

50X1-HUM

50X1-HUM

INFORMATION REPORT INFORMATION REPORT

CENTRAL INTELLIGENCE AGENCY

This material contains information affecting the National Defense of the United States within the meaning of the Espionage Laws, Title 18, U.S.C. Secs. 793 and 794, the transmission or revelation of which in any manner to an unauthorized person is prohibited by law.

C-O-N-F-I-D-E-N-T-I-A-L

50X1-HUM

COUNTRY USSR

REPORT

SUBJECT Soviet Books on Geography and Astronomy

DATE DISTR. 19 May 1959

NO. PAGES 1

50X1-HUM

REFERENCES RD

DATE OF INFO.

PLACE & DATE ACQ.

SOURCE EVALUATIONS ARE DEFINITIVE. APPRAISAL OF CONTENT IS TENTATIVE.

1.

Russian-language publications

50X1-HUM

- a. Geograficheskiy Sbornik, XIII, Kartografiya (Geography Handbook, XIII, Cartography), edited by Academician Ye. N. Pavlovskiy, 200 pages, published by the Geography Society, USSR, Academy of Sciences, USSR, Moscow, 1959. The book contains a number of articles by various authors on questions of the theory and practical aspects of cartography which were submitted as reports at the Department of Mathematical Geography and Cartography i/n Yu. M. Shokalskiy, Geography Society, USSR. The articles cover map studies, mathematics of cartography, cartometry, and the compilation and editing of maps and atlases.
- b. Byulleten Instituta Teoreticheskay Astronomii (Bulletin of the Institute of Theoretical Astronomy), Academy of Sciences, USSR. The acquisition represents copies of Volume VII, issue No. 1 (84), 2 (85), 3 (86), and 4 (87). All of the articles have translated titles and abstracts in either English, French, or German.

2. The publications may be considered UNCLASSIFIED when detached from the covering report.

50X1-HUM

50X1-HUM

C-O-N-F-I-D-E-N-T-I-A-L

STATE	X ARMY	X NAVY	X AIR	X FBI	AEC				
-------	--------	--------	-------	-------	-----	--	--	--	--

(Note: Washington distribution indicated by "X"; Field distribution by "#".)

INFORMATION REPORT INFORMATION REPORT

А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
ГЕОГРАФИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО СОЮЗА ССР

ГЕОГРАФИЧЕСКИЙ
СБОРНИК

XIII

КАРТОГРАФИЯ

1959

АННОТАЦИЯ

Сборник содержит материалы исследований отдельных авторов по различным вопросам теории и практики картографии, доложенные на заседаниях Отделения математической географии и картографии им. Ю. М. Шокальского Географического общества Союза ССР и рекомендованные для опубликования в печати.

Тематика публикуемых статей охватывает вопросы картоведения, математической картографии, картографии, картометрии, составления и редактирования карт и атласов.

Сборник предназначен для использования научными работниками и инженерно-техническим составом в их научной и производственной деятельности, а также может быть использован в высших учебных заведениях при подготовке кадров картографов.

Главный редактор
академик *Е. Н. ПАВЛОВСКИЙ*

Ответственные редакторы
Л. А. ДЕМИН, И. Б. КОСТРИЦ

1958

ГЕОГРАФИЧЕСКИЙ СБОРНИК

XIII

ГЕОГРАФИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО СОЮЗА ССР

И. Б. КОСТРИЦ

ПУТИ УЛУЧШЕНИЯ НАУЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ
В ОБЛАСТИ КАРТОГРАФИИ

Разработка народно-хозяйственных проблем вызывает необходимость глубокого изучения территории СССР в географическом отношении. Важную предпосылку и составную часть такого изучения составляет разностороннее картографирование природных условий и ресурсов страны. Отсюда следует необходимость широкого развития специального комплексного картографирования СССР.

Решающее слово в выполнении предстоящих работ принадлежит советским картографам, которые изданием капитальных картографических произведений таких, как карта масштаба 1 : 1 000 000, Атлас Мира, Морской атлас и др., а также созданием за 4 года карты масштаба 1 : 100 000 на территории более 6 млн. кв. км. (что более чем в 10 раз превышает территорию Франции) показали свою зрелость и большую творческую энергию. Созданные ими капитальные картографические труды, суммируют в себе результаты колоссальной научной и производственной работы. За годы советской власти картография в нашей стране превратилась в подлинно научную систему знаний. Научно-исследовательские работы ведутся на широком фронте. Об этом убедительно свидетельствует публикация материалов в научно-технической литературе. В нашей стране созданы все необходимые предпосылки для неуклонного и всестороннего развития картографии. Однако развитие научной теории картографии отстает от требований, предъявляемых к картографии бурно растущим народным хозяйством нашей страны. Решение важных народно-хозяйственных задач в ряде случаев оказывается небезопасным заранее изготовленными картами. Ничем не оправдано слабое внедрение географических карт в жизнь, в деятельность государственных учреждений и в практику сельского хозяйства. Колхозы лишены карт, содержащих качественную характеристику земельных угодий. Отсутствуют в необходимом количестве туристские и справочные карты, а их качество находится на низком уровне.

Подобное положение создается благодаря тому, что уровень теоретической разработки проблем картографии не отвечает современным требованиям, не обеспечивает необходимых темпов совершенствования и организации производства. Картографическая наука не указывает производству новых средств и приемов работы. Отсюда одной из важнейших проблем советской картографии, требующей глубокой научной разработки, является преодоление отставания в вопросах теоретического обобщения опыта производства, в области всех разделов картографии и глубокая разработка на этой основе методологии и теории картографии.

¹ Доложено 11 декабря 1958 г. на заседании Отделения Математической географии и картографии имени Ю. М. Шокальского.

Но каковы причины, вызывающие отставание развития теории картографии, и каковы пути их устранения?

Прежде всего необходимо указать на известную недооценку роли теории в картографическом производстве, на невнимание к вопросу подготовки научной смены, на недооценку роли различных направлений в научных исследованиях, на отсутствие единого научного центра советской картографии. К числу причин, тормозящих развитие научной теории картографии, относится также отсутствие действенной критики и проявление ведомственных тенденций, оказывающих отрицательное влияние на разрешение стоящих перед картографами задач. Пути устранения отставания научной теории картографии лежат прежде всего в общественном обсуждении создавшегося положения.

На основе широкого обсуждения должны быть разработаны необходимые организационно-технические мероприятия. Задача Географического общества как органа научного контроля заключается в том, чтобы принять активное участие в обсуждении мероприятий, направленных на устранение ненормального положения с развитием научной теории картографии.

Остановимся на рассмотрении каждой из указанных выше причин и путей их устранения.

Недооценка роли научной теории в картографии

Недооценка теории картографии находит свое выражение в утверждении, что в картографии нет четкой грани между наукой и производством. Картография как наука подменяется научно-производственной деятельностью. Совершенно очевидна неразрывная связь практики и науки, а также то, что исходным являются интересы практики. Однако это не дает основания ставить знак равенства между научной теорией и практикой картографии. Такой ошибочный взгляд приводит к тому, что решение теоретических вопросов выносятся на производство, в то время как научно-исследовательские организации выполняют производственные работы. Примером этому служит непосредственное участие ЦНИИГАиК в составлении атласов карт. Отсюда распыление научных сил, отрыв их от решения актуальных задач. В качестве примера укажем на слабую активность научно-исследовательских организаций в разработке теории картографической генерализации. Так, начатые 15 лет тому назад исследования в области генерализации содержания топографических карт, еще не вышли из первой стадии. Отсутствие же необходимых теоретических разработок в области теории картографической генерализации не позволяет создать полноценные инструкции по составлению топографических карт масштаба 1 : 500 000 и крупнее. Действующие обязательные для всех ведомств инструкции издания 1940—1945 гг. явно устарели и не содержат научно обоснованных указаний по проведению картографической генерализации. Не отличается научной обоснованностью и «Основные положения по созданию топографических карт масштабов 1 : 10 000, 1 : 25 000, 1 : 50 000 и 1 : 100 000», изд. 1956 г. Поэтому на плечи наших картографов-производственников ложится установление норм отбора, обобщения, разработка новых технологических схем работы, выработка частных правил транскрибирования названий и т. п. Решение же задач научно-исследовательского характера на производстве затрудняется сжатыми сроками, отвлекаемыми на исследования, а также трудностями в проведении самих исследований. Причем причины создавшегося положения лежат не в низкой квалификации кадров (наше производство располагает достаточным количеством картографов с высшим образованием), а в общей теоретической отсталости

отдельных разделов картографии, и, в первую очередь, по вопросам составления карт.

В силу этого исследование отдельного частного вопроса заталкивается на отсутствие общей методологической основы исследуемого вопроса. Отсюда в условиях производства принимаются скороспелые, недостаточно обоснованные решения того или иного вопроса. Такое положение приводит к кустарничеству в работе и в конечном счете к снижению качества выпускаемой продукции.

Наряду с этим наше производство недостаточно внимательно относится к внедрению передовой техники, к практическому освоению теоретических разработок. В ряде случаев результаты достижений научной теории берутся под сомнение и недопустимо долго не внедряются в производство. Так, например, гравирование картографических изображений, предложенное в Советском Союзе В. А. Снисаренко в 1938 г., стало внедряться у нас в производство только в 1954 г., т. е. спустя 16 лет. За это время предложение В. А. Снисаренко было практически освоено в США, Швеции, Германии. В это же время опыты по применению гравирования были проведены также в Чехословакии, Норвегии, Дании и других странах.

Подобное отношение производства к новому, прогрессивному должно вызвать серьезные упреки потому, что издание карт с гравированными оригиналов в два раза дешевле и выше по качеству, чем издание с оригиналов, вычерченных на чертежной бумаге, а само гравирование на 20—50% производительнее обычного вычерчивания.

Отсутствие по целому ряду важнейших вопросов картографии теоретических обобщений приводит картографию к числу описательных дисциплин. Подтверждением этого служат издаваемые учебники по составлению карт, в которых теоретические обобщения подменяются сводом «рецептов» по изготовлению карт.

Подобное положение служит причиной того, что в ряде работ по картографии имеет место тенденция «онаучивания» картографии, что проявляется в разработке непригодных для производства формул по картографической генерализации, в излишнем увлечении разработкой новых проекций, в возведении в «культ» вопросов редактирования карт и т. п. Ярким примером такой «научности» в области установления транскрипции названий являются названия на картах Якутии и района Берингова моря. На картах этих районов царит полный произвол, вызывающий у читателей недоумение и целый ряд возражений. Карты загромождаются практически непроизносимыми названиями, как например: «Кэйнгыни-выкэктрыкер, Иыэргын, Хомо-Аратын-Иккы-Пастах-Белькей и т. п.

В настоящее время, перед советским картографическим производством стоят ответственные и трудные задачи. Намеченный рост картографических работ должен в основном быть достигнут за счет повышения производительности труда, базирующейся на внедрении в производство новой техники.

Такую задачу можно успешно решить только в случае, если научные исследования в области картографии будут поднимать картографическое производство на более высокий технический уровень.

В настоящей статье не ставится задача дать обзор научных проблем картографии. Это является задачей специальной статьи. Однако, для примера укажем, что в области создания топографических карт ответственной научно-технической задачей состоит в разработке таблиц условных знаков. Необходимо уточнить и научно обосновать классификацию некоторых элементов содержания карты, использовать наиболее современные данные географии, геоботаники, геологии, инженерного дела и других смежных дисциплин.

Содержание каждого из изображаемых объектов должно получить полное истолкование, стоящее на современном уровне науки. Кроме того, используя данные физиологической оптики, психологии зрительного восприятия, цветоведения и других наук, необходимо изучить вопрос о читаемости условных обозначений и картографических шрифтов с тем, чтобы попытаться теоретически обосновать выбор их формы, размера и цвета.

Разработка научно обоснованных норм отбора и обобщения содержания карт на основе тщательно разработанного районирования территории составляет другую важную задачу.

Современное хозрасчетное картографическое производство настоятельно требует научно обоснованных технологических схем работы, норм выработки и ограничения экспериментальной работы в ходе самого производства.

Сейчас самое важное значение имеет борьба за технический прогресс картографического производства, борьба за повышение роли научной теории картографии. Нужна теория картографии, которая позволила бы картографам-производственникам идти не ощупью в темноте, отыскивая верные пути при решении вопросов создания карт, проверяя каждый свой шаг изготовлением экспериментальных образцов, а по пути, указанному наукой. «Подлинная научная теория, создаваемая в процессе абстрактного мышления и дважды связанная с практикой, с производством своим началом и своими конечными результатами, содержит в себе очень большой элемент обоснованного ожидания и научного предвидения. Поэтому подлинная наука всегда может указать тот путь, по которому должен быть направлен технический прогресс производства. Очевидно, что творческое сотрудничество науки и производства оказывает благотворное влияние на процесс развития науки и производства». ¹ В этом вопросе отделение картографии ВГО может оказать свою посильную помощь. Она должна заключаться в организации широкого обсуждения проблем научной теории картографии, в постоянном общении деятелей науки и производства, в теоретическом обобщении опыта производства в области всех разделов картографии и в разработке на этой основе вопросов методологии и теории картографии.

Невнимание к вопросу подготовки научной смены

Одной из причин отставания научной теории картографии является невнимание к вопросу подготовки научной смены. Слишком слабо пополняется армия научных работников в области теории картографии. Вниманию диссертантов больше всего привлекают вопросы истории, разработка отдельных типов карт и совершенствование существующих. Тематика 42 диссертаций, представленных на соискание звания кандидата наук за период с 1949 по 1954 г., т. е. за 5 лет, может быть подразделена на следующие группы:

№ п. п.	Тематика	Количество	Проценты
1	Вопросы истории	9	21
2	Вопросы математического обоснования карт	4	10
3	Совершенствование существующих карт	11	26
4	Разработка новых типов карт	10	24
5	Работы обзорного характера	8	19

¹ Проф. Н. А. Урмаев, «О теоретической основе способов и технических приемов составления карт», Москва 1955 г.

Анализ защищенных диссертаций показывает, что 50% их посвящены вопросам разработки новых типов карт и совершенствованию существующих карт. Каждая пятая диссертация защищается на историческую тему. Около 20% работ посвящены обзору картографической продукции и носят реферативный характер. Диссертации по проблемным вопросам картографии отсутствуют.

Ежегодно научные кадры пополняются 10—15 новыми учеными картографами. При этом количество диссертаций из года в год растет. Среди них есть действительно нужные и содержащие полезные исследования, но немало и никчемных работ. Для многих работ характерно отсутствие глубины исследования и случайность темы.

Тема диссертаций искусственно придумывается на соискание степени. Диссертации обзорного (реферативного) характера находятся на уровне дипломных работ студентов.

Диссертации, посвященные созданию новых карт разрабатываются без необходимой экспериментальной работы. К диссертациям прилагаются лишь небольшие фрагменты предлагаемой карты. Тип, содержание и оформление новой карты дается умозрительно.

Не только тематика, но и сами диссертации не подвергаются широкому общественному обсуждению. После защиты многие диссертации не появляются в печати, а их авторы не ведут дальнейшей активной работы. Защищенные диссертации не находят применения потому, что они не решают тех проблем, которые стоят перед советской картографией и решение которых будет способствовать развитию науки. Имеют место случаи, когда решение ученого совета о присвоении звания кандидата наук отменяется высшей аттестационной комиссией, как это было с диссертацией на тему «Некоторые вопросы русской картографии XVI—XVII вв.» Неблагополучное положение с ростом научной смены характеризуется еще и тем, что с 1949 г. по настоящий день была защищена только одна докторская диссертация (работа С. Е. Феля «Картография России XVII в.»).

В связи с подготовкой научной смены нельзя обойти молчанием вопрос подготовки кадров высшей школы картографии. Высшая картографическая школа еще не стоит на должном уровне. Основной недостаток в ее работе заключается в том, что в ее стенах не поставлена на достаточную высоту научная работа. Высшая школа оправдывает свое высокое назначение тогда, когда в ней живет подлинная наука. Высшая школа должна выполнять глубокие исследования и иметь больших ученых. Где этого нет, там начинается ремесленничество. Другим крупным недочетом является отсутствие настоящей связи высших учебных заведений с производством. Без этой связи не может быть подготовки настоящих специалистов, как не может быть теории без практики.

Вопрос подготовки научной смены вызывает законное беспокойство. Отделение картографии ВГО может и должно взять на себя инициативу в организации общественного обсуждения тематики диссертаций, отвечающих жизненным интересам науки и практики.

Недооценка роли различных направлений в картографии

Всем хорошо известно какое огромное значение имеют для развития науки научные направления и научные школы. Значение их в истории отечественной науки трудно переоценить.

Каждая из школ прокладывает свой самостоятельный путь в поисках научной истины. В СССР исторически сложились и существуют две школы картографов: географическая, или университетская, и инженерная. Существование этих школ в значительной мере обусловлено систе-

мой подготовки кадров. Географическая школа, которую представляют картографические кафедры университетов, уделяет при подготовке картографов большое внимание вопросам географического обоснования содержания карт. Видное место в этой школе принадлежит МГУ, который на протяжении многих лет ведет борьбу за широкое прогрессивное понимание содержания и задач картографии. Практическое значение связи картографии и географии было доказано еще Д. Н. Анучиным. Фактически же инициатором географо-картографического образования в нашей стране был А. А. Борзов. За четверть века в МГУ получили картографическую специальность 250 человек и 19 из них защитили кандидатские диссертации. Воспитанники этой школы ведут преподавательскую работу в Москве, Ленинграде, Иркутске, Воронеже, Одессе, Горьком.

В противоположность географической школе инженерная школа в лице картографической специальности институтов инженеров геодезии, аэро съемки и картографии больше внимания при подготовке кадров уделяет технике создания карт. При этом география в учебных планах этих институтов не занимает места специального предмета. Время, отводимое в учебных планах на географические дисциплины не обеспечивает необходимой географической подготовки специалистов.

Географическая и инженерная школы взаимно дополняют друг друга. Существование указанных школ не всегда имеет четкое выражение. Наиболее четко указанные школы обозначаются в научных работах по картографической генерализации. При этом сторонники географической школы главным звеном считают географическую обоснованность содержания карт. Сторонники инженерной школы направляют свои усилия на поиски математических методов определения так называемой нагрузки карт, иначе говоря, они стремятся применять числовые статистические и морфометрические показатели для объективного выражения степени картографической генерализации. Представители различных направлений в картографии могут с успехом работать на избранном каждым участке, пользуясь своей оригинальной методикой.

Между тем прошедшие дискуссии по отдельным вопросам картографии показали стремление отдельных направлений к монополии. Так, например, представитель инженерной школы проф. Сухов обвинил своих противников в субъективизме, не имея на то каких-либо оснований. Сторонники различных школ готовы в ходе дискуссии объявить несостоятельным любое направление, с выводами которого они не согласны. Очевидно, что борьба в науке за «истребление» инакомыслящих отвлекает наших ученых от решения научных проблем. Развитие советской картографической науки — многосторонний и бурно протекающий процесс. Успеху его развития несомненно способствует обстановка свободного обмена мыслями, научных споров и критики.

Необходимо со всей силой общественного авторитета пресекать стремление какого-либо направления к монополии в науке.

В то же время необходимо всячески поощрять дискуссии по теоретическим вопросам картографии. Где прекращаются споры, там умирает наука. Чтобы поднять уровень этих дискуссий, надо придать им более конкретный и организованный характер, вести их не сразу по нескольким, а последовательно по отдельным наиболее важным проблемам.

Отделение картографии могло бы взять на себя организацию при ВГО ежегодных семинаров (совещаний) по проблемным вопросам картографии, привлекая широкий круг участников.

Широкому общественному обсуждению должны быть подвергнуты следующие проблемы: комплексное картографирование, теоретические основы картографической генерализации, картографическое образование

в СССР, координация научных работ в области картографии и др. Семинары, при надлежащей подготовке, станут мощным средством для развития научной мысли.

Отсутствие единого научного центра

Одной из причин отставания научной теории картографии от требований жизни является отсутствие центрального научного органа. Географические науки, в том числе и картография, весьма слабо представлены в Академии наук СССР. Картографический отдел Института географии АН СССР выполняет очень скромную работу по картографическому оформлению географических трудов Института. По сути дела Академия наук вопросами научной теории картографии не занималась и не занимается. Вопросами научной теории занимаются немногочисленные научно-исследовательские ячейки различных ведомств. Отсутствие единого научного центра, координирующего работу ячеек приводит к тому, что в постановке и организации работ имеется ряд существенных недостатков. На протяжении ряда лет разрабатываются вопросы, не имеющие большого практического или теоретического значения. Отдельные темы разрабатываются долго и без учета достигшей производств.

Научно-исследовательские работы в области картографии выполняют научно-исследовательские институты, кафедры и лаборатории. Для примера укажем, что тематика научно-исследовательской работы ЦНИИГАиК, являющегося ведомственной организацией ГУГК, имеет два направления: совершенствование методов создания карт и создание новых типов картографических произведений. К первому направлению относятся вопросы математической основы карт, картографической генерализации, технологии и техники составления, оформления и издания карт. Второе направление включает создание серии учебных карт по курсу школьной географии, разработку карт для высшей школы, разработку стенных экономических карт СССР и зарубежных государств для средней школы.

Одним из главных недостатков работы ЦНИИГАиК является слабое развитие исследований по теории составления и оформления карт, по научному обобщению методов создания карт различных типов. Слабо ведется работа по обобщению ценного опыта новаторов и передовиков производства.

Так же выглядит и работа других научно-исследовательских институтов. Работа идет на параллельных курсах и под углом зрения обеспечения своих ведомственных производственных задач «сегодняшнего дня». Перспективность в постановке исследований отсутствует. Слабая информация о работах, выполняемых различными ведомствами, а также в смежных областях науки и техники, которые могли бы быть использованы в картографии, значительно усугубляет создавшееся положение. Большую помощь в проведении научно-исследовательской работы могут оказать кафедры картографии высших учебных заведений.

Ознакомление с работой, проводимой в ВУЗах, показывает, что кафедра картографии МГУ сосредоточивает свои усилия на разрешении двух проблем, а именно: на создании учебных пособий, учебников и серии карт для высшей школы и на разработке вопросов комплексного картографирования. В последние годы кафедра начала заниматься также вопросами внедрения аэрометодов в практику советской географии.

Кафедра картографии МИГАиК работает над следующими проблемами: содержание топографических карт, их точность, пути их использования в изучении местности, разработка новых карт и атласов, а также технико-экономический анализ картографо-геодезического производства.

Кафедра картографии ЛГУ сосредоточивает свои усилия на решении двух проблем. Первая — создание крупномасштабных карт с использованием аэроснимков, вторая — создание специальных атласов областей и зон для нужд народного хозяйства.

