и нижней полков, соответственно
- $\epsilon = a + b$
- $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ — компоненты напряжений
- α — коэффициент линейного расширения
- E — модуль упругости
- μ — коэффициент Пуассона

§ 1. РАСЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ ПО МЕТОДУ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ БАЛАНСОВ

Приближенные методы расчета заслуживают внимания, так как точное определение нестационарных температурных полей, возникающих в элементах конструкций, в большинстве случаев весьма затруднительно, а иногда и невозможно.

В качестве одного из таких приближенных методов расчета температурных полей можно считать метод элементарных балансов, предложенный А. П. Ваничевым.

С целью оценки применимости и сходимости указанного метода, представляется интерес решить этим методом вначале ту же задачу, кото-



Фиг. 1.

рая уже рассматривалась в работе Ф. Поула и Г. Оливера¹ о неустановившемся распределении температуры и температурных напряжений в силовых элементах крыла, состоящего из обшивки и продольного набора в виде ряда стенок (фиг. 1). Представляет интерес сопоставить численные результаты, полученные в указанной работе, с результатами, получаемыми по методу элементарных балансов.

Решение методом элементарных балансов задачи, рассмотренной в работе Ф. Поула и Г. Оливера

В качестве типичной конструкции взята двутавровая балка (заштрихованная часть, см. фиг. 1, 2), верхняя и нижняя полки которой подвержены внешнему аэродинамическому давлению. При этом предполагалось, что коэффициенты теплопередачи и температуры торможения на верхней и нижней полках одинаковы; толщина полков была принята также одинаковой.

В работе было допущено, что отношение толщины стенки к ее высоте и отношение толщины полки к ее ширине малы. Поэтому задача сводится к определению неустановившегося распределения температуры вдоль стенки и полков, имитируемых составным стержнем из двух прямолинейных элементов (фиг. 3) с распределенными источниками тепла в одном из них. Таким образом задача сведена к одномерной. Решение для такой схематизированной модели получено методом операционного исчисления с использованием преобразования Лапласа.

Решим задачу методом элементарных балансов.

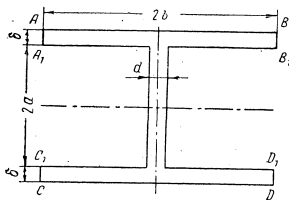
Вследствие симметрии достаточно рассмотреть одну лишь верхнюю (или нижнюю) часть отсека. Задачу будем рассматривать как двумерную при определении температурного поля в полках и как одномерную при определении температурного поля в стенке.

Расчетные точки, имеющие одинаковую температуру в рассматриваемый момент времени, нумеруем одинаковым образом. Из фиг. 4 видно, что возможны три варианта расположения расчетных точек, а именно:

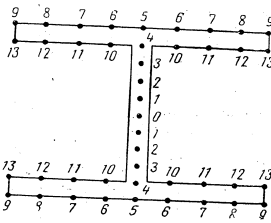
1. Случай, когда расчетная точка со всех сторон окружена однородной средой (точки 0, 1, 2, 3, 4).
2. Случай, когда расчетная точка находится на границе раздела твердой и газообразной (жидкой) сред, образованной одной плоскостью симметрии (точки 5, 6, 7, 8, 9).

¹ F. Pohle and H. Oliver, Temperature Distribution and Thermal Stresses in a Model of a Supersonic Wing, JAS, 1954, Vol. 21, N 1.

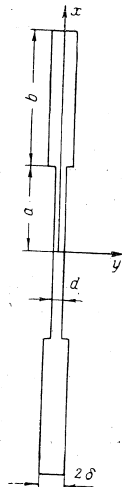
3. Случай, когда расчетная точка находится на границе раздела твердой среды с адиабатической изоляцией (точки 10, 11, 12, 13). Как показано А. П. Ваничевым для этих расчетных случаев могут быть получены свои расчетные формулы.



Фиг. 2.



Фиг. 4.



Фиг. 3.

Опуская соответствующие выкладки, связанные с получением расчетных формул по методу элементарных балансов, запишем эти формулы применительно к нашему расчетному случаю лишь в конечном виде

$$T_m(t + \Delta t) = A_2 T_m(t) + A_4 [T_{m-1}(t) + T_{m+1}(t)],$$

где $m=0, 1, 2, 3$;

$$T_4(t + \Delta t) = B_1 T_4(t) + B_2 T_5(t) + B_3 T_{10}(t) + B_4 T_a(t),$$

причем

$$T_a(t) = T_4(t) - \frac{\delta}{\eta} [T_4(t) - T_3(t)]$$

при $\delta < \eta$

(a — точка в стенке, удаленная от точки 4 на расстояние δ),

$$T_n(t + \Delta t) = E_1 T_n(t) + E_2 [T_{n-1}(t) + T_{n+1}(t)] + E_3 T_{n+4}(t) + E_4 T_n(t),$$

где $n=6, 7, 8$;

$$T_p(t + \Delta t) = A_1 T_p(t) + E_2 [T_{p-1}(t) + T_{p+1}(t)] + E_3 T_{p-4}(t),$$

где $p=11, 12$.

(1.1)

Здесь обозначено

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= 1 - \frac{2\lambda}{c\gamma} \frac{\Delta t}{\xi^2} - \frac{2\lambda}{c\gamma} \frac{\Delta t}{\eta^2}; & A_4 &= \frac{\lambda}{c\gamma} \frac{\Delta t}{\eta^2}; \\ A_2 &= 1 - \frac{2\lambda}{c\gamma} \frac{\Delta t}{\eta^2}; & E_2 &= \frac{\lambda}{c\gamma} \frac{\Delta t}{\xi^2}; \\ E_1 &= 1 - (2E_2 + E_3 + E_4); & E_4 &= \frac{2h\Delta t}{c\gamma\delta}; \\ E_3 &= \frac{2\lambda}{c\gamma} \frac{\Delta t}{\delta^2}; & B_2 &= \frac{2\lambda\Delta t}{c\gamma\delta^2(\xi + d)}; \\ B_1 &= 1 - (B_2 + B_3 + B_4); & B_3 &= \frac{2\lambda\Delta t}{c\gamma\xi(\xi + d)}; \\ B_3 &= \frac{2\lambda\Delta t}{c\gamma\xi(\xi + d)}; & B_4 &= \frac{2\lambda\Delta t}{c\gamma\delta^2(\xi + d)}. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Выбираемый расчетный промежуток времени Δt должен удовлетворять условию.

$$\Delta t \leq (\Delta t_{\max})_{\min} \quad (1.3)$$

где $(\Delta t_{\max})_{\min}$ — наименьшее из возможных, в соответствии с расчетными формулами (1.1), максимально допустимых расчетных времен, определяемых формулами

$$\left. \begin{aligned} (\Delta t_{\max})_1 &= \frac{1}{\frac{2\lambda}{c\gamma\eta^2}}; \\ (\Delta t_{\max})_2 &= \frac{1}{\frac{2\lambda}{c\gamma(\xi + d)} \left(\frac{\xi}{\delta^2} + \frac{1}{\xi} + \frac{d}{\delta^2} \right)}; \\ (\Delta t_{\max})_3 &= \frac{1}{\frac{2}{c\gamma} \left(\frac{\lambda}{\xi^2} + \frac{\lambda}{\delta^2} + \frac{h}{\delta} \right)}. \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

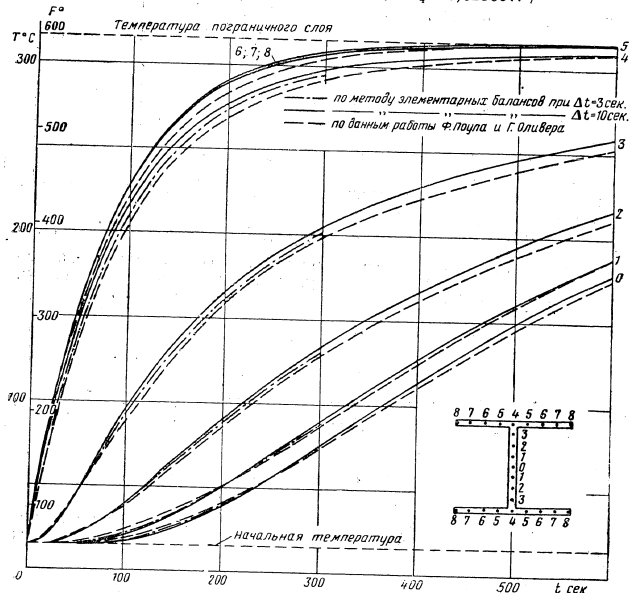
Применим расчетные формулы (1.1) к числовому примеру, рассмотренному в работе Ф. Поула и Г. Оливера, при следующих исходных данных:

- $T_0 = 60^\circ \text{F} = 15,6^\circ \text{C}$;
- $T_a = 600^\circ \text{F} = 315,6^\circ \text{C}$;
- $2\delta = 0,75$ дюйма = 1,905 см;
- $d = 0,1$ дюйма = 0,254 см;
- $a = 4,6875$ дюйма = 11,906 см;
- $b = 12$ дюймов = 30,48 см;
- $h = 90$ ВТУ/час кв. фут $^\circ \text{F} = 439,38$ ккал/м² час $^\circ \text{C}$;
- $c = 0,1406$ ВТУ/фунт $^\circ \text{F} = 0,1406$ ккал/кг $^\circ \text{C}$;
- $\gamma = 489,6$ фунт/куб фут = 7842,7 кг/м³;
- $\xi = b/4 = 3$ дюйма = 7,62 см;
- $\eta = a/4 = 1,1719$ дюйма = 2,9765 см;
- $h/\delta c\gamma = 0,0116$ сек.⁻¹.

По формулам (1.4) найдем $(\Delta t_{\max})_1 = 37$ сек.; $(\Delta t_{\max})_2 = 4,08$ сек.; $(\Delta t_{\max})_3 = 3,4$ сек.

Приняв в качестве интервала расчетного времени $\Delta t = 3$ сек., найдем

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= 0,12436; & A_1 &= 0,19396; & B_1 &= 0,19438; \\ E_2 &= 0,0062001; & A_2 &= 0,91874; & B_2 &= 0,76802; \\ E_3 &= 0,79362; & A_3 &= 0,39681; & B_3 &= 0,012000; \\ E_4 &= 0,0696; & A_4 &= 0,040632; & B_4 &= 0,025601. \end{aligned} \right\} (1.5)$$



Фиг. 5.

Результаты расчета по формулам (1.1), с этими значениями A, B, E (1.5) приведены на фиг. 5. Здесь же для сравнения приведены и кривые из работы Ф. Поула и Г. Оливера. Как видно из графика, расхождение получилось небольшое.

Расчет по упрощенным формулам

Рассмотренный выше числовой пример показывает, что если для полок задачу определения температурных полей рассматривать как двумерную, то надо брать очень малый интервал расчетного времени (например, в рассмотренном числовом примере было взято $\Delta t = 3$ сек.), что сильно усложняет расчет.

Представляет поэтому интерес задачу определения температурного поля упростить, а именно рассматривать ее как одномерную задачу и для полок.

Применительно к схеме расположения расчетных точек, показанной на фиг. 6, методом элементарных балансов (по А. П. Ваничеву) могут быть получены следующие формулы:¹

$$\left. \begin{aligned} T_m(t + \Delta t) &= A_2 T_m(t) + A_4 [T_{m-1}(t) + T_{m+1}(t)] \\ \text{при } m &= 1, 2, 3, \\ T_4(t + \Delta t) &= C_4 T_4(t) + C_1 T_3(t) + C_2 T_5(t) + C_3 T_2(t), \\ T_n(t + \Delta t) &= \left(1 - 2E_2 - \frac{1}{2} E_4\right) T_n(t) + E_2 [T_{n-1}(t) + T_{n+1}(t)] + \\ &+ \frac{1}{2} E_4 T_3(t) \end{aligned} \right\} (1.6)$$

при $n = 5, 6, 7$,
где обозначено:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{\lambda d \Delta t}{c \gamma \xi \left(\xi \delta + \frac{1}{2} \eta d\right)}; & C_2 &= \frac{2 \lambda \delta \Delta t}{c \gamma \xi \left(\xi \delta + \frac{1}{2} \eta d\right)}; \\ C_3 &= \frac{h \xi \Delta t}{c \gamma \left(\xi \delta + \frac{1}{2} \eta d\right)}; & C_4 &= 1 - (C_1 + C_2 + C_3). \end{aligned} \right\} (1.7)$$

Обозначения A_2, A_4, E_2, E_4 прежние (1.2).

Максимальный допустимый интервал расчетного времени выбирается как наименьший из интервалов времени, получаемых из уравнений

$$A_2 = C_4 = 1 - 2E_2 - \frac{1}{2} E_4 = 0.$$

Результаты расчета числового примера по исходным данным работы Ф. Поула и Г. Оливера (рассмотренного нами выше) по упрощенным вычислительным формулам (1.6) при интервале расчетного времени $\Delta t = 10$ сек. представлены на фиг. 5.

Из кривых фиг. 5 видно, что результаты расчета по упрощенной вычислительной схеме вполне приемлемые. Выгода же в экономии времени расчета получается большая и расчет по упрощенным вычислительным формулам может быть произведен сравнительно просто и быстро.

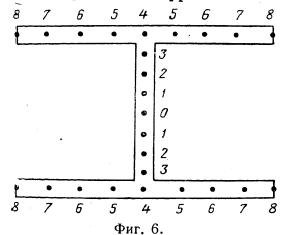
Расчетные формулы для напряжений согласно работе Ф. Поула и Г. Оливера можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{z \text{ ст}} &= \alpha E [K(t) - T_{\text{ст}}]; \\ \sigma_{zn} &= \alpha E [K(t) - T_n], \end{aligned} \right\} (1.8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} K(t) &= \frac{1}{1+m} \left(\frac{1}{a} \int_0^a T_{\text{ст}} dx + \frac{m}{b} \int_a^{a+b} T_n dx \right); \\ m &= \frac{2bb}{ad}. \end{aligned} \right\} (1.9)$$

¹ При выводе расчетных формул считалось, что температура по толщине полок в рассматриваемый момент времени является одинаковой. Точки, имеющие одинаковую температуру, обозначены на схеме одинаковыми цифрами.

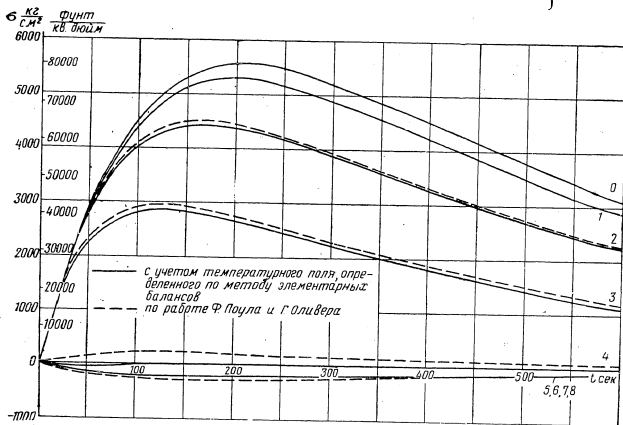


Фиг. 6.

При вычислении интегралов, входящих в выражение для $K(t)$, можно с использованием значений температурного поля, найденного по методу элементарных балансов, воспользоваться одним из приближенных методов интегрирования. Взяв, например, для этой цели формулу Симпсона, при расположении расчетных точек согласно фиг. 6 получим

$$\int_a^b T_{cr}(x, t) dx = \frac{a}{12} [T_0(t) + 2T_1(t) + 4T_2(t) + 2T_3(t) + T_4(t)];$$

$$\int_a^{a+b} T_n(x, t) dx = \frac{b}{12} [T_4(t) + 2T_5(t) + 4T_6(t) + 2T_7(t) + T_8(t)]. \quad (1.10)$$



Фиг. 7.

Применение расчетных формул (1.8), с учетом выражений (1.9) и (1.10) к рассмотренному числовому примеру дает распределение напряжений $\sigma_x = \sigma$, показанное на фиг. 7. На этой же фигуре для сравнения нанесены и кривые температурных напряжений по данным работы Ф. Поула и Г. Оливера. Расхождение расчетных значений напряжений получилось небольшое.

Расчет с учетом асимметрии нагрева

Рассмотрим случай несимметричного нагрева, когда температуры пограничных слоев и коэффициенты теплопередачи h_n и h_n на верхней и нижней полках различны. Будем предполагать, что $\delta_n = \delta_n = \delta$. Задачу ставим следующим образом.

- 1) В момент времени $t=0$ температура пограничного слоя, имеющего постоянную температуру T_0 , мгновенно изменяется до постоянных температур T_n и T_n , соответственно на верхней и нижней поверхностях крыла.
- 2) Коэффициенты теплопередачи от пограничного слоя к поверхности крыла имеют постоянные значения h_n и h_n .
- 3) Физические постоянные не зависят от изменения температуры.

4) Поток с торцов полки отсутствует по условиям симметрии задачи относительно вертикальной плоскости.

5) Внутренние поверхности полки и поверхность стенки адиабатически изолированы.

Требуется найти закон изменения температурного поля в типовом отсеке в зависимости от времени.

Разобьем типичную часть крыла на расчетные элементы согласно фиг. 6. Расчетные формулы по методу элементарных балансов в этом случае будут

$$T_0(t + \Delta t) = A_2 T_0(t) + A_4 [T_1(t) + T_1'(t)];$$

$$T_m(t + \Delta t) = A_2 T_m(t) + A_4 [T_{m-1}(t) + T_{m+1}(t)],$$

где $m = 1, 2, 3, 1', 2', 3'$;

$$T_n(t + \Delta t) = \left(1 - 2E_2 - \frac{1}{2}E_4\right) T_n(t) + E_2 [T_{n-1}(t) + T_{n+1}(t)] + \frac{1}{2}E_4 T_n, \quad (1.11)$$

где

$$n = 5, 6, 7, 8, 5', 6', 7', 8',$$

причем

$$\frac{1}{2}E_4 = \begin{cases} \frac{h_n \Delta t}{c\gamma \delta} & \text{при } n = 5, 6, 7, 8, \\ \frac{h_n \Delta t}{c\gamma \delta} & \text{при } n = 5', 6', 7', 8' \end{cases}$$

и при написании формул для точек 8 и 8' следует считать, что

$$T_9(t) = T_7(t); \quad T_9'(t) = T_7'(t);$$

$$T_4(t + \Delta t) = D_1 T_4(t) + D_2 T_3(t) + D_3 T_5(t) + D_4 T_n;$$

$$T_4'(t + \Delta t) = \bar{D}_1 T_4'(t) + \bar{D}_2 T_3'(t) + \bar{D}_3 T_5'(t) + \bar{D}_4 T_n,$$

где

$$A_2 = 1 - \frac{2\lambda}{c\gamma \eta^2};$$

$$A_4 = \frac{\lambda}{c\gamma \eta^2},$$

(1.12)

E_2 и E_4 — согласно обозначениям (1.2),

$$D_1 = 1 - (D_2 + D_3 + D_4); \quad \bar{D}_1 = 1 - (\bar{D}_2 + \bar{D}_3 + \bar{D}_4);$$

$$D_2 = \frac{\lambda \Delta t}{c\gamma \eta \left(\delta \delta + \frac{1}{2} \eta \delta\right)}; \quad \bar{D}_2 = D_2;$$

$$D_3 = \frac{2\lambda \Delta t}{c\gamma \eta \left(\delta \delta + \frac{1}{2} \eta \delta\right)}; \quad \bar{D}_3 = D_3;$$

$$D_4 = \frac{h_n \delta \Delta t}{c\gamma \left(\delta \delta + \frac{1}{2} \eta \delta\right)};$$

$$\bar{D}_4 = \frac{h_n \delta \Delta t}{c\gamma \left(\delta \delta + \frac{1}{2} \eta \delta\right)}.$$

(1.13)

Пусть наряду с предположениями, принятыми выше, будет $\delta_n \neq \delta_n$ (фиг. 8).
 Расчетные формулы (1.11) остаются в силе, если теперь считать, что

$$\frac{1}{2} E_i = \begin{cases} \frac{h_n \Delta t}{c\gamma \delta_n} & \text{при } n=5, 6, 7, 8, \\ \frac{h_n \Delta t}{c\gamma \delta_n} & \text{при } n=5', 6', 7', 8', \end{cases} \quad (1.14)$$

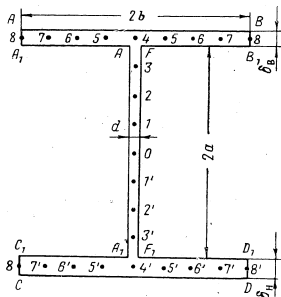
$$D_i = 1 - (D_2 + D_3 + D_4); \quad \bar{D}_i = 1 - (\bar{D}_2 + \bar{D}_3 + \bar{D}_4);$$

$$D_2 = \frac{\lambda d \Delta t}{c\gamma \eta \left(\epsilon \delta_n + \frac{1}{2} \gamma d \right)}; \quad \bar{D}_2 = \frac{\lambda d \Delta t}{c\gamma \eta \left(\epsilon \delta_n + \frac{1}{2} \gamma d \right)}$$

$$D_3 = \frac{2\lambda \delta_n \Delta t}{c\gamma \epsilon \left(\epsilon \delta_n + \frac{1}{2} \gamma d \right)}; \quad \bar{D}_3 = \frac{2\lambda \delta_n \Delta t}{c\gamma \epsilon \left(\epsilon \delta_n + \frac{1}{2} \gamma d \right)}$$

$$D_4 = \frac{h_n \epsilon \Delta t}{c\gamma \left(\epsilon \delta_n + \frac{1}{2} \gamma d \right)}; \quad \bar{D}_4 = \frac{h_n \epsilon \Delta t}{c\gamma \left(\epsilon \delta_n + \frac{1}{2} \gamma d \right)}$$

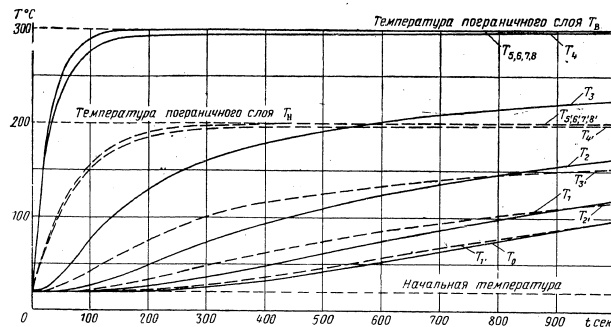
С использованием расчетных формул, записанных для случая асимметричного нагрева, были вычислены температуры в расчетных точках двутаврового элемента по исходным данным, сведенным в табл. 1.