В последние годы в планах научной работы заметна активизация вузов в решении научных вопросов, важных для народного хозяйства. По решению Министерства Высшего образования каждый университет должен принимать активное участие в картографировании закрепленного за ним природно-экономического района. Однако в этой работе имеются серьезные недостатки. Планы научной работы не согласовываются с производством. Опытная производственная проверка и внедрение законченных работ не производится. Не проводится также и их общественное обсуждение. Слаба организация в ВУЗах научно-исследовательских лабораторий. Специальное постановление Совета Министров СССР «О мерах улучшения научно-исследовательской работы в высших учебных заведениях» выполняется крайне медленно. Создавшееся положение с организацией в нашей стране научно-исследовательской работы в области картографии характеризуется общей распыленностью исследований по отдельным ведомствам и учреждениям. Общее координирование научных исследований по проблемам, выдвигаемым развитием науки и нашего общества, отсутствует. Между тем решение коренных проблем картографии возможно лишь при условии объединения усилий различных картографических организаций страны: кафедр картографии высшей школы, ЦНИИГАиК, картографического отдела Института географии АН СССР, научно-производственных отделов и институтов. Ни одна из перечисленных организаций не может только своими силами разрешить все названные вопросы картографии. Но при целесообразном распределении работ, можно было бы сделать во много раз больше, чем делается сейчас. Задачу координирования научных исследований должен выполнять специальный научный центр при АН СССР.

Борьба за создание научного центра советской картографии требует больших усилий. Решающую роль в его организации будет играть широкий обмен мнениями, который должен быть организован отделением картографии ВГО.

Отсутствие должной критики в работе

Успехи в развитии советской картографии в огромной мере зависят от того, насколько решительно мы ведем борьбу с недостатками. Много говорилось о достоинствах несомненно лучших наших картографических произведений таких, как Морской Атлас, Атлас Мира, топографические карты и др. Но мы совершенно не видим опубликованных в печати материалов, показывающих их слабые стороны. Критика изданных произведений за малым исключением неконкретна и «беззуба». Отсутствует критический разбор деятельности лабораторий, кафедр и отдельных ученых. Все это порождает вопиющие разногласия в нашей научно-технической литературе. Несогласованность классификаций, определений, терминологии, транскрипции и т. п. делает научно-техническую литературу подчас трудно доступной для совместного изучения. Различные ведомства имеют отличные друг от друга классификации карт, по-разному определяются содержание картографии и состав ее дисциплин и т. п. В литературе по вопросам аэрофотокартографии в издании различных ведомств даже по-разному обозначаются координатные оси, что вызывает путаницу и с обозначением других величин. Ведомственный подход при написании отдельных трудов по картографии приводит к тому, что труды других ведомств по данному вопросу не используются. Так, например,

в списке использованных материалов выпуска 104 трудов ЦНИИГАиК «Основы генерализации на общегеографических картах мелкого масштаба», нет указаний на труды по генерализации издания других ведомств. Подобные примеры могут быть продолжены.

Ведомственность проявляется также и в том, что всякая критика со стороны, вызывает резкие выпады в адрес рецензентов. Так например, резким выпадом в адрес Географического общества ответил ГУГК на рецензию на «Атлас для учащихся 7 и 8 классов».

На непреодолимые ведомственные бюрократические отношения между Министерством просвещения РСФСР и ГУГК при МВД СССР натолкнулась инициатива Отделения картографии ВГО по созданию учебной топографической карты для школьников г. Ленинграда.

Особенно резко проявляется ведомственность в вопросах транскрипции географических названий. Установлением транскрипции названий в СССР занимаются многие организации и ведомства: ГУГК, Гидрографическое управление, ВТУ, Главная редакция Морского атласа; ряд издательств: Учпедгиз, Географгиз, Иностранной литературы, БСЭ. Каждая организация проводит своими силами работу по транскрипции и не считается с транскрипцией географических названий другой организации. Получается явно ненормальное положение, при котором работа дублируется, транскрипция других ведомств не используется.

Приведенные факты показывают, что проявление ведомственности не только наносит материальный ущерб государству, но и тормозит развитие советской картографии. Задача отделения картографии ВГО состоит в том, чтобы организацией широкого обсуждения вести непримиримую борьбу с проявлением ведомственных тенденций в советской картографии.

В связи с этим уместно привести высказывание академика В. А. Обручева: «Наука требует принципиальности. Ищите правду и только правду. Не припугивайте к доводам науки постороннего соображения — соображения самолюбия, выгоды, приятельских отношений, преклонения перед авторитетом» (Литерат. газета 7.5.55 г.).

Отсутствие должной критики и самокритики привело к тому, что мы недостаточно слабо изучаем иностранный опыт. Вместе с тем внимательное изучение преимуществ иностранных карт в показе некоторых элементов местности — важное дело в совершенствовании наших карт. Для примера укажем, что изображение рельефа на советских картах в массе выше по качеству, чем на иностранных, однако наши карты по выразительности изображения высокогорного рельефа уступают, например, швейцарским и некоторым итальянским картам. Крупномасштабные голландские и датские карты с богатым красочным оформлением площадей, занятых растительностью, значительно нагляднее наших карт. Более наглядно цветное изображение населенных пунктов на английских, голландских, французских и других картах. Подобные примеры могут быть приведены и из сопоставления мелкомасштабных карт и атласов. Было бы ошибочным ограничивать вопрос изучения иностранного опыта только изучением самих карт. Не менее важным является и изучение иностранной техники изготовления карт. Все то, что за рубежом является новым, прогрессивным, должно быть изучено и поставлено на службу советской картографии. Международные связи в области картографии, должны быть расширены путем более широкого обмена изданиями, обмена опытом и организацией международных совещаний по теоретическим проблемам картографии. Не вызывает сомнения, что доклады, прочитанные проф. Салищевым К. А. в Швеции, Индии и Бразилии о достижениях советской картографии, а также организованные

выставки картографических произведений служат ценным вкладом на пути расширения международных связей.

Однако, поездки за границу наших ученых пока являются «вещью в себе», ибо широкая научная общественность надлежащим образом не информируется. Практика публикации подробных отчетов о заграничных поездках, принятая в Географическом обществе ранее, должна быть восстановлена.

Живая связь с географами и картографами других стран: организация выставок, участие в международных конференциях и конгрессах — была всегда присуща работе Русского Географического общества. Выдающиеся ученые-географы России — Болотов, Витковский, Шокальский — оставили нам лучшие образцы работы по изучению и критической оценке иностранного опыта

Заключение

Указанные недочеты советской картографии не умаляют огромных достижений, которые она имеет. Наша задача заключается не в том, чтобы зафиксировать имеющиеся недочеты, а в том, чтобы в кратчайшие сроки их устранить. Для этого надо разработать ряд практических мероприятий. Отделение математической географии и картографии имени Ю. М. Шокальского Географического общества Советского Союза должно использовать свои возможности для организации проведения дискуссии, позволяющей уяснить недостатки в картографическом производстве и науке, направить усилия на устранение вскрытых ошибок и недочетов.

Теоретические дискуссии и широкое развитие критики должно способствовать мобилизации мощного коллектива советских картографов на решение указанных задач.

Ф. А. ШИБАНОВ

КАРТОГРАФИЯ, ЕЕ ПРЕДМЕТ, СОСТАВ И МЕТОД¹

В последние годы все чаще и чаще раздаются голоса против существующего направления в картографии, против основных ее теоретических положений. Это показали прения по докладу К. А. Салищева «Задачи картографии в СССР в свете решений XIX съезда Коммунистической партии Советского Союза», происходившие 27 февраля и 20 марта 1953 г. в Отделении картографии Московского филиала Географического общества СССР. Но особенно это резко обнаружилось в докладе Ю. В. Филиппова «О предмете и методе картографии, сделанном на ученом совете ЦНИИГАиК.² В этих выступлениях отмечалось также, что ошибки в теории картографии вредно сказываются и на подготовке картографических кадров.

Что же такое картография? Понятие это не оставалось исторически неизменным, оно менялось с общим ходом развития науки и техники, с развитием человеческого общества.

Географическая карта в современном смысле слова появилась около двух тысяч лет тому назад, термин же «картография» довольно новый, он твердо вошел в литературу только в XIX веке, но полные права гражданства получил лишь в нынешнем столетии. До этого крупнейшие ученые — творцы картографической науки — содержание картографии сводили к содержанию географии. Так, Клавдий Птолемей писал: «География есть линейное изображение ныне известной нам части земли со всем тем, что на ней находится»³ Все содержание своей книги «Руководство по географии» Птолемей построил применительно к указанной цели.

Герард Меркатор, этот Птолемей XVI века в картографии, также не употреблял слова «картография». Для него география — это картография, для него карта — душа и тело географии. Его Атлас — ярчайшее тому свидетельство.

XVII век не изменил основного взгляда на картографию. Это век атласов-гигантов с обширнейшими географическими текстами.

В XVIII веке ведущая роль в географии и картографии принадлежала Франции. Интересны высказывания по этому поводу И. Деллиа, выходца и воспитанника французской школы географов. «Географом, — писал

¹ Доложено 9 января 1956 г на заседании Отделения математической географии и картографии ВГО.

² Филиппов Ю. В. О предмете и методе картографии Доклады на ученом совете ЦНИИГАиК, на правах рукописи. М., 1954.

³ Клавдий Птолемей. Руководство по географии. Кн. 1, глава I. Цитировано по книге М. С. Боднарского. «Античная география». М., 1953, стр. 286.

Делиль в 1727 г., — называют всякое лицо, опубликовавшее карту от своего имени, и вследствие этого звание географа присваивается часто людям, которые копировали карты, как простые чертежники... Было бы более правильным дать звание географа тем, кто составляет карты на основании собственных геометрических измерений местности, но таким лицам более подходит звание инженера или землемера. Звание географа следует понимать более широко... Географ — это человек, способный создать картину положения всех стран света, при этом картину, которая возможно ближе отражает истину.¹ Выражением этого взгляда на географию явилась деятельность Географического департамента, учрежденного при Петербургской Академии наук в 1739 году. «Помянутый департамент учрежден для двоякого намерения, то-есть.

1. Чтоб снабжать Российское государство ландкартами как о российских, так и о других известных землях и областях.

2. Чтоб обучать молодых людей, дабы они со временем сами сочинять могли такие ландкарты.² В 1741 г. в проекте учреждения Географического бюро при Кабинете царского двора И. Делиль сформулировал цели этого учреждения следующим образом: «составление географических, гидрографических и топографических карт и других необходимых планов и чертежей».³ Сведение задач географии к задачам картографии⁴ ярко проявилось в названиях картографо-геодезических служб большинства стран Западной Европы, где они чаще всего именовались и именуется военно-географическими институтами. Во Франции, например, военных картографов называли инженерами-географами. В России в XVIII веке исполнителей полевых съемок называли «геодезистами», хотя они не имели никакого отношения к геодезии. Термин этот перешел к нам, видимо, из Англии, так как первыми преподавателями этого предмета в России были именно англичане. Русские авторы иногда геодезию называли практической геометрией. Например, Степан Назаров в своей «Теоретической и практической геометрии», вышедшей в двух частях тремя изданиями (в 1760, 1768—1772 и 1775 гг.) писал: «Практика геометрии есть искусство, которое учит на поверхности земли разными математическими инструментами измерять поля, оныя исчислять и разделять из определенных мест в равныя и в данной пропорции части; разного вида фигуры с земли на бумагу и с бумаги на землю сносить, также снимать приступныя и неприступныя местности, высоты и прочее».⁵ Французы операции по съемке местности и триангуляции называли также геометрическими измерениями. Первая топографическая карта Франции, карта Кассини, называлась «Геометрической картой» (Carte geometrique de la France).

С учреждением в 1797 г. Депо карт, преобразованного в 1812 году в Военно-топографическое депо, в России наметился переход к новой терминологии в картографии. Появилось понятие «топография», наиболее точно раскрывающее сущность явления, связь содержания предмета

¹ И. Делиль. Проект по астрономии и географии, представленный в 1727 г. Цитировано по книге В. Ф. Гичуевой «Географический департамент АН XVIII в.», М.—Л., 1946, стр. 123—124.

² И. Ф. Трускот и Я. Ф. Шмидт. Мнение, каким образом Географический департамент при Императорской Академии Наук приведен быть может в лучшее пред нынешним состоянием Цитировано по книге В. Ф. Гичуевой «Географический департамент», стр. 199—200.

³ И. Делиль. (Проект) Учреждения бюро, департамента или конторы географии, подчиненных непосредственно его Императорскому величеству, там же, стр. 149.

⁴ Кроме Географического департамента АН, можно указать на Нюрнбергское Географическое общество.

⁵ См названное сочинение, часть вторая, второе издание, СПб., 1772, стр. 113—114

с истинным значением слова, и производные от него: «топограф», «топографическая карта». Но, как это ни парадоксально, в учебной и научной практике предмет этот по-прежнему продолжал именоваться «геодезией», часто с привеском «низшая». Под таким названием вышли десятки учебников в дореволюционное время, так именовался этот предмет в учебных планах Военно-топографического училища и Академии Генерального штаба. В отличие от «низшей геодезии» было введено в научный обиход понятие «высшая геодезия». Это «смещение языков», с которым давно следовало бы покончить, к великому сожалению, сохранилось до наших дней. Только в среде военной школы под влиянием трудов и деятельности В. В. Витковского, в начале XX века освободились от плена «низшей геодезии». Наконец, пришли к разумному выводу, что раз существует «топографическая карта», ее создатель — «топограф», то должна существовать и соответствующая научная дисциплина, — «топография».

Военно-топографическое депо делилось на 5 отделений; из них третье, в задачи которого входило «составление и черчение как топографических, так и географических по лучшим подлинникам карт», как впрочем и остальные, только впоследствии (в 1867 г.) стало называться соответствующим ему именем — картографическим отделением. В номенклатуре специальностей Военно-топографического депо даже в конце XIX века специальности картографа не было, были «военные художники», куда входили граверы, литографы, словорезы и др. Ни в программах Военно-топографического училища, ни в программах общего курса Академии Генерального штаба картографии как предмета не было, были «низшая» и «высшая» геодезия и «черчение планов». Правда, в курсе «высшей геодезии» имелся небольшой раздел под названием «проекции карт». Во второй части «Геодезии»¹ А. П. Болотова две главы также посвящены проекциям карт, но о картографии как науке там еще нет ни слова. Геодезию Болотов делил на «высшую» и «низшую».

В 1845 году А. П. Болотов опубликовал первую часть «Курса высшей и низшей геодезии», где определяет геодезию следующим образом: «Геодезия в нынешнем своем состоянии имеет целью исследование общего вида земной поверхности и изображение ее на бумаге (разрядка моя — Ф. Ш.). Она разделяется на высшую, или собственно так называемую геодезию и на низшую, или топографию».² Естественно, что при таком взгляде на геодезию, напрасно стали бы мы искать в трудах Болотова что-либо о предмете «картографии». В них мы найдем определение карты, классификацию карт, понятие о составлении карт и сведения о проекциях карт,³ но ничего не найдем о предмете «картография».

В Западной Европе термин «картография» вошел в литературный обиход около середины XIX в. Но под картографией понимали не науку, а результат производственной деятельности людей по созданию карт. Например, статьи крупного немецкого картографа Эмиля фон Сидова «Очерки современного положения картографии»⁴ и «Состояние картографии в Европе к концу 1857 года»⁵ показывают лишь, что конкретно создано той или иной страной в области производства карт. Аналогичные статьи периодически печатались в «Petermanns Mitteilungen». Понимание

¹ Болотов А. П. Геодезия, или руководство к исследованию общего вида земли, построению карт и производству тригонометрических и топографических съемок и нивелировок, часть II (проекции карт, нивелирование, топография), СПб. 1837, 445 стр. + 14 листов чертежей и карт, часть I, СПб. 1836, XVI + 360 стр.

² Болотов А. П. Курс высшей и низшей геодезии, часть I, СПб., 1845, стр. 99.

³ Там же, часть II, СПб., 1849, отл. V, глава I.

⁴ Вестник Русского географического общества, часть 21, 1857.

⁵ Вестник Русского географического общества, часть 27, 1859.

картографии в таком, производственном, смысле распространено довольно широко и сейчас.

На русской почве картография как предмет, научная дисциплина впервые появилась в учебных планах Геодезического отделения Академии Генерального штаба в 1865/1866 учебном году.

Получив в учебных планах права предмета, картография отнюдь не получила прав науки. Так, Н. Д. Артамонов (1840—1919 гг.), крупный геодезист, начальник Топографического училища, а затем начальник Военно-топографического управления в своем курсе «Нижней геодезии» в 1897 году писал: «Геодезия наука об измерениях, организованных с различными целями на земной поверхности, и о различных способах изображений каких-нибудь ее частей или всего земного шара»¹. В 1908 году О. Хауке в журнале «Землемерное дело» (№ 9—10, стр. 19) высказался на этот счет еще более определенно. «Коренной задачей высшей отрасли геодезической специальности, или геодезической специальности в собственном смысле этого слова, является составление карт или планов на обширные районы». Мы привели высказывания представителей двух школ, военной и межевой, но их можно было бы привести десятки.

Конец XIX и начало XX веков в русской картографической науке связаны с именем В. В. Витковского, создавшего трилогию: «Практическую геодезию», «Топографию» и «Картографию». Поэтому взгляды Витковского на рассматриваемый предмет представляют бесспорный интерес. Витковский впервые в нашей литературе строго разграничил задачи топографии и геодезии. В «Практической геодезии» (1898 г., стр. 669) Витковский писал, что предметом картографии как науки является подробное изучение проекций. «Задача картографии, — говорит Витковский, — ограничивается построением только сети меридианов и параллелей». Не подиался Витковский выше в понимании картографии и в последующих своих трудах. Это хорошо видно даже из одного названия третьего основного его сочинения — «Картография (Теория картографических проекций)». Из этой книги Витковский исключил даже те краткие сведения по составлению и изданию карт, которые были помещены в «Практической геодезии». Под составлением карт Витковский понимал действия, «посредством которых готовая картографическая сетка заполняется уменьшенным изображением контуров местности»². Несколькими страницами ниже Витковский писал: «Работа картографа сводится здесь (при заполнении картографической сетки подробностями — Ф. Ш.) только к вычерчиванию подробностей и обобщению контуров»³. Следовательно, весь процесс составления карты Витковский относил к простым техническим действиям и не придавал им научного значения. Что касается вопроса генерализации, то, по мнению Витковского, «искусство расценки важного и излишнего приобретает, конечно, только опытом»⁴ (курсив мой — Ф. Ш.).

Взгляды Витковского на картографию оставались в России до середины 30-х годов XX в. в вездущими. Но наряду с этим были и другие мнения. Например, неизвестный автор в 1902 году в «Большой энциклопедии» (т. 10, стр. 582) писал: «Картография — учение о составлении, изображении, техническом воспроизведении географических и специальных ландкарт». Менее строгое определение картографии дано Д. Алучиным в Энциклопедическом словаре Граната. «Картография, — говорит Алучин, — наука и искусство составлять и рисовать географические карты.

¹ Артамонов Н. Д. Курс нижней геодезии, СПб., 1897 г., стр. 1, в последующих изданиях (1899 и 1908 гг.) повторено то же самое.

² Витковский В. Практическая геодезия, СПб., 1898, стр. 745.

³ Там же, стр. 748.

⁴ Витковский В. Практическая геодезия, СПб., 1898, стр. 749.

т. е. давать при помощи известных условных способов обозначений возможное точное изображение больших или меньших частей земной поверхности, а также всего земного шара»¹.

В 1904 году W. Stavenhagen (капитан русской службы) в журнале «Petermanns Mitteilungen», Ergänzungsheft № 148 опубликовал монографию под названием «Skizze die Entwicklung und des Standes die Kartengewissen die ausserdeutschen Eurora», в которой писал: «Ход развития картографии находится в полной зависимости от истории открытий и состояния техники измерений земной поверхности, т. е. геодезии и топографии. . . Эта зависимость долгое время препятствовала картографии выделяться в самостоятельную науку. Однако в настоящее время является уже возможность выделять картографию в особую дисциплину, которая имеет своим предметом изображение земной поверхности в широком смысле этого слова, вырабатывает строго научные способы и приемы для осуществления своих задач и становится в центре других отраслей знаний, которые уже являются для нее вспомогательными средствами»² (курсив мой — Ф. Ш.).

Итак, Ставенгаген картографию ставит в центр, другие же смежные отрасли знаний, по его мнению, являются для нее вспомогательными средствами. Правда, Ставенгаген не называет эти «другие отрасли знания», но, бесспорно, здесь имелись в виду, в первую очередь, геодезия и топография.

После Октябрьской революции около двух десятков лет труды Витковского оставались основными трудами по картографии, поэтому и взгляды Витковского на предмет картографии имели столь же широкое распространение.

Одной из наиболее ранних работ советской картографии явились работа К. А. Саллишева «Технические приемы составления топографических и географических карт» (1933 г.). Ни определения предмета картографии, ни ее состава автор нам не дает.

В 1937 году неизвестный автор в БСЭ (т. 31, стр. 647) дал такое определение картографии: «Картография — наука, изучающая методы и процессы создания географических карт». Что автор понимал под процессами создания карт, неизвестно. Определение это не отличается ни полнотой, ни новизной. Мы уже встречались с более строгими определениями.

Но при всех недостатках этого определения картографии, с ним можно более или менее мириться. Но более чем странно в наше время слышать такое заявление: «Картография представляет собой отдел геодезии». . . и т. д. Слова эти принадлежат И. П. Заруцкой и высказаны ею в 1939 году в VI томе (стр. 7) «Геодезия. Справочное руководство» под редакцией М. Д. Бонч-Бруевича. В 1949 году в I томе (стр. 6) того же издания повторена мысль 1939 г., а именно: «Одним из отделов геодезии является картография». Исходя из такого взгляда на картографию, редакция в определении предмета геодезии включает «и изыскание способов изображения (земной поверхности — Ф. Ш.) на бумаге в данном уменьшении (масштабе)». Не ушел дальше А. П. Болотова в своих взглядах на геодезию и картографию и А. А. Изотов в БСЭ (второе издание, т. 10, стр. 487—488) он пишет: «Геодезия — наука, занимающаяся определением фигуры и размеров Земли, изображением земной поверхности на планах и картах и точным измерением на местности при осуществлении

¹ Том 23, 7-ое переработанное издание (год не указан), стр. 550.

² Цитировано по П. Е. Воляровичу «Современное состояние и задачи картографии по W. Stavenhagen» Известия РГО, т. XLII, вып. II, СПб., 1905, стр. 264—265.

различных мероприятий». Если взгляды Болотова на наш предмет до известной степени исторически оправданы, то взгляды Изотова и других оправдать ничем нельзя. Возвращение к временам Болотова не только анахронизм в науке, это неверная и вредная ориентация науки. Нельзя повторять Болотова в настоящее время, когда существует мощная картографическая промышленность с целой армией инженеров-картографов, редакторов карт, корректоров, печатников и т. д., когда миллионными тиражами выпускаются самые разнообразные карты. Картография это уже не только наука, но это и крупнейшая отрасль народного хозяйства. И тот, кто пытается зачеркнуть все это, делает грубейшую ошибку, наносит вред картографии. По Изотову и другим получается довольно странно: имеется крупная картографическая промышленность, продукция этой промышленности в виде разнообразных карт и атласов, имеется армия работников этой промышленности, инженеры и техники-картографы — все есть, только нет соответствующей науки, картографии! Изотов забывает ту историческую истину, что еще задолго до того, как сложилась геодезия, были созданы фундаментальнейшие картографические произведения XVI, XVII и XVIII вв., а стало быть объективно существовала и картография. Использование в картографии данных триангуляции, полигонометрии и нивелирования не превращает ее в придаток другой какой-то науки, а поднимает ее лишь на новую ступень исторического развития, подобно тому как это было при переходе от создания карт на основе опрочных данных и географических описаний к созданию их на базе полевых съемок. Точку зрения Изотова и других я объясняю, главным образом, местничеством, желанием представить область своих занятий чем-то особенным, из ряда вон выходящим, главным, не забываясь о том, соответствует это действительности или нет. Изотов и другие не хотят взглянуть действительности в глаза, признать, что геодезия-то является служанкой картографии, а не наоборот. Ведь вся деятельность геодезии¹, за очень малым исключением, сводится к получению системы плановых и высотных опорных точек, которые сами по себе, без использования их в картографии, не представляют никакой ценности, это не конечная цель процесса — это промежуточное звено. То же, в основном, касается и астрономических пунктов. Астропункт сам по себе — это абстракция. Даже в тексте он приобретает смысл только лишь потому, что мы мысленно связываем его с картой.

Работы по определению вида и размеров Земли теперь самостоятельно не ставятся (это не XVI—XVIII вв.), а задача эта решается попутно с решением основной задачи, т. е. с созданием опорной сети для постановки картографических работ. Удельный вес всех работ по определению вида и размеров Земли относительно общего объема геодезических работ в наше время чрезвычайно мал, поэтому ставить в геодезии на первое место определение вида и размеров Земли, как это делают, нет основания, это цепляние за прошлое, традиция. Давно кончилась «геронская» эпоха градусных измерений, когда крупнейшие ученые всех передовых стран мира были поглощены этим делом. Определять же предмет науки по ее n -степенному практическому значению, безусловно, неверно. Вопрос определения вида и размеров Земли практически уже решен с достаточной точностью и, следовательно, уточнение в принятых размерах ее даже на сотни метров ничего не изменит в картографии.² Конечно, мы совершенно далеки от той мысли, что не нужно продолжать трудиться по

¹ Вопросы инженерной геодезии и маркшейдерии мы совершенно не касаемся они имеют свои задачи и с картографией имеют отдаленную связь.

² Это следует из статьи самого Л. А. Изотова Современное состояние и задачи изучения фигуры Земли «Геодезия и картография», № 10, 1956, стр. 3—13.

уточнению размеров Земли. Оно будет продолжаться по мере накопления новых материалов. Долго еще будут работать ученые над определением действительного вида Земли. Но повторять, задачи эти уже давно решаются и будут решаться в дальнейшем попутно с решением основных задач: создания государственной астрономо-тригонометрической сети и нивелирной сети, необходимых для нужд народного хозяйства и в первую очередь — картографии. Ф. Н. Красовский по этому поводу еще в 1926 г. писал: «Технические задачи высшей геодезии (куда Красовский относил создание астрономо-геодезической основы карт — Ф. Ш.) направлены главным образом на правильную организацию и исполнение картографической службы в государстве, и поэтому здесь высшая геодезия вступает в полный контакт и органическую связь с топографией и картографией».¹ То же, в основном, писал Ф. Н. Красовский о научно-технической (по терминологии Красовского) стороне геодезии и в 1938 г.²

Диаметрально противоположной точкой зрения на предмет картографии являлась точка зрения А. В. Граура, высказанная им в 1938 году в книге «Математическая картография». «Под картографией в широком смысле слова, — писал Граур, — понимаются совокупность дисциплин, изучающих методы и технические процессы создания карт».³ «... Картография, понимаемая в широком смысле слова, — продолжает Граур, — делится на следующие разделы:

1. Практическая геодезия — теория тригонометрических и полигонометрических сетей.
2. Топография — теория топографических съемок.
3. Математическая картография — теория картографических проекций.
4. Картосоставление — методы составления карт.
5. Картоиздательство — технические процессы воспроизведения карт».⁴

Все эти дисциплины в картографии, по мнению Граура, направлены в конечном счете к осуществлению единой цели — получению карты. Эта совершенно очевидная истина впервые так ясно была сформулирована А. В. Грауром. Геодезия, топография, составление карт и т. д. — это отдельные звенья единого картографического процесса, конечной целью которого является получение карты. У Граура важно не определение картографии, оно неточно, а указание на состав картографии. Правда, ныне в составе этом практическая геодезия должна быть заменена астрономо-геодезической основой карт.

Подобно тому, как в производстве отдельные цехи, составляя единство фабрики или завода, существуют и развиваются лишь в силу существования и развития данного единства, так и астрономо-геодезическая основа карт (сокращенно геодезия), топография, математическая картография, составление карт и т. д. представляют собой единство картографического процесса, составляют картографию. Это исторически сложившееся единство, в котором отрыв одного звена влечет за собой нарушение во всей цепи. Однако мы отнюдь не отрицаем существования геодезии и топографии в качестве научных дисциплин. Пусть это никого не удивляет, как школо, полагаю, не удивляет, что внутри биологической науки существуют десятки научных дисциплин, изучающих различные

¹ Красовский Ф. Н. Руководство по высшей геодезии, часть I, М., 1926, стр. 1.

² Красовский Ф. Н. и Данилов В. В. Руководство по высшей геодезии, часть I, вып. I, М., 1938, стр. 15—16.

³ Граур А. В. Математическая картография. Л., 1938, стр. 5.

⁴ Граур А. В. Математическая картография Л., 1938, стр. 10.

стороны проявления жизни (в биологическом смысле). То же в геологии и т. д. В технических науках, куда относится и картография, взаимосвязь отдельных научных дисциплин выступает особенно резко. Отстаивая данную точку зрения, мы выступаем лишь против искусственного разрыва научных теорий с существующим производственным процессом, который мы отражаем в наших научных теориях. Содержание и предмет науки должны отражать и теоретически развивать производственный процесс в определенной конкретной области производства. Вот это-то многие, видимо, и забывают. Попытка создать какую-то особую картографическую науку без учета этого нормально протекающего производственного процесса есть ни что иное, как отрыв теории от практики, отрыв от жизни.

Неверное определение науки и ее содержания особенно вредно влияет на подготовку кадров. Если под картографией мы будем понимать совокупность знаний о создании географических карт, а под «созданием карты» — весь процесс от определения астропункта до выхода карты в свет и построим согласно этому пониманию учебные планы, то подготовка кадров примет одно направление; если же в основу картографии мы положим «изучение» или «составление» географических карт, подготовка кадров примет иное направление. Это совершенно очевидная истина. Правда, в течение пяти лет, подготовить специалиста, который в одинаковой степени владел бы всеми звеньями картографического процесса, пожалуй, невозможно. Поэтому подготовку приходится вести по отдельным разделам науки. Но из этого не следует, что мы должны отказаться от идеи подготовки картографа широкого профиля.

К. А. Салищев изложил свои взгляды на картографию в 1939 году в «Основах картоведения». Сущность картографии К. А. Салищев видит не в создании карты, а в изучении ее как продукта производства, произведенной эпохи. Поэтому, по определению К. А. Салищева, «картография в целом представляет собой науку о географической карте, о методах и процессах ее составления и воспроизведения». ¹ В течение последних 15 лет К. А. Салищев дал несколько вариантов определения предмета картографии, но сущность этих определений несколько не изменилась. Из этого обилия определений мы возьмем последнее, данное в 20 томе (стр. 278) БСЭ (второе издание), где читаем: «Картография — наука о географических картах, включающая в свои задачи всестороннее изучение географических карт, а также разработку их создания и использования». Как видим, и в том и в другом случае на первом месте у К. А. Салищева фигурирует изучение готовой карты. В последнем случае это даже подчеркивается. Никто не станет, конечно, отрицать необходимость изучения готовой продукции, в данном случае картографической, но превращать это в главную задачу, в какую-то самоцель, мы считаем грубейшей ошибкой. Прежде чем изучать вещь, предмет и т. д. ее нужно создать. Изучение созданного входит составной частью в создаваемое — это естественный процесс познания и создания. Совершенно прав Ю. В. Филиппов, который по поводу определения картографии К. А. Салищева замечает: «Если логически следовать этому определению, то нужно было бы признать невозможным появление первой карты, а следовательно и картографии». ² Что получилось бы, если бы, вняв совету К. А. Салищева, вся армия ученых вместо разработки новых машин и станков, приборов и аппаратов, вместо выведения новых высокопродуктивных пород животных и сельскохозяйственных растений и т. д. и т. п., вдруг, бросилась бы изучать то, что было создано их предшественниками!

¹ Салищев К. А. Основы картоведения. Часть общая. М. 1939, стр. 16

² «Вопросы географии», сборник 34, М., 1954, стр. 21.

В состав картографии К. А. Салищев, как известно, включает картоведение, математическую картографию, составление, редактирование и издание карт. Картоведение в свою очередь К. А. Салищев подразделяет на общую часть, или общее учение о карте, историю картографии и картографические материалы. Следовательно, картографию К. А. Салищев ограничивает узким кругом камеральных вопросов. Включение в состав картографии астрономо-геодезической основы карт и топографии Салищев относит к величайшему заблуждению. ¹ Было бы еще полбеды, если бы теоретические взгляды К. А. Салищева не переносились в область практической деятельности. К сожалению, они были положены с 1948/49 учебного года в основу министерского учебного плана по специальности картографии, в результате чего был нанесен значительный вред делу подготовки картографических кадров. ² Стали готовить, как мы отмечали, картографов узкого профиля, картографов-картосоставителей с картоведческим уклоном. Астрономо-геодезическая и топографическая (куда мы включаем и аэрофотокартографию) подготовка была отодвинута на задний план, сведена до минимума.

Хотел того К. А. Салищев или нет, но многие недостатки в подготовке картографов коренятся именно в общих его теоретических взглядах на предмет. Это совершенно справедливо было отмечено Ю. В. Филипповым в дискуссии по докладу К. А. Салищева в 1953 г. ³ На наш взгляд, картограф без солидной математической, астрономо-геодезической и топографической подготовки — это недочка, ремесленник. Нам нужен такой картограф, который с одинаковым успехом мог бы работать и в поле, и в камеральных условиях. Нам нужен картограф широкого профиля. Именно таких специалистов следует готовить в высшей школе. Сообразно с этим и нужно определять предмет и состав картографии. Поэтому заявления об улучшении подготовки кадров, ⁴ пока в основе предмета лежат те же теоретические положения, будут оставаться фразой. Сколько бы мы не изучали «карту», от этого в стране не увеличится картографическая продукция. Стране нужны тысячи картографов и всего навсего десяток картоведов. По моему глубокому убеждению, картоведение (в понимании К. А. Салищева), кроме истории картографии, можно безболезненно исключить из программ картографических специальностей, а вместе с тем и из комплекса картографических дисциплин. Часть вопросов, включенных в Общую часть картоведения, излагается в курсе топографии, другая, большая часть — в курсе составления карт. То же самое касается и раздела «картографические материалы». Ведь обычно необходимость какой-либо дисциплины (специальной) в учебных планах определяется тем, что часть существенно важных вопросов остается вне поля зрения программ других дисциплин и эти вопросы, не нарушая стройности и последовательности изложения, не могут быть включены в программы этих других дисциплин. «Картоведение» целиком поглощается программами других дисциплин. Отнесите вы его на пятый курс и от него ничего не останется, кроме обложки, названия. Но это не значит, что мы вовсе отрицаем «картоведение». Такой курс крайне необходим для студентов-географов педагогических институтов (где он и читается). Литература же по картоведению нужна широкому кругу географов.

¹ Основы картоведения. М. 1939, стр. 16.

² Мы имеем в виду подготовку картографов по линии университетов

³ Салищев К. А. Задачи картографии в СССР в свете решений XIX съезда Коммунистической партии Советского Союза «Вопросы географии», сборник 34, М., 1954, стр. 22 (в дальнейшем Задачи)

⁴ Салищев К. А. Задачи... стр. 12—13

В 1941 г. А. М. Комков в статье «Картография в среде географических наук»¹ по существу повторил точку зрения А. В. Граура о картографии. «Существующее до сих пор разделение и противопоставление картографии топографии», — писал А. М. Комков, — следует признать неверным и искусственным.

«Все методы создания карт, — продолжает Комков, — необходимо рассматривать, как части целого, они должны быть увязаны между собой, и только это даст картографии как науке необходимое методологическое единство».² В состав картографии А. М. Комков включил также и «геодезическую основу карт». С данным им составом картографии, за небольшим исключением, можно было бы вполне согласиться. К сожалению, ныне А. М. Комков отошел от своих позиций 1941 г. и принял, в основном, точку зрения К. А. Салищева,³ которую мы уже изложили, поэтому останавливаться отдельно на статье А. М. Комкова нет необходимости. Мы разбираем не мнения отдельных авторов, а направления в науке. Только позволю себе заметить, что объективно все рассуждения А. М. Комкова о связи топографии с картографией ведут автора к его точке зрения 1941 г. Если два десятка лет тому назад внешне еще были некоторые основания разрывать полевой и камеральной картосоставительский процесс, то в настоящее время для этого уже нет никакого основания. Ныне оба эти процесса настолько срослись, что мы можем говорить лишь о двух способах составления карт — по аэрофотоснимкам и по картам. Топография, или вернее аэрофототопография, сейчас так прочно и широко вошла в учебную и производственную практику, что отрыв ее от других сторон картографического процесса просто немислим.

Наша точка зрения на сущность картографии, полагаю, уже достаточно ясна. Отбрасывая «все частные признаки единичных явлений», картографию можно определить как совокупность знаний о создании географических карт, причем под «созданием карт» мы понимаем весь процесс от определения астропунктов до выхода карты в свет. В соответствии с этим в состав картографии мы включаем:

1. Астрономо-геодезическую основу карт (теорию ее создания).
2. Математическую картографию, или теорию картографических проекций, и другие связанные с этим вопросы.
3. Топографию, или теорию создания карт как методом полевой съемки, так и камеральной, стереофотограмметрическим путем.
4. Составление карт, изучающее и разрабатывающее методику и способы составления всех видов наземных карт
5. Способы издания карт.⁴

Это основные, профилирующие разделы картографической науки, отражающие естественный производственно-технический процесс в карто-

¹ Комков А. инж. Картография в среде географических наук. «Сборник научно-технических и производственных статей по геодезии, картографии, топографии, аэросъемке и триангуляции», вып. 1, Геодезиздат, М., 1941, стр. 54—64.

² Комков А. См. указ сочинение, стр. 59.

³ Комков А. М. К вопросу о взаимосвязи картографии с геодезией, топографией и географией при современном состоянии этих наук «Вопросы географии», сборник 34, М., 1954, стр. 58—72.

⁴ Как мне в последнее время стало известно, почти аналогичной точки зрения придерживаются и американские картографы. Так, Артур Робинзон пишет: «Картография, фирование земной поверхности. В современном понимании она включает геодезию, геодезическую и топографическую съемку (включая фотограмметрию), а также все лавыки и технические приемы, связанные с составлением, черчением и изданием карт» См. в книге П. Джемс и К. Джонс Американская география, современное состояние и перспективы. Перевод с английского. М., 1957, стр. 529.

графии. В учебной практике они обычно дополняются рядом второстепенных, вспомогательных дисциплин, из которых одни имеют научно-техническое, другие общеобразовательное (в специальном смысле) и культурно-воспитательное значение. К последним относится история картографии. Более того, история науки нередко дает ключ и к решению практических задач.

Наконец, из изложенного с полной очевидностью следует, что предметом картографии как науки является изучение и разработка способов и процессов создания географических карт.

В 1954 году ЦНИИГАиК разослал «Доклады на ученом совете» и в числе их доклад Ю. В. Филиппова о «Предмете и методе картографии». Доклад, на наш взгляд, отличается исключительной путанностью и непродуманностью. Примером может служить определение предмета картографии: «Картография имеет предметом изучение и графическое отображение наиболее существенных признаков и свойств морфологии местности, рассматриваемых в зависимости от их географического положения и времени, т. е. как функций географических координат, высоты и времени» (стр. 4). Не хочется даже верить, что это определение принадлежит перу картографа, оно похоже скорее на какой-то шарж, чем на определение предмета науки. Чтобы лучше видеть абсурдность определения предмета картографии, данное Филипповым, тут же приведем и его определение карты. «Общегеографическая карта» (почему не просто карта? — Ф. Ш.) — графическое отображение наиболее существенных признаков и свойств морфологии местности, рассматриваемых в зависимости от их географического положения и времени», — говорит Филиппов (стр. 4). Если из определения предмета картографии Филиппова исключить совершенно несвойственное ей, далекое от ее прямых задач «изучение»... морфологии местности, тогда предмет «картография» станет равнозначен «общегеографической карте».

«Надо со всей определенностью подчеркнуть, — писал Салищев, — что картографическая наука, как таковая, не может ставить своей задачей познание тех самых вещей, явлений и процессов, которые изучаются отдельными естественно-историческими и общественными науками. Например, картография не может включать в круг своих интересов изучение форм земной поверхности и их генезиса, что является предметом геоморфологии. Другое дело, что картограф для правильного отражения на карте определенных сторон действительности, для правильной их генерализации должен быть хорошо ориентирован в соответствующей отрасли знания, например в геоморфологии, для научного обоснования передачи на карте рельефа».¹

Полемизируя с Салищевым по поводу задач науки, Филиппов пишет: «Ни одному топографу не может прийти в голову, что основной задачей топографии служит изучение сущности топографических карт, а не местности, т. е. принять отражение действительности за саму действительность» (стр. 2).

Топография как наука не изучает местность, а занимается изучением способов и процессов детального отображения земной поверхности на плоскости при помощи непосредственных полевых или сочетания полевых и камеральных фотограмметрических измерений, а также изучением тех приборов и инструментов, с помощью которых производятся эти измерения. То же касается и картографии как науки. Она занимается лишь разработкой теоретических основ, способов и процессов создания карт, она

¹ Салищев К. А. Картография, ее предмет и некоторые задачи «Вопросы географии», сборник 9, М., 1948, стр. 116—117.

лишь освещает путь практике, дает ключ к решению практических задач. Во всем этом Филиппов явно путает картографию как науку с технической стороной картографии, выражающейся в создании карты. Не нужно путать этих вещей. Не следует забывать и того, что картография, являясь по своей природе и сущности наукой географической, в целом относится к научно-техническим отраслям человеческих знаний и, следовательно, ей присущи все особенности подобных наук. Картография как наука не занимается «отображением... морфологии местности», не создает карты, она только вооружает людей знаниями, учит, как это делать. Конкретно решает эти задачи живой человек, вооруженный научными знаниями и техникой, инженер-картограф. Напишет ли Филиппов еще тысячу томов по теории картографической науки, от этого в мире не увеличится количество карт, не продвинется «графическое изображение местности» ни на один шаг, пока инженер или техник-картограф, овладев всем богатством человеческой мысли, не реализует их в конкретные величины, вещи, предметы и т. д. Повторяю, картография как наука не занимается графическим отображением земной поверхности, но картография вообще, — как единство науки и практики картографии — да.

В основу определений Филиппова картографии и карты положена, как мы видим, «морфология местности». У Филиппова морфология играет такую же роль в картографии, какую играет у Витковского «геометрия» в топографии. Более того, определение Филиппова предмета «картография», по существу, повторяет определение Витковского предмета «топография».

Обрывать в наше время картографию на отображения только морфологии местности, как это делает Филиппов, это значит идти не вперед, а назад, по крайней мере, к началу XIX века. При современном многообразии специальных карт, на которых часто и памятка на морфологию местности нет, утверждение Филиппова просто нелепо. Можно привести сотни примеров специальных карт, на которых морфология местности никак не отражается. Например, карты климатические, морских течений, карты миграции, просвещения и культуры, рождаемости и смертности, карты воздушных и водных путей сообщения, карты магнитных склонений, гравиметрические карты, карты финансовой зависимости капиталистических стран. Все социально-экономические карты, как правило, морфологии местности совершенно не отражают. Символика на этих картах в виде всевозможного рода геометрических значков с морфологией местности не имеет ничего общего. И все это богатство Филиппов одним взмахом пера вычеркивает из картографии.

Неверно также подобное утверждение Филиппова и в отношении общегеографической карты. Последняя отображает не только геометрию, или, по Филиппову, морфологию местности, далеко нет, слишком бедной была бы такая карта. Достаточно снять с карты только пояснительные надписи и немасштабные условные знаки, как она тотчас же превращается во что-то застывшее, застеленное, мертвое. Как, например, на карте морфологически отразить принадлежность озер, судорожность рек, качественную сторону лесов, принадлежность фабрик и заводов. Как морфологически отразить два рядом стоящих здания, если в одном из них помещается больница, а в другом школа, как отличить усадьбу совхоза от МТС и т. д. и т. п.? Карта ведь так богата и разнообразна содержанием, что сведение этого богатства только к морфологии местности крайне неразумно и противоречит действительности.

Не последнюю роль в определениях Филиппова играют географические координаты, высота и время, или, короче говоря, пространство и время. Эти основные формы всякого бытия для картографии не являются чем-то особенным, специфическим, поэтому нет никакой надоб-

ности включать их в определения предмета картографии и карты... «Бытие вне времени есть такая же величайшая бессмыслица, как бытие вне пространства»,¹ писал Фридрих Энгельс еще в 1894 году.

В своем докладе Филиппов значительное место отводит методу картографической науки. Таким методом, по мнению Филиппова, является картографическая генерализация. Он пишет: «Генерализация — метод выделения наиболее существенных признаков и свойств местности и отображение их на карте разного назначения и масштаба» (стр. 6). О сущности генерализации имеются различные точки зрения, из них наиболее удовлетворительной является точка зрения К. А. Салищева. То же можно сказать и относительно определения генерализации.² В. И. Сухов, например, генерализацию отождествляет с картографией в целом. «Генерализация, — говорит Сухов, — понимаемая в широком смысле, есть отображение на карте действительности... Это познавательный и вместе с тем активный процесс. В результате его картограф создает образ, изображения действительности».³

Что же означает по-русски, не мудрствуя лукаво, генерализация? — Обобщение. Является ли обобщение монополией картографического процесса? Отнюдь нет. Без него немислим ни один творческий процесс в науке, литературе, искусстве, но в каждом конкретном случае обобщение проявляется по-разному. Это такая очевидная истина, что о ней нет надобности распространяться. Обобщение — это душа любого творческого процесса, более того, это сам творческий процесс.