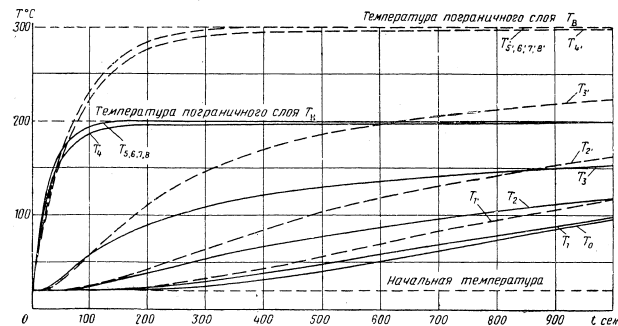
Фиг. 8.

Значения соответствующих коэффициентов в расчетных формулах (1.11) в соответствии с исходными данными табл. 1 представлены в табл. 2.

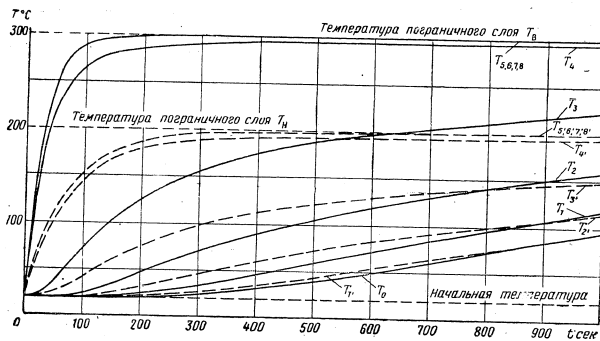
Результаты же вычисления температур в расчетных точках двутаврового элемента при несимметричном нагреве представлены на фиг. 9—16. При этом на фиг. 15 показано влияние толщины стенки на температурное поле, а на фиг. 16 показано влияние интервала расчетного времени.



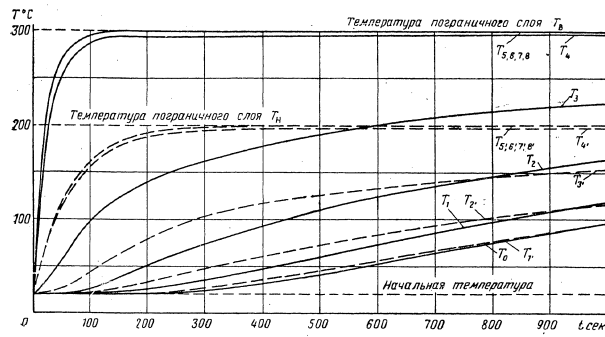
Фиг. 9.



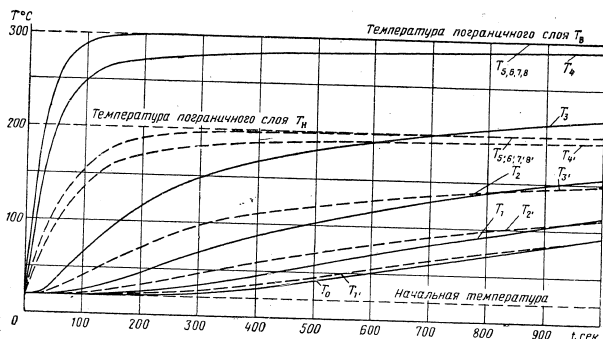
Фиг. 10.



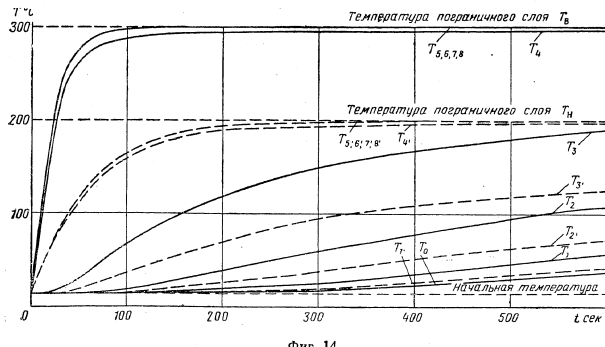
Фиг. 11.



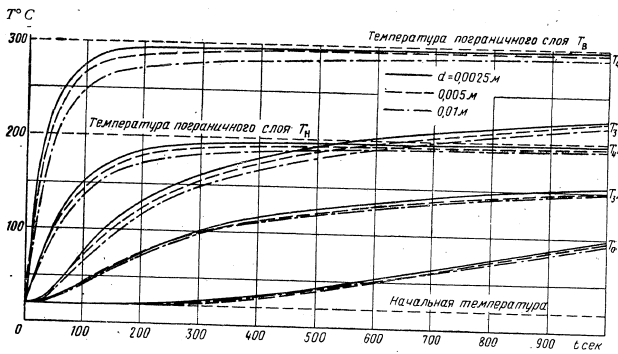
Фиг. 13.



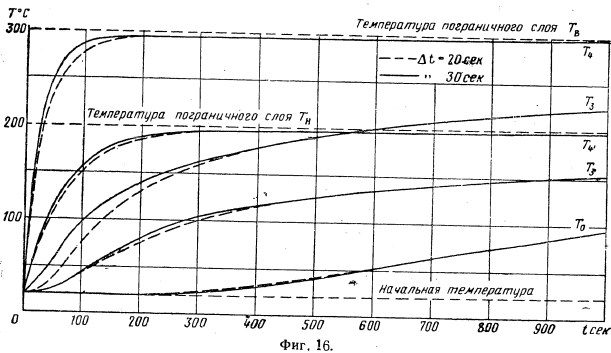
Фиг. 12.



Фиг. 14.



Фиг. 15.



Фиг. 16.

Таблица 1

Характеристика	Размерность	Расчетные случаи					
		I	II	III	IV	V	VI
γ	кг/м ³	8500	8500	8500	8500	8500	7800
λ	ккал/м·час·°C	14,4	14,4	14,4	14,4	14,4	11
c	ккал/кг·°C	0,118	0,118	0,118	0,118	0,118	0,12
T_0	°C	20	20	20	20	20	15
T_B	"	300	200	300	300	300	300
T_H	"	200	300	200	200	200	200
δ_B	м	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005
δ_H	"	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
d	"	0,0025	0,0025	0,005	0,010	0,0025	0,0025
a	"	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12
b	"	0,30	0,30	0,30	0,30	0,30	0,30
h	ккал/м ² ·час·°C	440	440	440	440	440	440
ξ	м	0,075	0,075	0,075	0,075	0,075	0,075
η	"	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03
Δt	сек.	20	20	20	20	30	30
Сталь		ЭИ100	ЭИ100	ЭИ100	ЭИ100	ЭИ100	Х20Н14С2

Таблица 2

Коэффициенты	Расчетные случаи					
	I	II	III	IV	V	VI
$E_2(\delta_H)$	0,01418	0,01418	0,01418	0,01418	0,021269	0,017411
$\frac{1}{2} E_4(\delta_H)$	0,24371	0,24371	0,24371	0,24371	0,36556	0,39174
\bar{D}_1	0,73244	0,73244	0,73656	0,74374	0,59867	0,583391
\bar{D}_2	0,00844	0,00844	0,016112	0,029541	0,012660	0,010367
\bar{D}_3	0,02701	0,02701	0,025782	0,023633	0,040513	0,03316
\bar{D}_4	0,23210	0,23210	0,22155	0,20309	0,34816	0,37309
$E_2(\delta_B)$	0,01418	0,01418	0,014180	0,014180	0,021269	0,017411

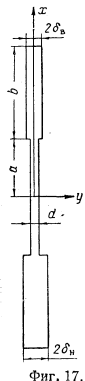
Продолжение

Коэффициенты	Расчетные случаи					
	I	II	III	IV	V	VI
$\frac{1}{2} E_1(\delta_a)$	0,48743	0,48743	0,48743	0,48743	0,73114	0,78347
D_1	0,51500	0,51500	0,54066	0,58093	0,27248	0,23631
D_2	0,016113	0,016113	0,029540	0,050640	0,024170	0,019785
D_3	0,025781	0,025781	0,023633	0,020257	0,038673	0,031654
D_4	0,44311	0,44311	0,40617	0,34817	0,66468	0,71225
A_2	0,82275	0,82275	0,82275	0,82275	0,73414	0,78236
A_4	0,088623	0,088623	0,088623	0,088623	0,13293	0,10882

§ 2. РАСЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ ПРИ АСИММЕТРИЧНОМ НАГРЕВЕ ПО МЕТОДУ НЕПОСРЕДСТВЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В этом параграфе задачу определения неустановившихся температурных полей в типичной части многолонжеронного крыла, показанной на фиг. 1 и 2, при несимметричном нагреве и с разной толщиной полок будем решать непосредственным интегрированием уравнений теплопроводности.

Задача является двумерной, но для простоты решения мы сводим ее к одномерной. Это можно сделать с высокой степенью точности, когда $kb/\lambda \ll 1$. Для типичных авиаматериалов, типичных размеров конструкции и типичных эффективных коэффициентов теплопередачи это неравенство выполняется очень хорошо. При решении рассматриваемой здесь задачи принимаются допущения, которые были указаны в § 1.



Фиг. 17.

Расчет температурных полей в двутавровом элементе при $\delta_a \neq \delta_n, h_a \neq h_n$ и $T_a \neq T_n$

С учетом предположений, указанных в § 1, решение поставленной здесь задачи сводим к определению температурного поля в стержне с разной толщиной (фиг. 17). Математически же решение сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_{cr}}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 T_{cr}}{\partial x^2}; & (-a \leq x \leq a); \\ \frac{\partial T_{в.п}}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 T_{в.п}}{\partial x^2} + H_n (T_n - T_{в.п}); & (a \leq x \leq l); \\ \frac{\partial T_{н.п}}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 T_{н.п}}{\partial x^2} + H_n (T_n - T_{н.п}); & (-l \leq x \leq -a), \end{aligned} \right\} (2.1)$$

где

$$H_n = \frac{h_n}{c\gamma\delta_n}; \quad H_a = \frac{h_a}{c\gamma\delta_a}, \quad (2.2)$$

при граничных условиях

$$\left. \begin{aligned} \text{при } x=a: \quad T_{cr} &= T_{в.п}; \quad d \frac{\partial T_{cr}}{\partial x} = 2\delta_n \frac{\partial T_{в.п}}{\partial x}; \\ \text{при } x=-a: \quad T_{cr} &= T_{н.п}; \quad d \frac{\partial T_{cr}}{\partial x} = 2\delta_n \frac{\partial T_{н.п}}{\partial x}; \\ \text{при } x=l: \quad \frac{\partial T_{в.п}}{\partial x} &= 0; \quad \text{при } x=-l: \quad \frac{\partial T_{н.п}}{\partial x} = 0 \end{aligned} \right\} (2.3)$$

и начальных условиях

$$\text{при } t=0: \quad T_{cr} = T_{в.п} = T_{н.п} = T_0. \quad (2.4)$$

Применяя преобразование Лапласа к уравнениям (2.1), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 T_{cr}^*}{dx^2} - r^2 T_{cr}^* &= -\frac{T_0}{k}; \\ \frac{d^2 T_{в.п}^*}{dx^2} - q_2^2 T_{в.п}^* &= f_2(p); \\ \frac{d^2 T_{н.п}^*}{dx^2} - q_3^2 T_{н.п}^* &= f_3(p), \end{aligned} \right\} (2.5)$$

где

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= \frac{p}{k}; \quad q_2^2 = \frac{p+H_2}{k}; \quad q_3^2 = \frac{p+H_3}{k}; \\ f_2 &= -\frac{T_0}{k} - \frac{H_2}{pk} T_n; \quad f_3 = -\frac{T_0}{k} - \frac{H_3}{pk} T_n. \end{aligned} \right\} (2.6)$$

Решение уравнений (2.5) запишем в форме

$$\left. \begin{aligned} T_{cr}^* &= A_1 \operatorname{ch} rx + B_1 \operatorname{sh} rx + \frac{T_0}{p}; \\ T_{в.п}^* &= A_2 \operatorname{ch} q_2 x + B_2 \operatorname{sh} q_2 x - \frac{f_2(p)}{q_2^2}; \\ T_{н.п}^* &= A_3 \operatorname{ch} q_3 x + B_3 \operatorname{sh} q_3 x - \frac{f_3(p)}{q_3^2}. \end{aligned} \right\} (2.7)$$

Подставив эти выражения в преобразованные граничные условия (2.3), получим систему шести уравнений для определения произвольных постоянных A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 и B_3 , решая которую, найдем

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\Delta \operatorname{ch} ra} [\varphi_2 x_2 \Phi_3 + \varphi_3 x_3 \Phi_2], \\ B_1 &= \frac{1}{\Delta \operatorname{ch} ra} [\varphi_2 x_2 \Psi_3 - \varphi_3 x_3 \Psi_2], \\ A_2 &= A_2' \operatorname{ch} q_2 l; \quad B_2 = -A_2' \operatorname{sh} q_2 l; \\ A_3 &= A_3' \operatorname{ch} q_3 l; \quad B_3 = A_3' \operatorname{sh} q_3 l, \end{aligned} \right\} (2.8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_2' &= -\frac{r}{\Delta \operatorname{ch} q_2(l-a)} [\varphi_2(\psi_3 - \Phi_3 \operatorname{th} ra) + \varphi_3 x_3 (\operatorname{th}^2 ra - 1)]; \\ A_3' &= -\frac{r}{\Delta \operatorname{ch} q_3(l-a)} [\varphi_3(\psi_2 - \Phi_2 \operatorname{th} ra) + \varphi_2 x_2 (\operatorname{th}^2 ra - 1)]; \\ \varphi_2 &= \frac{(T_b - T_0) H_b}{k^2 r^2 q_2^2}; \\ \varphi_3 &= \frac{(T_n - T_0) H_n}{k^2 r^2 q_3^2}; \end{aligned} \right\} (2.9)$$

$$\left. \begin{aligned} x_i &= v_i q_i \operatorname{th} q_i(l-a) \text{ при } i=2, 3; \\ \Delta &= \Phi_2 \psi_3 + \Phi_3 \psi_2; \\ \Phi_i &= r + v_i q_i \operatorname{th} ra \operatorname{th} q_i(l-a); \\ \psi_i &= r \operatorname{th} ra + v_i q_i \operatorname{th} q_i(l-a); \\ v_i &= \frac{2\delta_i}{a}; \quad (\delta_2 = \delta_{b3}, \delta_3 = \delta_{n3}); \quad i=2, 3. \end{aligned} \right\} (2.10)$$

Выражения (2.7) при этом можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} T_{\text{ст}}^* &= A_1 \operatorname{ch} rx + B_1 \operatorname{sh} rx + \frac{T_0}{p}, \quad (-a \leq x \leq a); \\ T_{\text{в.н}}^* &= A_2' \operatorname{ch} q_2(l-x) + \frac{H_b T_b}{p(p+H_b)} + \frac{T_0}{p+H_b}, \quad (a \leq x \leq l); \\ T_{\text{н.н}}^* &= A_3' \operatorname{ch} q_3(l+x) + \frac{H_n T_n}{p(p+H_n)} + \frac{T_0}{p+H_n}, \quad (-l \leq x \leq -a). \end{aligned} \right\} (2.11)$$

Легко видеть, что эти выражения будут однозначными и аналитическими функциями от p и условия леммы¹ выполняются. Найдем вычеты для $T_{\text{ст}}^*$, $T_{\text{в.н}}^*$, $T_{\text{н.н}}^*$. Рассмотрим вначале полюсы, которые не являются корнями Δ . Из формул (2.8) видно, что A_1 и B_1 имеют простые полюсы в точке $p=0$ и A_2' , A_3' имеют полюсы при $p=0$, $p=-H_b$, $p=-H_n$. Определив вычеты относительно этих полюсов и обозначив соответствующую им часть температуры через $T_{\text{ст}}^0$, $T_{\text{в.н}}^0$ и $T_{\text{н.н}}^0$, получим

$$\left. \begin{aligned} T_{\text{ст}}^0 &= \frac{T_n(\gamma_3 - 1)\gamma_2 + T_b(\gamma_2 - 1)\gamma_3 + \frac{T_n - T_b}{a}(\gamma_2 - 1)(\gamma_3 - 1)x}{2\gamma_2\gamma_3 - (\gamma_2 + \gamma_3)}; \\ T_{\text{в.н}}^0 &= T_b + \frac{(T_n - T_b)(\gamma_3 - 1) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{H_b}{k}}(l-x)}{(2\gamma_2\gamma_3 - \gamma_2 - \gamma_3) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{H_b}{k}}(l-a)}; \\ T_{\text{н.н}}^0 &= T_n + \frac{(T_b - T_n)(\gamma_2 - 1) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{H_n}{k}}(l+x)}{(2\gamma_2\gamma_3 - \gamma_3 - \gamma_2) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{H_n}{k}}(l-a)}. \end{aligned} \right\} (2.12)$$

¹ В. И. Смирнов, Курс высшей математики, ГИИТ, 1950, т. III, ч. II, стр. 219.

где

$$\left. \begin{aligned} \chi_2 &= 1 + av_2 \sqrt{\frac{H_b}{k}} \operatorname{th} \sqrt{\frac{H_b}{k}}(l-a); \\ \chi_3 &= 1 + av_3 \sqrt{\frac{H_n}{k}} \operatorname{th} \sqrt{\frac{H_n}{k}}(l-a). \end{aligned} \right\} (2.13)$$

Как можно видеть ниже, $T_{\text{ст}}^0$, $T_{\text{в.н}}^0$, $T_{\text{н.н}}^0$ представляют собой стационарное решение задачи ($t \rightarrow \infty$).

Далее надо найти вычеты около полюсов, получаемых при корнях уравнения $\Delta=0$. Обозначив температуры, соответствующие этим полюсам, через $T_{\text{ст}}^1$, $T_{\text{в.н}}^1$, $T_{\text{н.н}}^1$, получим

$$\left. \begin{aligned} T_{\text{ст}}^1 &= T_{\text{ст}}^0 + T_{\text{ст}}^1; \\ T_{\text{в.н}}^1 &= T_{\text{в.н}}^0 + T_{\text{в.н}}^1; \\ T_{\text{н.н}}^1 &= T_{\text{н.н}}^0 + T_{\text{н.н}}^1. \end{aligned} \right\} (2.14)$$

Заметим, что при $p > 0$, выражение Δ не обращается в нуль. При $p < 0$ возможны корни уравнения $\Delta=0$ и следует различать три случая:

1. $-H_n < p < 0$: $r = ia$; $q_2 = \beta_2$; $q_3 = \beta_3$;
 $\beta_2^2 + \alpha^2 = \frac{H_b}{k}$; $\beta_3^2 + \alpha^2 = \frac{H_n}{k}$.
2. $-H_n < p < -H_b$: $r = ia$; $q_2 = i\beta_2$; $q_3 = \beta_3$;
 $\alpha^2 - \beta_2^2 = \frac{H_b}{k}$; $\beta_3^2 + \alpha^2 = \frac{H_n}{k}$.
3. $-\infty < p < -H_n$: $r = ia$; $q_2 = i\beta_2$; $q_3 = i\beta_3$;
 $\alpha^2 - \beta_2^2 = \frac{H_b}{k}$; $\alpha^2 - \beta_3^2 = \frac{H_n}{k}$.

Здесь везде α , β_2 , β_3 — действительны и положительны. Для всех трех случаев величина α находится соответственно из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{3r} \psi_{2r} + \Phi_{2r} \psi_{3r} &= 0, \text{ при } 0 \leq \alpha \leq \sqrt{\frac{H_b}{k}}; \\ \Phi_{3r} \bar{\psi}_{2r} + \Phi_{2r} \bar{\psi}_{3r} &= 0, \text{ при } \sqrt{\frac{H_b}{k}} \leq \alpha \leq \sqrt{\frac{H_n}{k}}; \\ \Phi_{3r} \bar{\psi}_{2r} + \Phi_{2r} \bar{\psi}_{3r} &= 0, \text{ при } \sqrt{\frac{H_n}{k}} \leq \alpha < \infty, \end{aligned} \right\} (2.16)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{ir} &= \alpha + v_i \beta_i \operatorname{tg} \alpha a \operatorname{th} \beta_i(l-a); \\ \bar{\Psi}_{ir} &= \alpha - v_i \beta_i \operatorname{tg} \alpha a \operatorname{tg} \beta_i(l-a); \\ \Psi_{ir} &= -\alpha \operatorname{tg} \alpha a + v_i \beta_i \operatorname{th} \beta_i(l-a); \\ \bar{\Psi}_{ir} &= -\alpha \operatorname{tg} \alpha a - v_i \beta_i \operatorname{th} \beta_i(l-a); \quad (i=2, 3). \end{aligned} \right\} (2.17)$$

В соответствии со случаями (2.15) надо различать и три случая для выражения производной $\frac{dT}{dp}$. Определив эти производные и найдя вычеты

около корней уравнения $\Delta=0$, запишем соответствующую им температуру стенки

$$T_{ст}^I = \sum_{m=1,2}^{M_1} e^{-\alpha_m^2 kt} (A_m^I \cos \alpha_m x + B_m^I \sin \alpha_m x) + \sum_{m=M_1+1}^{M_2} e^{-\alpha_m^2 kt} (A_m^{II} \cos \alpha_m x + B_m^{II} \sin \alpha_m x) + \sum_{m=M_2+1}^{\infty} e^{-\alpha_m^2 kt} (A_m^{III} \cos \alpha_m x + B_m^{III} \sin \alpha_m x), \quad (2.18)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_m^I &= -\frac{L_{3m}\Psi_{3rm} - L_{2m}\Phi_{3rm}}{k^2 \alpha_m^2 \left(\frac{d\Delta}{dp}\right)_m \cos \alpha_m a}; \\ A_m^{II} &= -\frac{L_{3m}\bar{\Psi}_{2rm} - \bar{L}_{2m}\Phi_{3rm}}{k^2 \alpha_m^2 \left(\frac{d\Delta}{dp}\right)_m \cos \alpha_m a}; \\ A_m^{III} &= -\frac{\bar{L}_{3m}\Psi_{2rm} - \bar{L}_{2m}\bar{\Psi}_{3rm}}{k^2 \alpha_m^2 \left(\frac{d\Delta}{dp}\right)_m \cos \alpha_m a}; \\ B_m^I &= \frac{L_{3m}\Psi_{2rm} - L_{2m}\Psi_{3rm}}{k^2 \alpha_m^2 \left(\frac{d\Delta}{dp}\right)_m \cos \alpha_m a}; \\ B_m^{II} &= \frac{L_{3m}\bar{\Psi}_{2rm} - \bar{L}_{2m}\Psi_{3rm}}{k^2 \alpha_m^2 \left(\frac{d\Delta}{dp}\right)_m \cos \alpha_m a}; \\ B_m^{III} &= \frac{\bar{L}_{3m}\bar{\Psi}_{2rm} - \bar{L}_{2m}\bar{\Psi}_{3rm}}{k^2 \alpha_m^2 \left(\frac{d\Delta}{dp}\right)_m \cos \alpha_m a} \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} L_{2m} &= \frac{H_0(T_B - T_0)2\beta_{2m}}{d\beta_{2m}} \operatorname{th} \beta_{2m}(l-a); \\ \bar{L}_{2m} &= \frac{H_0(T_B - T_0)2\beta_{2m} \operatorname{tg} \beta_{2m}(l-a)}{d\beta_{2m}}; \\ L_{3m} &= \frac{H_0(T_B - T_0)2\beta_{3m} \operatorname{th} \beta_{3m}(l-a)}{d\beta_{3m}}; \\ \bar{L}_{3m} &= \frac{H_0(T_B - T_0)2\beta_{3m} \operatorname{tg} \beta_{3m}(l-a)}{d\beta_{3m}}; \\ \Phi_{1rm} &= \alpha_m + v\beta_{1m} \operatorname{tg} \alpha_m \operatorname{th} \beta_{1m}(l-a); \\ \bar{\Phi}_{1rm} &= \alpha_m - v\beta_{1m} \operatorname{tg} \alpha_m \operatorname{tg} \beta_{1m}(l-a); \\ \Psi_{1rm} &= -\alpha_m \operatorname{tg} \alpha_m a + v\beta_{1m} \operatorname{th} \beta_{1m}(l-a); \\ \bar{\Psi}_{1rm} &= -\alpha_m \operatorname{tg} \alpha_m a - v\beta_{1m} \operatorname{tg} \beta_{1m}(l-a); \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