Мне не совсем понятно, почему многие картографы из генерализации пытаются создать какой-то фетиш, приписывают ей в картографии что-то особенное, из ряда вон выходящее. На самом деле, в картографии обобщение и отбор происходит значительно проще, чем, скажем, в художественной литературе. В картографии это во многом лимитируется масштабом карты. Географическое положение, степень изученности и освоения района, не говоря уже о назначении карты, также значительно облегчает генерализацию. Может ли, например, составить какое-либо затруднение генерализация путей сообщения и населенных пунктов на Таймыре или Чукотке, или, например, изображен западной части Австралии и Сахары? Во многом облегчают картографическую генерализацию действующие для некоторых масштабов карт инструкции и наставления.

Изложенное позволяет нам сделать вывод, что генерализация (обобщение), являясь всеобщей категорией (особенностью) творческого процесса, не может быть методом картографической науки. И как бы Филиппов и Сухов не склоняли генерализацию, чего бы они ей не приписывали от этого суть дела не изменится, генерализация останется генерализацией и ничем иным.

Картография, являясь по своему характеру и результатам деятельности наукой технической, в решении своих задач пользуется самыми разнообразными научными и техническими методами, основанными на методе диалектического материализма. Применение того или иного метода в науке объективно не зависит от исследователя, он всецело диктуется характером исследования. Исследователь редко когда задумывается над тем, каким именно методом он пользуется и на этот вопрос ответит вам не сразу, а чаще всего и вовсе не ответит. В технике вопрос обстоит несколько иначе. Здесь инженер или техник заранее выбирает метод для решения конкретной задачи сообразно поставленной цели.

¹ Фридрих Энгельс Анти-Дюринг, 1948 г., стр. 49

² Салищев К. А. при участии В. И. Сухова и Ю. В. Филиппова. Составление и редактирование карт. Часть I, М., 1947, стр. 76—77 и далее.

³ «Вопросы географии», сборник 34, М., 1954, хроника, стр. 203

Иногда такой метод складывается в процессе работы. В технике порой одна и та же задача решается различными методами. Это особенно характерно в картографии при составлении специальных карт.

Разнообразие методов в картографии вытекает из существа самого предмета (в нашем понимании) и многообразия явлений, отображаемых на картах. В картографии, как и в других областях знаний, применяется анализ и синтез. В геодезии, топографии и математической картографии применяется метод математического анализа. Техническая сторона геодезии в основном построена на методе тригонометрической съемки, топографии — на методе различных съемок: мензуральной, тахеометрической и аэрофотосъемки. При составлении специальных карт, особенно социально-экономических, преобладает статистический метод, причем он иногда расчленяется на абсолютный и относительный. В свою очередь внутри каждого из них имеются свои специфические методы, если так можно выразиться, методы третьего порядка. В качестве примера можно указать на карты населения. Широкое применение находит при составлении специальных карт метод качественного фона, а также метод изолиний. Последний очень распространен в климатических картах. В его основе, в свою очередь, лежит статистический метод и т. д.

Следовательно, при изучении какого-либо явления или его отображения могут действовать различные методы исследования, но провести между ними грань и решить какой из них основной, какой второстепенный, где начинается один и где кончается другой, часто почти невозможно. Одно бесспорно, что картография в целом, помимо общих, свойственных своим, только ей присущие методы. Однако это отнюдь не значит, что любая наука обязательно должна иметь свой метод научного исследования.

МАТЕРИАЛЫ ОБСУЖДЕНИЯ ДОКЛАДА Ф. А. ШИБАНОВА «КАРТОГРАФИЯ, ЕЕ ПРЕДМЕТ И МЕТОД»

(Сокращенная стенограмма выступлений: К. А. Звонарева, Н. Б. Кострица, А. А. Павлова, Ю. М. Орлецкого, А. И. Ларионовой, А. Г. Исаченко)

Выступление К. А. ЗВОНАРЕВА

В докладе Ф. А. Шибанова я усматриваю две стороны и два назначения: одно — явное, выражаемое темой доклада, — доказать свое понимание предмета и содержания картографии как науки; второе — скрытое — определить круг дисциплин, подлежащих изучению при подготовке картографа к его практической деятельности.

Обе стороны доклада важны и представляют для нас, работников картографической науки, непосредственный и практический интерес. Однако содержание картографии как науки и практическая деятельность картографа не одно и то же, хотя и связаны между собой. Их нельзя смешивать и следует рассматривать отдельно.

Опыт распределения студентов, оканчивающих Ленинградский Университет по картографической специальности Географического факультета, показывает, что в основном они направляются в аэрогеодезические предприятия на крупномасштабное картографирование и в меньшей степени в картографические предприятия.

Крупномасштабное картографирование непосредственно связано с выполнением съемочных полевых работ. Подготовка к полевому картографированию требует усиления в учебных планах и программах картографических специальностей университетов математического, топографо-геодезического цикла и особенно аэрофотокартографии. Конечно, должна быть сохранена подготовка к производству редакционно-составительских работ. Стремление Ф. А. Шибанова защитить значение всего комплекса предметов и обеспечить каждому из них надлежащее место в подготовке географов-картографов вызывает полную поддержку. Об этом нужно говорить явно и специально, независимо от предмета и содержания картографии как науки.

Что касается предмета и содержания картографии как науки, то со взглядами и выводами докладчика никак нельзя согласиться. Чтобы та или иная совокупность знаний могла быть выделена в некоторую часть науки, она должна иметь свои, ей одной присущие предмет изучения и метод, как форму применения общенаучного метода диалектического материализма.

Можно ли предмет картографии определить, как «совокупность знаний о создании карты», причем под «созданием карты» подразумевается «весь процесс от определения астропункта до выхода карты в свет»? Создание не есть предмет, а метода картографии как науки в докладе вовсе не видно.

Процесс создания карты, как его понимает Ф. А. Шибанов, состоит из этапов, выполняемых методами, присущими различным наукам.

Астрономические определения географических координат и азимута являются предметом практической астрономии, решающей свои задачи методом определения взаимного расположения точек «полос — зенит — светило» на небесной сфере через наблюдения небесных светил.

Геодезические и топографические работы являются предметом соответствующих наук, решающих свои задачи определением взаимного расположения точек земной поверхности путем съемок, состоящих из угловых и линейных измерений на земной поверхности.

Решение задач математической картографии основывается на способах изображения одной поверхности на другой.

При составлении карт отыскиваются способы комплексного выражения, в соответствии с поставленной целью, результатов геодезического, топографического и в широком смысле географического изучения картографируемого района.

Картографическое осуществляется в соответствии с уровнем полиграфической техники.

Картоведение объединяет все сведения о картах и в своей исторической части познается методом исторического материализма.

Получается так, что картография, понимаемая как совокупность знаний о создании карт, теряет свое лицо как отдельная наука, имеющая свой предмет и метод. Совокупность знаний о создании карты складывается из знаний в областях различных наук, объективное существование которых по наличию своих предметов и методов приходится признавать. Таковы практическая астрономия, геодезия, топография с аэрофото-топографией. То, что картография пользуется ими всеми, не означает, что она поглощает их всех. Проводящая положение картографией ряда наук, Ф. А. Шибанов отрицает ее самостоятельное существование, как отдельной науки. И это так, несмотря на удивление, выраженное в докладе фразой: «... имеется крупная картографическая промышленность, продукция этой промышленности в виде разнообразных карт и атласов, имеется армия работников этой промышленности, инженеры и техники картографов — все есть, только нет соответствующей науки, картографии!»

Впрочем, все эти показатели еще не обосновывают существования науки, для чего нужны иные признаки. Ведь существует обувная промышленность, крупнейшие фабрики, выпускающие сотни миллионов пар обуви, обслуживаемые десятками тысяч рабочих, тысячами инженеров и техников. Между тем не слышно требований о признании науки о «процессах создания обуви», охватывающей вопросы животноводства, химической технологии кож, раскрой их, механизации шитья и др.

В приведенном примере обувной промышленности вообще с картографией, в понимании Ф. А. Шибанова, то, что ни тот ни другой процесс — ни создание обуви, ни создание карт — как бы важны они ни были, не составляют отдельных наук, а используют комплекс наук.

Если же говорить о картографии, как об отдельной науке, то ее объектом остается только карта, как о том говорят В. В. Каврайский, К. А. Салищев и др.

Академик А. А. Григорьев в статье «География» в Большой Советской Энциклопедии, II изд., пишет: «В физическую географию входит ряд специальных физико-географических дисциплин, обособившихся в процессе дифференциации научного знания, главным образом в XIX и XX веках». Среди них он отмечает картографию, дающую наглядное представление о поверхности Земли. «Каждая из этих... продолжает А. А. Григорьев, — физико-географических дисциплин имеет свой предмет изучения. Однако успешное познание этого предмета возможно лишь на базе физической географии и родственных географий негеографических наук — геодезии, геологии и других, в недрах которых зародилось большинство специальных физико-географических дисциплин». И добавляет: «Это дает повод некоторым ученым относить их (физико-географические дисциплины) к той или иной из перечисленных негеографических дисциплин».

А. А. Григорьев вполне отчетливо показывает взаимоотношения физико-географических дисциплин с родственными им негеографическими дисциплинами. Имея своей задачей выражение всего многообразия природных условий и показателей человеческой деятельности на земной поверхности, картография является отраслью географии, связывающей ее с родственными негеографическими дисциплинами, специально изучающими природные условия и деятельность человека.

Метод картографии — это метод составления карты, т. е. условного, уменьшенного, генерализованного изображения, полученного по определению математическому закону» (К. А. Салищев).

Для карты, мне представляется, наиболее характерным является условность изображения, включающая в себя и математический закон изображения криволинейной поверхности на плоскости.

Генерализация, обобщение (тем более сопровождаемое уменьшением) — я согласен с Ф. А. Шибановым, — характерно для всякой науки и не может рассматриваться, как метод картографии.

Таким образом, методом картографии, по моему предварительному мнению, надо считать метод выражения (условного) природных условий и показателей человеческой деятельности в соответствии с назначением и степенью уменьшения изображения земной поверхности.

Способ выражения при изображении, как бы письменный язык картографии, и является ее методом. Естественно, язык этот должен непрерывно обогащаться по мере расширения круга изображаемых объектов и необходимости их комплексного изображения. Развитие метода пойдет соответственно развитию науки, поскольку предмет ее — карта — должен всегда удовлетворять непрерывно растущим потребностям народного хозяйства. Беспредельность роста этих требований определяет бесконечность развития картографии и ее метода и невозможность для них исчерпать себя.

Наличие предмета, метода и бесконечность развития, присущие наукам, дают и картографии среди них свое особое место.

Выступление И. Б. КОСТРИЦА

Устанавливая содержание предмета картографии, Ф. А. Шибанов пошел не по линии рассмотрения взаимосвязей между отдельными научными дисциплинами, возникшими в результате развития одной отрасли знаний, а выбрал путь критики существующих определений науки картографии, на основе чего пытался сделать вывод и дать свое новое определение.

Такой путь оказался порочным и не мог привести к правильному выводу. Геодезия, картография и топография, долгое время существовавшие, накопившие большой фактический материал, имеющие обстоятельные теоретические разработки и определяющие практической деятельности, оказались Ф. А. Шибановым объединенными в одну науку — картографию.

Признание за картографией «науки всех наук» является величайшим заблуждением. Возможно, Ф. А. Шибанов в своих исследованиях не пришел бы к ошибочному выводу, если бы использовал работу А. М. Комкова «К вопросу о взаимосвязях картографии с геодезией, топографией и географией при современном состоянии этих наук» (Сборник «Вопросы географии» за 1955 г.). Указанная работа была доложена и обсуждена на заседании Московского филиала ВГО 29 мая 1953 г. и опубликована. Она ждала на заседании Московского филиала ВГО 29 мая 1953 г. и опубликована. Она выражает мнение целого коллектива. С такой работой нельзя не считаться и обходить ее молчанием. Подобный факт заслуживает серьезного упрека в адрес исследователя. Рассмотрение связей картографии с геодезией и топографией показывает, что у всех этих дисциплин имеются свои задачи и методы.

Геодезия занимается определением формы и размеров земного эллипсоида и доставляет картографии необходимые для составления карт планово-высотную основу в виде координат опорных пунктов.

В свою очередь картография дает известное направление в развитии геодезии. Исходя из интересов картографирования страны, определяются программа геодезических сетей, определяются требования к точности их построения, а следовательно, и к методам выполнения геодезических работ.

Значит ли это, что геодезия входит в состав картографии? Конечно, нет. Делать такой вывод абсурдно. Тесная связь между топографией и картографией выражается в том, что карты преимущественно крупных масштабов, создаваемые в результате топографических съемок, в картографии используются как материал для составления карт более мелких масштабов. Разрабатываемые же в картографии общие вопросы картографии основы карт, составления, оформления и редактирования карт используются и в топографии. Основой взаимосвязи картографии и топографии служит единая цель — создание полноценных карт. Значит ли это, что топография входит в состав картографии? Нет, ибо методы создания карт рассматриваемые в топографии и картографии различны. Топографический метод предусматривает создание карт путем непосредственной съемки местности или путем обработки на специальных приборах аэроснимков местности. Картографический метод или метод составления, за исключением аэроснимков местности, в камеральных условиях по различным источникам, называемым картографическими материалами. В этом состоит существенное различие указанных методов. Современные методы создания карт по аэроснимкам сводят к минимуму работу топографа на местности. Съемку местности по аэроснимкам проводят также в камеральных условиях. Однако исходным материалом здесь служат аэроснимки, позволяющие восстанавливать стереоскопическую модель местности. Материалы же графические (карты и планы) этим свойством не обладают. Поэтому указанные различия методов сохраняется, и смешивать их не следует. Желание объединить все родственные дисциплины в одну науку «картография», видимо, следует считать лишним. Существующие дисциплины в науку «картография», видимо, следует считать лишним. Существующие дисциплины в науку «картография», видимо, следует считать лишним. Существующие дисциплины в науку «картография», видимо, следует считать лишним.

Существующие определение картографии как науки о географической карте? ее свойствах, способах создания и использовании, на наш взгляд, правильное. То, что в этом определении говорится о картографии, в первую очередь как науке о карте, не уменьшает значения других сторон картографии. Динамика и сопоставляя определение — что является предметом данной науки. Анализировав и сопоставляя определение других наук, таких, как, например, медицина, имеющих широкое научное и практическое применение, можно дать общее определение и для картографии, охватывающее обе ее стороны. Если медицина направлена на сохранение и укрепление здоровья людей, техническая деятельность, направленная на определение, как систему научных знаний и практическую деятельность, направленную на создание географических карт и их использование. Однако необходимость в таком общем определении

науки и практики картографии, нам кажется, нет. Единство науки и практики бесспорно. Но было бы ошибочно утверждать, что в картографии нет границ между теорией и практикой. Научная теория картографии имеет особо важное значение в борьбе за технический прогресс картографического производства. Тенденция к смене научной теории и практики картографии неправильна. Отсутствие по целому ряду важнейших вопросов картографии теоретических обобщений приводит картографию к числу описательных дисциплин. Подтверждением этого служат издаваемые учебники по картографии, в которых теоретические обобщения подменяются сводом «рецептов» по изготовлению карт.

В этом следует усматривать отставание картографии как науки от требований практики. Еще на Первом Всесоюзном географическом съезде в 1933 г. в числе очередных проблем была поставлена задача скорейшего создания научно-теоретических и методологических основ картографии. Однако и после Второго съезда ВГО в 1955 г. этот пробел картографии полностью не ликвидирован. И вот при сложившейся ситуации предлагается смешать, запутать теоретические и практические вопросы картографии. Это не будет способствовать теоретическому обогащению науки, а, наоборот, будет тормозить ее развитие.

Ф. А. Шибанов делает попытку определить состав дисциплин, входящих в картографию. На несостоятельность включения им геодезии и топографии в состав картографии мы останавливались выше. После их исключения из состава картографии в ней остаются:

1. Математическая картография — раздел, в котором рассматривается математическая основа карт и, в первую очередь, теория картографических проекций.
2. Составление и редактирование карт — раздел, в котором изучаются и разрабатываются способы камерального создания оригиналов карт, а также методы научно-технического руководства картографическими работами.
3. Оформление карт — раздел, в котором рассматриваются способы графического и красного оформления карт и, в частности, подготовка карт к изданию.
4. Издание карт, имеющее своим предметом изучение и разработку методов издания (размножения) карт.
5. Картоведение — раздел, в котором изучаются элементы, виды, история развития и способы использования географических карт.

В приведенном перечне дисциплин, составляющих картографию, обращают на себя внимание дисциплины: «Составление и редактирование карт» и «Издание карт».

Составление и редактирование карт решают две задачи, причем одна из них частная, другая — общая. К первой относится разработка способов камерального создания оригиналов карт, т. е. одного из этапов создания карты; во второй — разработка вопросов создания карт. Таким образом, вторая задача далеко выходит за пределы круга вопросов картографии. Подобное присоединение к вопросам составления оригинала карты общих вопросов редакционной работы по созданию карты не находит объяснения. Вопросы редакционной работы должны рассматриваться в каждой дисциплине в той мере, в какой это нужно в связи с изучаемыми вопросами. Вынесение же вопросов редакционной работы за рамки частных дисциплин и включение их в одну дисциплину, изучающую вопросы организации и экономики картографического производства, в настоящее время является преждевременным, так как слишком незначительны теоретические обобщения опыта производства по этим вопросам.

В связи с исключением из состава дисциплины «Составление и редактирование карт» вопросов редакционной работы должно быть изменено и название этой дисциплины.

Без достаточных оснований в составе картографии находится дисциплина «Изданные карты», являющаяся по существу разделом полиграфии. Подобно тому, как все науки не включают в свой состав дисциплину рассматривающую вопросы издания трудов, картография также не должна включать дисциплину «Изданные карты». Одновременно с этим дисциплина «Оформление карт» должна более обстоятельно рассматривать вопросы красного оформления карт, решая эти вопросы на научной основе, а не в плане «картонзательской кухни», как это делается на производстве в настоящее время.

Предлагаемые уточнения, на наш взгляд, будут способствовать более четкому и целенаправленному изучению и разработке научной теории — картографии.

Выступление А. А. ПАВЛОВА

Теоретические вопросы картографии неоднократно подвергались публичному обсуждению на различных совещаниях и в печати. Они на протяжении последних 5 лет потому что всякая наука развивается, обогащается новыми положениями, некоторые и их требуется пересмотреть, заменить новыми понятиями, определенными.

В этом свете вполне заслуживает одобрения инициатива Ф. А. Шибанова обсудить основные вопросы картографии — ее предмет, состав и метод.

В докладе Ф. А. Шибанова содержится развернутая критика взглядов на предмет и определение картографии А. А. Изотова, К. А. Салищева, Ю. В. Филиппова. С этой критикой я всецело согласен. Критикует он также взгляды Ю. В. Филиппова на картографическую генерализацию как метод картографии.

Вместе с тем Ф. А. Шибанов дает свое определение картографии, ее предмета, состава и метода. При этом в его докладе больше внимания уделено критике взглядов других, чем обоснованию собственных. Хотя, впрочем, и критика других не является полной. Например, совершенно не упомянуты высказывания А. М. Комкова, на мой взгляд, разумные и заслуживающие рассмотрения и оценки. Не определена связь картографии с географической наукой, ее место среди комплекса географических наук, связь картографии со смежными науками. Недостаточно четко определен предмет картографии, ее подразделение на составляющие дисциплины. Не дано определение предмета картографии — географической карты. Определение метода картографии дано в общих чертах, очень лаконично и нечетко.

Насколько я понял, мысли Ф. А. Шибанова сводятся к следующему:

1. Картография как наука имеет своим предметом разработку методов создания «географических карт. Прикладная картография, или картографическое производство, используя эти методы, занимается созданием карт.
2. В состав картографии входят крупные разделы: геодезия и геодезическая астрономия, топография (и аэрофотогеография), картоведение (понимаемое, как история карты и картографии, без так называемого «учения о карте»), составление и редактирование карт, т. е. включается весь комплекс наук, занимающихся непосредственно созданием карт или обеспечивающих его косвенно.
3. Методы картографии различные, во всяком случае — не картографическая генерализация.

Со всеми этими положениями Ф. А. Шибанова я лично не согласен.

Перейду к критике этих положений и выскажу свои взгляды на предмет картографии, ее состав и метод.

1. Предмет и определение картографии как науки. Каждая самостоятельная наука имеет свой самостоятельный предмет изучения и специфический способ изложения результатов изучения. «Предметом науки являются различные формы движущей материи, а также формы отражения их в сознании человека» (БСЭ, т. 29).

Науки разделяются на три основные группы: 1) естественные, 2) общественные, 3) философские, или науки о познании. Что же является предметом картографии?

Предметом картографии являются географические карты (определения понятия «географическая карта» я здесь не даю, считаю, что известное определение К. А. Салищева в основном приемлемо). Это кратко весь комплекс вопросов, касающихся географических карт, а именно изучение самих карт, их сущности, видов, типов; разработка методов составления и издания карт; разработка способов пользования картами. Эти три равноправных направления составляют в совокупности предмет картографии. Так именно определяет картографию К. А. Салищев, и я с ним согласен. Если мы исключим из этого определения хотя бы одно звено, мы получим неполное, обедненное определение картографии.

В определении же Ф. А. Шибанова представлено лишь второе направление — разработка методов создания карт. Как можно говорить о создании какой-нибудь вещи, если мы не знаем (и не хотим знать), что представляет собой эта вещь, которую мы хотим создать? Надо детально изучить объект — географические карты, их виды, классификацию, содержание, способы изображения — условные знаки, историю развития картографии. Надо заняться разработкой новых типов карт, наилучшим образом отвечающих поставленным задачам картографирования. Все эти вопросы составляют содержание раздела картографии — картоведения, т. е. учения о карте, против включения которого особенно охотно полагается Ф. А. Шибанов. В этом он согласился с неправильным высказыванием Ю. В. Филиппова, что, мол, если мы примем в качестве предмета картографии географические карты, то станем на порочный круг: наука изучает, мол, предмет своего изучения, а не реальную действительность. Это, по-моему, софистика и более ничего. На самом деле картография, вопреки Ю. В. Филиппову изучает географические карты, а не изображаемую на них местность, явления и процессы, происходящие на земной поверхности, но изучает географические карты всесторонне, как указано выше, а не одну их сторону, как делает это Ф. А. Шибанов.