($i=2,3$); см. (2.17)

Далее находим

$$T_{в.п}^I = \sum_{m=1,2}^{M_1} C_m^I e^{-\alpha_m^2 kt} \frac{\operatorname{ch} \beta_{2m}(l-x)}{\operatorname{ch} \beta_{2m}(l-a)} + \sum_{m=M_1+1}^{M_2} C_m^{II} e^{-\alpha_m^2 kt} \frac{\cos \beta_{2m}(l-x)}{\cos \beta_{2m}(l-a)} + \sum_{m=M_2+1}^{\infty} C_m^{III} e^{-\alpha_m^2 kt} \frac{\cos \beta_{2m}(l-x)}{\cos \beta_{2m}(l-a)}, \quad (2.21)$$

где

$$\left. \begin{aligned} C_m^I &= -\frac{1}{k^2 \alpha_m \left(\frac{d\Delta}{dp}\right)_{1m}} \left[\frac{L_{3m}}{\cos^2 \alpha_m a} - \frac{H_0(T_B - T_0)}{\beta_{2m}^2} (\Psi_{3rm} - \Phi_{3rm} \operatorname{tg} \alpha_m a) \right]; \\ C_m^{II} &= -\frac{1}{k^2 \alpha_m \left(\frac{d\Delta}{dp}\right)_{11m}} \left[\frac{L_{3m}}{\cos^2 \alpha_m a} + \frac{H_0(T_B - T_0)}{\beta_{2m}^2} (\Psi_{3rm} - \Phi_{3rm} \operatorname{tg} \alpha_m a) \right]; \\ C_m^{III} &= -\frac{1}{k^2 \alpha_m \left(\frac{d\Delta}{dp}\right)_{111m}} \left[\frac{\bar{L}_{3m}}{\cos^2 \alpha_m a} + \frac{H_0(T_B - T_0)}{\beta_{2m}^2} (\bar{\Psi}_{3m} - \bar{\Phi}_{3rm} \operatorname{tg} \alpha_m a) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

Аналогично находим

$$T_{в.п}^I = \sum_{m=1,2}^{M_1} D_m^I e^{-\alpha_m^2 kt} \frac{\operatorname{ch} \beta_{3m}(l+x)}{\operatorname{ch} \beta_{3m}(l-a)} + \sum_{m=M_1+1}^{M_2} D_m^{II} e^{-\alpha_m^2 kt} \frac{\cos \beta_{3m}(l+x)}{\cos \beta_{3m}(l-a)}, \quad (2.23)$$

где

$$\left. \begin{aligned} D_m^I &= -\frac{1}{k^2 \alpha_m \left(\frac{d\Delta}{dp}\right)_{1m}} \left[\frac{L_{3m}}{\cos^2 \alpha_m a} - \frac{H_0(T_B - T_0)}{\beta_{3m}^2} (\Psi_{2rm} - \Phi_{2rm} \operatorname{tg} \alpha_m a) \right]; \\ D_m^{II} &= -\frac{1}{k^2 \alpha_m \left(\frac{d\Delta}{dp}\right)_{11m}} \left[\frac{\bar{L}_{3m}}{\cos^2 \alpha_m a} - \frac{H_0(T_B - T_0)}{\beta_{3m}^2} (\bar{\Psi}_{2rm} - \bar{\Phi}_{2rm} \operatorname{tg} \alpha_m a) \right]; \\ D_m^{III} &= -\frac{1}{k^2 \alpha_m \left(\frac{d\Delta}{dp}\right)_{111m}} \left[\frac{\bar{L}_{3m}}{\cos^2 \alpha_m a} + \frac{H_0(T_B - T_0)}{\beta_{3m}^2} (\bar{\Psi}_{2rm} - \bar{\Phi}_{2rm} \operatorname{tg} \alpha_m a) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

В выражениях (2.19), (2.22), (2.24) обозначено

$$\begin{aligned}
 2k \left(\frac{d\Delta}{dp} \right)_{I} &= [v_2 \beta_2 \operatorname{th} \beta_2 (l-a) + v_3 \beta_3 \operatorname{th} \beta_3 (l-a)] \frac{a(1+\operatorname{tg}^2 aa)}{\operatorname{tg} aa \cos^2 aa} + \\
 &+ \left[\frac{H_n}{ka^2 \beta_2^2} + \frac{l-a}{\beta_2 \operatorname{ch}^2 \beta_2 (l-a) \operatorname{th} \beta_2 (l-a)} \right] 2v_2 v_3 \beta_2 \beta_3 \operatorname{tg} aa \operatorname{th} \beta_2 (l-a) \times \\
 &\times \operatorname{th} \beta_3 (l-a) + \left[\frac{H_n}{ka^2 \beta_3^2} + \frac{l-a}{\beta_3 \operatorname{ch}^2 \beta_3 (l-a) \operatorname{th} \beta_3 (l-a)} \right] 2a^2 \operatorname{tg} aa + \\
 &+ \frac{H_n - H_n}{k} \frac{1}{\beta_2 \beta_3} v_3 a (1 - \operatorname{tg}^2 aa) \operatorname{th} \beta_3 (l-a) + \\
 &+ \left[\frac{l-a}{\beta_2 \operatorname{ch}^2 \beta_2 (l-a) \operatorname{th} \beta_2 (l-a)} - \frac{l-a}{\beta_3 \operatorname{ch}^2 \beta_3 (l-a) \operatorname{th} \beta_3 (l-a)} \right] \times \\
 &\times v_2 v_3 a (1 - \operatorname{tg}^2 aa) \operatorname{th} \beta_2 (l-a); \\
 2k \left(\frac{d\Delta}{dp} \right)_{II} &= [-v_2 \beta_2 \operatorname{tg} \beta_2 (l-a) + v_3 \beta_3 \operatorname{th} \beta_3 (l-a)] \frac{a(1+\operatorname{tg}^2 aa)}{\operatorname{tg} aa \cos^2 aa} - \\
 &- \left[\frac{H_n}{ka^2 \beta_2^2} + \frac{l-a}{\beta_2 \sin^2 \beta_2 (l-a)} \right] 2v_2 v_3 \beta_2 \beta_3 \operatorname{tg} aa \operatorname{tg} \beta_2 (l-a) \operatorname{th} \beta_3 \times \\
 &\times (l-a) + \left[\frac{H_n}{ka^2 \beta_3^2} + \frac{l-a}{\beta_3 \operatorname{ch}^2 \beta_3 (l-a) \operatorname{th} \beta_3 (l-a)} \right] 2a^2 \operatorname{tg} aa + \\
 &+ \frac{H_n - H_n}{k} \frac{v_3 a}{\beta_2 \beta_3} (1 - \operatorname{tg}^2 aa) \operatorname{th} \beta_3 (l-a) + \\
 &+ \left[\frac{l-a}{\beta_2 \cos^2 \beta_2 (l-a) \operatorname{tg} \beta_2 (l-a)} + \frac{l-a}{\beta_3 \operatorname{ch}^2 \beta_3 (l-a) \operatorname{th} \beta_3 (l-a)} \right] \times \\
 &\times v_2 \beta_2 a (1 - \operatorname{tg}^2 aa) \operatorname{tg} \beta_2 (l-a); \\
 2k \left(\frac{d\Delta}{dp} \right)_{III} &= -[v_2 \beta_2 \operatorname{tg} \beta_2 (l-a) + v_3 \beta_3 \operatorname{tg} \beta_3 (l-a)] \frac{a(1+\operatorname{tg}^2 aa)}{\operatorname{tg} aa \cos^2 aa} - \\
 &- \left[\frac{H_n}{ka^2 \beta_2^2} + \frac{l-a}{\beta_2 \cos^2 \beta_2 (l-a) \operatorname{tg} \beta_2 (l-a)} \right] 2v_2 v_3 \beta_2 \beta_3 \operatorname{tg} aa \operatorname{tg} \beta_2 (l-a) \times \\
 &\times \operatorname{tg} \beta_3 (l-a) - \left[\frac{H_n}{ka^2 \beta_3^2} + \frac{l-a}{\beta_3 \cos^2 \beta_3 (l-a) \operatorname{tg} \beta_3 (l-a)} \right] 2a^2 \operatorname{tg} aa + \\
 &+ \frac{H_n - H_n}{k} \frac{v_3 a}{\beta_2 \beta_3} (1 - \operatorname{tg}^2 aa) \operatorname{tg} \beta_3 (l-a) + \\
 &+ \left[\frac{l-a}{\beta_2 \cos^2 \beta_2 (l-a) \operatorname{tg} \beta_2 (l-a)} - \frac{l-a}{\beta_3 \cos^2 \beta_3 (l-a) \operatorname{tg} \beta_3 (l-a)} \right] \times \\
 &\times v_2 \beta_2 a (1 - \operatorname{tg}^2 aa) \operatorname{tg} \beta_2 (l-a).
 \end{aligned}
 \tag{2.25}$$

При рассмотрении какого-либо числового примера необходимо поступать следующим образом:

1. Найти корни уравнений (2.16), (2.17).
2. Найти A', B', C', D' .

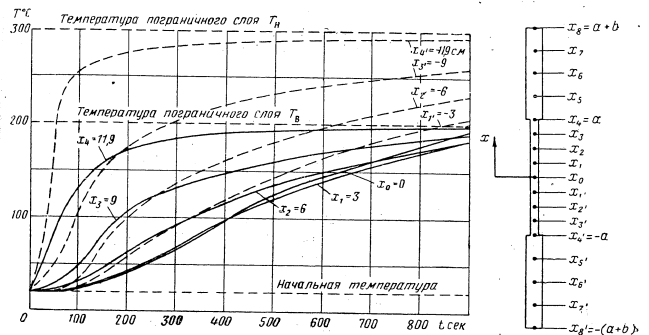
$I=I, II, III$ по формулам

(2.19), (2.22), (2.24).

3. Задавая (x, t) , определить по формулам (2.18), (2.21), (2.23) температуру в стенке и полках.

По такой схеме был просчитан числовой пример по следующим исходным данным:

$v_2 = 7,5;$ $T_0 = 20^\circ \text{C};$
 $v_3 = 3,75;$ $T_b = 200^\circ \text{C};$
 $H_2 = 0,01162 \text{ 1/сек};$ $T_n = 300^\circ \text{C};$
 $H_n = 0,02324 \text{ 1/сек};$ $\sqrt{\frac{H_n}{k}} = 0,3112;$
 $a = 11,9 \text{ см};$ $\sqrt{\frac{H_n}{k}} = 0,4401.$
 $l = 42,39 \text{ см};$
 $k = 0,1200 \text{ см}^2/\text{сек}.$



Корни трансцендентных уравнений (2.16) были вычислены графическим методом и уточнены подбором. Первые 13 корней имеют значения:

- 1-й диапазон: $m=1 \dots M_1=2, \alpha_1=0,1261, \alpha_2=0,2489;$
- 2-й диапазон: $m=3 \dots M_2=7, \alpha_3=0,3116, \alpha_4=0,3269, \alpha_5=0,3636, \alpha_6=0,3870, \alpha_7=0,4362;$
- 3-й диапазон: $m=8,9 \dots 13, \alpha_8=0,4427, \alpha_9=0,4551, \alpha_{10}=0,4813, \alpha_{11}=0,5087, \alpha_{12}=0,5250, \alpha_{13}=0,5509.$

С учетом семи корней (1 и 2-й диапазоны) коэффициенты для температуры в стенке T_w получились следующие:

m	1	2	3	4	5	6	7
α_m	0,1261	0,2489	0,3116	0,3269	0,3636	0,3870	0,4362
A_m	-328,5	-0,0735	124,5	4,955	28,40	70,80	-0,4455
B_m	3,375	-26,08	114,2	2,942	0,3298	-26,03	-11,74

На фиг. 18 нанесены кривые, характеризующие собой температурное поле в стенке двутаврового элемента, показанного на фиг. 19.

Расчет температурных полей в двуглавом элементе при $\delta_n = \beta_n = \delta$; $h_n = h_n = h$ и $T_b \neq T_n$

Эту задачу можно рассматривать как частный случай предыдущей задачи, полагая в ней $\delta_n = \beta_n = \delta$; $h_n = h_n = h$. При этом для температуры в стенке получим

$$T_{ст}(x, t) = \frac{T_b + T_n - 2T_0}{2} \left[\sum_{m=1, 2, \dots}^{M_1} a_m^1 e^{-\alpha_m^2 kt} \cos \alpha_m x + \sum_{m=M+1, \dots}^{\infty} a_m^{11} e^{-\alpha_m^2 kt} \cos \alpha_m x \right] - (T_b - T_n) \left[\sum_{n=1, 2, 3, \dots}^N b_n^1 e^{-\alpha_n^2 kt} \sin \alpha_n x + \sum_{n=N+1, \dots}^{\infty} b_n^{11} e^{-\alpha_n^2 kt} \sin \alpha_n x \right] + \frac{T_b + T_n}{2} + \frac{1}{2} (T_b - T_n) \gamma_1 x, \quad (2.26)$$

где

$$\gamma_1 = \frac{v \sqrt{\frac{H}{k}} \operatorname{th} \sqrt{\frac{H}{k}} (l-a)}{1 + v \sqrt{\frac{H}{k}} a \operatorname{th} \sqrt{\frac{H}{k}} (l-a)}; \quad (2.27)$$

$$\left. \begin{aligned} a_m^1 &= \frac{2 \operatorname{ch} \beta_m (l-a) \cos \alpha_m a}{\operatorname{ch} \beta_m (l-a) + \frac{\beta_m^2 a^2 m}{H/k \sin \alpha_m a} \left[\frac{a \operatorname{ch} \beta_m (l-a)}{\cos \alpha_m a} + v \frac{(l-a) \cos \alpha_m a}{\operatorname{ch} \beta_m (l-a)} \right]} \\ a_m^{11} &= \frac{2 \cos \beta_m (l-a) \cos \alpha_m a}{\cos \beta_m (l-a) - \frac{\beta_m^2 a^2 m}{H/k \sin \alpha_m a} \left[\frac{\cos \beta_m (l-a)}{\cos \alpha_m a} a + v \frac{(l-a) \cos \alpha_m a}{\cos \beta_m (l-a)} \right]} \\ b_n^1 &= \frac{H/k}{\alpha_n \beta_n^2 \sin \alpha_n a \left[\frac{H/k}{\alpha_n \beta_n^2} - \frac{2a}{\sin 2\alpha_n a} - \frac{v(l-a) \operatorname{tg} \alpha_n a}{\operatorname{ch}^2 \beta_n (l-a)} \right]} \\ b_n^{11} &= \frac{H/k}{\alpha_n \beta_n^2 \sin \alpha_n a \left[\frac{H/k}{\alpha_n \beta_n^2} + \frac{2a}{\sin 2\alpha_n a} + \frac{v(l-a) \operatorname{tg} \alpha_n a}{\cos^2 \beta_n (l-a)} \right]} \end{aligned} \right\} (2.28)$$

($m=1, 2, \dots, M$);
($m=M+1, M+2, \dots, \infty$);
($n=N+1, N+2, \dots, \infty$).

Для температуры в полках найдем

$$T_{в.п}(x, t) = T_b - \frac{1}{2} \gamma_2 (T_b - T_n) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{H}{k}} (l-x) - \frac{T_b - T_n - 2T_0}{2} \left[\sum_{m=1, 2, 3, \dots}^M c_m^1 e^{-\alpha_m^2 kt} \operatorname{ch} \beta_m (l-x) + \sum_{m=M+1, \dots}^{\infty} c_m^{11} e^{-\alpha_m^2 kt} \cos \beta_m (l-x) \right] - \quad (2.29)$$

$$- (T_b - T_n) \left[\sum_{n=1, 2, 3, \dots}^N d_n^1 e^{-\alpha_n^2 kt} \operatorname{ch} \beta_n (l-x) + \sum_{n=N+1}^{\infty} d_n^{11} e^{-\alpha_n^2 kt} \cos \beta_n (l-x) \right], \quad (x > 0);$$

$$T_{в.п}(x, t) = T_n + \frac{1}{2} \gamma_2 (T_b - T_n) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{H}{k}} (l+x) - \frac{T_b + T_n - 2T_0}{2} \left[\sum_{m=1, 2, 3, \dots}^M c_m^1 e^{-\alpha_m^2 kt} \operatorname{ch} \beta_m (l+x) + \sum_{m=M+1, \dots}^{\infty} c_m^{11} e^{-\alpha_m^2 kt} \cos \beta_m (l+x) \right] + (T_b - T_n) \left[\sum_{n=1, 2, \dots}^N d_n^1 e^{-\alpha_n^2 kt} \operatorname{ch} \beta_n (l+x) + \sum_{n=N+1}^{\infty} d_n^{11} e^{-\alpha_n^2 kt} \cos \beta_n (l+x) \right], \quad (x < 0), \quad (2.29)$$

где

$$\left. \begin{aligned} c_m^1 &= \frac{\cos \alpha_m a}{\operatorname{ch} \beta_m (l-a)} a_m^1; \\ c_m^{11} &= \frac{\cos \alpha_m a}{\cos \beta_m (l-a)} a_m^{11}; \\ d_n^1 &= \frac{\sin \alpha_n a}{\operatorname{ch} \beta_n (l-a)} b_n^1; \\ d_n^{11} &= \frac{\sin \alpha_n a}{\cos \beta_n (l-a)} b_n^{11}; \end{aligned} \right\} (2.30)$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{H}{k}} (l-a) \left(1 + v \sqrt{\frac{H}{k}} a \operatorname{th} \sqrt{\frac{H}{k}} (l-a) \right)}$$

Здесь α_m являются корнями уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_m \operatorname{tg} \alpha_m a - v \beta_m \operatorname{th} \beta_m (l-a) &= 0 \\ \text{при } 0 < \alpha_m < \sqrt{\frac{H}{k}}; \quad m=1, \dots, M \text{ и } \beta_m &= \sqrt{\frac{H}{k} - \alpha_m^2}; \\ \alpha_m \operatorname{tg} \alpha_m a + v \beta_m \operatorname{tg} \beta_m (l-a) &= 0 \\ \text{при } \sqrt{\frac{H}{k}} < \alpha_m < \infty, \quad m=M+1, \dots, \infty \text{ и } \beta_m &= \sqrt{\alpha_m^2 - \frac{H}{k}} \end{aligned} \right\} (2.31)$$

и β_n являются корнями уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_n + v \beta_n \operatorname{tg} \alpha_n a \operatorname{th} \beta_n (l-a) &= 0 \\ \text{при } 0 < \alpha_n < \sqrt{\frac{H}{k}}, \quad n=1, \dots, N, \quad \beta_n &= \sqrt{\frac{H}{k} - \alpha_n^2}, \\ \alpha_n - v \beta_n \operatorname{tg} \alpha_n a \operatorname{tg} \beta_n (l-a) &= 0 \\ \text{при } \sqrt{\frac{H}{k}} < \alpha_n < \infty, \quad n=N+1, \dots, \infty; \quad \beta_n &= \sqrt{\alpha_n^2 - \frac{H}{k}} \end{aligned} \right\} (2.32)$$

Полагая $T_n = T_n$, получим случай, исследованный в работе Ф. Поула и Г. Оливера. Из формул (2.26), (2.29) видно, что слагаемые, стоящие под знаком сумм, быстро убывают с ростом времени, а именно, убывают по экспоненте $e^{-\alpha^2 t}$.

Таким образом, метод достаточно эффективен при больших значениях t , а при значениях t , близких к нулю, ряды сходятся медленно и требуется привлечь большое число членов сумм (до 10).

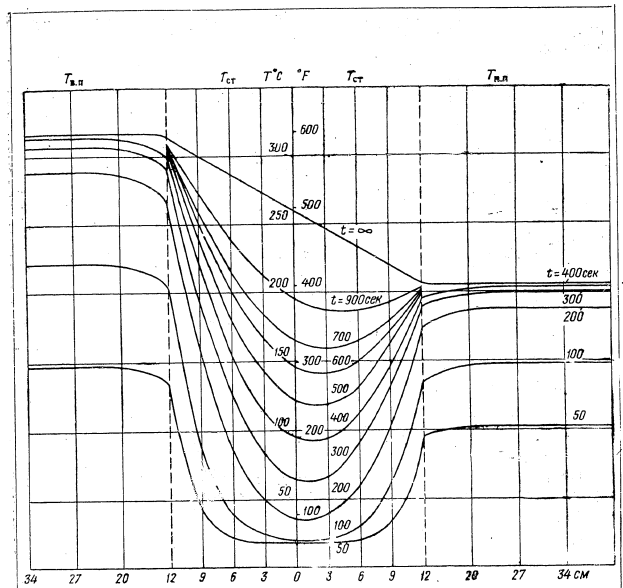
В качестве числового примера с применением формул (2.26), (2.29) возьмем исходные данные согласно работе Ф. Поула и Г. Оливера, но считая температуру на верхней и нижней полках различной, а именно: пусть $T_n = 600^\circ \text{F}$ ($315,6^\circ \text{C}$), $T_n = 400^\circ \text{F}$ ($204,4^\circ \text{C}$).

Определяя корни трансцендентных уравнений по формулам (2.31), (2.32), найдем следующие значения корней (а соответственно им и значения величин, определяемых выражениями (2.28), (2.30)).

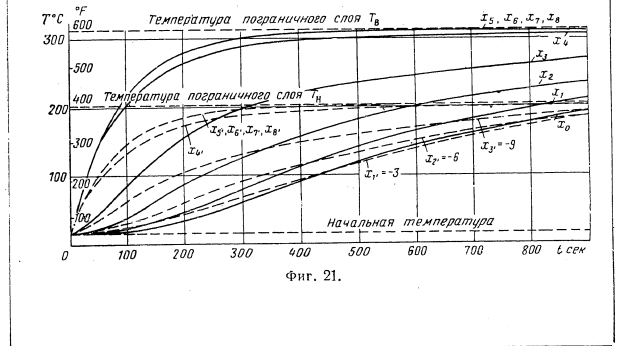
№ по пор.	α_m	β_m	a_m	ϵ_m
1	0,3224	0,7218	1,5017	0
2	0,7861	0,0832	-1,4259	0,7916
3	0,8230	0,2289	0,3304	0,2699
4	0,9230	0,4764	0,2564	-0,1144
5	1,0151	0,6368	0,3371	0,0732
6	1,1305	0,8081	0,0404	-0,0233
7	1,3135	1,0490	0,00117	0,00116
8	1,5172	1,2949	-0,0077	0,0053
9	1,6652	1,4656	-0,0502	-0,0798
10	1,7790	1,5937	-0,0095	0,0046
11	1,9966	1,8334	-0,00013	-0,00013

№ по пор.	α_n	β_n	d_n	b_n
1	0,6326	-0,4740	0,0009	0,7946
2	0,7955	0,0886	0,5653	-0,4953
3	0,8425	0,2912	-0,0746	-0,0968
4	0,9511	0,5288	0,0638	-0,0066
5	1,1085	0,7771	-0,0051	+0,0058
6	1,2781	1,004	-0,0106	0,0321
7	1,3701	1,1190	0,0087	0,0409
8	1,5375	1,3187	-0,0018	0,0022
9	1,7542	1,5660	-0,0006	-0,0006
10	1,9567	1,7899	0,0023	-0,0075

Результаты расчета представлены на фиг. 20 и 21.

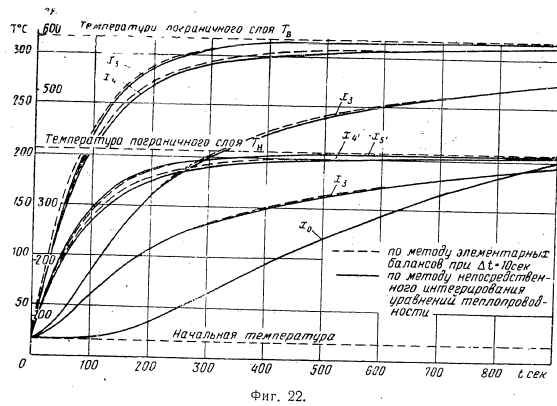


Фиг. 20.



Фиг. 21.

На фиг. 22 приведены сравнительные графики, подсчитанные для этих данных непосредственным интегрированием и методом элементарных балансов.



Примеры показывают, что оба метода позволяют рассчитывать температурные поля с технически приемлемой точностью.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
А. Я. Александров, Л. Э. Брюккер. Испытание на прочность трехслойных панелей с заполнителями из пенопластов	3
А. Я. Александров. Расчет заполнителя трехслойных пластин с учетом отрыва	14
Л. М. Куришин. Большие прогибы трехслойной цилиндрической оболочки	39
Л. М. Куришин. Устойчивость при сжатии трехслойной цилиндрической свободно опертой панели и цилиндра с заполнителем из гофра	51
Л. М. Куришин. Устойчивость при сжатии трехслойной криволинейной цилиндрической панели, поперечные кромки которой защемлены, а продольные свободно оперты	69
Л. М. Куришин. Об учете изгибной жесткости внешних слоев трехслойной криволинейной панели, работающей на продольное сжатие	80
С. И. Галкин. Кручение открытой цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами	85
С. И. Галкин. Кручение и изгиб круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной упругими шпангоутами	102
Н. И. Назаров, М. С. Поваарницын, Е. В. Юрлова. Расчет нестационарных температур в двутавровом элементе	142

ВОПРОСЫ РАСЧЕТА ЭЛЕМЕНТОВ АВИАЦИОННЫХ
КОНСТРУКЦИЙ

Издательский редактор *Т. А. Валедицкая* Технический ред. *В. П. Рожин*
Г-51356 Подписано в печать 24/IV 1959 г. Учетно-изд. л. 12,39
Формат бумаги $70 \times 108^{1/16} = 5,31$ бум. л. — 14,53 печ. л.
Цена 10 р. 60 к. * Тираж 2600 Заказ 540/9249
Типография Оборонгиза



Цена 10 р. 60 к.



РАДИОЛОКАЦИОННЫЙ ОБЗОР

ВОЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ОБОРОНЫ СОЮЗА ССР
МОСКВА — 1959

РАДИОЛОКАЦИОННАЯ ТЕХНИКА

Б. М. СТЕПАНОВ

РАДИОЛОКАЦИОННЫЙ
ОБЗОР

ВОЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ОБОРОНЫ СОЮЗА ССР
МОСКВА — 1959

Б. М. Степанов. Радиолокационный обзор

Брошюра «Радиолокационный обзор» входит в выпускаемую Военным издательством библиотеку «Радиолокационная техника». Библиотека рассчитана на офицеров, связанных с эксплуатацией радиотехнических средств. Она может быть также использована широким кругом читателей, желающих подробно ознакомиться с работой отдельных узлов и элементов радиолокационных станций.

Перечень брошюр, входящих в библиотеку «Радиолокационная техника», помещен на 3-й странице обложки.

В брошюре «Радиолокационный обзор» изложены основные соображения по выбору параметров систем радиолокационного обзора пространства и рассмотрены наиболее характерные типы этих систем.

ВВЕДЕНИЕ

Любая радиолокационная станция при поиске целей осуществляет обзор (просмотр) некоторой области пространства. В радиолокации положение целей определяется обычно в сферической системе координат, начало которой находится в месте расположения станции. Координатами целей являются наклонная дальность, азимут и угол места. Величину области пространства, просматриваемой радиолокационной станцией, удобно характеризовать максимальной дальностью обнаружения целей, сектором обзора по азимуту и сектором обзора по углу места.

Как правило, у радиолокационных станций угол раствора диаграммы направленности значительно меньше требуемого сектора обзора в соответствующей плоскости. Поэтому для обнаружения целей диаграмма направленности антенны станции должна перемещаться в пределах заданной области пространства. Такое перемещение диаграммы направленности антенны радиолокационных станций, подчиненное определенному закону, называют радиолокационным обзором пространства.

Основные требования, предъявляемые к системе обзора, следующие:

- отсутствие пропусков целей при обзоре, или, иными словами, облучение каждой точки внутри заданной области пространства;
- минимальная длительность обзора заданной области: при большой длительности обзора за время между двумя последовательными облучениями цель успеет переместиться на значительное расстояние (особенно при больших скоростях движения цели) и ее отметка будет «скакать» по экрану индикатора, что затруднит наблюдение за целью;
- при каждом облучении цели число попадающих на нее импульсов радиолокационной станции не должно быть

меньше определенного минимума, чтобы индикация целей была надежной;

— обеспечение необходимой точности определения координат обнаруженных целей и заданной разрешающей способности по угловым координатам;

— простота, легкость и компактность устройства для перемещения диаграммы направленности; в этом устройстве не должны возникать значительные механические нагрузки.

Перечисленные требования достаточно сложны и противоречивы, поэтому построение системы обзора — одна из трудных задач при создании радиолокационной станции.

В настоящей брошюре будут изложены основные соображения по выбору параметров систем обзора и рассмотрены наиболее характерные типы этих систем.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Для просматриваемой радиолокационной станцией области пространства и определяемых координат целей обычно используются следующие обозначения (рис. 1): азимут цели — β , угол места цели — ϵ , наклонная даль-

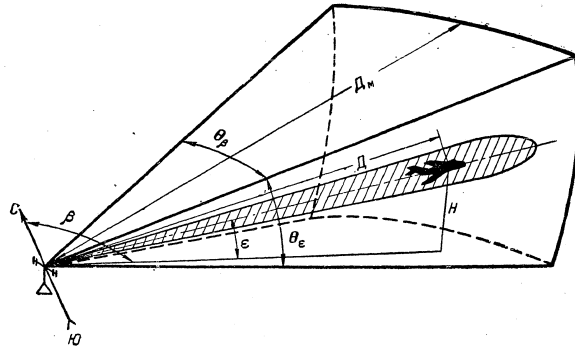


Рис. 1. Координаты воздушной цели и секторы обзора

ность — D , высота цели — H , сектор обзора по азимуту — θ_p , сектор обзора по углу места — θ_ϵ , максимальная дальность обнаружения D_m .

Углы раствора диаграммы направленности в горизонтальной и вертикальной плоскостях обозначим соответственно Φ_p и Φ_ϵ .

Диаграммы направленности, симметричные относительно направления максимального излучения, для которых справедливо соотношение $\Phi_3 \approx \Phi_4 = \Phi$, называются игольчатыми¹. Игольчатые диаграммы могут быть и весьма узкими ($\Phi = 2 \div 3^\circ$) и довольно широкими ($\Phi = 20 \div 25^\circ$).

Несимметричные диаграммы направленности, у которых один из углов раствора значительно больше другого, называются плоскими. Примерами плоских диаграмм являются веерная и секторная (рис. 2).

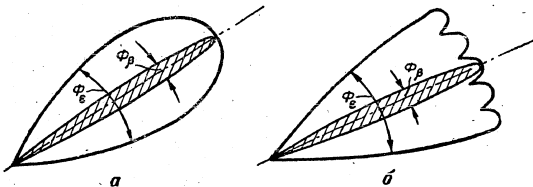


Рис. 2. Плоские диаграммы направленности:
а — веерная диаграмма; б — секторная диаграмма

Периодом обзора радиолокационной станции ($T_{обл}$) называется отрезок времени между двумя последовательными прохождениями диаграммы направленности антенны через одну и ту же точку пространства.

Если обзор пространства совершается по какой-либо сложной траектории (например, на рис. 3 изображен зигзагообразный обзор), то максимальный угол между соседними элементами траектории движения диаграммы направленности называется ее шагом (Ψ).

Чтобы станция успевала просматривать требуемую область пространства в заданный интервал времени, необходимо перемещать диаграмму направленности с определенной угловой скоростью (Ω), мгновенное значение которой равно частному от деления угла поворота φ (см. рис. 3) на время t , затраченное на этот поворот:

$$\Omega = \frac{\varphi}{t} \text{ (град/сек)}. \quad (1)$$

¹ Подробнее об этом см. брошюру В. И. Бекетова «Антенны сверхвысоких частот», Воениздат, 1957 г.

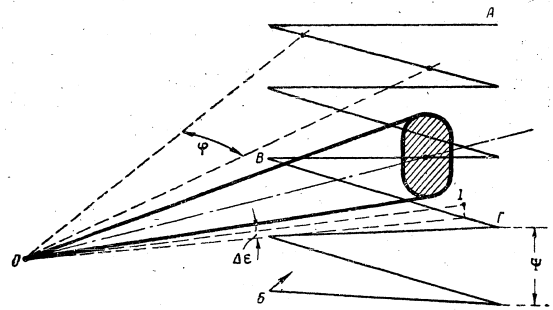


Рис. 3. Зигзагообразный обзор

Временем облучения ($T_{обл}$) называется время, в течение которого цель находится в пределах угла раствора диаграммы направленности. В соответствии с данным выше определением угловой скорости перемещения диаграммы направленности время облучения можно определить следующим образом:

$$T_{обл} = \frac{\Phi}{\Omega}. \quad (2)$$

За время облучения цели от нее отражается n импульсных сигналов. С точки зрения уменьшения периода обзора следует стремиться к уменьшению числа n , которое в пределе может быть равно единице. Однако для надежной индикации число импульсов, отражаемых целью при каждом ее облучении, не должно быть меньше некоторого значения $n_{мин}$, определяемого типом используемого в станции индикаторного устройства. При наличии в радиолокационной станции поискового индикатора с разверткой по дальности и яркостной отметкой $n_{мин} \approx 5 \div 6$.

Поясним необходимость нескольких отраженных сигналов для получения отметки цели. При обнаружении цели отраженные сигналы наблюдаются на фоне собственных шумов приемника. Мощность шумов непрерывно и нерегулярно колеблется около своего среднего значения. На

рис. 4, а показан характер изменения мощности шумов на выходе приемника; здесь момент t_0 соответствует излучению зондирующего импульса, а $t_{\text{макс}}$ — окончанию развертки по дальности. В некоторые моменты времени мощность шумов может резко возрастать, а в другие — уменьшаться до нуля. Если среднее значение мощности шумов, определяемое за длительный отрезок времени, обозначить P_0 , то вероятность $w(P)$ того, что в произвольно выбранный

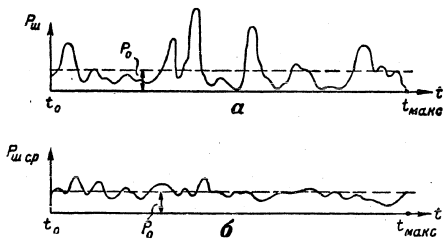


Рис. 4. Изменение мощности шумов на выходе приемника:
а — шумы на выходе приемника; б — усредненная мощность шумов за четыре цикла

момент времени мощность шумов превысит некоторое заданное значение P , выражается следующим образом:

$$w(P) = e^{-\frac{P}{P_0}} \quad (3)$$

Например, вероятность выбросов, в пять раз превосходящих среднюю мощность шумов, равна приблизительно 1%, т. е. в среднем на сто шумовых выбросов будет один, мощность которого в пять или более раз превосходит P_0 .

Если отметка цели создается только одним импульсным сигналом, подводимым к индикатору, то для надежной индикации цели на фоне шумов мощность принимаемых отраженных сигналов должна во много раз превосходить величину P_0 . Это требование резко сокращает возможность обнаружить при помощи радиолокационной станции далеко расположенные цели, т. е. снижает ее дальность действия.

Если же при каждом облучении цели принимается несколько отраженных сигналов, то условия ее обнаружения становятся более благоприятными. Происходит это потому, что отраженные от цели импульсы имеют приблизительно постоянную амплитуду и моменты их прихода соответствуют расположению электронного луча в одной и той же точке экрана индикатора, а шумовые выбросы располагаются по экрану совершенно беспорядочно.

Нарастание яркости B отметки на экране индикатора под воздействием нескольких импульсных сигналов можно охарактеризовать, например, графиком, приведенным на рис. 5. Яркость нарастает постепенно: после первого им-

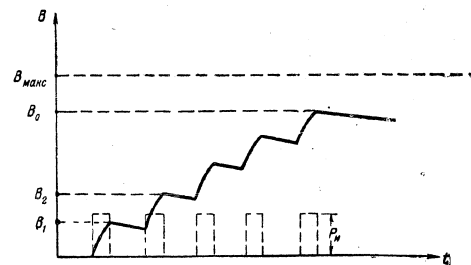


Рис. 5. Нарастание яркости отметки при возбуждении экрана несколькими импульсными сигналами

пульса она равна B_1 , после второго — B_2 и т. д. Наибольшая яркость отметки (B_0) зависит от числа накладывающихся один на другой импульсов и от их мощности P_n . Таким же образом нарастает яркость в какой-нибудь другой точке экрана под воздействием шумовых выбросов, но в этом случае мощность шумов, возбуждающих свечение экрана в данной точке, меняется случайным образом от одной развертки к другой.

Если нарастание яркости в отдельных точках экрана может происходить в течение n циклов работы станции (т. е., как обычно говорят, имеет место интегрирование сигналов за n циклов развертки), а через n циклов развертка передвинется по экрану индикатора на величину диаметра пятна, то соотношение яркостей отметок целей и шумового

фона будет определяться соотношением мощности сигналов P_n и усредненной за n циклов мощности шумов $P_{ш. ср}$. На рис. 4, б показано усредненное за четыре цикла значение мощности шумов. Как видно из рисунка, это значение мощности шумов довольно близко к P_0 . При усреднении за 5—6 циклов $P_{ш. ср}$ становится еще ближе к P_0 и для надежного обнаружения целей оказывается достаточным выполнить условие

$$(P_n)_{мин} \approx 1,5P_0. \quad (4)$$

Увеличение числа усредняемых циклов существенного выигрыша дать не может, так как при $n \rightarrow \infty P_{ш. ср} \rightarrow P_0$, а $(P_n)_{мин}$ всегда должно быть больше P_0 . Сказанное поясняет, почему $n_{мин}$ должно быть равно 5—6.

Если выделение сигнала на фоне шумов осуществляется не визуально, по индикатору, а, например, при помощи счетной машины, то оказывается возможным уменьшить $n_{мин}$ до 1—2, т. е. в максимальной степени сократить период обзора.

ТОЧНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЯ И РАЗРЕШАЮЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ПО УГЛОВЫМ КООРДИНАТАМ

Измерение направления на цель часто осуществляется по методу максимума. Сущность этого метода состоит в том, что направление на цель определяется по положению ан-

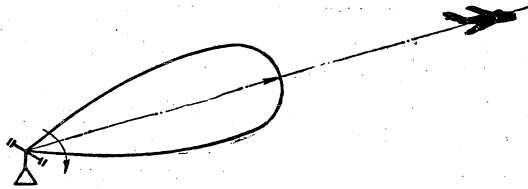


Рис. 6. Пеленгация цели максимумом диаграммы направленности

тенны в тот момент, когда на цель направлен максимум диаграммы направленности (рис. 6). Если в радиолокационной станции имеется индикатор с амплитудной отметкой, то пеленг отсчитывается в момент наибольшей амплитуды

10

отметки (рис. 7, а), а при индикаторе с яркостной отметкой пеленг определяется по середине отметки (рис. 7, б) с помощью вспомогательного визирного устройства.

Измерение координат по методу максимума характеризуется относительно низкой точностью, так как вблизи максимума диаграмма направленности имеет малую кривизну (см. рис. 6) и точно определить момент направления на цель именно максимума диаграммы направленности (при амплитудной отметке) или точно определить середину ярко-

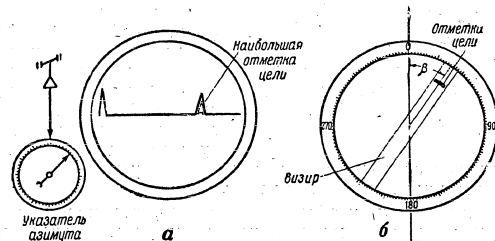


Рис. 7. Индикация при измерении угловых координат по методу максимума:

а — при амплитудной отметке; б — при яркостной отметке

стой отметки не представляется возможным. Приблизительно можно считать, что погрешность измерения угловой координаты по методу максимума составляет 20—25% угла раствора диаграммы направленности. Если, например, угол раствора диаграммы направленности равен 5° , то среднее значение ошибки измерения угловой координаты составит приблизительно 1° . В режиме поиска целей такая ошибка в определении угловых координат вполне допустима. Если же перед радиолокационной станцией ставится задача обеспечения прицеливания при стрельбе по движущейся цели, то возникает необходимость в гораздо более высокой точности определения угловых координат.

Часто точность измерения углов характеризуют в тысячных долях дальности, т. е. выражают угол через отношение стягивающей его хорды r (рис. 8) к образующей L . Считая, что при малом угле стягивающая его хорда r и дуга l приблизительно равны друг другу, можно перейти от оценки

8 Зак. 1337

11

угла в тысячных долях дальности ($\alpha_{т. д}$) к оценке в градусах (α°):

$$\alpha^\circ = \alpha_{т. д} \cdot 57,3. \quad (5)$$

К примеру, угол, составляющий $\alpha_{т. д} = 0,005$, равен в градусном исчислении приблизительно 18'.

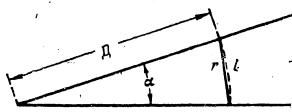


Рис. 8. Определение угла α через отношение $\frac{r}{D}$

Для решения задачи прицеливания (например, при стрельбе с земли по самолету применительно к станции SCR-584) среднее значение ошибки определения угловых координат целей не должно превышать 1,5—2,0 тысячных дальности, что соответствует приблизительно 0,1°.

Обеспечить подобную точность измерения углов при пеленге по максимуму практически невозможно.

К сказанному необходимо добавить, что при пеленгации по максимуму точность измерения угловых координат зависит от характера движения диаграммы направленности. Эту зависимость можно пояснить на примере упоминавшегося ранее зигзагообразного обзора. Допустим, что центр сечения диаграммы направленности антенны перемещается по ломаной линии AB (см. рис. 3). При этом азимут целей измеряется точнее, чем угол места. Объясняется это тем, что в азимутальном направлении диаграмма перемещается плавно, а по углу места — скачками.

Проследим, как осуществляется указание угловых координат целей на индикаторе типа азимут — угол места. Во время обзора траектория электронного луча на экране индикатора изображается ломаной линией ab (рис. 9). Если цель находится, например, в точке I (см. рис. 3), то она будет облучена при перемещении диаграммы направленности по участку траектории $ВГ$. Отметка I (см. рис. 9) этой

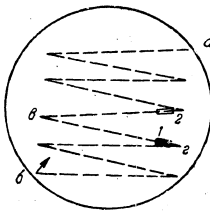


Рис. 9. Отсчет угловых координат целей на индикаторе азимут — угол места

цели окажется расположенной на участке $вг$ траектории электронного луча индикатора. Точность измерения азимута определяется точностью отсчета середины отметки I . В определении же угла места цели вкрадывается дополнительная ошибка $\Delta\epsilon$ (см. рис. 3), возникающая потому, что электронный луч, так же как и диаграмма направленности, перемещается в вертикальном направлении скачками: он может быть расположен либо в точке 1 (см. рис. 9), либо в точке 2 , а промежуточных положений занимать не может.

В тех случаях когда нужно измерять направление на цель с весьма высокой точностью, применяют метод равносигнальной зоны. Сущность метода, как известно, состоит в том, что перемещением диаграммы направленности создается очень узкая равносигнальная зона, характеризующаяся тем, что от попавшей в нее цели при любом положении диаграммы направленности принимаемые отраженные сигналы равны по амплитуде. Для определения направления на цель поворачивают антенну до тех пор, пока цель не окажется в равносигнальной зоне.

Равносигнальную зону можно направить на цель с высокой точностью. Ориентировочно можно считать, что при определении угловых координат методом равносигнальной зоны погрешность составляет 2—3% от угла раствора диаграммы направленности. Следует заметить, что измерение направления по методу равносигнальной зоны требует значительно большего времени, чем измерение по методу максимума.

Указанные соображения должны быть приняты во внимание при построении системы обзора радиолокационной станции.

Разрешающая способность станции по угловым координатам зависит как от угла раствора диаграммы направленности антенны в соответствующей плоскости, так и от размеров пятна на экране индикатора, выраженных в угловых единицах. В большинстве случаев раствор диаграммы направленности значительно превышает угловые размеры пятна, и поэтому можно считать, что разрешающая способность станции определяется шириной диаграммы направленности. Исключение составляет центральная часть индикатора кругового обзора, в пределах которой размер пятна в угловых единицах превышает угол раствора диаграммы направленности.