Соглашаясь с Ф. А. Шибановым, что раздел картографии, занимающийся разработкой методов создания карт, является одним из важнейших, но считаю его не единственным. Что касается включения в состав картографии разработок способов пользования картами, то она имеет непосредственную связь с первыми двумя задачами картографии. Карты создаются для решения конкретных задач, и картограф заинтересован, чтобы они принесли большую пользу, чтобы их использование было наиболее эффективным. Поэтому картография, занимаясь разработкой новых типов карт, должна разрабатывать картографические методы исследований, т. е. внедрять карту в соответствующую

щие отрасли научных знаний. Могут сказать, что это дело не картографии, а соответствующей науки. Мне кажется, что это общее дело и мимо него картография не должна проходить. Сейчас усиленно развиваются специальные разделы картографии, например, экономическая картография, почвенная картография, геоморфологическое картографирование и др. и разработка картографических методов является актуальной задачей картографии. Я уже не говорю об аэрометодах. Карта является орудием научного исследования, и эту сторону картографии должны учитывать, разрабатывая новые карты.

2. Связь картографии с географией, геодезией и топографией. В связи с предметом картографии следует коснуться вопроса о месте картографии в системе научных знаний.

Диалектический материализм рассматривает отдельные науки, «как отражение соответствующих форм движения материи, а взаимосвязь наук — как отражение различных, взаимосвязанных форм движения» (БСЭ, т. 29). Ф. Энгельс дает принципы классификации наук: «классификация наук, из которых каждая анализирует отдельную форму движения или ряд связанных между собой и переходящих друг в друга форм движения, является вместе с тем классификацией, расположением, согласно внутренне присущей им последовательности, самих этих форм движения, и в этом смысле и заключается ее значение» (Ф. Энгельс, Диалектика природы, Госполитгиздат, 1952 г., стр. 198). С этих позиций мы должны определить место картографии среди других наук.

Картография относится к группе естественных наук. Ф. А. Шибанов в одном месте относит картографию к географическим наукам, в другом месте — к техническим и категорически возражает против отнесения картографии к геодезии, как это делает А. А. Изотов, и, наоборот, включает геодезию и топографию в состав картографической науки.

В наш век, век дифференциации научных знаний в связи с их бурным ростом, усложняются взаимосвязи между отдельными науками, и классификация наук может быть построена лишь в отношении крупных отраслей научных знаний.

Попытаемся все же определить, хотя бы приблизительно, место картографии в системе научных знаний.

Правильно ли будет отнесение картографии к географическим наукам? Как известно, физическая география и другие частные географические науки имеют предметом исследования географический ландшафт в целом или его компоненты в отдельности. Картография, как установлено выше, не имеет своим предметом ни географический ландшафт, ни отдельные его части. Она имеет отношение к географии косвенное, через посредство географической карты — изображение на бумаге географического ландшафта, его компонентов и т. п. Но, чтобы объективно, достоверно и правдиво построить это изображение, картограф должен глубоко познать географический ландшафт, вооружиться глубокими знаниями в области географических наук. Наоборот, география использует географические карты в своих исследованиях. Таким образом, мы можем говорить о тесной, а бы сказал, органической связи, родстве картографии с географическими науками, связи, которая взаимно их обогащает и которая дает основание некоторым специалистам для отнесения картографии к географии. В древности между географией и картографией стоял знак равенства. Изучение географии какой-либо территории сводилось к ее изображению на карте. Теперь картографическое изучение есть лишь начало, первичная форма географического изучения, карта не охватывает всех сторон географического исследования, и результаты географических исследований не сводятся только к карте. Пределы и объем географии расширились, и из самой географии выделились частные географические науки. Среди них можно назвать и картографию, занимающуюся изображением ландшафта на картах.

Рассмотрим теперь взаимосвязь геодезии и картографии. А. А. Изотов включает картографию в геодезию, Ф. А. Шибанов включает геодезию в картографию. По моему, мет исследования, имеют тесные связи и взаимодействия.

Предмет картографии определен выше.

Про Ф. А. Изотову «Геодезия — наука, занимающаяся определенными фигурами и размерами Земли, изображением земной поверхности на планах и картах и точными измерениями на местности при осуществлении различных инженерных мероприятий... К основным задачам геодезии (нижней) относится изучение земной поверхности и отображение ее на картах, а также выполнение измерений на местности в различных целях... В области геодезии рассматриваются методы, техника и организация работ, соответствующий раздел геодезии и отображением ее на планах и картах, составление и издание карт рассматриваются в картографии» (БСЭ, т. 10).

Нам представляется, что включение в геодезию картографии и топографии не имеет под собой никаких оснований.

Для того, чтобы произвести съемку или составить карту, недостаточно знать фигуру и размеры Земли, недостаточно произвести измерения на земной поверхности, пункты, надо нанести еще и содержание, изобразить географический ландшафт и другие объекты, процессы и явления природного и общественного характера. Высшая гео-

дезия дает форму и размеры Земли, топография дает методы и технические приемы измерений — съемки на земной поверхности, география дает познание сущности изображенных объектов, явлений — и все это синтезируется картографией при создании географических карт. С другой стороны, неправильно включение геодезии или даже ее части — топографии в картографию, как это делает Ф. А. Шибанов.

Геодезия имеет свой предмет изучения, и ее задачи шире, чем обеспечение геодезическими пунктами топосъемки и картосоставления. Результаты геодезических работ и их назначение могут быть иными, например, для инженерных работ.

Особо следует сказать о топографии, которая является самостоятельной научной дисциплиной, имеющей тесные связи и точки соприкосновения как с картографией, так и с геодезией.

Топография А. А. Изотов определяет как раздел геодезии, занимающийся разработкой методов, приемов и техники, «связанных с изучением земной поверхности и отображением ее на планах и картах».

П. В. Дензин определяет топографию как научную дисциплину, изучающую земную поверхность в геометрическом отношении, а также способы ее изображения. Конечным результатом топографических работ являются топографическая карта и топографическое описание местности.

Ф. А. Шибанов в одном месте обмолвился, что топографы поднимут на смех, если им сказать, что они изучают местность. Однако они действительно, выполняя топографическую съемку, изучают местность. Они изучают ее «в топографическом отношении», т. е. в отношении пространственного размещения различных объектов, их внешнего вида (или морфологии) и размеров. Кроме того, топографы дают средства познания и для других отраслей научной и практической деятельности человека. Таким образом, топография имеет свой предмет, не перекрывающийся с предметом геодезии и картографии, хотя, как и в картографии, конечным результатом топографии является создание топокарт. Имеется также различие в методах, и отчасти в результатах, если принять во внимание топографические описания, составление которых является одной из задач топографии.

Но между картографией и топографией есть очень близкая связь, есть общие вопросы, сближающие их в некоторых частях. Эти вопросы следующие: генерализация изображения, разработка условных обозначений, дешифрирование аэроизомков, т. е. вопросы, связанные не с техникой съемки или картосоставления, а с методикой изображения местности.

Суммируя сказанное, можно сделать следующие выводы: картография, геодезия, топография и география имеют тесные связи, точки соприкосновения.

Можно говорить о комплексе картографо-геодезических наук, включающем самостоятельные, но тесно связанные науки: геодезию, геодезическую астрономию, топографию и картографию. О связи картографии с географией говорилось выше. Такая же связь существует между топографией и географией. Это вполне соответствует дифференциации наук, обособлению их и в то же время тесной связи между смежными отраслями научных знаний. В решении своих задач топография и картография пользуются фотограмметрией и математическим аппаратом.

Таким образом, по вопросу о взаимосвязи картографии с геодезией, топографией и географией я сошлюсь с высказываниями А. М. Комкова, которые, к сожалению, Ф. А. Шибанов оставил без внимания.

3. Состав картографии. Теперь определим состав картографии, дадим ее деление на составляющие разделы:

1) математическая картография, включающая учение о математической основе карт, в том числе использование геодезической основы при составлении карт, а также математическое обоснование методов картометрии;

2) картоведение, включающее учение о карте» в буквальном смысле как «материаловедение», историю карты и картографии и вопросы применения карт в различных областях научной и практической деятельности, т. е. разработку картографических методов исследования;

3) методы создания карт, включая камеральные методы составления карт по готовым картометриалам и аэроизомкам, а также картографические вопросы топографических съемок, перечисленные выше;

4) редактирование карт;

5) оформление и подготовка карт к изданию.

4. Метод картографии (картосоставления). Следует различать понятие метода, во-первых, как способа познания, исследования явлений природы и общественной жизни и, во-вторых, как приема трудовой деятельности и способа достижения какой-либо цели, решения определенной задачи.

Единственно научным методом познания является марксистский диалектический метод, который находится во вооружении всех отраслей научной и практической деятельности людей, проявляясь в конкретных формах для каждой науки.

Картография имеет одну из своих задач, как выяснено выше, разработку приемов и способов создания карт. Эти приемы разнообразны. Но если проанализировать их, то нетрудно установить, что сущностью процесса составления карт является запол-

нению содержанием ячеек картографической сетки, т. е. получение картографического изображения, что является конечным итогом создания карты независимо от того, камеральным путем по другим картам или аэроснимкам создавалась карта или в результате непосредственной съемки местности. Сущностью этого процесса для всех способов создания карт является отбор и обобщение содержания, или генерализация изображения. Поэтому, мне кажется, вполне закономерно считать картографическую генерализацию методом составления карт.

Нас не должно смущать, что метод обобщения применяется в описательных науках, в литературе, искусстве и т. п. Метод научного обобщения применим во многих науках. В картографической генерализации воплощено единство анализа и синтеза, в ней проявляются черты диалектического метода.

В качестве примера для обоснования картографической генерализации как метода составления карт можно провести такую аналогию. Карты, как и аэроснимки, дают изображение местности с большим уменьшением (например, в 17 000—25 000 раз). При таком уменьшении генерализация изображения на аэроснимке выполняется автоматически — фотоаппаратом при фотографировании. При этом исчезают, становятся невидимыми зачастую такие объекты, которые по своей важности должны быть изображены на карте. Поэтому такая механическая генерализация, выполненная фотоаппаратом, не удовлетворяет картографу; карта, полученная по аэроснимку только путем вычерчивания условными знаками видимых объектов, будет плохого качества.

Другое дело, если отбор и обобщение будут выполнены сознательно, по определенным правилам, на основании анализа содержания аэроснимков, выявления закономерностей в размещении снятых объектов, их важности и взаимосвязей между ними. Произведя после этого генерализацию, мы получим карту, которая явится синтезом, воплощением научного исследования на основании изучения объективных закономерностей. Таким образом, картографический метод — генерализация — целиком соответствует пониманию метода в указанном выше смысле, как научного метода.

Разрешите подвести итог.

1. Картография — наука о географической карте, методах ее создания и пользования.

2. Комплекс картографо-геодезических наук объединяет самостоятельные, но тесно связанные науки: геодезию с астрономией, топографию с аэрофотографией, картографию. Все они принадлежат к разряду естественных наук. С ними тесно взаимодействует география. В своих исследованиях они пользуются математическим аппаратом, достижениями фотограмметрии, физики.

3. Особо тесная связь, родство существует между топографией и картографией.

4. Методом составления карт, сущностью процесса заполнения содержанием ячеек картографической сетки, является картографическая генерализация.

Выступление Ю. М. ОРЛЕЦКОГО

В изложении истории развития картографии заметно некоторое охвращение русской науки и ее деятелей. Автор соответствующим ударением на отдельные «блестящие» страницы истории ошибочно говорит о недооценке картографии и показывает это, как традиционное явление, дошедшее до наших дней.

Автор приводит свою аргументацию в отрыве от развития производства и техники и от развития других наук, поэтому его заключение о самостоятельности развития картографии и якобы существовавшей недооценке ее ошибочно.

Ф. А. Шибанов бросает незаслуженный упрек в недооценку и непонимание картографии как науки заслуженному деятелю науки профессору Болотову и особенно профессору В. В. Витковскому. Заслуги последнего в развитии геодезии, топографии и картографии исключительны. Витковский — русский богатырь в геодезии, топографии и картографии. Он был большим патриотом в науке, горячо и буквально самозабвенно любил геодезию, топографию и в наименьшей степени и картографию. Он говорил: «Карта, это — творчество картографа, в котором ум и рука работают заодно». Исторически неверно обвинение Ф. А. Шибанова в адрес В. В. Витковского, автора прекрасной книги «Картография».

Неосновательно Ф. А. Шибанов лишает и геодезию и топографию как науки самостоятельности в их дальнейшем развитии. Стремление Ф. А. Шибанова показать подмосточное положение этих наук картографии как основной науке, хотя и выглядит патристично, но неубедительно.

Ф. А. Шибанов не доказал, что удельный вес картографии в прошлом был большим по сравнению с геодезией и топографией. Такой взгляд противоречит практике. Заявление Ф. А. Шибанова, что научное значение геодезических работ теперь мало, не отвечает действительности. Общеизвестно, что и выводы о фигуре Земли в размерах ее, и координаты опорной сети и геодезические приемы измерений нужны не только картографии, но и геологии, геофизике, инженерным наукам, военным

и военно-морским наукам и многообразной практике. Утверждение Ф. А. Шибанова противоречит совершенно правдивым, на мой взгляд, выводам видных деятелей науки профессоров: Красовского, Чеботарева, Орлова, Данилова, Здановича, Дензина и др.

Ф. А. Шибанов выступает в противоречие с самим собой, когда он правильно говорит, что задачи и выводы геодезии необходимы для нужд народного хозяйства (не только картографии).

Ф. А. Шибанов, включая геодезию и картографию в состав картографии, сузил их задачи, свел их только к практическим. Не отрицая научных задач геодезии, автор не дает ответа, а как же они будут решаться в рамках узкого картографического горизонта; например, задачи геодезии по обеспечению высоких точностей работ для астрономии, геофизики, инженерного дела и др., ведь картография не будет ставить перед ней подобных задач.

Ссылка Ф. А. Шибанова на высказывания профессора Граура, понимавшего картографию в широком смысле с включением в нее и геодезии, неубедительна. Профессор Граур, на мой взгляд, не дал определенного заключения по этому вопросу. В § 12 на стр. 29 Математической Картографии Граур излагает связь науки геодезии с науками топографией и картографией. Но зачем же писать о связи, если топография и геодезия являются органическими частями картографии. Кроме того, во введении к топографии В. В. Витковского, изд. 1940 г., Граур, являясь редактором этого издания, пишет, что геодезия, топография и картография являются отдельными, тесно связанными между собой научными дисциплинами. Следовательно, в 1940 г. Граур не подтвердил мысли о включении в картографию родственных ей дисциплин: геодезии и картографии.

Ф. А. Шибанов говорит о широком составе картографии как науки, исходя из стремления расширить программу подготовки картографов на Географическом факультете Ленинградского Государственного университета. Мне думается, что ошибки учебного плана на Географическом факультете могут быть устранены не обязательно путем операций над Геодезией и Топографией, а исходя из опыта составления программ в других геодезических ВУЗах.

Ф. А. Шибанов, полемизируя с Филипповым, не опроверг его положения о том, что генерализация материала — метод картографического процесса и методом, применяемым во всех науках, то это не значит, что эта несоборная категория не обязательно имеет практическим и творческим приемом картографической и другой работы. Метод генерализации в Картографии жизненен, и особо важен, поэтому логично его вычеркивать.

Выступление А. Н. ЛАРИОНОВОЙ

В вопросе о предмете картографии и о ее месте среди других наук в настоящее время нет единства мнений.

Ф. А. Шибанов для определения предмета современной картографии проследил путь ее становления, историю подготовки топо-геодезических и картографических кадров в России и в СССР и в заключение коснулся вопроса о постановке высшего картографического образования в СССР. Под термином «Картография» Ф. А. Шибанов не всегда понимает картографию — науку, но в большинстве случаев картографию — учебный предмет Университетского курса Географического факультета для специальности «Картография». Мы полагаем, что картография как наука и картография как учебный предмет имеют существенные отличия.

Представляется, что при решении вопроса о предмете картографии как науки наиболее плодотворные результаты могут быть достигнуты путем совместного решения этого вопроса с более общим — вопросом общей классификации наук. При попытке же решить только один частный вопрос — определить предмет картографии¹ — могут возникнуть и в действительности возникают два рода ошибок.

Во-первых, некоторые науки могут оказаться забытыми и не найдут своего отражения в общей классификации. Так, например, получность с гидрографией («геодезия на воде»), которая оказалась вне поля зрения докладчика и упомянутых авторов, а следовательно, и вне комплекса картографо-геодезических наук, рассматриваемого нами.

Во-вторых, смежные с картографией² науки могут оказаться лишенными самостоятельности и быть объединенными с ней.

Так, Ф. А. Шибанов включил в картографию часть геодезии, топографию, фотограмметрию и даже геодезическую астрономию. А. А. Изотов включил в геодезию картографию и топографию. А. А. Григорьев рассматривает картографию как отрасль физической географии, а Ю. В. Филиппов — географию как составную часть картографии.

¹ Или другой науки, например, геодезии.

² В равной мере с геодезией.

Нам представляется, что для решения поставленной задачи — определения предмета картографии как науки — методологически наиболее правильным будет такой путь: сначала выделить комплекс наук, изучающих форму и размеры Земли, а также способы измерения и изображения на картах, планах и глобусах всей Земли или отдельных ее участков, и только после этого решать вопрос о соподчинении наук, входящих в него.

Очевидно, в этот комплекс должны войти:
геодезия,
топография,
гидрография,
фототопография,
картография.

Полагаем, что в общей классификации наук рассматриваемый комплекс найдет свое место между астрономией, с одной стороны, и геологическими и географическими науками, с другой.

Переходя к отдельным компонентам этого комплекса, заметим, что геодезия имеет свой предмет изучения, свои научные задачи и является самостоятельной отраслью человеческого знания, тесно связанной с картографией, но никак не подчиненной ей ни полностью, ни частично.

Топография, понимаемая в узком смысле слова, не является разделом геодезии, так как топографические съемки имеют свои особенности, отличающие их от геодезических работ; но она также не является и разделом картографии.

Топография не отождествляется нами с той частью геодезии, которая до 1930-х гг называлась в СССР «низшей геодезией». Под топографией мы понимаем научную дисциплину, изучающую методы измерений на местности и изображения на плане или карте поверхности суши с имеющимися на ней природными и созданными человеческой деятельностью объектами.

Гидрография (гидрографические работы) совокупность знаний о производстве геодезических работ в пределах водных пространств. Гидрография должна быть включена в комплекс картографо-геодезических наук как самостоятельная составная часть его.

Фототопография, предметом изучения которой является совокупность процессов, позволяющих построить изображение местности по ее фотографиям, полученным с земли (фотогеодезическая съемка) или с воздуха (аэрофотофотография) ввиду специфических особенностей своих приемов и места, занимаемого ею среди топографических работ, имеет несомненное право на самостоятельное место в классификации наук.

Наконец, картография является наукой о географических картах, атласах и глобусах и включает в свои задачи всестороннее их изучение, а также разработку методов и процессов их создания и использования.

Картография занимает последнее место в комплексе картографо-геодезических наук и вплотную примыкает к геологическим и географическим наукам, являясь как бы переходной ступенью между ними и геодезией, топографией, гидрографией и фототопографией.

В заключение отметим, что все входящие в комплекс науки подразделяются каждая на ряд составляющих дисциплин.

Выступление А. Г. ИСАЧЕНКО

1. Вопрос о предмете той или иной науки представляет не только общий, философский интерес, но имеет также непосредственное практическое значение для разделения труда между специалистами, для подготовки научных и производственных кадров. Поэтому не следует противопоставлять обсуждение предмета науки обсуждению вопроса подготовки специалистов-картографов в вузах.

2. Резких границ между отдельными науками нет и быть не может. Необходимо принять во внимание, что различные науки связаны между собой переходными, связующими дисциплинами и разделами. Наличие таких связей у картографии (с географией, геодезией и др.) общезвестно и не нуждается в доказательствах. Многие разделы науки трудно отнести категорически либо к картографии, либо к географии (например, различные виды специального картографирования — геоморфологическое, почвенное и т. д.). Их можно рассматривать и как разделы картографии и в то же время как неразрывные части методики исследований соответствующих географических дисциплин (в недрах которых они и сформировались).

3. Дифференциация науки — выделение новых дисциплин, все углубляющаяся специализация их — совершенно неизбежный и закономерный процесс. Однако наряду с положительными, прогрессивными сторонами этого процесса (возможность более глубокого анализа отдельных предметов и явлений, развитие научной методики и т. д.) приходится отметить и его негативную сторону — опасность отрыва научных дисциплин друг от друга и отхода от диалектического метода, развитие элементов метафизики.

ческого мышления, укоренение узкого, ремесленного взгляда на явления объективного мира. Поэтому вместе с естественным стремлением к разделению научного труда, к проведению границ между науками следует обращать, быть может, еще большее внимание на наличие взаимных связей между ними, на преодоление разрывов. Тенденция (к сожалению, очень частую) возможно более сузить сферу научной дисциплины, отгородить ее китайской стеной от смежных дисциплин нельзя признать здоровой. Опыт показывает, что широкое понимание предмета и задач науки более плодотворно, чем замыкание в узкой, притом искусственно изолированной отрасли. Некоторые дисциплины, вышедшие из некогда единой географии, заходили в тупик благодаря стремлению представителей этих дисциплин к «эмансипации». Несмотря на далеко зашедшую дифференциацию географии, отдельные ее отрасли тесно связаны друг с другом и образуют единую группу географических наук, и плодотворное их развитие возможно только на широкой, общей географической основе. Ту же картину мы наблюдаем, например, в биологии: существуют ботаника и зоология, цитология и гистология, эмбриология и физиология и т. д., но все это лишь части, разделы биологии.

4. Картография присущи те же закономерности развития, что и другим наукам. Это молодая и быстро развивающаяся отрасль знания, в которой выделялись уже разнообразные ветви. Картография — это уже, в сущности, целый комплекс родственных дисциплин. Под картографией в узком смысле слова часто понимают собственно составление (камеральное) карт (иногда с некоторыми дополнительными разделами). Но собственно составление карт — лишь один этап, звено в процессе *создания карт*. Ограниченности подобного представления станет еще более очевидной, если вспомнить, что в подавляющем своем большинстве наши руководства по картографии касаются только общегеографических карт, почти совершенно не касаясь *специальной картографии* (т. е. тоже картографии!). Если же «эмансипироваться» от топографии, т. е. *полевой картографии*, а также от математического обоснования карты, то из «картографии» получится крайне скудная дисциплина, которая может лишь вариться в собственном соку и рискует оторваться и от живой действительности, подлежащей изображению, и от производства.