ТАКТИЧЕСКИЕ ТРЕБОВАНИЯ К ПЕРИОДУ ОБЗОРА

При проектировании радиолокационных станций стремятся по возможности уменьшить их период обзора. Связано это с тем, что в подавляющем большинстве случаев обнаруживаемые цели перемещаются относительно радиолокационной станции и, следовательно, за период обзора их относительное положение изменяется.

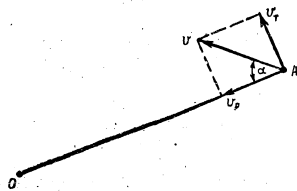


Рис. 10. Перемещение цели относительно радиолокационной станции

Пусть в точке O (рис. 10) расположена радиолокационная станция, а в точке A — цель, перемещающаяся со скоростью v . Направление перемещения составляет угол α с направлением на радиолокационную станцию. Скорость перемещения v можно разложить на две составляющие. Одна из них (v_r) совпадает по направлению с AO и характеризует скорость изменения дальности цели. Другая (v_α) перпендикулярна к AO и характеризует скорость изменения азимута цели. За период обзора дальность цели изменится на величину

$$\Delta D = v_r T_{\text{обз}}, \quad (6)$$

а азимут — на величину

$$\Delta \beta \approx \frac{v_\alpha T_{\text{обз}}}{D} 57,3, \quad (7)$$

где

$$v_r = v \cos \alpha,$$

$$v_\alpha = v \sin \alpha.$$

Изменения координат целей целесообразно сравнивать с размерами отметки на экране индикатора, выраженными в единицах шкалы дальности и азимута. Положение отметки движущейся цели на экране индикатора непрерывно изменяется. Если перемещения цели за период обзора (ΔD и $\Delta \beta$) меньше соответствующих размеров отметки, то последняя плавно перемещается по экрану; в противном случае отметка перемещается «скачками».

14

В качестве примера рассмотрим перемещение отметок целей на экране индикатора кругового обзора наземной радиолокационной станции обнаружения самолетов AN/CPS-6, дальность действия которой 300 км, угол раствора диаграммы направленности в горизонтальной плоскости $1,5^\circ$, период обзора 10 сек и длительность импульса 1 мксек.

Прежде всего оценим размеры отметки цели на экране индикатора в единицах шкалы. Известно, что в электронно-лучевых трубках с магнитным управлением удается уменьшить диаметр рисующего отметку пятна (d_n) приблизительно в 300 раз по сравнению с диаметром трубки. Это значит, что если по диаметру трубки ($d_{\text{тр}}$) укладывается D км, то цена пятна в масштабе шкалы дальности равна $\frac{D}{300}$ км.

В рассматриваемом примере по радиусу трубки должно укладываться 300 км или 600 км по диаметру. Следовательно, цена пятна равна 2 км. Так как длительность излучаемых импульсов станции равна 1 мксек, что соответствует протяженности по дальности 150 м, то размер отметки по дальности определяется ценой пятна.

Для периферийной части экрана, длина окружности которой равна приблизительно $\pi d_{\text{тр}}$, можно записать:

$$P^\circ = \frac{360^\circ d_n}{\pi d_{\text{тр}}}$$

Но так как $\frac{d_n}{d_{\text{тр}}} = 300$, то цена пятна в градусах

$$P^\circ \approx \frac{360^\circ}{\pi \cdot 300} = 0,38^\circ. \quad (8)$$

Ввиду того что угол раствора диаграммы направленности станции значительно больше цены пятна в градусах, он и определяет угловой размер отметки цели. Таким образом, применительно к данному примеру отметка цели имеет следующие размеры: по дальности 2 км и по азимуту $1,5^\circ$.

Если самолет движется прямо на радиолокационную станцию со скоростью v , то его радиальное перемещение за период обзора будет равно $v T_{\text{обз}}$. Для плавного перемещения отметки по экрану должно быть выполнено условие

$$v < \frac{\text{размер отметки по дальности}}{\text{период обзора}} = \frac{2 \text{ км}}{10 \text{ сек}} = 0,2 \frac{\text{км}}{\text{сек}}$$

На рис. 11 показана примерная картина перемещения отметки цели 1 при скорости полета самолета $v = 0,1$ км/сек.

15

(360 км/ч). Если $v > 0,2$ км/сек, то отметка будет «скакать» по экрану. На том же рис. 11 показано перемещение отметки цели 2, скорость которой $v = 0,42$ км/сек (1500 км/ч). Аналогичным образом можно рассмотреть изменение азимутального положения отметки.

«Скачки» отметок ухудшают условия наблюдения целей, снижают точность определения их координат и усложняют ориентировку операторов, особенно, если одновременно ведется наблюдение за многими целями. Естественно было бы попытаться уменьшить период обзора настолько, чтобы в любом случае отметки перемещались плавно.

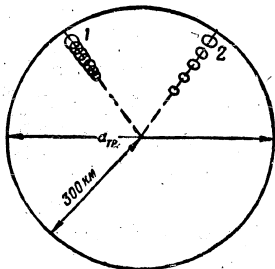


Рис. 11. Перемещение отметки цели по экрану индикатора

Однако, как будет показано ниже, уменьшение периода обзора приводит к ухудшению точности измерения угловых координат и снижению разрешающей способности по угловым координатам, поэтому плавность перемещения отметок цели достигается путем предельного сокращения периода обзора только в тех радиолокационных станциях, которые иначе не обеспечивают выполнения предъявляемых к ним требований (станции разведки минометных батарей, самолетные станции перехвата, радиолокационные бомбоприцелы и т. п.). В других радиолокационных станциях можно допустить «скачки» отметок, превышающие в 1,5—3 раза соответствующие размеры самих отметок.

В соответствии со сказанным можно указать следующее соотношение для определения допустимого значения периода обзора станции:

$$T_{\text{обз}} \leq p \frac{O_{\text{ц}}}{v_{\text{макс}}}, \quad (9)$$

где $O_{\text{ц}}$ — линейный размер отметки цели;
 p — коэффициент, изменяющийся от $1/3$ до 3 в зависимости от тактического назначения станции;
 $v_{\text{макс}}$ — максимальная скорость движения цели.

Выше указывалось, что цена отметки в угловых единицах и в единицах дальности зависит от выбранных шкал угловых координат и дальности на экране индикатора. В свою очередь шкалы определяются размерами той области, которую должна просматривать радиолокационная станция, т. е. величинами $D_{\text{макс}}$, θ_3 и θ_c . Таким образом, если заданы основные тактические данные радиолокационной станции, указано ее тактическое назначение и имеются сведения о возможных скоростях движения целей, то по формуле (9) можно вычислить значение периода обзора, которое с точки зрения эксплуатационного использования станции является максимально допустимым.

МИНИМАЛЬНЫЙ ПЕРИОД ОБЗОРА

Теперь рассмотрим, какими техническими характеристиками станции определяется минимально возможный период обзора заданной области пространства.

Пусть требуется осуществлять обзор области, ограниченной величинами $D_{\text{макс}}$, θ_3 и θ_c . Предположим, что обзор осуществляется идеализированной диаграммой направленности, представляющей собой пирамиду с угловыми размерами образующих Φ_3 и Φ_c (рис. 12). Будем считать, что

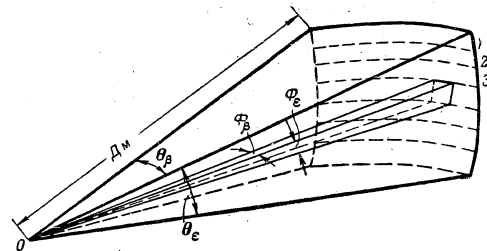


Рис. 12. Обзор заданной области пространства идеализированной диаграммой направленности

диаграмма направленности движется в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью Ω , например, слева направо в пределах угла θ_3 по участку 1 траектории. Дойдя до конца этого участка, она мгновенно опускается по вертикали на величину угла раствора Φ_c на участок 2 траек-

тории и с той же угловой скоростью Ω движется по нему справа налево и т. д.

Учитывая, что на обнаруживаемую цель должно попасть не менее $n_{\text{мин}}$ импульсов и что период повторения импульсов равен $T_{\text{п}}$, получим следующую формулу для определения минимального времени облучения цели:

$$(T_{\text{обл}})_{\text{мин}} = n_{\text{мин}} T_{\text{п}}. \quad (10)$$

Время $t_{\text{р}}$, необходимое для просмотра сектора $\theta_{\text{р}}$, будет в $\frac{\theta_{\text{р}}}{\Phi_{\text{з}}}$ раз больше времени облучения цели, т. е.

$$t_{\text{р}} = \frac{n_{\text{мин}} T_{\text{п}} \theta_{\text{р}}}{\Phi_{\text{з}}}. \quad (11)$$

Период же обзора заданной области будет в $\frac{\theta_{\text{з}}}{\Phi_{\text{з}}}$ раз больше времени $t_{\text{р}}$:

$$T_{\text{обз}} = \frac{n_{\text{мин}} T_{\text{п}} \theta_{\text{р}} \theta_{\text{з}}}{\Phi_{\text{з}} \Phi_{\text{з}}}. \quad (12)$$

Период повторения импульсов определяется максимальной дальностью действия радиолокационной станции

$$T_{\text{п}} = \kappa \frac{2D_{\text{макс}}}{c}, \quad (13)$$

где c — скорость распространения радиоволн;
 κ — коэффициент запаса, приблизительно равный 1,25.
 Подставив значение $T_{\text{п}}$ в формулу (12), окончательно получим

$$T_{\text{обз}} = 2,5 \frac{n_{\text{мин}} D_{\text{макс}} \theta_{\text{р}} \theta_{\text{з}}}{c \Phi_{\text{з}} \Phi_{\text{з}}}. \quad (14)$$

Приведенная формула (14) останется справедливой (с учетом отмеченной идеализации) для любой траектории движения диаграммы направленности в пределах заданной области пространства.

В формуле (14) величины $D_{\text{макс}}$, $\theta_{\text{з}}$, $\theta_{\text{р}}$, $n_{\text{мин}}$ и c являются заданными. Как видно из этой формулы, один из путей уменьшения периода обзора — увеличение произведения углов раствора диаграммы направленности в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Можно либо расширять диаграмму направленности в обоих направлениях, оставляя ее более или менее симметричной, либо сужать в одной плоскости, соответственно расширяя в другой. Но любое рас-

ширение диаграммы направленности связано с ухудшением точности определения угловых координат и разрешающей способности, а также с уменьшением дальности действия радиолокационной станции¹. Чтобы получить требуемую точность определения угловых координат, разрешающую способность и дальность действия радиолокационных станций, следует, наоборот, стремиться уменьшить угол раствора диаграммы направленности. Создается противоречие, которое можно правильно разрешить лишь с учетом специфических особенностей радиолокационных станций того или иного типа.

Второй возможный путь уменьшения периода обзора — сокращение необходимого времени облучения цели. При импульсном методе работы это связано с уменьшением $n_{\text{мин}}$, что может быть реализовано лишь в радиолокационных станциях с автоматическим электронным съемом данных о координатах целей. При использовании метода непрерывного излучения этот путь оказывается более перспективным, ибо информация от цели поступает непрерывно, а не так, как в импульсных станциях — очень короткими пакетами $\tau_{\text{п}}$ через большие интервалы времени ($T_{\text{п}}$).

Разберем два типичных примера подхода к выбору характеристик системы обзора радиолокационных станций: наземной станции обнаружения и наведения AN/CPS-6 и самолетной станции перехвата и прицеливания MG-4.

Допустим, что в соответствии с тактическими требованиями наземная станция обнаружения и наведения должна иметь дальность не менее 300 км и просматривать секторы по азимуту 360° и по углу места не менее 40—45°. Кроме того, необходимо подчеркнуть, что у подобной станции должны быть высокая точность измерения азимута и высокая разрешающая способность по азимуту. Требования же в отношении точности измерения и разрешающей способности по углу места могут быть резко снижены, так как в составе аппаратуры пункта наведения можно иметь специальные радиолокационные станции измерения высоты целей с высокой разрешающей способностью по углу места. Поэтому в рассматриваемой станции целесообразно применить для обзора плоскую диаграмму направленности, угол раствора которой в вертикальной плоскости равен сектору обзора по углу места, а угол раствора в горизонтальной плоскости минимальный.

¹ См. брошюру К. Н. Трофимова «Радиолокация», Воениздат, 1957 г.

Приняв во внимание высказанные соображения и подставив числовые значения величин в формулу (14), получим

$$T_{\text{обз}}\Phi_3 = 4,5 \text{ сек} \cdot \text{град.}$$

Это значит, что при $\Phi_3 = 0,75^\circ$ период обзора не должен быть менее 6 сек. Такие значения величин вполне удовлетворяют тактическим требованиям к станции как в отношении разрешающей способности по азимуту, так и в отношении удобства наблюдения отметок целей.

Выше были рассчитаны размеры отметки в единицах шкалы дальности и азимута приблизительно для такой же станции. В частности, было получено, что размер отметки по шкале дальности соответствует 2 км. Считая период обзора равным 6 сек и наибольшую скорость полета самолета в направлении на радиолокационную станцию равной 1500 км/ч, получим, что смещение отметки за период обзора не превышает 2,5 км. Это находится в полном соответствии с формулой (9), так как для станции обнаружения и наведения коэффициент p может достигать значений 2—3.

При выборе характеристик системы обзора самолетной станции перехвата и прицеливания должен быть применен иной подход. Прежде всего следует заметить, что диаграмма направленности антенны станции должна быть симметричной, так как на самолете-истребителе установка двух радиолокационных станций или даже двух раздельных антенн, используемых для решения задач обнаружения и прицеливания, нецелесообразна. Углы раствора диаграммы направленности должны быть минимальными для удовлетворения весьма высоких требований как в отношении точности измерения угловых координат, так и в отношении разрешающей способности.

Для обеспечения высокой точности маневрирования истребителя при сближении с целью с использованием индикатора бортовой станции необходимо, чтобы отметки целей плавно перемещались по экрану индикатора; коэффициент p в формуле (9) в этом случае не должен быть больше единицы. Наибольшая скорость перемещения цели для самолетной станции должна приниматься равной приблизительно удвоенному значению скорости полета самолетов противника, так как встреча с целью возможна и на перпендикулярных и на встречно-пересекающихся курсах. Указанные факторы заставляют стремиться к максимальному сокращению периода обзора в самолетных станциях перехвата и прицеливания.

20

Относительно размеров зоны, просматриваемой самолетной станцией перехвата и прицеливания, можно сказать следующее. Наиболее важным тактическим параметром является дальность действия; она должна быть по возможности увеличена. Примем для дальнейших расчетов максимальную дальность действия равной 20 км. Очень важно расширить угол обзора станции по азимуту, так как это связано, во-первых, с возможностью компенсации ошибок наземного комплекта оборудования наведения и, во-вторых, с возможностью атаки целей, совершающих маневр; будем считать угол обзора по азимуту равным 90° . Угол обзора в вертикальной плоскости может быть выбран относительно малым, так как ошибки в определении высоты целей невелики и маневрирование целей по высоте затруднено; допустим, что θ_0 равно 15° .

Для шкалы дальности 20 км на экране индикатора дальность — азимут (в котором для шкалы дальности используется примерно 70% диаметра экрана) цена пятна равна приблизительно 100 м. Учитывая, что длительность излучаемых импульсов равна приблизительно 1 мксек (что соответствует 150 м по дальности), можно считать, что цена отметки цели по дальности составляет 250 м. Тогда в соответствии с формулой (9) получим (считая $p=1$)

$$T_{\text{обз}} < \frac{250 \text{ м}}{(v_{\text{обл}})_{\text{макс}}}, \quad (15)$$

где $(v_{\text{обл}})_{\text{макс}}$ — максимальная скорость сближения истребителя с целью.

При атаках целей из задней полусферы и при $(v_{\text{обл}})_{\text{макс}} = 750 \text{ км/ч}$ период обзора станции должен быть менее 1,5 сек. Подставив все необходимые значения величин в формулу (14), получим, что угол раствора диаграммы направленности в обеих плоскостях может быть выбран равным $0,95^\circ$. Однако при допустимых на самолете-истребителе размерах антенн и при тех длинах волн ($\lambda \approx 3 \text{ см}$), которые используются в большинстве случаев для самолетных станций перехвата, получить $\Phi = 0,95^\circ$ не представляется возможным. Можно создать диаграмму направленности с углом раствора 3—4°. Если угол раствора диаграммы направленности увеличить до 3—4°, то период обзора антенны можно уменьшить приблизительно в 9—16 раз и надежность обзора от этого не ухудшится. Но такое уменьшение возможно, так как при использовании механической системы

4*

21

поворота антенны минимальное значение периода обзора измеряется единицами секунд.

В заключение данного раздела необходимо указать еще один путь в конструировании радиолокационных станций, идя которым можно и период обзора сделать малым и получить достаточно хорошую разрешающую способность.

Этот путь заключается в использовании в одной радиолокационной станции нескольких диаграмм направленности, одновременно просматривающих пространство. Диаграммы направленности создаются на различных частотах, поэтому такие радиолокационные станции называют многоканальными. В простейшем случае каждая диаграмма направленности используется для просмотра только части всей заданной области пространства (рис. 13); при заданном значении

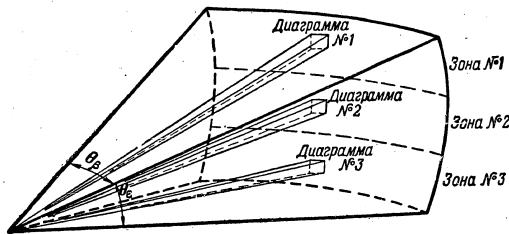


Рис. 13. Обзор заданной области пространства тремя диаграммами направленности одновременно

периода обзора углы раствора каждой из «частных» диаграмм направленности будут соответственно меньше углов раствора одиночной диаграммы направленности, просматривающей ту же область. При рассмотрении методов обзора пространства будут приведены и другие примеры многоканальных радиолокационных станций.

ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ ПЕРИОД ОБЗОРА

Если считать заданными размеры просматриваемой области пространства и углы раствора диаграммы направленности, то период обзора реальной радиолокационной станции в большинстве случаев существенно превысит то его

22

значение, которое получится в результате вычислений по формуле (14). Объясняется это следующими причинами:

1. В рассмотренном идеализированном обзоре шаг траектории равен углу раствора диаграммы направленности, а при реальном обзоре шаг всегда меньше угла раствора.

Сечение реальной диаграммы направленности представляет собой не прямоугольник, а круг, эллипс или овал. Чтобы не было пропусков целей при обзоре, шаг траекто-

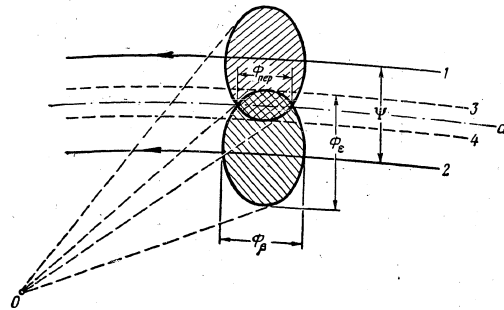


Рис. 14. Наложение сечений диаграммы направленности на смежных участках траектории

рии диаграммы направленности должен быть меньше ее угла раствора и на смежных участках траектории сечения диаграммы должны накладываться одно на другое. На рис. 14 показаны участки 1 и 2 траектории движения диаграммы направленности. Шаг перемещения диаграммы направленности по вертикали (ψ) должен быть меньше угла раствора диаграммы по вертикали (ϕ_0). В реальных системах $\frac{\psi}{\phi_0} = 0,7 \div 0,8$.

2. В идеализированной системе обзора при облучении цели, находящейся в любой точке заданной области, на нее попадает одинаковое количество импульсов, равное минимально необходимому их числу, а в реальной системе в некоторых точках пространства на цель попадает значительно большее число импульсов, чем это необходимо для работы станции.

23

На рис. 14 показано, что угол пересечения между собой сечений диаграммы направленности (или угол наложения) равен $\Phi_{пер}$. Этот угол меньше угла раствора диаграммы направленности в горизонтальной плоскости. Практически отношение $\frac{\Phi_{пер}}{\Phi_p}$ также выбирают равным приблизительно 0,7—0,8.

Цели, расположенные в зоне наложения сечений диаграммы направленности (т. е. между линиями 3 и 4), облучаются дважды: первый раз при перемещении сечения диаграммы направленности по участку 1 и второй раз при перемещении сечения по участку 2 траектории. Если в станции используется индикатор типа азимут — угол места, то каждому облучению соответствует свое положение пятна на экране индикатора (рис. 15). При этом отметка цели или раздвоится, или (если оба пятна сольются в одно) ее размер по углу места возрастет.

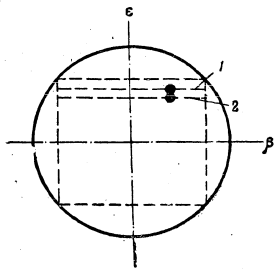


Рис. 15. Отметка на экране индикатора при повторном облучении цели на смежных участках траектории диаграммы направленности

Наблюдаемость каждой составляющей отметки цели определяется числом импульсов, попадающих на цель при отдельном облучении. Наименьшее число импульсов при каждом облучении попадает на цели, расположенные вдоль линии a (см. рис. 14). Так как условием уверенной индикации цели является попадание на нее не менее $n_{мин}$ импульсов станции, то это условие должно быть выполнено при каждом облучении и для целей, расположенных вдоль линии a . Но тогда на цели, расположенные в других местах (например, на линиях 1 и 2), попадет большее количество импульсов, что, вообще говоря, совершенно не требуется для нормальной работы станции и приводит лишь к увеличению ее периода обзора.

3. Предполагается, что в идеализированной системе диаграмма направленности перемещается с постоянной угловой скоростью, а в реальных системах иногда приходится прибегать к замедлению движения угловой скорости перемеще-

Необходимость изменения угловой скорости перемеще-

ния диаграммы направленности можно пояснить на таком примере. Пусть осуществляется зигзагообразный обзор пространства (рис. 16). В конце каждого из горизонтальных участков траектории (1, 2, 3 и т. д.) скорость перемещения должна снижаться до нуля, а ее направление — изменяться. Это обстоятельство и вызовет увеличение периода обзора.

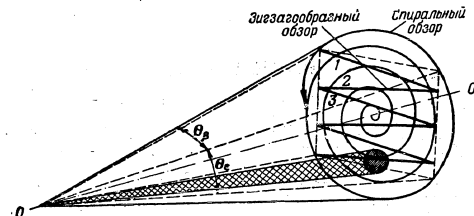


Рис. 16. Обзор заданной области пространства ($\theta_\phi, \theta_\epsilon$) различными методами

4. В расчете предполагалось, что диаграмма направленности перемещается точно в пределах заданных секторов θ_ϕ и θ_ϵ , тогда как в реальной системе диаграмма может выходить за эти пределы.

На рис. 16 показано, что для просмотра заданной области можно применить спиральный обзор, при котором диаграмма направленности будет двигаться по спирали вокруг осевой линии OO' . Угловая скорость диаграммы направленности при спиральном обзоре может оставаться постоянной (хотя этого обычно не бывает), но размеры просматриваемой зоны обязательно превысят требуемые, что опять-таки приведет к увеличению периода обзора.

Для сравнительной оценки периодов обзора различного вида целесообразно ввести понятие об относительном периоде обзора q , равном отношению действительного периода обзора к теоретически необходимому для просмотра заданной области:

$$q = \frac{T_{обз}}{(T_{обз})_{мин}} \quad (16)$$

Как будет показано ниже, значения q могут изменяться в довольно широких пределах (от 1 до 2,5—3) в зависимости от вида обзора.

ВИДЫ ОБЗОРА КРУГОВОЙ ОБЗОР

Простейшим видом обзора является круговой обзор, осуществляемый плоской диаграммой направленности, вращающейся вокруг неподвижной (обычно вертикальной) оси. Круговой обзор — единственный вид обзора, у которого относительный период обзора равен единице, т. е. реальный период обзора может быть сделан равным теоретически необходимому. Происходит это потому, что диаграмма перемещается только в одной плоскости (сектор обзора в вертикальной плоскости равен углу раствора диаграммы направленности), угловая скорость перемещения постоянна, а размеры просматриваемой области точно соответствуют заданным ($\theta_0 = 360^\circ$, $\theta_s = \Phi_0$).

Круговой обзор плоской диаграммой направленности применяется в тех радиолокационных станциях, которые предназначены для обнаружения целей в любом направлении. Этот вид обзора позволяет получить плоскую картину расположения отражающих объектов в просматриваемом пространстве. При круговом обзоре обеспечиваются высокая разрешающая способность по дальности и азимуту и высокая точность измерения дальности и азимута. В соответствии со сказанным такой вид обзора целесообразно применять в наземных, корабельных и самолетных станциях обнаружения, в станциях наведения истребителей, в самолетных радиолокационных бомбоприцелах. На рис. 17 показан круговой обзор земной поверхности самолетной панорамной радиолокационной станцией; плоская диаграмма направленности вращается вокруг вертикальной оси OO' .

При необходимости для измерения высоты цели можно использовать специальные радиолокационные станции — высотометры. Так часто и делают. Но можно измерить все три координаты обнаруженной цели и при круговом обзоре плоской диаграммой.

26

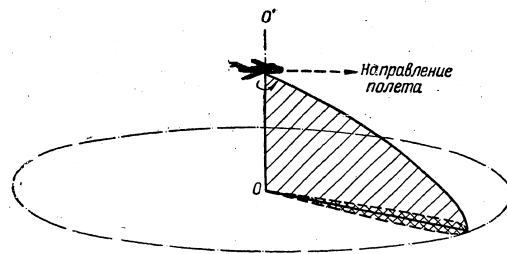


Рис. 17. Круговой обзор самолетной панорамной радиолокационной станцией

Представим себе, что антенная система радиолокационной станции имеет две плоские диаграммы направленности (рис. 18), одна из которых (A) расположена вертикально, а другая (B) наклонена к первой под углом 45° . При вра-

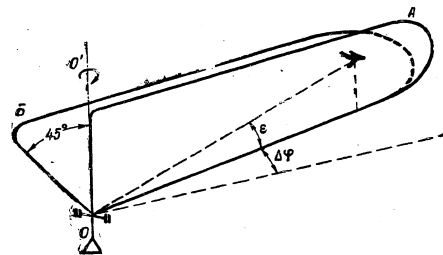


Рис. 18. Обзор V-образной диаграммой направленности

щения антенной системы обе диаграммы вращаются вокруг вертикальной оси OO' , оставаясь неподвижными одна относительно другой. Такая диаграмма направленности называется V-образной, а сам обзор — обзором V-образной диаграммой направленности. Каждая обнаруженная цель облучается дважды: первый раз вертикальной диаграммой A и второй раз наклонной диаграммой B . При первом облучении измеряются дальность и азимут цели, а при втором

5 Зак. 1337

27

определяется ее высота. Можно показать, что угол $\Delta\varphi$, на который поворачивается антенна от момента пересечения цели вертикальной диаграммой до момента пересечения ее наклонной диаграммой, связан с высотой полета цели следующим образом¹:

$$H = \frac{D \sin \Delta\varphi}{\sqrt{1 + \sin^2 \Delta\varphi}}. \quad (17)$$

Зная D и $\Delta\varphi$, при помощи номограмм, рассчитанных по формуле (17), или при помощи специального индикатора можно определить высоту цели.

Радиолокационная станция с V-образной диаграммой направленности является многоканальной, так как диаграммы A и B должны создаваться на двух различных частотах (или даже на нескольких частотах). Именно переход к многоканальности и дал возможность улучшить тактические характеристики станции.

СЕКТОРНЫЙ ОБЗОР

При секторном обзоре плоская диаграмма перемещается в пределах заданного сектора θ , который, как правило, значительно меньше 360° . Секторный обзор, так же как и круговой, позволяет определять только две координаты цели: дальность и одну из угловых координат. Секторный обзор плоским лучом целесообразно применять, если, во-первых, ожидается появление целей лишь с определенных направлений, во-вторых, достаточно измерить лишь одну угловую координату целей и, в-третьих, можно удовлетвориться плоской картиной расположения целей. Поэтому секторный обзор применяется в наземных радиолокационных станциях измерения высоты полета самолетов (угол раствора диаграммы направленности в вертикальной плоскости уменьшается до минимума, а угол раствора в горизонтальной плоскости равен сектору обзора), в артиллерийских станциях разведки наземных целей и корректировки артиллерийского огня, в станциях береговой обороны, в самолетных радиолокационных бомбприцелах (в режиме прицеливания) и т. п. При секторном обзоре относительный период

¹ Приводимая формула поясняет лишь принцип определения высоты цели и не учитывает влияния кривизны земли, а также применяемого на практике постоянного углового сдвига между диаграммами направленности.

может быть существенно больше единицы, так как этот вид обзора в большинстве случаев связан с реверсированием движения диаграммы направленности.

ОБЗОРЫ ИГОЛЬЧАТОЙ ДИАГРАММОЙ

Основными видами обзоров игольчатой диаграммой направленности являются: зигзагообразный, винтовой, спиральный, поступательно-конический, вращательно-конический и конический.

При обзоре пространства игольчатая диаграмма должна перемещаться сложным образом в обеих плоскостях (вертикальной и горизонтальной). Это сложное движение удобно разложить на два простых: переносное и относительное. Переносным называется такое движение, которое совершается по отношению к неподвижной опоре, а относительным — движение по отношению к опоре, перемещающейся при обзоре. На рис. 19 изображена кинематическая

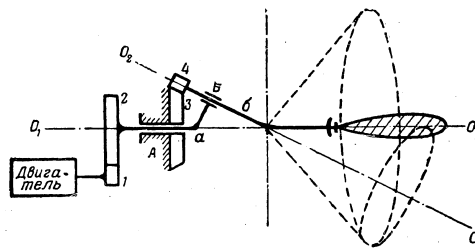


Рис. 19. Кинематическая схема системы управления движением антенны:
1—4 — шестерни привода антенны; А — неподвижная опора; В — подвижная опора

схема системы управления движением антенны при обзоре, при помощи которой можно объяснить смысл понятий переносного и относительного движений.

Перемещение антенны осуществляется электродвигателем, с осью которого жестко связана шестерня 1, передающая движение шестерне 2. Шестерня 2 в свою очередь жестко связана с изогнутым рычагом a . При работе двигателя рычаг a приводится во вращательное движение вокруг

оси O_1O_1 . Это движение называется переносным, так как опора A , относительно которой оно осуществляется, неподвижна.

При своем движении рычаг a перемещает опору B изогнутого рычага b , на конце которого укреплена антенна. На противоположном конце рычага b укреплена шестерня 4, катающаяся по неподвижной шестерне 3. Последнее обстоятельство приводит к тому, что при вращении рычага a рычаг b не только перемещается вокруг оси O_1O_1 , но и вращается вокруг оси O_2O_2 . Вращение рычага b вокруг оси O_2O_2 называется относительным движением в соответствии с данным выше определением.

Соотношение угловых скоростей переносного и относительного движений определяется выбором передаточных чисел обеих передач, т. е. $\frac{n_1}{n_2}$ и $\frac{n_3}{n_4}$, где n_1, n_2, n_3 и n_4 — числа зубьев шестерен 1, 2, 3 и 4.

В рассмотренной системе ось диаграммы направленности вращается по конусу вокруг оси O_2O_2 , а этот конус в свою очередь вращается вокруг оси O_1O_1 .

Виды обзора игольчатой диаграммой направленности определяются, во-первых, типом переносного и относительного движений (например, поступательное, колебательное, вращательное и т. д.) и, во-вторых, соотношением угловых скоростей переносного и относительного движений; одно из них всегда характеризуется значительно большей скоростью, чем другое.

При описании различных видов обзора (чтобы не усложнять вопроса) предполагается, что перемещение диаграммы направленности осуществляется поворотом всей антенны в целом. В последнем разделе брошюры будут пояснены те методы управления положением диаграммы направленности, которые основываются на перемещении не всей антенны целиком, а ее отдельных элементов.

Зигзагообразный обзор

При зигзагообразном обзоре как переносное, так и относительное движения носят колебательный характер. На рис. 20 изображена кинематическая схема, позволяющая требуемым образом перемещать антенну. На этом рисунке опора A неподвижна, и движение рычага a вокруг неподвижной оси O_1O_1 будет переносным. При том расположении осей, которое показано на рисунке, переносное движение обеспечивает поворот диаграммы направленности в го-

ризонтальной плоскости. Конец рычага a является опорой рычага b , жестко связанного с антенной. Рычаг b может поворачиваться вокруг оси O_2O_2 — это движение относительное. Относительное движение в данном случае обеспечивает перемещение диаграммы направленности в вертикальной плоскости.

Угол поворота диаграммы направленности, например в горизонтальной плоскости (ϑ), изменяется во времени по синусоидальному закону

$$\vartheta = \frac{\theta_0}{2} \sin 2\pi F_{\vartheta} t, \quad (18)$$

где F_{ϑ} — частота колебаний диаграммы направленности в горизонтальной плоскости.

Аналогичным образом можно описать движение диаграммы направленности в вертикальной плоскости.

Колебательный характер движения выбирается с целью уменьшения возникающих при изменении направления движения инерционных усилий в механизмах управления. В зависимости от того, какое движение имеет большую скорость, меняется вид траектории движения диаграммы направленности. При

скорости переносного движения, в несколько раз превышающей скорость движения относительного, траектория оси диаграммы направленности имеет вид, показанный на рис. 21, а; если же большей будет скорость относительного движения, то траектория может быть охарактеризована рис. 21, б. В первом случае измерение азимута при обзоре осуществляется точнее, чем измерение угла места, а во втором, наоборот, более точно измерится угол места.

Относительный период зигзагообразного обзора довольно велик (от 2 до 2,5). По величине относительного периода и

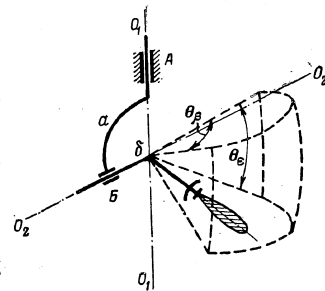


Рис. 20. Кинематическая схема зигзагообразного обзора

по величине инерционных усилий зигзагообразный обзор хуже винтового и спирального.

Зигзагообразный обзор целесообразно использовать в тех случаях, когда в процессе работы радиолокационной станции необходимо изменять секторы обзора в горизонтальной и вертикальной плоскостях независимо один от другого. Например, в станциях целеуказания и в станциях оружейной наводки различных типов в зависимости от точности

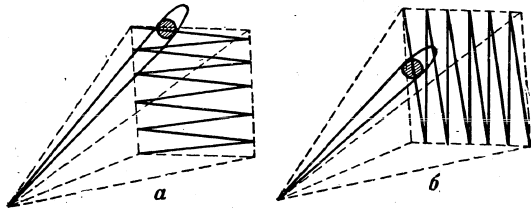


Рис. 21. Траектории движения диаграммы направленности при зигзагообразном обзоре:

а — скорость переносного движения больше скорости относительного движения; б — скорость переносного движения меньше скорости относительного движения

данных системы предварительного обнаружения целей и боевых порядков самолетов вражеской авиации секторы поиска могут изменяться в широких пределах.

Винтовой обзор

Кинематическая схема винтового обзора может быть такой же, как и зигзагообразного (см. рис. 20), но только теперь переносное движение вокруг оси O_1O_1 будет вращательным с постоянной угловой скоростью, относительное движение вокруг оси O_2O_2 остается колебательным. Скорость вращательного движения во много раз превышает скорость колебательного.

На рис. 22, а приведена траектория движения оси диаграммы направленности при винтовом обзоре и угле обзора в горизонтальной плоскости, равном 360° .

Если требуемый сектор обзора в горизонтальной плоскости (θ_p) значительно меньше 360° , то при помощи

одной антенны осуществлять винтовой обзор нецелесообразно, так как из каждого периода вращения антенны будет полезно использована только та его часть, которая соответствует повороту антенны на угол θ_p . Если сектор θ_p ра-

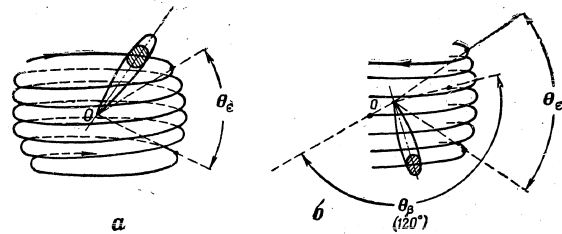


Рис. 22. Винтовой обзор:

а — сектор обзора по азимуту равен 360° ; б — сектор обзора по азимуту равен 120°

вен 180° или 120° , удобно использовать антенное устройство, состоящее из двух или трех антенн (рис. 23), направления максимального излучения которых смещены одно относительно другого в горизонтальной плоскости соответственно на 180° или 120° , а в вертикальной — на величину шага обзора по углу места. Каждая антенна излучает и принимает сигналы лишь в пределах угла θ_p . При непрерывном вращении антенного устройства происходит поочередное включение антенн,

что позволяет осуществить обзор без дополнительных потерь времени. Несмотря на то что в радиолокационной станции применяются три антенны, она остается одноканальной, так как в каждый данный момент работает только одна антенна. Траектория оси диаграммы направленности при обзоре в секторе 120° приведена на рис. 22, б.

Постоянство угловой ско-

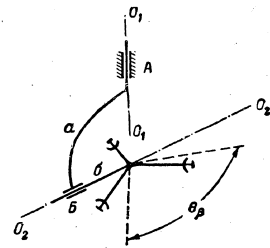


Рис. 23. Кинематическая схема винтового обзора с тремя антеннами (сектор обзора по азимуту 120°)

рости быстрого движения диаграммы направленности позволяет уменьшить инерционные нагрузки в механизмах привода (например, по сравнению с зигзагообразным обзором) и сократить относительный период обзора до 1,1—1,5.

Винтовой обзор используется в тех радиолокационных станциях, которые предназначены для одновременного измерения всех трех координат обнаруженных целей и, кроме того, обеспечивают или обнаружение целей с любого направления, или минимальный период обзора (например, наземные станции орудийной наводки и самолетные станции перехвата).

Спиральный обзор

При спиральном обзоре так же, как и при винтовом, переносное движение является вращательным, а относительное — колебательным, но несколько иная кинематическая схема приводит к изменению траектории движения диаграммы направленности.

Кинематическая схема спирального обзора изображена на рис. 24. Рычаг a с постоянной угловой скоростью вра-

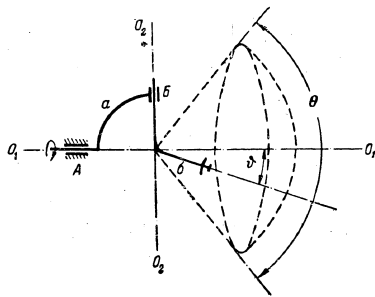


Рис. 24. Кинематическая схема спирального обзора

щается вокруг неподвижной оси O_1O_1 (опора A неподвижная, поэтому движение является переносным). В свою очередь рычаг b вместе с антенной перемещается вокруг вращающейся оси O_2O_2 (опора B подвижная, следовательно, движение относительное). Угол поворота θ рычага b вокруг

оси O_2O_2 изменяется во времени по синусоидальному закону:

$$\theta = \frac{\theta_0}{2} \sin 2\pi F_{\kappa} t, \quad (19)$$

где θ — сектор обзора;

F_{κ} — частота колебаний.

Характерной особенностью спирального обзора является симметрия зоны обзора, т. е. $\theta_1 = \theta_2 = \theta$.

Траектория диаграммы направленности при спиральном обзоре зависит от соотношения скоростей переносного и относительного движений (рис. 25). Практический интерес

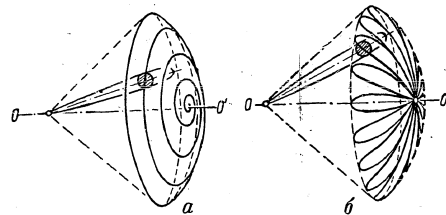


Рис. 25. Траектории движения диаграммы направленности при спиральном обзоре:

a — скорость переносного движения больше скорости относительного движения; b — скорость переносного движения меньше скорости относительного движения

представляет случай, когда скорость переносного движения больше скорости относительного, так как при этом получается небольшой период обзора.

Спиральный обзор просто осуществить — он позволяет легко изменять величину зоны обзора, а также быстро переходить от режима поиска целей к режиму их автоматического сопровождения по угловым координатам. Кроме того, постоянство угловой скорости наиболее быстрого движения способствует уменьшению инерционных усилий в механизме привода.

Серьезный недостаток спирального обзора — большое различие во времени облучения целей, расположенных в разных точках зоны обзора: если на периферии зоны время облучения цели равно минимально необходимому, то по мере приближения к оси OO' оно резко возрастает. Зона

спирального обзора может существенно превышать требуемую, особенно если угловые размеры требуемой зоны неодинаковы. Поэтому относительный период спирального обзора довольно велик (1,5—2,5).

Спиральный обзор находит применение в радиолокационных станциях прицеливания, предназначенных для поиска целей в относительно узком секторе (по данным станций обнаружения или целеуказания).

Поступательно-конический обзор

Если переносное движение сделать колебательным или возвратно-поступательным, а относительное — вращательным, то получится поступательно-конический обзор. Кинематическая схема поступательно-конического обзора изображена на рис. 26. Рычаг b , с которым связана антенна, вра-

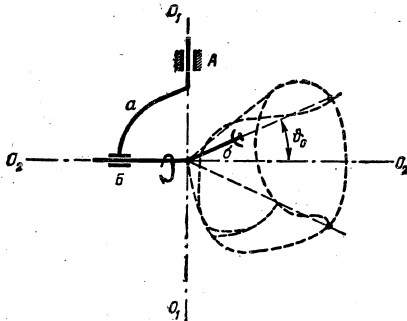


Рис. 26. Кинематическая схема поступательно-конического обзора

щается с постоянной скоростью вокруг оси O_2O_2 . При этом ось диаграммы направленности движется по конусу с половинным углом при вершине θ_0 . Рычаг a перемещается вокруг оси O_1O_1 и поворачивает ось O_2O_2 в горизонтальной плоскости на угол $\frac{\theta_s}{2} - \theta_0$ в обе стороны от оси зоны обзора. Скорость относительного движения выбирается во много раз большей скорости переносного. Соответствующая

траектория оси диаграммы направленности приведена на рис. 27. Угол обзора в вертикальной плоскости равен двойному значению угла отклонения оси антенны от оси вращения O_2O_2 , т. е. $\theta_s = 2\theta_0$.

Относительный период поступательно-конического обзора равен приблизительно 2.

Поступательно-конический обзор целесообразно применять для просмотра областей с большими существенно различающимися ($\theta_s > 2\theta_0$) угловыми размерами при необхо-

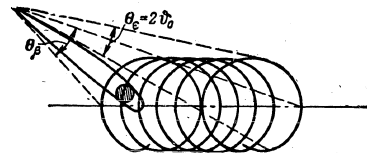


Рис. 27. Поступательно-конический обзор

димости последующего перехода к режиму конического обзора. Выше указывалось, что именно такие требования предъявляются к зоне обзора самолетной станции перехвата и прицеливания, поэтому в станциях подобного типа иногда применяют поступательно-конический обзор.

Вращательно-конический обзор

При вращательно-коническом обзоре как переносное, так и относительное движения являются вращательными. Кинематическая схема такого обзора приводилась на рис. 19. Скорость переносного движения (т. е. скорость вращения вокруг оси O_1O_1) выбирается значительно меньше скорости относительного движения (скорости вращения вокруг оси O_2O_2). Траектория оси диаграммы направленности изображена на рис. 28. Зона обзора получается симметричной с углом θ при вершине.

Многочкратное пересечение траекторий при вращательно-коническом обзоре приводит к серьезному увеличению периода обзора. Относительный период обзора равен приблизительно 5—6, в результате чего подобный обзор не находит себе в настоящее время применения.

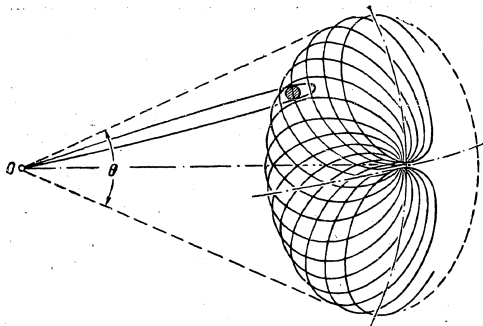


Рис. 28. Траектория движения оси диаграммы направленности при вращательно-коническом обзоре

Конический обзор

Конический обзор используется в радиолокационных станциях, имеющих режим прицеливания, для точной пеленгации целей. В коническом обзоре реализуется метод определения направления по равносигнальной зоне. Сущность

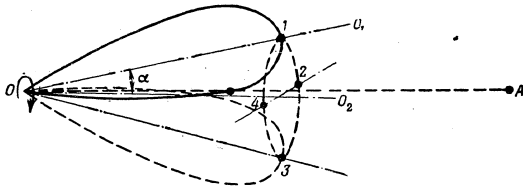


Рис. 29. Конический обзор

обзора состоит во вращении диаграммы направленности вокруг оси, смещенной на небольшой угол относительно направления максимума.

На рис. 29 изображена диаграмма направленности, вращающаяся вокруг оси OO_2 , составляющей угол α с направлением максимального излучения OO_1 . Угол α выбирается

приблизительно равным половине угла раствора диаграммы направленности. Ось диаграммы при своем вращении образует конус с углом при вершине 2α .