Возьмем, например, проблему картографической генерализации — одну из коренных проблем картографии. Можно ли серьезно говорить о научной разработке генерализации, отмежевавшись как от полевого картографирования (при котором, собственно, и начинается генерализация), так и от разных видов специального картографирования, накопивших значительный опыт в области генерализации? Не случайно наши теоретические работы по генерализации страдают обычно крайней узостью подхода и топтанием на месте: они *не обобщают* всесторонний опыт картографирования, а основываются только на опыте камерального составления общегеографических карт.

5. Картография в системе наук занимает особое место между научными и техническими дисциплинами. География, например, занимается созданием каких-либо материальных ценностей. Картография же, хотя, конечно, и занимается изучением определенного объекта — карты, но прежде всего она создает карты, и в этом ее главная задача. Для картографического изучения карт необходимо лишь то, чтобы совершенствовать методы создания карт, и не является самоцелью.

6. Исходя из этой основной задачи картографии, ее следует рассматривать как *научно-техническую дисциплину*, а точнее — как *комплекс дисциплин*, направленных к созданию карты, т. е. примерно так, как ее определял А. В. Граур. Ценность мыслей А. В. Граура именно в широком понимании картографии, хотя в частности его соображения, разумеется, нуждаются в уточнении.

Карта, т. е. основной «продукт» и в то же время объект картографии, строится на основе математических и географических закономерностей. Следовательно, картография должна включать и вопросы математического обоснования карты, и вопросы научной (географической) разработки содержания карты; с другой стороны, создание карты предполагает определенную связь и преемственность между процессами полевого и камерального картографирования (Лишь в некоторых случаях может отсутствовать) рования, например, в экономической картографии, полевого этапа (включает 1) астрономо-геодезическое обоснование карты, 2) теорию картографических проекций (тесно связанную с предыдущим разделом), 3) теорию и методику полевых съемок, или полевую картографию (применительно к общегеографическому картографированию это полевого картографического обоснования карты, или камерального картографирования карты, 4) теорию и методику составления карт, или камерального картографирования карты, 5) теорию и методику составления карт, или камерального картографирования карты, 6) теорию и методику составления карт, или камерального картографирования карты, 7) теорию и методику составления карт, или камерального картографирования карты).

7. Предложено Ф. А. Шибанова включить в состав картографии вопросы астрономо-геодезического обоснования карт встретил возражения. Между тем, включение

1. Собственно издательский процесс, т. е. технология воспроизведения карты, — это уже область полиграфии.

теории картографических проекций в сферу картографии ни у кого не вызывает сомнений. Где же тут логика? Не правильнее ли считать, что математическую основу карт составляет не только картографическая проекция, но и астрономо-геодезическое обоснование?

В этих возражениях отчасти, по-видимому, сквозит опасение, как бы картография не поглотила геодезию. Но так вопрос не ставится. Наоборот, факты говорят о том, что некоторые геодезисты по старинке, в силу своеобразного консерватизма и непоимания сущности и состояния современной картографии пытаются «пробрать к рукам» последнюю. Именно такого рода неуместной попытке со стороны А. А. Изотова дал ответ Ф. А. Шибанов. В действительности же геодезия в первую очередь обуславливает нужды картографии. Признавая, однако, наличие собственного объекта изучения у геодезии, мы отнюдь не пытаемся «включить» ее в картографию. Речь идет о астрономо-геодезической основе карт. Это, несомненно, раздел, «пограничный» между картографией, с одной стороны, и геодезией (и астрономией), с другой. Но в этом нет ничего «противоестественного». Возникновение смежных вопросов и проблем в ходе развития науки вполне закономерно.

8. Возражения вызвало также понимание картографии как картографической дисциплины. Однако это возражение нельзя признать обоснованным. Достаточно напомнить, что в настоящее время топографические работы в значительной степени перенесены в камеральную обстановку. Широкое применение аэрометодов сильно обилило теперь довольно широко непосредственно используются аэроснимки; и, говоря о методиках составления карт, мы не можем отделить от них вопросы дешифрирования аэроснимков. Последняя проблема в сущности превратилась в один из важнейших вопросов методики составления карт.

9. О генерализации В докладе этот вопрос поставлен правильно. Нельзя рассматривать генерализацию как некий специфический метод картографии. Картографическое звено во всяком процессе познания Ф. А. Шибанов дал справедливую оценку недавнему выступлению Ю. В. Филиппова. Хотелось бы думать, что упомянутое выступление — плод какого-то недоразумения.

10. О методе картографии. Метод не может являться критерием самостоятельности науки. Таким критерием является только предмет. Нельзя согласиться с тем, кто утверждает, что каждая наука должна иметь какой-то особый, «свой» метод. Сплошь и рядом разные науки пользуются одними и теми же методами и, с другой стороны, в каждой науке применяются разнообразные методы исследования. Вообще же, понятие «научный метод» еще совершенно неразработано. Очевидно, что следует различать методы и методические приемы, методы исследования и методы отображения и т. д. Говорят «диалектический метод», «картографический метод», «аналитический метод» и т. д. Говорят «научный метод» еще совершенно неразработано. Очевидно, что следует различать методы и методические приемы, методы исследования и методы отображения и т. д. Говорят «диалектический метод», «картографический метод», «аналитический метод» и т. д. Говорят «научный метод» еще совершенно неразработано. Очевидно, что следует различать методы и методические приемы, методы исследования и методы отображения и т. д. Говорят «диалектический метод», «картографический метод», «аналитический метод» и т. д. Говорят «научный метод» еще совершенно неразработано. Очевидно, что следует различать методы и методические приемы, методы исследования и методы отображения и т. д. Говорят «диалектический метод», «картографический метод», «аналитический метод» и т. д. Говорят «научный метод» еще совершенно неразработано. Очевидно, что следует различать методы и методические приемы, методы исследования и методы отображения и т. д. Говорят «диалектический метод», «картографический метод», «аналитический метод» и т. д. Говорят «научный метод» еще совершенно неразработано. Очевидно, что следует различать методы и методические приемы, методы исследования и методы отображения и т. д. Говорят «диалектический метод», «картографический метод», «аналитический метод» и т. д. Говорят «научный метод» еще совершенно неразработано. Очевидно, что следует различать методы и методические приемы, методы исследования и методы отображения и т. д. Говорят «диалектический метод», «картографический метод», «аналитический метод» и т. д. Говорят «научный метод» еще совершенно неразработано. Очевидно, что следует различать методы и методические приемы, методы исследования и методы отображения и т. д. Говорят «диалектический метод», «картографический метод», «аналитический метод» и т. д. Говорят «научный метод» еще совершенно неразработано. Очевидно, что следует различать методы и методические приемы, методы исследования и методы отображения и т. д. Говорят «диалектический метод», «картографический метод», «аналитический метод» и т. d.

Что же касается «картографического метода», то это вполне реальное понятие, но этот метод применяется не в картографии, а в тех науках, которые пользуются картой как методом исследования.

11. В заключение необходимо коснуться некоторых замечаний, направленных в адрес докладчика И. Б. Кострица несомненно, на наш взгляд, обвинил Ф. А. Шибанова в том, что последний будто бы не подошел к решению поставленного вопроса правильным путем, рассмотрев развитие представлений о сущности картографии в историческом аспекте. А исторический подход, как известно, составляет характернейшую черту диалектического метода И. В. Кострица, отметил, что геодезия, топография и картография вышли из единого корня, стремятся к сближению, а картография — «замаскировать» их, что нельзя расценивать как шаг, направленный на пользу возникающего в пустыне, если картографы будут не расширять, а сужать рамки своей науки. Напротив, притом, что до сих пор картографы ограничиваются обобщениями топография частью картографии (хотя многие из них и не считают картографией частью картографии).

Здесь было высказано мнение, что Ф. А. Шибанов будто бы «коханяет» научным методом сущности творческого освоения классического научного наследия, со слепым преклонением перед авторитетами. Выходит, что если мы указываем на отдельные ошибочные или односторонние высказывания В. В. Витковского, то это — «коханять» предметом для нас целиком. Притом, надо учесть, что в данном случае идет речь не об оценке трудов Витковского вообще, а лишь о взглядах его на определен-

А. П. ЮШЕНКО

РЕШЕНИЕ ЛОКСОДРОМИЧЕСКИХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Широкое распространение имеет замена вычислений сферических треугольников, образованных нормальными сечениями референц-эллипсоида, вычислениями плоских треугольников, полученных в проекциях с малыми искажениями.

Такая замена не только упрощает вычислительный процесс, но и позволяет перейти от географических координат к плоским прямоугольным, более удобным для практического применения. Решение подобных задач требует, однако, введения в расстояния и направления редукций для приведения на плоскость проекции.

Более простая задача возникает в том случае, если стороны треугольников на эллипсоиде образованы такими линиями которые в избранной проекции изображаются прямыми, не требуя каких-либо приведений.

Именно с такого рода задачами издавна сталкиваются мореплаватели, совершая плавание по локсодромии и пользуясь навигационными картами в меркаторской проекции, изображающей локсодромии в виде прямой линии. Применявшиеся способы решения этих задач удовлетворяли практические запросы в то время, когда мореплавание предъявляло весьма умеренные требования к точности навигационных определений.

Рост этих требований, связанный отчасти с появлением новых радиотехнических средств для обеспечения судовождения, заставляет строже подходить к решению навигационных задач. В частности, становится необходимым учитывать влияние сжатия Земли, которым еще недавно пренебрегали. Некоторые указания по этому вопросу, появившиеся в специальной литературе, требуют уточнения.

Рассмотрим сначала решение прямоугольного локсодромического треугольника, катеты которого направлены по меридиану и по параллели, а гипотенузой является отрезок локсодромии произвольного направления. В отличие от других локсодромических треугольников будем называть этот треугольник навигационным.

На равноугольной меркаторской проекции навигационный треугольник останется прямоугольным (рис. 1). Стороны его мы можем выражать

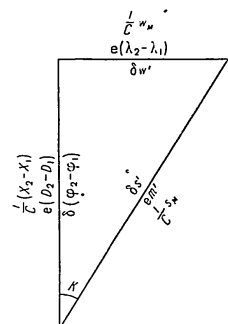


Рис. 1

в различных единицах измерения и, соответственно, получим три системы формул для его решения:

1. Если выражать все стороны в экваториальных минутах, то единицей измерения будет служить так называемая «единица карты» e . Как известно, она может быть вычислена с помощью длины p дуги в $1'$ любой параллели по формуле

$$e = \frac{p}{C},$$

где C — знаменатель частного масштаба на этой параллели

Соответствующее выражение катета, направленного по изображению меридиана, будет иметь вид

$$e(D_2 - D_1)',$$

где $D_2 - D_1$ — разность меридиональных частей, выраженная в экваториальных минутах

Катет, направленный по изображению параллели, получит выражение

$$e(\lambda_2 - \lambda_1)',$$

где $(\lambda_2 - \lambda_1)$ — разность долгот в экваториальных минутах.

Гипотенуза em' не получила специального названия. Величина m' так же относится к плаванию, как разность меридиональных частей относится к разности широт

2. Те же стороны можно выразить в длине δ изображения морской мили на некоторой промежуточной широте. Величина δ называется меркаторской милей и должна сниматься с вертикальной рамки при всевозможных линейных измерениях на морских картах. Соответствующие значения катетов и гипотенузы $\delta(\varphi_2 - \varphi_1)'$, $\delta w'$, $\delta s'$ показаны на том же рисунке. Здесь разность широт $(\varphi_2 - \varphi_1)'$, отшестствие w' и плавание s' выражены в минутах дуги меридиана на промежуточной широте

$$\Delta_{np} = M_{np} \text{ arc } 1'$$

Длину Δ часто называют морской милей, отличая ее от стандартной мили, имеющей постоянное значение, принятое у нас равным 1852 м

3. Можно, наконец, выразить те же стороны в неизменных линейных мерах, например в метрах.

Пользуясь обозначением X для длины дуги меридиана, считаемой от экватора, мы получим для катета, направленного по изображению меридиана, выражение

$$\frac{1}{C}(X_2 - X_1),$$

где C — знаменатель частного масштаба в некоторой промежуточной точке этого катета, широта которой, вообще говоря, не совпадает с введенной нами ранее промежуточной широтой.

Другой катет обозначим $\frac{1}{C}w_m$, а гипотенузу $\frac{1}{C}s_m$, где w_m — отшестствие и s_m — плавание, выраженные в метрах.

Решая навигационный треугольник, в котором угол K обозначает курс, мы получим три системы формул в зависимости от принятых единиц

измерений, расширяющих привычные представления навигатора о формулах «письменного счисления».

В экваториальных милях	В морских милях	В метрах
$\left. \begin{aligned} (D_2 - D_1)' &= m' \cos K \\ (\lambda_2 - \lambda_1)' &= m' \sin K \\ \text{tg } K &= \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)'}{(D_2 - D_1)'} \end{aligned} \right\} (1)$	$\left. \begin{aligned} (\varphi_2 - \varphi_1)' &= s' \cos K \\ w' &= s' \sin K \\ \text{tg } K &= \frac{w'}{(\varphi_2 - \varphi_1)'} \end{aligned} \right\} (2)$	$\left. \begin{aligned} X_2 - X_1 &= s_m \cos K \\ w_m &= s_m \sin K \\ \text{tg } K &= \frac{w_m}{X_2 - X_1} \end{aligned} \right\} (3)$

Если же сравнить различные выражения одних и тех же сторон, то можно получить следующие интересные соотношения между входящими в них величинами:

$$\frac{(\lambda_2 - \lambda_1)'}{w'} = \frac{(D_2 - D_1)'}{(\varphi_2 - \varphi_1)'} = \frac{m'}{s'} = \frac{\delta}{e}. \quad (4)$$

Беря δ и e на промежуточной широте, получим

$$\delta = \frac{1}{C_{np}} M_{np} \text{ arc } 1'; \quad e = \frac{1}{C_{np}} p_{np} = \frac{1}{C_{np}} N_{np} \cos \varphi_{np} \text{ arc } 1';$$

$$\frac{\delta}{e} = \frac{M_{np}}{N_{np}} \sec \varphi_{np}. \quad (5)$$

Разложим $\frac{M_{np}}{N_{np}}$ в ряд и отбросим члены высших порядков

$$\frac{\delta}{e} = \sec \varphi_{np} \frac{1 - e^2}{1 - e^2 \sin^2 \varphi_{np}} = \sec \varphi_{np} (1 - e^2 + e^2 \sin^2 \varphi_{np}) =$$

$$= \sec \varphi_{np} (1 - e^2 \cos^2 \varphi_{np}),$$

$$\frac{\delta}{e} = \sec \varphi_{np} - e^2 \cos \varphi_{np}. \quad (6)$$

В навигации, как известно, давно пользуются первым из соотношений (4), для перехода от отшестствия к разности долгот.

$$(\lambda_2 - \lambda_1)' = w' \frac{(D_2 - D_1)'}{(\varphi_2 - \varphi_1)'}$$

Для шара разность меридиональных частей $(D_2 - D_1)'$ выражается определенным интегралом

$$(D_2 - D_1)' = \int_1^2 \frac{d\varphi}{\cos \varphi},$$

но, по теореме о среднем значении определенного интеграла, его можно представить в следующем образе:

$$\int_1^2 \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \int_1^2 \sec \varphi \cdot d\varphi = \sec \varphi_{np} \int_1^2 d\varphi = \sec \varphi_{np} (\varphi_2 - \varphi_1).$$

Следовательно,

$$(D_2 - D_1)'_{ш} = \sec \varphi_{np} (\varphi_2 - \varphi_1)',$$

и для вычисления „промежуточной“ широты φ_{np} получаем формулу

$$\sec \varphi_{np} = \frac{(D_2 - D_1)'_{ш}}{(\varphi_2 - \varphi_1)'}, \quad (7)$$

а для перехода от отшествия к долготе —

$$(\lambda_2 - \lambda_1)' = w' \sec \varphi_{np}. \quad (8)$$

Казалось естественным при переходе к эллипсоиду получать промежуточную широту из того же уравнения (7), ограничиваясь заменой разности меридиональных частей для шара $(D_2 - D_1)'_{ш}$ соответствующей разностью меридиональных частей для эллипсоида $(D_2 - D_1)'$. Но, как видно из сравнения форм. (4) и (5), это недостаточно. Для эллипсоида взамен форм. (7) надо принимать

$$\frac{(D_2 - D_1)'}{(\varphi_2 - \varphi_1)'} = \frac{M_{np}}{N_{np}} \sec \varphi_{np} \approx \sec \varphi_{np} - e^2 \cos \varphi_{np}. \quad (9)$$

Легко показать, что в этом выражении φ_{np} имеет то же значение, что и в форм. (7). Действительно, откидывая члены высших порядков, можно представить зависимость между меридиональной частью D на эллипсоиде и $D_{ш}$ на шаре, следующим образом:

$$D = D_{ш} - e^2 \sin \varphi$$

Следовательно,

$$D_2 - D_1 = (D_2 - D_1)_{ш} - e^2 (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1);$$

$$\frac{D_2 - D_1}{\varphi_2 - \varphi_1} = \frac{(D_2 - D_1)_{ш}}{\varphi_2 - \varphi_1} - e^2 \frac{\cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}{\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}.$$

Заменяя при небольшом значении разности широт $\varphi_2 - \varphi_1$ отношение синуса к дуге единицей, получим

$$\frac{D_2 - D_1}{\varphi_2 - \varphi_1} = \frac{(D_2 - D_1)_{ш}}{\varphi_2 - \varphi_1} - e^2 \cos \varphi_m. \quad (10)$$

Сравнение с (9) подтверждает сказанное о тождестве широт, обозначенных промежуточными, в форм. (7) и (9).

Из соотношения (4) мы получим взамен (8) следующую формулу для перехода от разности долгот к отшествию и обратно

$$(\lambda_2 - \lambda_1)' = w' (\sec \varphi_{np} - e^2 \cos \varphi_{np}). \quad (11)$$

Пользоваться этой формулой судоводителю неудобно. Он привык не вести вычислений даже по более простой форм. (8), получая готовое решение по специальной таблице, помещаемой во всех мореходных таблицах.

При небольшом плавании для входа в эту таблицу он может пользоваться средней широтой $\varphi_m = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ вместо промежуточной, а если нужно более точное решение, то можно составить таблицу поправок $x = \varphi_{np} - \varphi$, как это сделано в английских мореходных таблицах Инмана.

Для вычисления x можно воспользоваться следующим выражением.

$$x' = \arcsin \sec \frac{(D_2 - D_1)_{ш}}{\varphi_2 - \varphi_1} - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}. \quad (12)$$

При отсутствии достаточно точных значений меридиональных частей воспользуемся разложением в ряд:

$$\Delta D = \Delta \varphi \left(\frac{\partial D}{\partial \varphi} \right)_m + \frac{(\Delta \varphi)^2}{24} \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \varphi^2} \right)_m + \dots$$

Образует производные, приняв для шара $D = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$

$$\frac{\partial D}{\partial \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi}; \quad \frac{\partial^2 D}{\partial \varphi^2} = \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}; \quad \frac{\partial^3 D}{\partial \varphi^3} = \frac{1 + \sin^2 \varphi}{\cos^3 \varphi}.$$

Подставляя эти производные в наше разложение, выражая вращения ΔD и $\Delta \varphi$ в минутах и разделив ΔD на $\Delta \varphi$, получим

$$\sec \varphi_{np} = \frac{\Delta D_{ш}}{\Delta \varphi} = \sec \varphi_m \left(1 + \frac{\Delta \varphi^2}{24} \cdot \frac{1 + \sin^2 \varphi_m}{\cos^2 \varphi_m} \arcsin^2 1' \right). \quad (13)$$

С другой стороны, имея в виду, что промежуточная широта мало отличается от средней, можно написать

$$\begin{aligned} \sec \varphi_{np} &= \sec (\varphi_m + x) = \sec \varphi_m + x' \frac{\sin \varphi_m}{\cos^2 \varphi_m} \arcsin 1' = \\ &= \sec \varphi_m (1 + x' \operatorname{tg} \varphi_m \arcsin 1') \end{aligned} \quad (14)$$

Сравнивая это выражение с предыдущим уравнением, получим

$$x' = \frac{\Delta \varphi}{24} \cdot \frac{1 + \sin^2 \varphi_m}{\sin \varphi_m \cos^2 \varphi_m} \arcsin 1' = \frac{\Delta \varphi}{24} (2 \operatorname{tg} \varphi_m + \operatorname{ctg} \varphi_m) \arcsin 1'. \quad (15)$$

Форм. (12) или (15) можно использовать для составления таблицы поправок x' .

Естественно возникает желание при переходе на эллипсоид сохранить возможность пользоваться Мореходными таблицами, вводя еще дополнительную поправку в среднюю широту. Для этого введем обозначение для правой части уравнения (9)

$$\sec \varphi_{np} - e^2 \cos \varphi_{np} \equiv \sec \psi \quad (16)$$

и назовем угол ψ вспомогательной широтой.

Равенство (16), очевидно, может соблюдаться только при $\sec \psi \geq 1$, следовательно, для промежуточных широт не меньших, чем получаемая из уравнения

$$\sec \varphi_{np} - e^2 \cos \varphi_{np} = 1.$$

Решение этого уравнения дает условие

$$\varphi_{np} > 6^\circ 35', 8.$$

Следовательно, при меньших широтах пользоваться подстановкой (16) нельзя. Обозначим разность $\varphi_{np} - \psi \equiv z$

$$\sec \varphi_{np} - \sec \psi = e^2 \cos \varphi_m = z' \frac{\sin \varphi_m}{\cos^2 \varphi_m} \operatorname{arc} l' \quad (17)$$

$$z' = \frac{e^2 \cos^3 \varphi_m}{\operatorname{arc} l' \sin \varphi_m}$$

По этой формуле вычислена для эллипсоида Красовского следующая табличка:

φ_m	z'	φ_m	z'	φ_m	z'
10°	126,2	35°	22,0	60°	3,3
15	79,9	40	16,1	65	1,9
20	55,7	45	11,5	70	1,0
25	40,4	50	8,0	75	0,4
30	29,8	55	5,3	80	0,1
35	22,0	60	3,3	85	0,0

Понятно, что общую поправку $x' - z'$ для перехода от средней широты φ_m к вспомогательной ψ можно получить (для широт $> 6,6^\circ$) и по формуле, аналогичной (12).

$$x' - z' = \operatorname{arc} \sec \frac{D_2 - D_1}{\varphi_2 - \varphi_1} \approx \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \quad (18)$$

где $D_2 - D_1$ выбирается для эллипсоида.