При вращении диаграммы направленности создается равносигнальная зона, совпадающая по направлению с осью OO_2 . Если облучаемая цель расположена в направлении OO_2 , то принимаемые радиолокационной станцией

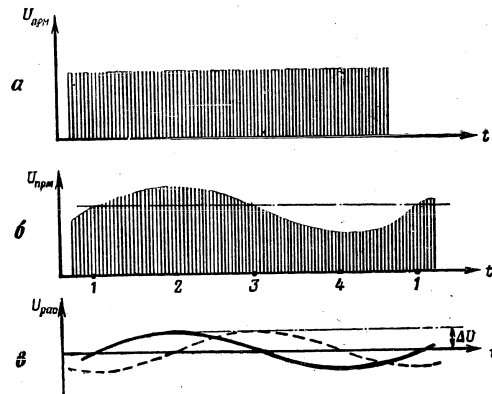


Рис. 30. Образование сигнала рассогласования (сигнала ошибки) при коническом обзоре: а — цель находится на равносигнальном направлении; б — цель смещена относительно равносигнального направления; в — сигнал рассогласования (сигнал ошибки)

отраженные сигналы одинаковы по амплитуде при любом положении диаграммы направленности (рис. 30, а). При отклонении цели от равносигнального направления, например в горизонтальной плоскости влево (точка А на рис. 29), сигналы на выходе приемника окажутся промодулированными по амплитуде с частотой вращения антенны приблизительно по синусоидальному закону (рис. 30, б).

Продетектировав эти сигналы, можно выделить их огибающую, называемую сигналом рассогласования или сигналом ошибки (рис. 30, в — сплошная линия). Амплитудой

туда ΔU сигнала рассогласования характеризует угловое отклонение цели от равносигнального направления, а фаза этого сигнала — направление отклонения. Сигнал рассогласования математически выражается следующим образом:

$$u_{\text{расс}} = \Delta U \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (20)$$

где ω_0 — угловая скорость вращения диаграммы направленности;

φ — фаза сигнала рассогласования, зависящая от положения цели.

Если фазу сигнала рассогласования, соответствующую отклонению цели влево от равносигнального направления, принять за нулевую, то при отклонении цели вниз фаза будет равна 90° , при отклонении вправо — 180° и т. д. Фазу сигнала рассогласования удобно связать с положениями диаграммы направленности. Если, например, сигнал рассогласования равен нулю при верхнем положении диаграммы направленности (положение 1 на рис. 29), затем достигает максимума при крайнем левом положении диаграммы (положение 2) и т. д., то фаза сигнала нулевая. Если же в положении 1 диаграммы направленности сигнал имеет минимум, в положении 2 — равен нулю, в положении 3 — достигает максимума (см. пунктирную линию на рис. 30, в), то фаза сигнала рассогласования равна 90° .

Используя сигнал рассогласования, можно автоматически управлять положением антенны так, чтобы равносигнальная зона была все время направлена на перемещающуюся цель. Это и называется автоматическим сопровождением цели по угловым координатам. При автоматическом сопровождении цели оказывается возможным не только с большой точностью измерять ее угловые координаты, но измерять и угловую скорость линии цели — радиолокационная станция, что также необходимо для решения задачи прицеливания.

Серьезным недостатком конического обзора является ограниченность зоны обзора: секторы обзора приблизительно равны двойному углу раствора диаграммы направленности. Если в радиолокационной станции для автоматического сопровождения целей по угловым координатам используется конический обзор, то при сопровождении выбранной цели наблюдение за другими целями либо отсутствует; либо для этого приходится использовать отдельное антенное устройство.

КОМБИНИРОВАНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ ОБЗОРА

Радиолокационные станции многих типов (например, наземные и корабельные станции орудийной наводки, самолетные станции перехвата и прицеливания, самолетные станции управления стрельбой из подвижного орудия и др.) предназначаются как для поиска целей, так и для их автоматического сопровождения по угловым координатам. Приведенный выше анализ видов обзора показывает, что для решения указанных задач нужно применять различные системы обзора. Обычно предусматриваются несколько режимов работы станции и в каждом из них применяется свой обзор. Известны станции, в которых сочетаются винтовой обзор (для режима поиска) и конический (для автосопровождения), спиральный и конический, поступательно-конический и конический; возможны и другие сочетания видов обзора в одной станции.

Можно указать радиолокационные станции, имеющие несколько антенн, каждая из которых предназначена для создания того или иного вида обзора. Однако гораздо чаще для получения требуемых видов обзора используется одна и та же антенна, только управляет ею при различных обзорах по-разному.

УПРАВЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕМ ДИАГРАММ НАПРАВЛЕННОСТИ

Все системы обзора обычно делят на два класса:
— системы механического развертывания;
— системы электрического развертывания.

При этом подразумевается, что в системах механического развертывания перемещается целиком вся антенна, а в системах электрического развертывания перемещение диаграммы направленности осуществляется путем механического перемещения отдельных частей антенной или фидерной системы.

Это деление систем обзора весьма условно, так как можно создать антенну, у которой перемещение диаграммы направленности осуществляется чисто электрическим путем. Пример подобной антенны с ферритовым переключателем рассмотрен ниже. Однако чисто электрическое развертывание еще не получило сколько-нибудь широкого применения в радиолокации и сейчас в системах обзора используются те или иные механизмы. Поэтому в дальнейшем принято деление методов управления перемещением диаграммы направленности в зависимости от того, какой элемент перемещается при обзоре.

ПЕРЕМЕЩЕНИЕ ВСЕЙ АНТЕННЫ ЦЕЛИКОМ

Перемещение всей антенны целиком применяется при обзорах как плоской, так и игольчатой диаграммой направленности в тех случаях, когда заданы более или менее значительные секторы обзора. А так как у подавляющего большинства станций секторы обзора довольно велики (более 20—30°), то этот вид управления положением диаграммы направленности — основной в радиолокации.

Наиболее просто представить себе механизм привода в движение антенны при круговом обзоре плоским лучом. В системах подобного типа имеется один двигатель, приво-

дящий во вращательное движение основание, на котором укреплена антенна. Для подвода и отвода высокочастотной энергии в линию передачи, связывающую антенну с приемником и передатчиком радиолокационной станции, используются вращающиеся соединения. Вращающиеся соедине-

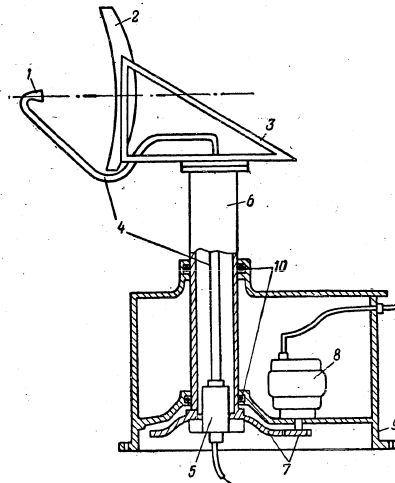


Рис. 31. Антенное устройство для кругового обзора наземной радиолокационной станции:

1 — облучатель; 2 — отражатель; 3 — крепление антенны; 4 — высокочастотный фидер; 5 — вращающееся соединение; 6 — антенная колонка; 7 — шестерни привода; 8 — электродвигатель; 9 — основание; 10 — опорно-упорные подшипники

ния обеспечивают возможность перемещения движущейся части антенны или фидера относительно неподвижного основания.

На рис. 31 изображено антенное устройство для кругового обзора пространства (антенным устройством называется антенна и механизм привода в собранном виде). В данном случае применяется зеркальная антенна с одним облучателем. Такие же механизмы привода используются

для управления положением антенн типа «волновой канал» и другими.

Если с одной антенной связано несколько высокочастотных блоков, их устанавливают вместе с антенной на вращающемся основании. Такое конструктивное решение определяется, во-первых, чрезвычайной сложностью вращающихся соединений при нескольких высокочастотных трактах и, во-вторых, стремлением снизить потери в линии передачи.

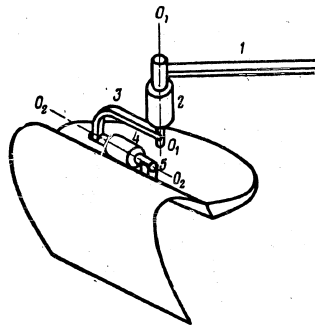


Рис. 32. Вращающиеся соединения, обеспечивающие возможность поворота антенны в горизонтальной и вертикальной плоскостях:

1 — неподвижный волновод; 2, 4 — вращающиеся соединения; 3, 5 — волноводы

Примером радиолокационных станций, у которых высокочастотные блоки перемещаются вместе с антенной, являются наземные станции обнаружения и наведения с V-образной диаграммой направленности. У этих станций высокочастотные блоки размещены в кабине, на внешних сторонах которой укреплены обе антенны. Вся кабина установлена на вращающемся основании.

В качестве характерных примеров более сложных систем привода рассмотрим антенные устройства самолетного радиолокационного бомбоприцела и самолетной радиолокационной станции перехвата и прицеливания.

В радиолокационном бомбоприцеле плоская диаграмма направленности специальной формы используется для кругового или секторного обзора в горизонтальной плоскости. Кроме того, диаграмма направленности может перемещаться в вертикальной плоскости с разных высот полета. Таким образом, конструкция антенного устройства должна обеспечивать возможность поворота антенны как в горизонтальной, так и в вертикальной плоскостях.

На рис. 32 приведена схема, поясняющая устройство

высокочастотного тракта радиолокационного бомбоприцела. Характерная особенность тракта — наличие вращающихся соединений, обеспечивающих возможность поворота антенны в обеих плоскостях. На рис. 33 показана конструкция подобного антенного устройства. Так как движение вокруг оси O_1O_1 (см. рис. 32) осуществляется автоматически и непрерывно, а движение вокруг оси O_2O_2 — вручную и лишь по мере необходимости, то в системе привода нужно иметь два электродвигателя: азимута и наклона. Для обеспечения возможности изменять направление вращения оба двигателя имеют обычно по две якорные обмотки, коммутируемые при помощи быстродействующих реле.

На рис. 34 изображена система управления перемещением антенны станции перехвата и прицеливания. В режиме поиска целей антенна совершает спиральный обзор пространства, а в режиме прицеливания — конический.

Переносное вращательное движение антенны вокруг продольной оси O_1O_1 создается двигателем, ось которого совпадает с осью O_1O_1 . Особенность конструкции двигателя состоит в том, что он имеет полую ось, внутри которой проходит линия передачи высокочастотной энергии. Вращение от двигателя передается антенне через зубчатую передачу с коэффициентом передачи 5:1.

Относительное движение (наклон оси антенны относительно оси O_1O_1) создает толкающая трубка 2, ось которой совпадает с осью вращения O_1O_1 . Трубка перемещается в продольном направлении при колебательном движении колесчатого рычага и червячной передачи, также приводимых в действие двигателем. При перемещении толкающей трубки вправо и влево по оси O_1O_1 соединенная с ней зубчатая рейка при помощи зубчатого колеса поворачивает антенну вокруг оси наклона 8.

В линии передачи высокочастотной энергии имеются два вращающихся соединения; одно из них имеет ось O_1O_1 и расположено у входного волновода, а другое обеспечивает возможность поворота антенны вокруг оси 8.

Для перехода от спирального обзора к коническому необходимо прервать относительное движение в тот момент, когда ось антенны отклонена от оси O_1O_1 приблизительно на половину угла раствора диаграммы направленности. Это осуществляется при помощи соленоида, отключающего механизм передачи колебательного движения толкающей трубки.

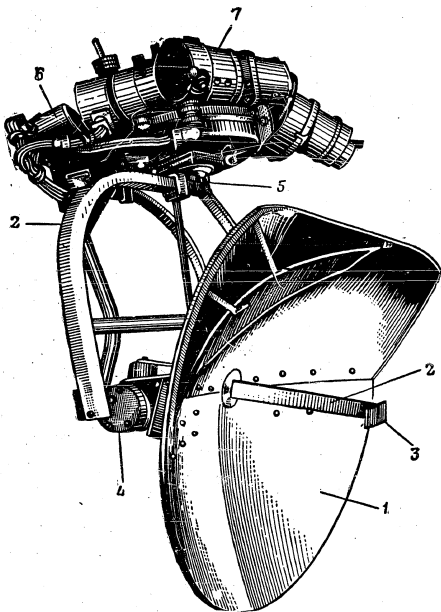


Рис. 33. Конструкция антенного устройства радиолокационного бомбоприцела AN/APQ-13:
1 — отражатель; 2 — питающий волновод; 3 — облучатель; 4, 5 — вращающиеся соединения; 6 — электродвигатель наклона антенны; 7 — электродвигатель вращения антенны по азимуту

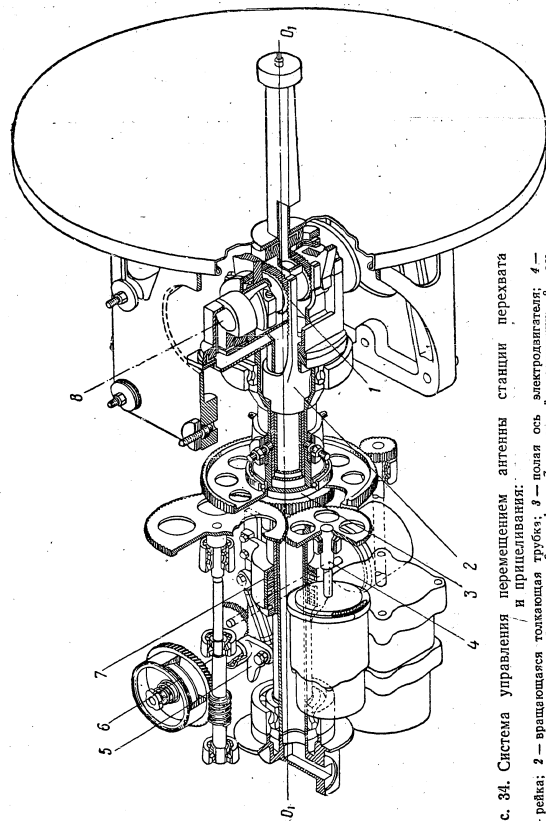


Рис. 34. Система управления перемещением антенны станции перехвата
1 — рейка; 2 — вращающаяся толкающая трубка; 3 — ось выключателя; 4 — ось генератора; 5 — колебатель рычага; 6 — ось; 7 — упорный подшипник; 8 — ось наклона

Так как антенна вращается с большой скоростью, то большое значение приобретает балансировка системы относительно оси вращения. Балансировка производится специальными грузами, положение которых определяется при регулировке антенны в заводских условиях.

СМЕЩЕНИЕ ОБЛУЧАТЕЛЯ ЗЕРКАЛЬНОЙ АНТЕННЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ФОКУСА

Если раскрыв параболического зеркала (отражателя) является синфазной плоскостью, то направление максимального излучения совпадает с оптической осью зеркала. На рис. 35 показана ось OZ зеркала, его фокус F и начальное положение I синфазной плоскости раскрыва. Если облучатель антенны переместить в фокальной плоскости из фокуса F , например, в точку O_1 (см. рис. 35, а), то синфазная

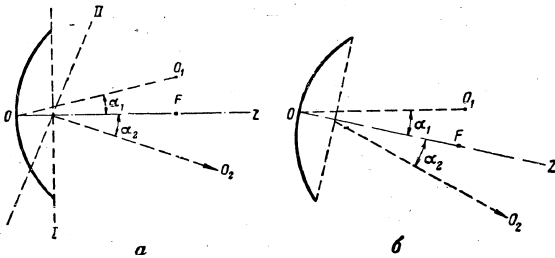


Рис. 35. Изменение направления максимального излучения при смещении облучателя относительно фокуса зеркала

плоскость займет положение II , в результате чего направление максимального излучения сместится на угол α_2 . Направления смещения облучателя и диаграмма направленности антенны взаимно противоположны. Угол α_2 можно считать приблизительно равным α_1 ; это допущение тем ближе к действительности, чем больше отношение фокусного расстояния к диаметру зеркала.

При смещении облучателя из фокуса происходит искривление синфазной поверхности. Это искривление тем сильнее, чем больше угол α_1 . Искривление синфазной поверхности вызывает расширение главного лепестка диаграммы

направленности и увеличение боковых лепестков; коэффициент направленного действия антенны при этом падает. На рис. 36 показано изменение диаграммы направленности при смещении облучателя относительно фокуса зеркала. Характерным является резкое увеличение первого бокового лепестка в направлении смещения облучателя. Указанные обстоятельства ограничивают возможности выноса облучателя из фокуса относительно малыми углами.

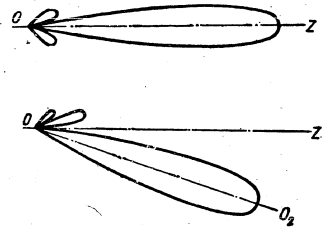


Рис. 36. Изменение диаграммы направленности при смещении облучателя относительно фокуса зеркала

Очевидно, что аналогичным образом можно сместить диаграмму направленности антенны при изменении положения зеркала относительно неподвижного облучателя (см. рис. 35, б).

Смещение облучателя относительно фокуса зеркала антенны используется при решении ряда задач. Можно отметить, например, использование такого смещения для создания плоских диаграмм направленности специальной формы. На рис. 37 изображена антенна с тремя облучателями, первый из которых расположен на фокальной оси OZ , а два других смещены вниз относительно фокуса. Диаграмма направленности такой антенны в вертикальной плоскости образуется тремя лепестками (рис. 38). Первый лепесток (от облучателя 1), максимум которого направлен вдоль оси OZ , самый узкий; второй лепесток (от облучателя 2) расположен выше первого, угол его раствора несколько больше, чем у первого; третий лепесток (от облучателя 3) расположен еще выше и является

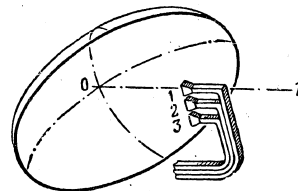


Рис. 37. Зеркальная антенна с тремя облучателями

наиболее широким. Диаграмма направленности такой антенны в вертикальной плоскости образуется тремя лепестками (рис. 38). Первый лепесток (от облучателя 1), максимум которого направлен вдоль оси OZ , самый узкий; второй лепесток (от облучателя 2) расположен выше первого, угол его раствора несколько больше, чем у первого; третий лепесток (от облучателя 3) расположен еще выше и является

наиболее широким. Указанным путем угол раствора результирующей диаграммы направленности в вертикальной плоскости (Φ_0) можно сделать достаточно большим.

Одно из важнейших применений метода смещения облучателя относительно фокуса зеркала — получение конического обзора. Если облучатель сместить из фокуса в точку O_1 (см. рис. 35, а) и вращать его вокруг оси OZ , то направление максимального излучения будет также вращаться вокруг оси OZ , образуя коническую поверхность с половинным углом при вершине α_2 .

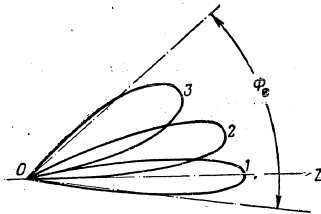


Рис. 38. Диаграмма направленности зеркальной антенны с тремя облучателями (в вертикальной плоскости)

ствие неуравновешенности массы облучателя. Серьезный недостаток такой конструкции — необходимость использования вращающихся высокочастотных соединений, которые сами по себе сложны и, кроме того, приводят к дополнительным потерям высокочастотной энергии.

При вращении зеркала антенны отпадает необходимость в высокочастотных соединениях, но зато возникают трудности с динамическим уравниванием значительной массы зеркала. Считается, что при частоте вращения диаграммы направленности 30—40 гц механически прочная конструкция может быть создана в том случае, если диаметр зеркала не превышает 50—60 см.

В силу высказанных соображений вращение зеркала при коническом обзоре применяется лишь в некоторых самолетных радиолокационных станциях с небольшими антеннами. В большинстве же наземных и корабельных радиолокацион-

ных станций с коническим обзором применяется вращение облучателя.

На рис. 39 показана схема механизма вращения облучателя антенны при коническом обзоре. Линия передачи высокочастотной энергии помещена внутри полой оси ротора двигателя. Синхронно и синфазно с облучателем вращается ротор генератора опорного напряжения; этот ге-

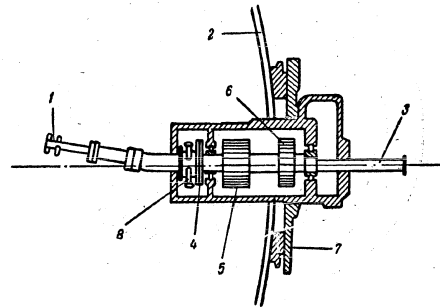


Рис. 39. Схема механизма вращения облучателя антенны при коническом обзоре.

1 — облучатель; 2 — зеркало; 3 — высокочастотный фидер; 4 — фазнец привода; 5 — электродвигатель привода; 6 — генератор опорного напряжения; 7 — держатель отражателя; 8 — регулятор числа оборотов

нератор помещен на оси ротора двигателя. Для смещения облучателя из фокуса зеркала высокочастотный фидер облучателя слегка изогнут.

В заключение этого раздела рассмотрим систему обзора пространства наземной радиолокационной станции орудийной наводки. В режиме поиска целей в станции предусмотрен винтовой обзор. При помощи двигателя азимута антенна вращается в горизонтальной плоскости (переносное движение); одновременно двигатель наклона перемещает антенну в вертикальной плоскости в пределах угла места около 90° (относительное движение). Облучатель зеркала антенны смещен относительно фокуса, и его вращение вокруг фокальной оси создает дополнительное коническое движение диаграммы направленности.

После обнаружения цели станция переводится в режим автоматического сопровождения. При этом винтовое движение антенны прекращается и остается лишь коническое движение диаграммы направленности; двигатели азимута и наклона включаются в системы автоматического сопровождения цели по азимуту и по углу места и обеспечивают

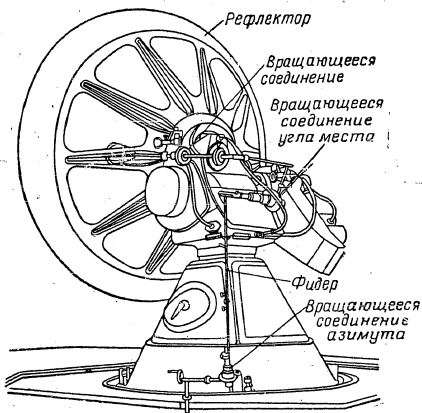


Рис. 40. Схема антенно-фидерной системы станции орудийной наводки

необходимые повороты антенны вслед за перемещением цели.

Схематическое изображение антенно-фидерной системы станции приведено на рис. 40. Антенна укреплена на вращающемся основании. Линия передачи высокочастотной энергии имеет три вращающихся соединения: одно обеспечивает вращение антенны по азимуту; другое — по углу места и третье — вращение облучателя. Двигатели привода помещены внутри основания антенны.

ДВУХЗЕРКАЛЬНЫЕ АНТЕННЫ

Двухзеркальная антенна имеет при заданных размерах зеркала несколько больший коэффициент направленного

действия, чем однозеркальная. Объясняется это лучшим использованием энергии первичного облучателя и более равномерным распределением амплитуд поля в плоскости раскрытия.

Схема двухзеркальной антенны изображена на рис. 41. В качестве первичного облучателя 1 в этой антенне может

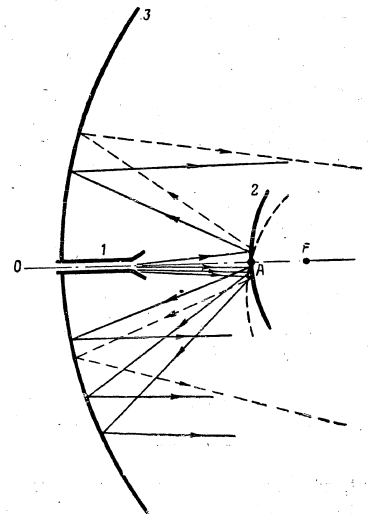


Рис. 41. Двухзеркальная антенна:
1 — первичный облучатель; 2 — малое зеркало; 3 — большое зеркало

быть использован, например, рупор; первичный облучатель располагается на фокальной оси антенны OZ . Малое зеркало 2 переизлучает высокочастотную энергию, способствуя более равномерному облучению большого зеркала 3; форма малого зеркала близка к гиперболоиду вращения. Основной функцией большого зеркала, поверхность которого представляет собой параболоид вращения, является форми-

рование диаграммы направленности. Ход лучей в антенне показан на рис. 41.

Если малое зеркало расположено перпендикулярно фокальной оси антенны OZ , то направление максимума излучения совпадает с осью OZ . Если же это зеркало повернуть на некоторый угол (см. пунктир на рис. 41) вокруг точки A , то диаграмма направленности изменит свое положение и максимум излучения отклонится вниз от оси OZ . Соответствующий ход лучей в антенне изображен на рис. 41 пунктирными линиями. Если малое зеркало в наклонном положении начать вращать вокруг оси OZ , то диаграмма направленности будет двигаться по конусу вокруг оси OZ . Такой метод управления положением диаграммы направленности так же, как и вынос облучателя из фокуса, может быть использован лишь для относительно малых отклонений диаграммы, не превышающих нескольких градусов.

Преимущества двухзеркальной антенны состоят в том, что и размеры вращающегося элемента невелики и дополнительного вращающегося высокочастотного соединения не требуется, так как первичный облучатель неподвижен относительно большого зеркала. Недостатком двухзеркальной антенны по сравнению с однозеркальной является громоздкость, сложность и несколько больший вес.

ИЗМЕНЕНИЕ ФАЗОВЫХ СООТНОШЕНИЙ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ЛИНЕЙНОГО ОБЛУЧАТЕЛЯ ЗЕРКАЛЬНОЙ АНТЕННЫ

Известно¹, что зеркальные антенны могут иметь как точечный, так и линейный облучатель. В качестве линейного облучателя может быть использована система точечных излучателей, расположенных вдоль прямой линии, или, например, длинное узкое прямоугольное отверстие, через которое излучается энергия.

Допустим, что зеркало антенны представляет собой цилиндрический параболоид и вдоль его фокальной оси расположены точечные излучатели. Диаграмма направлен-

¹ См. брошюру В. И. Бекетова «Антенны сверхвысоких частот», Воениздат, 1957 г.

ности такой антенны в фокальной плоскости приближенно описывается следующим уравнением:

$$F(\varphi) = \sin \varphi \frac{\sin \frac{n}{2} \left(\frac{2\pi}{\lambda} d \cos \varphi + \vartheta \right)}{n \sin \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\lambda} d \cos \varphi + \vartheta \right)}, \quad (21)$$

где φ — угол между фокальной осью и интересующим нас направлением;

n — число точечных излучателей;

λ — длина волны;

d — расстояние между излучателями;

ϑ — фазовый сдвиг высокочастотного поля между соседними излучателями.

Направление максимума диаграммы направленности определяется из условия равенства нулю аргументов синусоидальных функций в числителе и знаменателе формулы (21), т. е.

$$\frac{2\pi}{\lambda} d \cos \varphi + \vartheta = 0,$$

или иначе

$$\cos \varphi = -\frac{\lambda \vartheta}{2\pi d}. \quad (22)$$

Если излучатели питаются синфазно, т. е. фазовый сдвиг поля между излучателями равен нулю ($\vartheta = 0$), то макси-

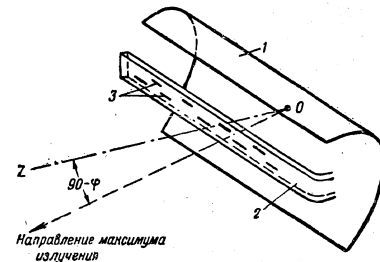


Рис. 42. Зеркальная антенна с линейным облучателем в виде волновода со щелями:
1 — зеркало; 2 — волновод; 3 — щель

мум диаграммы направленности направлен под углом 90° к фокальной оси антенны ($\varphi_{\text{макс}} = 90^\circ$). Если $\vartheta \neq 0$, то и $\varphi_{\text{макс}} \neq 90^\circ$.

На рис. 42 изображена зеркальная антенна, в качестве облучателя которой используется волновод с двумя рядами щелей, прорезанных в его широкой стенке. Положение диаграммы направленности такой антенны определяется разностью фаз высокочастотного поля между соседними щелями. Если имеет место синфазное возбуждение щелей, то ось диаграммы направленности совпадает с осью антенны OZ ; изменение разности фаз высокочастотного поля между соседними щелями вызывает отклонение оси диаграммы направленности от этого направления.

Разность фаз высокочастотного поля между соседними щелями определяется расстоянием между ними и длиной волны в волноводе. Один из способов изменения длины волны в волноводе заключается в том, что изменяется размер a широкой стенки волновода, как показано на рис. 43.

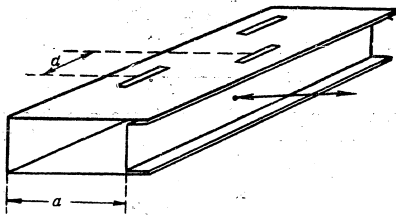


Рис. 43. Изменение размера широкой стенки волновода-облучателя.

Длина волны Λ в волноводе связана с размером широкой стенки волновода следующей зависимостью:

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} \quad (23)$$

Фазовый сдвиг высокочастотного поля между соседними щелями определяется таким соотношением:

$$\vartheta = \frac{2\pi d}{\Lambda} + \pi. \quad (24)$$

Используя соотношения (22) и (24), можно получить простую формулу для определения направления максимума излучения при перемещении узкой стенки волновода:

$$\cos \varphi = -\lambda \left(\frac{1}{\Lambda} + \frac{1}{2d} \right). \quad (25)$$

Считается возможным указанным путем перемещать диаграмму направленности в пределах $30-50^\circ$ при довольно высокой частоте качания (1—2 колебания в секунду).

Описанный метод может быть несколько видоизменен, если в качестве облучателя зеркала антенны использовать рупор с растянутым в одном направлении выходным отверстием. Электрическое поле в выходном отверстии рупора можно рассматривать как плоскость, состоящую из точечных излучателей. Если фаза питания этих излучателей изменяется, то изменяется и направление максимума диаграммы направленности антенны.

Принцип действия такого облучателя поясняет рис. 44. В каждый данный момент растянутый в горизонтальном

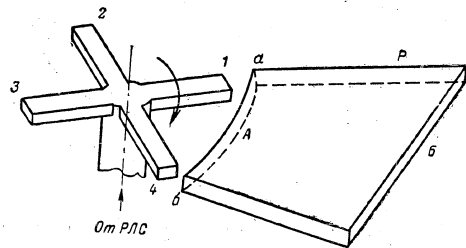


Рис. 44. Линейный облучатель в виде растянутого в горизонтальной плоскости рупора

направлении рупор P возбуждается одной из четырех волноводных ветвей (1, 2, 3, 4) высокочастотного устройства, связанного с передатчиком и приемником радиолокационной станции. Как показано на рисунке, ширина возбуждающего волновода значительно меньше ширины входного отверстия A рупора. При вращении распределительного устройства возбуждающая волноводная ветвь (например, ветвь 1) проходит вдоль входного отверстия рупора P от точки a к точке b . Очевидно, что при этом изменяется фазовая картина высокочастотного поля в выходном отверстии B

рупора, а следовательно, изменяется положение диаграммы направленности.

Конструкция подобной антенны показана на рис. 45. Облучатель антенны представляет собой согнутый секторный рупор. Высокочастотная энергия от передатчика подводится к входному отверстию этого рупора через одну из четырех волноводных ветвей питания. Питающие волноводы расположены под углом 90° друг к другу и вращаются перед входным отверстием рупора. Имеющийся во вращающемся

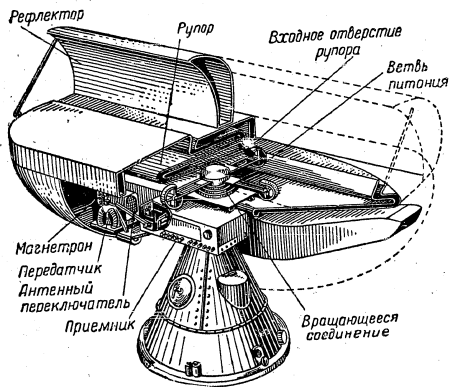


Рис. 45. Конструкция антенны с фазированном облучателем в станциях AN/MPG-1

соединении распределитель направляет высокочастотную энергию в каждый данный момент только к одному из питающих волноводов.

Рассмотренный способ обзора успешно применяется для просмотра больших секторов ($10-12^\circ$) за очень малое время (приблизительно $0,05-0,07$ сек).

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФЕРРИТОВ В АНТЕННЫХ УСТРОЙСТВАХ

Применение ферритов открывает большие возможности для создания чисто электрических систем управления положением антенны. Виды и возможности ферритовых пере-

ключателей слишком разнообразны, чтобы их можно было сколько-нибудь подробно рассмотреть в пределах данной брошюры. Ограничимся поэтому описанием двух характерных примеров использования ферритов.

Представим себе, что пеленгация целей, например по азимуту, осуществляется по методу равносигнальной зоны,

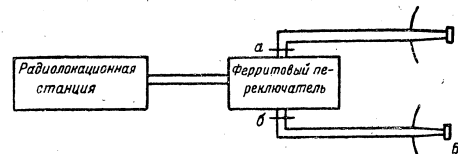


Рис. 46. Переключение антенн А и Б при помощи ферритового переключателя

создаваемой путем коммутации двух антенн. Антенны поочередно подключаются к высокочастотному тракту станции при помощи ферритового переключателя (рис. 46). Работа ферритового переключателя основана на вращении плоскости поляризации электромагнитной волны при изменении магнитного поля, в котором находится феррит.

На рис. 47 показана конструкция ферритового переключателя. К круглому волноводу В подсоединены два выходных прямоугольных волновода а и б, расположенных под углом 90° один к другому. Если плоскость поляризации волны такова, что в волновод а волна проходит без потерь, то в волновод б такая волна пройти не может. При повороте плоскости поляризации на 90° волна проходит без потерь в волновод б и не сможет попасть в волновод а.

Плоскость поляризации волны в переключателе поворачи-

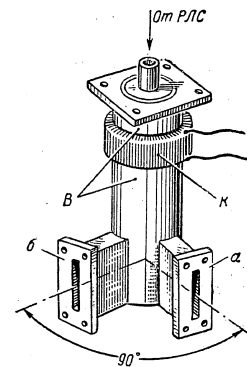


Рис. 47. Конструкция ферритового переключателя: В — круглый волновод; К — катушка подмагничивания; а, б — выходные волноводы

ваются при помощи феррита, заполняющего круглый волновод *B*. Если напряженность магнитного поля, создаваемого внутри круглого волновода катушкой подмагничивания *K*, равна нулю, то положение плоскости поляризации волны соответствует прохождению энергии в волновод *a*. Протекание в катушке *K* тока подмагничивания определенной величины вызовет появление магнитного поля, под действием которого плоскость поляризации волны повернется на 90° и энергия пойдет в волновод *б*.

На рис. 48 приведена зависимость угла поворота плоскости поляризации волны (ψ°) от тока подмагничивания

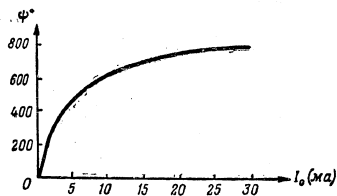


Рис. 48. Зависимость угла поворота плоскости поляризации волны (ψ°) от тока подмагничивания (I_0)

(I_0) для одной из конструкций переключателя. Как видно из рисунка, для поворота плоскости поляризации на 90° и переключения тем самым антенны требуется изменить ток подмагничивания всего на несколько миллиампер. При этом может быть достигнута весьма большая скорость переключения.

При помощи ферритовых переключателей можно коммутировать не только две, но и, например, четыре антенны, что позволяет заменить конической обзор при автосоупровождении целей.

Рассмотрим теперь схему антенного устройства с ферритовым фазовращателем. Допустим, что антенна образована двумя вибраторами, расположенными на расстоянии половины длины волны один от другого. Известно, что диаграмма направленности такой антенны зависит от сдвига фаз напряжений, питающих вибраторы. В частности, при синфазном питании вибраторов максимум диаграммы направленности в плоскости, перпендикулярной оси вибра-

торов, направлен по линии *BB* (рис. 49, *a*), а при противофазном — по линии *A₁A₂*. С помощью отрезка фидера, заполненного ферритом, можно изменять фазирование

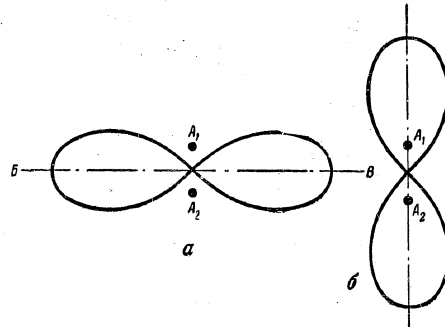


Рис. 49. Диаграмма направленности двух вибраторов (A_1 и A_2) в плоскости, перпендикулярной их оси:
a — питание синфазное; *б* — питание противофазное

вибраторов и тем самым изменять положение диаграммы направленности.

Принцип действия антенного устройства с ферритовым фазовращателем поясняет рис. 50. Изменение фазы прохо-

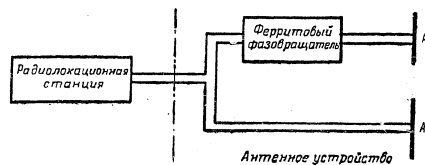


Рис. 50. Антенное устройство с ферритовым фазовращателем

дящей волны достигается в отрезке фидера с ферритом при помощи меняющегося продольного магнитного поля. Примерный график зависимости сдвига фазы (ψ°) от тока в катушке подмагничивания (I_0) дан на рис. 51.

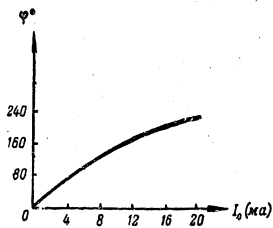


Рис. 51. Зависимость изменения фазы проходящей волны (φ°) от тока подмагничивания (I_0)

Приведенные примеры показывают, что, используя ферриты, можно с помощью генераторов тока соответствующей формы управлять положением диаграммы направленности антенны.

СТАБИЛИЗАЦИЯ АНТЕНН

При кренах самолета или корабля оси вращения антенн радиолокационных станций изменяют свое положение в пространстве. В результате этого изменяется пространственное положение зоны обзора, что может привести к временной потере цели или уменьшению дальности обнаружения целей в некоторых направлениях. Если, например, самолетная станция перехвата и прицеливания имеет относительно узкую в вертикальной плоскости зону обзора (рис. 52, а),

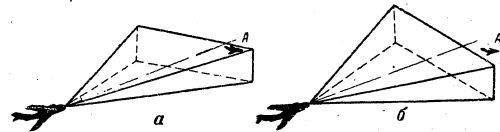


Рис. 52. Изменение положения в пространстве зоны обзора самолетной станции перехвата при крене самолета:
а — самолет-истребитель ищет цель; б — самолет-истребитель делает крен при развороте на цель А

то, выполняя разворот в сторону обнаруженной цели А, летчик может эту цель потерять, так как при крене самолета на вираже цель выйдет из зоны обзора (рис. 52, б).

Кроме того, при крене самолета или корабля установленные на них радиолокационные станции будут неправильно определять угловые координаты целей. Пояснить это можно на следующем примере.

При помощи самолетной панорамной радиолокационной станции осуществляется обзор земной поверхности. Цель А расположена на дальности D прямо по курсу самолета

(рис. 53). Следовательно, при горизонтальном положении самолета она облучается в тот момент, когда антенна станции направлена точно вперед. Но если самолет летит с углом крена γ (рис. 54), то цель A облучается уже при другом положении антенны — при ее повороте на угол $\Delta\varphi^\circ$ относительно продольной оси самолета:

$$\Delta\varphi^\circ \approx \frac{H \operatorname{tg} \gamma}{D} \quad (26)$$

Возникает ошибка в определении азимута цели.

Устранить эти весьма нежелательные последствия крена можно путем стабилизации положения антенны в пространстве независимо от положения самолета или корабля. В зависимости от задач, решаемых той или иной радиолокационной станцией, к системе стабилизации антенны могут

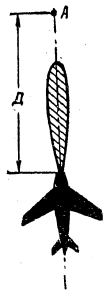


Рис. 53. Пеленгация цели A , расположенной точно по курсу самолета

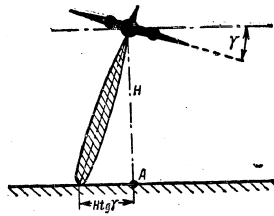


Рис. 54. Смещение диаграммы направленности при крене самолета

предъявляться различные требования. Так, например, для нормальной работы самолетной панорамной радиолокационной станции или корабельной станции обнаружения достаточно обеспечить стабилизацию антенны по поперечному крену. А в самолетных и корабельных станциях прицеливания нужно стабилизировать антенну по колебаниям объекта во всех трех плоскостях.

Можно представить себе два пути стабилизации антенн. Первый из них заключается в том, что антенна укрепляется в карданном подвесе, поддерживающем оси вращения в определенном положении. В составе системы стабилизации имеются специальные гироскопы, оси которых получают постоянную ориентацию в пространстве. Эти гироскопы при помощи следящего привода поддерживают оси кардана также в определенном положении. Второй путь сводится к тому, что при крене или повороте объекта следящая система поворачивает антенну на соответствующий угол в обратную сторону.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Введение	3
Основные положения	5
Некоторые обозначения и определения	—
Точность измерения и разрешающая способность по угловым координатам	10
Тактические требования к периоду обзора	14
Минимальный период обзора	17
Относительный период обзора	22
Виды обзора	26
Круговой обзор	28
Секторный обзор	29
Обзоры игольчатой диаграммой	30
Зигзагообразный обзор	32
Винтовой обзор	34
Спиральный обзор	36
Поступательно-конический обзор	37
Вращательно-конический обзор	38
Конический обзор	41
Комбинирование различных видов обзора	42
Управление перемещением диаграмм направленности	—
Перемещение всей антенны целиком	48
Смещение облучателя зеркальной антенны относительно фокуса	52
Двухзеркальные антенны	54
Изменение фазовых соотношений между элементами линейного облучателя зеркальной антенны	58
Использование ферритов в антенных устройствах	63
Стабилизация антенн	63

ТОВАРИЩИ ЧИТАТЕЛИ!

С заказами на библиотеку «Радиолокационная техника» обращайтесь в магазины военторгов «Военная книга». Свои отзывы и пожелания по библиотеке «Радиолокационная техника» просьба направлять по адресу: Москва, К-9, Тверской бульвар, 18, Военное издательство.

Степанов Борис Михайлович
Радиолокационный обзор

Редактор инженер-подполковник Врублевский А. В.
Технический редактор Стрельникова М. А. Корректор Каждан Е. Л.

Сдано в набор 18.9.58 г. Г-51133. Подписано к печати 9.2.59 г.
Формат бумаги 84×108^{1/2}—2^{1/8} печ. л. = 3,485 усл. печ. л. 3,275 уч.-изд. л.
Военное издательство Министерства обороны Союза ССР
Москва, К-9, Тверской бульвар, 18.
Изд. № 5/687. Цена 1 р. 15 и. Зак. 1337.

1-я типография
Военного издательства Министерства обороны Союза ССР
Москва, К-6, проезд Скворцова-Степанова, дом 3

**БИБЛИОТЕКА
«РАДИОЛОКАЦИОННАЯ ТЕХНИКА»**

В помощь офицерам, связанным с эксплуатацией радиотехнических средств, Военное издательство выпускает библиотеку «Радиолокационная техника». Эта библиотека может быть также использована широким кругом читателей, желающих подробно ознакомиться с работой отдельных узлов и элементов радиотехнических станций.

ВЫШЛИ ИЗ ПЕЧАТИ

К. Н. Трофимов. Радиолокация
С. И. Бычков. Магнетрон
Э. Э. Аш. Реле
В. И. Бекетов. Антенны сверхвысоких частот
В. С. Неленец. Антенны метровых волн
Б. Ш. Горин. Индикаторы дальности
М. А. Соколов. Преобразователи частоты
Г. Д. Заварин. Усилители
И. А. Лыков. Координаты, определяемые радиолокатором
А. П. Карусь. Антенные переключатели
А. В. Врублевский. Развертки индикаторов
В. В. Гусев. Формирование импульсов
Б. А. Фогельсон. Волноводы
Г. Ф. Новоженков. Объемные резонаторы
И. А. Моторичев. Регулировка усиления и АПЧ
А. В. Смирнов. Синхронно-следящие устройства
И. П. Марков. Линии передачи
А. С. Тофанск. Стабилизаторы напряжения
Н. Ф. Вавилев. Электронные лампы

НАМЕЧЕНЫ К ИЗДАНИЮ

Распространение радиоволн
Радиолокационные цели
Генераторы несинусоидальных колебаний
Импульсные передатчики УКВ
Кристаллон
Кристаллические детекторы высокочастотного тракта
Электронно-лучевая трубка
Индикаторы направления
Синхронизирующие устройства
Технические данные радиолокационной станции
Помехи радиолокации и борьба с ними
Мощные импульсные модуляторные лампы
Газоразрядные приборы
Выпрямительные устройства
Электротехнические измерения
Электронный осциллограф
Лампы с бегущей и обратной волной

Цена 1 р. 15 и.