Пример 1. Найти вспомогательную широту ψ по данным $\varphi_1 = 55^\circ$, $\varphi_2 = 65^\circ$. Сначала воспользуемся форм. (18).

$$\begin{aligned} \varphi_2 = 65^\circ & D_2 = 5157,915 & \frac{\Delta D}{\Delta \varphi} &= \frac{1208,826}{600} \approx 2,01471 = \sec 60^\circ 14',5 \\ \varphi_1 = 55^\circ & D_1 = 3949,089 & & \\ \varphi_m = 60^\circ & \Delta D = 1208,826 & \psi &= 60^\circ 14',5 \\ \Delta \varphi &= 60' & & \end{aligned}$$

Далее найдем поправки x' и z' для перехода к промежуточной и к вспомогательной широтам по форм. (15) и (17):

$$x' = \frac{36 \cdot 10^4 (3,46410 + 0,57735)}{24 \cdot 3437,747} = 17,6$$

$$z' = \frac{e^2}{\operatorname{arc} l'} \frac{\cos^3 60^\circ}{\sin 60^\circ} = 23,01 \frac{1}{4 \sqrt{3}} = 3,3$$

$$\begin{aligned} \varphi_m &= 60^\circ 0'; & x' &= 17,6 \\ \varphi_{np} &= 60^\circ 17,6'; & z' &= 3,3 \\ \psi &= 60^\circ 14',3 \end{aligned}$$

Согласно, достаточное для практических нужд При наличии готовых таблиц для x' и z' отыскание ψ делается мгновенно.

Перейдем теперь к сравнению сторон навигационного треугольника при выражении их в постоянных линейных мерах (в метрах) и в морских милях

$$\frac{w_m}{w'} = \frac{X_2 - X_1}{(\varphi_2 - \varphi_1)'} = \frac{s_m}{s'} = \delta C = \Delta_* \quad (19)$$

где Δ_* длина l' меридиана на некоторой широте φ_* , также лежащей в промежутке (φ_1, φ_2) , но, вообще говоря, не совпадающей с той промежуточной широтой, которую мы обозначили раньше φ_{np}

$$\Delta_* = \frac{\int M d\varphi}{\varphi_2 - \varphi_1} \operatorname{arc} l' = M_* \operatorname{arc} l'$$

Наконец, сравним стороны того же навигационного треугольника при выражении их в метрах, в масштабе карты, и в единицах карты.

$$\frac{w_m}{\Delta \lambda'} = \frac{\Delta X}{\Delta D'} = \frac{s_m}{m'} = c C \frac{\delta_*}{\delta_{np}} \quad (20)$$

Сведем теперь вместе выведенные нами соотношения, вытекающие из различных способов выражения сторон навигационного треугольника, и рассмотрим их приложение на численном примере:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta \lambda'}{\Delta w'} = \frac{\Delta D'}{\Delta \varphi'} = \frac{m'}{s'} = \frac{\delta_{np}}{c} = \frac{M_{np}}{N_{np}} \sec \varphi_{np} \\ \frac{w_m}{w'} = \frac{\Delta X}{\Delta \varphi'} = \frac{s_m}{s'} = \delta_* C = \Delta_* \\ \frac{w_m}{\Delta \lambda'} = \frac{\Delta X}{\Delta D'} = \frac{s_m}{m'} = c C \frac{\delta_*}{\delta_{np}} = p_{np} \frac{M_*}{M_{np}} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Пример 2. По данным: $\varphi_1 = 55^\circ$, $\varphi_2 = 65^\circ$, $\Delta \lambda = 10^\circ$, найти величины сторон навигационного треугольника и соотношения в различных их выражениях. Пользуясь данными предыдущего примера, прежде всего находим

$$\operatorname{tg} K = \frac{\Delta \lambda}{\Delta D} = \frac{600}{1208,826} = 0,49635; \quad K = 26^\circ 23',8$$

$$\begin{aligned} w' = \Delta \varphi_1 \operatorname{tg} K = 297,810; & s' = \Delta \varphi' \sec K = 669,844; & m' = \Delta D \sec K = 1349,541 \\ w_m = \Delta X \operatorname{tg} K = 552,996,4 \text{ м}; & s_m = \Delta X \sec K = 1243,818,7 \text{ м} = 671,608 \text{ ст. миль.} \end{aligned}$$

следовательно, $1) \frac{\Delta \lambda'}{\Delta w'} = \frac{\Delta D'}{\Delta \varphi'} = \frac{m'}{s'} = 2,01471,$
откуда $\sec \varphi_{np} - e^2 \cos \varphi_{np} = 2,01471,$
 $\varphi_{np} = 60^\circ 17',7; \quad \psi = 60^\circ 14',5,$

откуда $2) \frac{w_m}{w'} = \frac{\Delta X}{\Delta \varphi'} = \frac{s_m}{s'} = 1856,878,$
 $\varphi_* = 59^\circ 54',7,$

откуда $3) \frac{w_m}{\Delta \lambda'} = \frac{\Delta X}{\Delta D'} = \frac{s_m}{m'} = 92,166,07,$
 $\varphi_{np} = 60^\circ 17',8,$

так как на этой широте длина l' параллели p равна $92,166,07 \text{ м}$, а $\frac{M_*}{M_{np}} \approx 1.$

Легко понять, почему для первого и третьего соотношений значения промежуточной широты практически совпадают и несколько больше средней широты, а для второго соотношения получилась широта φ_* , отличающаяся от $\varphi_{пр}$ и несколько меньшая средней широты.

В первом случае осредняется значение

$$\frac{M}{N} \sec \varphi \approx \sec \varphi (1 - e^2 \cos^2 \varphi).$$

В третьем случае

$$\frac{1}{N} \sec \varphi \approx \sec \varphi : a \left(1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi \right).$$

Поэтому, в обоих этих случаях значение промежуточной широты зависит главным образом от закона изменения $\sec \varphi$. Секанс — функция монотонно возрастающая, так же как и ее первая производная.

Во втором случае осредняется значение

$$M \approx a \left(1 - e^2 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 \varphi \right).$$

В правой части мы также имеем монотонную возрастающую функцию, но первая ее производная для широт больших 45° — функция убывающая, почему в нашем примере и оказалось $\varphi_* < \varphi_{пр}$.

Представляет интерес вопрос о переходе от расстояний, измеренных на корабле по лагу в стандартных милях к расстояниям, которые прокладываются на меркаторскую карту, построенную с учетом сжатия Земли. В неопубликованной еще работе В. В. Каврайского "Теория определения положения точки на поверхности", 1948 г., он дает, к сожалению, без вывода следующую формулу для исправления измеренного по лагу расстояния:

$$\Delta s = s \left(\frac{1852}{a \cdot \text{arc } 1'} - 1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi + e^2 \cos^2 \varphi \cos^2 K \right) \quad (22)$$

Можно, однако, разгадать, каким образом получена эта формула. В основе ее лежит переход к милям, рассматриваемым как длина l' дуги косоугольного сечения земного эллипсоида.

Действительно, по теореме Эйлера радиус кривизны такого сечения

$$R_K = \frac{M \sec^2 K}{1 + \frac{M}{N} \text{tg}^2 K}.$$

Расстояние же s , выраженное в таких милях, должно относиться к расстоянию s_A по лагу в стандартных милях, равных 1852 м, следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{s}{s_A} &= \frac{1852}{R_K \text{arc } 1'} = \frac{1852}{M \text{arc } 1'} \cdot \frac{1 + \frac{M}{N} \text{tg}^2 K}{\sec^2 K} = \\ &= \frac{1852}{a \cdot \text{arc } 1'} \left(1 + e^2 - \frac{3}{2} e^2 \sin^2 \varphi \right) \frac{1 + (1 - e^2 \cos^2 \varphi) \text{tg}^2 K}{\sec^2 K} = \\ &= \frac{1852}{a \cdot \text{arc } 1'} \left(1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi + e^2 \cos^2 \varphi \right) (1 - e^2 \cos^2 \varphi \sin^2 K) = \\ &= \frac{1852}{a \cdot \text{arc } 1'} \left(1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi + e^2 \cos^2 \varphi \cos^2 K \right). \end{aligned}$$

Образует производную пропорцию

$$\begin{aligned} \frac{s - s_A}{s_A} &= \frac{1852}{a \cdot \text{arc } 1'} \left(1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi + e^2 \cos^2 \varphi \cos^2 K \right) - 1 = \\ &= \frac{1852}{a \cdot \text{arc } 1'} - 1 + \frac{1852}{a \cdot \text{arc } 1'} \left(- \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi + e^2 \cos^2 \varphi \cos^2 K \right). \end{aligned}$$

Принимая множитель при малых членах в скобках равным единице получаем форм. (22), данную В. В. Каврайским.

Однако, если прокладка ведется на меркаторской карте, то для измерения и проложения расстояний мы пользуемся меркаторской милей δ , т. е. изображением длины дуги в $1'$ меридиана Δ на меркаторской карте.

В этом случае

$$\begin{aligned} \frac{s}{s_A} &= \frac{1852}{M \text{arc } 1'} = \frac{1852 (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}{a \cdot \text{arc } 1' (1 - e^2)} = \frac{1852}{a \cdot \text{arc } 1'} \left(1 - \frac{3}{2} e^2 \sin^2 \varphi \right) (1 + e^2) = \\ &= \frac{1852}{a \cdot \text{arc } 1'} \left(1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi + e^2 \cos^2 \varphi \right), \end{aligned}$$

откуда

$$\Delta s = s - s_A = s \left(\frac{1852}{a \cdot \text{arc } 1'} - 1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi + e^2 \cos^2 \varphi \right) \quad (23)$$

и от курса K не зависит.

Уравнение (23) является частным случаем уравнения (22) при $K = 0^\circ$ и отвечает принятому и практически удобному способу измерения и проложения расстояний на меркаторской карте с помощью делений вертикальной рамки.

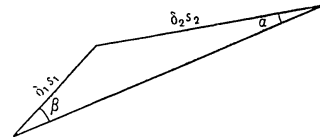


Рис. 2

До сих пор мы рассматривали простейший прямоугольный локсодромический треугольник, катеты которого расположены по меридиану и по параллели. В настоящее время встречается на практике необходимость решения и косоугольных локсодромических треугольников, например при обработке радионавигационных определений.

Выражая стороны локсодромического треугольника в морских милях, мы по рис. 2 на меркаторской карте получим

$$\begin{aligned} \delta_1 s_1 &= \delta_2 s_2 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}; \\ s_1 &= s_2 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{\delta_2}{\delta_1}. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь меркаторские мили δ_1 и δ_2 различаются друг от друга, так как относятся к различным широтам и соответственно к различным частным масштабам $\frac{1}{C_1}$ и $\frac{1}{C_2}$

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{M_2 C_1}{M_1 C_2} = \frac{M_2 N_1 \sec \varphi_2}{M_1 N_2 \sec \varphi_1} = \frac{\sec \varphi_2}{\sec \varphi_1} [1 - e^2 (\sin^2 \varphi_1 - \sin^2 \varphi_2)]. \quad (25)$$

В практических задачах обычно достаточно принимать приближенное значение

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{\sec \varphi_2}{\sec \varphi_1}.$$

Соответственно уравнение (24) получит вид:

$$s_1 = s_2 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{\sec \varphi_2}{\sec \varphi_1}. \quad (26)$$

Этим уравнением следует пользоваться при желании уточнить величину „переноса“ линии положения в задачах, связанных с использованием новых радиотехнических средств для определения места корабля или координат опорных пунктов.

А. А. ПАВЛОВ

О ТЕРМИНОЛОГИИ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КАРТОГРАФИИ¹

В математической картографии еще нет общепризнанных наименований проекций, их классификаций, определений основных картографических понятий, стандартных обозначений и математических символов.

Ниже предлагается проект единых наименований и стандартных обозначений, встречающихся в математической картографии, распределенных по следующим разделам: 1) земной эллипсоид, изображение эллипсоида на шаре, 2) теория картографических проекций, 3) теория искажений, 4) классификация картографических проекций, 5) обозначения в формулах картографических проекций

1. Земной эллипсоид, изображение эллипсоида на шаре

В математической картографии Землю принимают или за шар, или за эллипсоид вращения. Эллипсоид с элементами, выведенными из градусных измерений и принятыми для картографических и геодезических вычислений, называют земным эллипсоидом. Иногда применяют термин «земной сфероид», подразумевая под сфероидом эллипсоид вращения с малым сжатием. В понятие сфероида в высшей геодезии вкладывается несколько иной смысл, поэтому следует рекомендовать термин «земной эллипсоид».

Обозначения элементов земного эллипсоида и функций географической широты:

φ, λ — географические широта и долгота точки на поверхности земного эллипсоида;

a и b — большая и малая полуоси земного эллипсоида;

$\alpha = \frac{a-b}{a}$ — сжатие меридианного эллипса земного эллипсоида;

$\alpha' = \frac{a-b}{b}$ — второе сжатие меридианного эллипса,

$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$ — первый эксцентриситет меридианного эллипса;

$e' = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}}$ — второй эксцентриситет меридианного эллипса;

$c = \frac{a^2}{b}$ — радиус кривизны меридианного эллипса на полюсе;

$d = \frac{b^2}{a}$ — радиус кривизны меридианного эллипса на экваторе;

$M = \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{c}{\sqrt{3}}$ — радиус кривизны меридиана;

$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - e'^2}}$ — радиус кривизны первого вертикала (длина нормали);

¹ Доложено на заседании Отделения Математической географии и картографии имени Ю. М. Шокальского Географического общества Союза ССР 12 октября 1955 г.

$R = \sqrt{MN} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{W^2} = \frac{c}{W^2}$ — радиус средней кривизны земного эллипсоида в точке с широтой φ ;

$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$ — первая вспомогательная функция широты;

$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi}$ — вторая вспомогательная функция широты;

$r = N \cos \varphi$ — радиус параллели;

$T = N \operatorname{ctg} \varphi$ — длина образующей конуса, касательного земного эллипсоида по параллели φ (радиус окружности, сохраняющей геодезическую кривизну параллели);

$X = \int_0^\varphi M d\varphi$ — длина дуги меридиана от экватора до параллели с широтой φ ;

$p = r \cdot \lambda$ — длина дуги параллели;

$\ln U = \int_0^\varphi \frac{M}{r} d\varphi$ — изометрическая широта;

$S = \int_0^\varphi M r d\varphi$ — часть поверхности эллипсоида, ограниченная экватором, параллелью φ и двумя меридианами с разностью долгот в один радиан;

φ' — геоцентрическая широта, $\operatorname{tg} \varphi' = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \varphi$;

u — приведенная или параметрическая широта,

$\operatorname{tg} u = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi$.

При изображении земного эллипсоида на шаре можно рекомендовать следующие обозначения:

Географические (сферические) широты, получаемые при равноугольном изображении эллипсоида на шаре φ' , при равновеликом изображении φ'' , при равнопромежуточном изображении φ''' , сферические долготы соответственно обозначать λ' , λ'' , λ''' . Соответствующие этим способам изображения радиусы шара равны: $R' = a = 6378245$ м (по Красовскому), $R'' = 6371116$ м — радиус шара, имеющего одинаковую поверхность с земным эллипсоидом, $R''' = 6367558$ м — радиус шара, имеющего длину меридианов, равную длине меридианов земного эллипсоида. Радиус шара, имеющего одинаковый объем с земным эллипсоидом, $R^V = 6371109$ м (по Красовскому).

В тех случаях, когда пренебрегают сжатием земного эллипсоида, сферические широты и долготы обозначают φ и λ , как и эллипсоидальные, географические.

2. Общая теория картографических проекций

Картографической проекцией называют какой-либо способ изображения поверхности земного эллипсоида или шара на плоскости. Картографической сеткой называют изображение *координатных линий* в данной картографической проекции.

Задача изображения земной поверхности на плоскости в той или иной проекции в математическом смысле сводится к построению картографической сетки.

Картографическая проекция может быть в общем случае определена аналитически, если указать функциональную связь между координатами точки на поверхности земного эллипсоида (шара) и ее изображения на плоскости. Иные способы задания проекции (геометрические, перспективные) могут быть приведены к аналитическому.¹

Точки на поверхности земного шара могут быть определены различными системами координат. Обычно применяют систему географических координат и систему сферических полярных координат (*зенитное расстояние* z и *азимут* a). В первом случае соответствующая сеть координатных линий на поверхности шара — параллелей и меридианов — называется географической сетью. Во втором случае сеть сферических координатных линий образована *альмукантаратами* ($z = \operatorname{const}$) и *вертикалами* ($a = \operatorname{const}$).

На плоскости проекции также применяют для построения картографической сетки две системы координат: прямоугольные координаты (x — *абсцисса*, y — *ордината*, причем ось абсцисс принимается совпадающей со средним меридианом, параллельным вертикальной линии рамки карты или вертикальному обрезу листа бумаги) и полярные координаты (ρ — *радиус* изображения параллели или альмукантарата, δ — *полярный угол*, считаемый от осевого меридиана по ходу часовой стрелки).

Таким образом, в общем случае, картографическая проекция может быть задана какой-либо из следующих четырех систем уравнений:

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(\varphi, \lambda) \\ y &= f_2(\varphi, \lambda) \end{aligned} \right\} (1) \quad \left. \begin{aligned} \rho &= f_3(\varphi, \lambda) \\ \delta &= f_4(\varphi, \lambda) \end{aligned} \right\} (2)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= f_5(z, a) \\ y &= f_6(z, a) \end{aligned} \right\} (3) \quad \left. \begin{aligned} \rho &= f_7(z, a) \\ \delta &= f_8(z, a) \end{aligned} \right\} (4)$$

Применяя одну и ту же картографическую проекцию, можно получить картографические сетки разного вида. Сетка, обычно простейшая, которая соответствует определению данной картографической проекции, называется *нормальной*, а система сферических координат, изображением которой является нормальная сетка, является *нормальной* для данной проекции системой координат. Если одна и та же проекция задана какой-либо парой из указанных выше уравнений, во всех случаях получим нормальную сетку одного и того же вида, но в первых двух случаях она соответствует географическим координатам и изображает параллели и меридианы, в третьем и четвертом случаях — сферическим координатам и изображает альмукантараты и вертикалы. Если в последних двух случаях все же хотят построить сетку географических меридианов и параллелей, то должны предварительно перейти от географических координат φ и λ заданных узловых точек — точек пересечения меридианов и параллелей — к сферическим координатам z и a по следующим формулам сферической тригонометрии:

$$\cos z = \sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos(\lambda - \lambda_0);$$

$$\operatorname{ctg} a = \cos \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi \operatorname{cosec}(\lambda - \lambda_0) - \sin \varphi_0 \operatorname{ctg}(\lambda - \lambda_0),$$

¹ Численный способ Н. А. Урмаева расчета проекции не требует вывода уравнений: проекция задается численными значениями координат узловых точек картографической сетки в виде таблицы, по данным которой и строится картографическая сетка.

после чего z и a подставить в уравнения проекции (3) или (4) и вычислить плоские координаты x и y или ρ и δ , по которым и построить картографическую сетку. Построенная сетка при $\varphi_0 \neq 90^\circ$ будет отличаться от нормальной. Если полюс $Z_0(\varphi_0, \lambda_0)$ сферической системы координат, который должен быть задан, находится на экваторе, т. е. $\varphi_0 = 0^\circ$, то полученная сетка географических меридианов и параллелей носит название поперечной, при $90^\circ > \varphi_0 > 0^\circ$ соответствующая сетка называется косою.

Наряду с нормальной сеткой М. Д. Соловьев [9] ввел понятия основной и прямой сеток. Определение нормальной сетки дано выше. Основной сеткой М. Д. Соловьев называет сетку географических меридианов и параллелей; если нормальная и основная сетки совпадают, что имеет место, когда проекция задана уравнениями (1) или (2), то полученная сетка называется прямой. Иначе говоря, термин «нормальная» сетка имеет более широкий смысл, чем термин «прямая», который связывается только с изображением географической сетки параллелей и меридианов.

Нам представляется, что введение особого термина для обозначения нормальной сетки географических параллелей и меридианов ведет лишь к усложнению картографической терминологии: терминами «нормальная», «косая» и «поперечная» сетки можно передать различия в видах картографических сеток, не вводя новых понятий. Следует избегать также ранее широко применявшихся терминов для нормальной, косою и поперечной сеток перспективных проекций: «полярная», «горизонтная» и «экваториальная» сетки.

Косые и поперечные сетки строят по точкам пересечения меридианов и параллелей, называемым узловыми точками картографической сетки, с помощью лекала, поэтому, если проекция задана уравнениями в полярных координатах, необходимо вычислить по ним прямоугольные координаты по формулам:

$$x = q - \rho \cos \delta;$$

$$y = p + \rho \sin \delta,$$

где q и p — абсцисса и ордината начала системы полярных координат (центров параллелей или альмукантаратов) — должны быть заданы.

3. Теория искажений

Если масштаб плана можно определить как отношение какого-либо отрезка, взятого на плане, к соответствующему отрезку на поверхности земного шара, то масштаб карты определяют как отношение бесконечно малого отрезка, взятого на карте по определенному направлению, к соответствующему отрезку на поверхности земного эллипсоида или шара. Определенный так масштаб называют частным масштабом m или, точнее, частным масштабом длин. Иногда его называют просто масштабом длин. Частный масштаб меняется в разных точках карты и даже в данной точке по различным направлениям. Одно из значений частного масштаба, обычно выраженное круглым числом и отнесенное к определенной точке или линии на карте, подписывают под картой и называют главным масштабом (например, «масштаб 1 : 80 000 000 на экваторе»). Иногда главный масштаб определяют как масштаб глобуса, на котором земной шар изображен без искажений и поверхность которого затем развертывают на плоскости в той или иной проекции. Однако такой

геометрический образ не объясняет различия в размерах сеток одной и той же проекции, построенных в одном и том же главном масштабе, но отнесенном к разным местам карты. Пусть, например, масштаб глобуса 1 : 30 000 000. С него построена сетка в меркаторской проекции. Если главный масштаб сохраняется на экваторе ($\varphi_0 = 0^\circ$), то масштаб вдоль параллели с широтой $\varphi = 60^\circ$ будет в два раза крупнее главного, т. е. равен 1 : 15 000 000. Если же главный масштаб сохраняется на этой параллели $\varphi_0 = 60^\circ$, то на экваторе частный масштаб будет равен 1 : 60 000 000, т. е. по размерам сетки будут отличаться друг от друга в два раза.

Масштаб длин, выраженный простой дробью, например, 1 : 10 000 000, называют численным масштабом. Масштаб, записанный в виде фразы, указывающей соотношение единиц длины, принятых для измерения на карте и на местности, например, «в 1 см — 150 км» (1 : 15 000 000) или «2 см на карте соответствует 1 км на местности» (1 : 50 000), — можно назвать именованным масштабом. Линейным масштабом называют график, имеющий деления, равные соответствующим отрезкам в натуре, уменьшенным в данном численном масштабе.

Графики для линейного масштаба бывают разного устройства. Различают постоянный линейный масштаб, соответствующий главному масштабу, и переменный линейный масштаб, имеющий изменяющиеся деления в соответствии с значениями частного масштаба.

Точку или линию, к которой относится главный масштаб, называют точкой или линией нулевых искажений или центральной точкой или линией картографической сетки.

Частным масштабом площадей называют отношение площади бесконечно малой фигуры на карте к площади соответствующей фигуры на поверхности земного шара.

Отношение частного масштаба длин к главному масштабу называют увеличенным масштабом длин, или увеличением масштаба, или просто увеличением длин $c = \frac{m}{m_0}$.

Отношение частного масштаба площадей к квадрату главного масштаба называют увеличением масштаба площадей или увеличением площадей

$$p = \frac{ds^2}{m_0^2 ds_0^2}.$$

При исследовании искажений проекций обычно главный масштаб принимают равным единице $m_0 = 1$, тогда увеличение длин будет равно частному масштабу длин, увеличение площадей — частному масштабу площадей. Разные авторы придерживаются в этом случае той или иной терминологии: одни отдают предпочтение термину «увеличение», другие — «частный масштаб», учитывая главный масштаб в окончательных рабочих формулах. Нам представляется более строгим пользование термином «увеличение».

Исследуя искажения проекций, обычно определяют увеличения (частные масштабы) по следующим направлениям: вдоль меридиана — m , вдоль параллели — n , вдоль главных направлений — полюсей эллипса и с к а ж е н и й — наибольшее — a , наименьшее — b . Некоторые авторы особо обозначают увеличения вдоль вертикалов — μ_1 и альмукантаратов — μ_2 нормальной сетки. Этого можно не делать во избежание усложнения терминологии, условившись принимать m и n как увеличения вдоль меридиана

пов (вертикалов) и параллелей (альмукантаратов) вообще нормальной сетки, а не только географической.

Уклонение соответствующего увеличения масштаба длин от единицы например, $v_m = m - 1$, $v_n = n - 1$, называют относительным искажением длин или просто искажением длин в данной точке по заданному направлению. Искажение площадей равно $v_p = p - 1$. Искажения длин и площадей выражают в процентах.

Угол (северо-восточный) между меридианом и параллелью карты обозначают буквой ψ , а искажение этого угла

$$\varepsilon = \psi - 90^\circ.$$

Направление, вдоль которого увеличение s , ориентируют относительно первого главного направления эллипса искажений, вдоль которого увеличение a , углом u , считаемым от первого главного направления по ходу часовой стрелки; ему на шаре соответствует угол u_0 . Разность этих углов $u_0 - u$ представляет искажение направления u_0 при его изображении на плоскости. Обозначая U_0 и U наиболее искажаемые направления соответственно на поверхности шара и на плоскости, получим наибольшее искажение направления $-|U_0 - U| = \frac{\omega}{2}$ и наибольшее искажение угла, образованного двумя наиболее искажаемыми направлениями, $2|U_0 - U| = \omega$.

Ориентирование эллипса искажений относительно меридиана определяется азимутом β первого главного направления (a) на карте, отсчитываемым от северного конца меридиана по ходу часовой стрелки; на шаре ему соответствует азимут β_0 .

Азимуты произвольных направлений на карте и на шаре обозначают соответственно буквами A и A_0 .

4. Классификация картографических проекций

Наиболее полная классификация картографических проекций, построенная по генетическому принципу, была дана В. В. Каврайским (см. схему).

Схема классификации картографических проекций В. В. Каврайского



Эта классификация, дающая подразделение проекций по виду нормальной сетки, вместе с тем учитывает предложение Г. А. Гинзбурга [2] о подразделении проекций и по типу их уравнений.

Дальнейшее распределение проекций по группам внутри выделенных классов можно делать по характеру искажений и другим признакам.

По характеру искажений проекции подразделяют на равноугольные, равновеликие и произвольные, тем не менее класс произвольных проекций объединяет множество различных по величине искажений проекций, одни из которых лежат ближе к равноугольным, другие к равновеликим. Поэтому целесообразно произвольные проекции подразделять на группы в зависимости от величины искажений. Для этого Г. А. Гинзбург [2] предложил делить проекции в зависимости от величины искажений площадей и углов на семь групп, давая краткую словесную характеристику искажениям каждой группы. Например, азимутальные проекции по величине искажений площадей и углов можно подразделить на проекции, обладающие чрезвычайно большими искажениями площадей и углов (гномоническая проекция), очень большими искажениями площадей (равноугольная), большими искажениями площадей и небольшими искажениями углов (новая проекция), умеренными искажениями площадей и углов (равнопромежуточная) небольшими искажениями площадей и большими искажениями углов (новая проекция), очень большими искажениями углов (равновеликая) и чрезвычайно большими искажениями углов (ортографическая проекция). В связи с этим заслуживает внимания предложение А. В. Гедымина [1] о количественной оценке соотношения искажений площадей и углов. Чтобы выразить наибольшее искажения углов относительными числами, им введен показатель $K = \frac{a}{b}$, характеризующий искажение форм, а следовательно и углов, и позволяющий сопоставлять их с искажениями площадей.

Однако на практике ограничиваются обычно указанием на принадлежность данной проекции к одной из следующих трех групп: к равноугольным, равновеликим и равнопромежуточным проекциям; для промежуточной по характеру искажений проекции иногда указывают, к какой проекции она лежит ближе — к равноугольной или равновеликой.

Рассмотренная выше классификация проекций по виду нормальной сетки и типу уравнений не охватывает все проекции, когда-либо предложенные и применяемые на практике.

Так, например, Г. А. Гинзбургом [4] разработан новый тип проекций, определяемых уравнениями $\rho = f_1(\varphi)$, $\delta = f_2(\varphi, \lambda)$ и названных им «проекциями с овальными изоколами», выделенный в отдельный класс [5]. Параллели нормальной сетки изображаются концентрическими окружностями, меридианы — кривыми, симметричными относительно среднего, прямолинейного. Проекция с овальными изоколами отличается от азимутальной лишь изображением меридианов и является по отношению к азимутальным проекциям более общим классом. Проекция с овальными изоколами логичнее назвать псевдоазимутальной; это название подчеркивало бы характер уравнений и вид координатных линий и выявляло связь этих проекций с проекциями азимутальными и псевдоконическими.

Новый тип проекций, не укладывающийся в рассмотренную выше классификационную схему, разработан Н. А. Урмаевым [10]. Параллели проекций этого класса изображаются равноотстоящими кривыми с переменной кривизной, меридианы — произвольными кривыми. По отношению к этому новому классу проекций псевдоконические, конические, азимутальные, псевдоазимутальные, псевдоцилиндрические и цилиндрические проекции являются частными случаями. Поэтому в классификационной схеме класс проекций с криволинейными равноотстоящими параллелями должен занять более высокую ступень, чем перечисленные

Классификационная схема картографических проекций [6, 8], распределенных на группы по виду нормальной сетки и типу уравнений, дополненная классами псевдоазимутальных проекций и проекций с равноотстоящими криволинейными параллелями, представлена в схеме.

Схема классификации картографических проекций по виду нормальной сетки



Предлагаемая классификация построена по генетическому принципу и выявляет соподчиненность и взаимосвязи классов проекций. При дальнейшем расширении типов проекций ее нетрудно будет пополнить, не нарушая ее структуры. Проекция, получаемые численным методом, без вывода уравнений, также займут в классификационной схеме соответствующее место исходя из вида картографической сетки.

Что касается так называемых «производных» проекций, то нет необходимости их выделять в особую группу, как это иногда делают: проекции, получаемые преобразованием одной или нескольких известных проекций, должны найти место в классификации по виду нормальной сетки, как частный случай той или иной группы проекций.

Кроме рассмотренной выше классификации картографических проекций, практический интерес представляет их подразделение «по форме их использования» для карт. По этому признаку В. В. Каврайский [7] предложил картографические проекции делить на сплошные, многополосные, многогранные, составные и надрезанные. Сплошной проекцией называют такую проекцию, которая рассчитана для изображаемой территории в виде единой проекции, при этом карта, составленная в такой проекции может быть и многолистной, но каждый отдельный лист будет представлять часть картографической сетки в одной общей проекции. Если одна и та же проекция применена к разбивке изображаемой территории на полосы и для каждой полосы она имеет свои параметры, то такую проекцию называют многополосной (например, проекция Гаусса для топографических карт, применяемая по шестиградусным меридианным полосам — зонам). В целях уменьшения искажений в пределах листа карты иногда каждую сферическую трапецию, соответствующую, например, международной разграфке топографических карт, изображают индивидуально, хотя и в одной и той же проекции, но со своими параметрами; такую проекцию называют многогранной (например, проекция карты масштаба 1:1 000 000). Составными проекциями называют проекции, составленные из частей одной или двух проекций, соединенных по линии, которая изображается одинаково в обеих частях (напри-

мер, составная равноугольно-равнопромежуточная цилиндрическая проекция, предложенная В. В. Каврайским). Составными и надрезанными проекциями можно назвать проекции, имеющие разрывы вдоль меридианов или иных линий и составленные из частей одной и той же или нескольких проекций (например, равновеликая псевдоцилиндрическая проекция Эккерта, примененная для мировых карт БСАМ).

Проекции полезно группировать по территориальному охвату:

- 1) проекции карт мира, изображающих поверхность всего земного шара, или исключая полярные области, составляющие примерно $1/16$ долю всей поверхности Земли, или изображающих поверхность земного шара с некоторым перекрытием;
- 2) проекции карт полушарий или территорий несколько больших полушарий;
- 3) проекции карт материков;
- 4) проекции карт океанов, полярных областей;
- 5) проекции карт территории СССР в целом;
- 6) проекции карт отдельных зарубежных стран или их групп, союзных республик, областей и краев СССР, отдельных морей;
- 7) проекции номенклатурных, многолистных карт.

По форме сеток мировых карт Г. А. Гинзбург [3] предлагает такое подразделение:

- 1) «планисферы» — сплошные сетки с «линейным», вытянутым по долготе размещением материков;
- 2) сетки с «центральной», вокруг одного из полюсов, расположением материков;
- 3) сетки переходных типов между первым и вторым.

Что касается терминологии в названиях картографических проекций, то в настоящее время еще нет общепринятой системы наименований проекций: часто одна и та же проекция имеет разные названия или, наоборот, разные проекции называют одинаково по фамилии предложившего их автора. На расхождении в названиях неоднократно указывалось разными авторами [2, 8].

Нам представляется, что в систему наименований проекций должны быть положены следующие принципы:

- 1) указание ориентировки сетки (только для косых и поперечных сеток);
- 2) характер искажений (равноугольная, равновеликая или равнопромежуточная проекция);
- 3) класс проекции — по виду нормальной сетки в соответствии с рассмотренной выше классификацией;
- 4) фамилия автора или коллектива авторов;
- 5) год разработки проекции.

Для характеристики проекции под картой следует помещать дополнительные краткие сведения, полезные для правильного пользования картой: широты стандартных параллелей для конических, цилиндрических и азимутальных проекций; аналогичные сведения для косых проекций; какими линиями изображаются меридианы — для псевдоцилиндрических проекций; какими линиями изображаются параллели — для проекций с равноотстоящими криволинейными параллелями; как изображается полюс — точкой или полярной линией; какой вид имеют изоколы; величины крайних искажений площадей и углов, их размещение и прочие сведения.

5. Обозначения в формулах картографических проекций

Для стандартизации обозначений в формулах важнейших классов и отдельных видов проекций дадим сводку уравнений и обозначений величин, встречающихся в выражениях для увеличений и искажений. За исключением особо оговоренных случаев, Землю будем принимать за шар, радиус которого приравняем единице, так же как и главный масштаб $\mu_0 R = 1$.

Проекция с круговыми параллелями.

Общие уравнения:

$$(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 = \rho^2; \quad \delta = f_1(\varphi, \lambda),$$

где $x_p = f_2(\varphi)$, $y_p = f_3(\varphi)$ — координаты центров параллелей;
 $\rho = f_4(\varphi)$ — радиусы параллелей.

Проекция круговые

Общие уравнения:

$$(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 = \rho_p^2; \quad (x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = \rho_m^2,$$

где $x_p = f_1(\varphi)$, $y_p = f_2(\varphi)$ — координаты центров параллелей;
 $\rho_p = f_3(\varphi)$ — радиусы параллелей;
 $x_m = f_4(\lambda)$, $y_m = f_5(\lambda)$ — координаты центров меридианов;
 $\rho_m = f_6(\lambda)$ — радиусы меридианов.

Поликонические проекции

Общие уравнения:

$$\rho = f_1(\varphi), \quad \delta = f_2(\varphi, \lambda); \quad x = q - \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta; \quad q = f_3(\varphi);$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = - \left(\sin \delta \frac{dq}{d\varphi} + \rho \frac{d\delta}{d\varphi} \right) : \left(\cos \delta \frac{dq}{d\varphi} - \frac{d\rho}{d\varphi} \right); \quad n = \frac{\rho}{\cos \varphi} \frac{d\delta}{d\varphi};$$

$$m = \left(\cos \delta \frac{dq}{d\varphi} - \frac{d\rho}{d\varphi} \right) \sec \varepsilon; \quad p = mn \cos \varepsilon; \quad 2 \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{m^2 + n^2 - 2p}{p}}.$$

Виды поликонических проекций	x, y
Простая поликоническая	$x = \varphi + [1 - \cos \delta] \operatorname{ctg} \varphi;$ $y = \sin \delta \operatorname{ctg} \varphi; \quad \delta = \lambda \sin \varphi$
Поликоническая проекция ЦНИИГАиК	Проекция определяется координатами узловых точек, взятыми с эскиза сетки, уравненными и сгущенными численным методом Н. А. Урмаева

Псевдоконические проекции.

Общие уравнения:

$$\rho = f_1(\varphi); \quad \delta = f_2(\varphi, \lambda); \quad x = q - \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta; \quad q = \operatorname{const};$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \rho \frac{d\delta}{d\varphi} : \frac{d\rho}{d\varphi}; \quad m = - \frac{d\rho}{d\varphi} \sec \varepsilon; \quad n = \frac{\rho}{\cos \varphi} \frac{d\delta}{d\varphi};$$

$$p = mn \cos \varepsilon; \quad 2 \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{m^2 + n^2 - 2p}{p}}.$$

Проекция Бонна:

$$\rho = (\operatorname{ctg} \varphi_0 + \varphi_0) - \varphi; \quad \delta = \frac{\cos \varphi}{\rho} \lambda; \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \lambda \sin \varphi - \delta = 2 \operatorname{tg} \frac{\omega}{2};$$

$$m = \sec \varepsilon; \quad n = p = 1,$$

где φ_0 — широта центральной точки.

Псевдоазимутальные проекции

Общие уравнения:

$$\rho = f_1(\vartheta), \quad \delta = f_2(\vartheta, \lambda); \quad x = \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta; \quad q = 0;$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \rho \frac{d\delta}{d\vartheta} : \frac{d\rho}{d\vartheta}; \quad m = \frac{d\rho}{d\vartheta} \sec \varepsilon; \quad n = \frac{\rho}{\sin \vartheta} \frac{d\delta}{d\vartheta};$$

$$p = mn \cos \varepsilon; \quad 2 \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{m^2 + n^2 - 2p}{p}}; \quad \vartheta = 90^\circ - \varphi.$$

Проекция ЦНИИГАиК с овальными изоколами (косая):

$$\rho = 3 \sin \frac{z}{3}; \quad \delta = a - C \left(\frac{z}{z_n} \right)^a \sin k\alpha,$$

где принято:

$$z_n = 120^\circ, \quad C = 0,15, \quad a = 2, \quad k = 2,$$

координаты полюса сферических координат $\varphi_0 = +55^\circ; \lambda_0 = +30^\circ$.

Псевдоцилиндрические проекции.

Общие уравнения:

$$x = f_1(\varphi); \quad y = f_2(\varphi, \lambda); \quad \operatorname{tg} \varepsilon = - \frac{\partial y}{\partial \varphi} : \frac{\partial x}{\partial \varphi}; \quad m = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \sec \varepsilon;$$

$$n = \frac{\partial y}{\partial \lambda} \sec \varepsilon; \quad p = mn \cos \varepsilon; \quad 2 \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{m^2 + n^2 - 2p}{p}}.$$

Виды псевдоцилиндрических проекций	x, y	z, n, m, p, ω
Синусоидальная равноугольная Сансона (1650)	$x = \varphi, \quad y = \lambda \cos \varphi$	$\operatorname{tg} \varepsilon = \lambda \sin \varphi = 2 \operatorname{tg} \frac{\omega}{2},$ $m = \sec \varepsilon, \quad n = p = 1$
Эллиптическая равноугольная Мольвейде (1805)	$x = \sqrt{2} \sin \varphi',$ $y = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \lambda \cos \varphi',$ $\sin 2\varphi' + 2\varphi' = \pi \sin \varphi$	$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2\lambda}{\pi} \operatorname{tg} \varphi', \quad n = \frac{2\sqrt{2} \cos \varphi'}{\pi \cos \varphi},$ $m = \frac{\sec \varepsilon}{n}, \quad p = 1,$ $2 \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \sqrt{m^2 + n^2 - 2}$
Синусоидальная равноугольная Эккерта	$x = \frac{2}{\sqrt{2 + \pi}} \varphi',$ $y = \frac{\lambda}{\sqrt{2 + \pi}} (1 + \cos \varphi'),$ $\sin \varphi' + \varphi' = \frac{2 + \pi}{2} \sin \varphi$	$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\lambda}{2} \sin \varphi',$ $n = \frac{2}{\sqrt{2 + \pi}} \sec \varphi \cos^2 \frac{\varphi'}{2},$ $m = \frac{\sec \varepsilon}{n}, \quad p = 1,$ $2 \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \sqrt{m^2 + n^2 - 2}$

Продолжение

Виды псевдоцилиндрических проекций	x, y	$\epsilon, n, m, p, \omega$
Равновеликая Каврайского (1933)	$x = a \sin b\varphi$, $y = \frac{\lambda}{ab} \cos \varphi \sec b\varphi$, a, b — параметры проекции	$\operatorname{tg} \epsilon = \frac{\lambda \sec^2 b\varphi}{a^2 b^2} (\sin \varphi + \cos \varphi \operatorname{tg} b\varphi)$, $n = \frac{\sec b\varphi}{ab}$, $m = \frac{\sec \epsilon}{n}$, $p = 1$, $2 \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \sqrt{m^2 + n^2 - 2}$
Синусоидальная равновеликая Каврайского (1936)	$x = \sqrt{3} \varphi'$, $y = \frac{2\sqrt{3}}{3} \lambda \cos \varphi'$, $\sin \varphi' = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi$	$\operatorname{tg} \epsilon = \frac{2}{3} \lambda \sin \varphi'$, $n = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\cos \varphi'}{\cos \varphi}$, $m = \frac{\sec \epsilon}{n}$, $p = 1$, $2 \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \sqrt{m^2 + n^2 - 2}$
ЦНИИГАиК	$x = \varphi + \frac{\varphi^3}{12}$, $y = (1 - 0,162338\varphi^2) \times$ $\times (0,87 - 0,0009524261\varphi^2) \lambda$	$\operatorname{tg} \epsilon = (0,87\lambda - 0,00095243\lambda^3) \frac{0,32468\varphi}{1 + 0,25\varphi^2}$, $m = (1 + 0,25\varphi^2) \sec \epsilon$, $p = mn \cos \epsilon$, $n = (1 - 0,162338\varphi^2) (0,87 - 0,0038097\lambda\varphi) \times$ $\times \sec \varphi$
Эллиптическая Каврайского со 120-градусным круговым меридианом	$x = \varphi$, $y = \frac{1\sqrt{3}}{2} \lambda \cos \varphi'$, $\sin \varphi' = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi$	$\operatorname{tg} \epsilon = \frac{3\lambda}{2\pi} \operatorname{tg} \varphi'$, $n = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\cos \varphi'}{\cos \varphi}$, $m = \sec \epsilon$, $p = n$, $2 \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \sqrt{m^2 + n^2 - 2n}$
Синусоидальная Урмаева	$x = \frac{\varphi'}{ab} + \frac{k}{3ab} \varphi'^3$, $y = a\lambda \cos \varphi'$, $\sin \varphi' = b \sin \varphi$, a, b, k — параметры	$\operatorname{tg} \epsilon = \frac{a^2 b \sin \varphi'}{1 + k\varphi'^2}$, $n = \frac{a \cos \varphi'}{\cos \varphi}$, $m = \frac{p \sec \epsilon}{n}$, $p = 1 + k\varphi'^2$

Конические проекции.

Общие уравнения:

$\rho = f(\varphi)$; $\delta = a\lambda$; $x = q - \rho \cos \delta$; $y = \rho \sin \delta$;

$q = \text{const}$; $m = -\frac{d\rho}{d\varphi}$; $n = \frac{a\rho}{\cos \varphi}$; $p = mn$,

$\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\omega}{4} \right) = \sqrt{\frac{a}{b}}$; $\epsilon = 0$.

Виды конических проекций	Радиусы параллелей	Параметры проекции
Радиугольная	$\rho = K \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)$	a, K
Радиопромежуточная	$\rho = \rho_{\text{экв}} - \varphi$	$a, \rho_{\text{экв}}$
Равновеликая	$\rho = \sqrt{\frac{2}{a} (d - \sin \varphi)}$	a, d

Коэффициент пропорциональности a углов между изображениями меридианов на карте долготам в натуре и параметры $K, \rho_{\text{экв}}, d$, выражающие значения радиусов изображения экватора на карте, подлежат определению из дополнительных условий, для которых приняты следующие обозначения:

φ_n, φ_s — широты крайних параллелей, ограничивающих изображаемую территорию.

$\varphi_n = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ — широта средней параллели,

φ_1, φ_2 — широты стандартных параллелей, вдоль которых сохраняются длины,

$\bar{\varphi}$ — широта параллели, вдоль которой масштаб наименьший.

Азимутальные (в том числе перспективные) проекции.

Общие уравнения:

$\rho = f(\varphi) = F(\vartheta)$; $\vartheta = 90^\circ - \varphi$; $\delta = \lambda$; $x = \rho \cos \delta$; $y = \rho \sin \delta$;

$q = 0$; $m = -\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{d\rho}{d\vartheta}$; $n = \frac{\rho}{\cos \varphi} = \frac{\rho}{\sin \vartheta}$; $p = mn$;

$\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\omega}{4} \right) = \sqrt{\frac{a}{b}}$; $\epsilon = 0$.

Виды азимутальных проекций	Радиусы параллелей ρ	Увеличения	
		m	n
Центральная (гномоническая)	$\operatorname{tg} \vartheta$	$\sec^2 \vartheta$	$\sec \vartheta$
Радиугольная (стереографическая)	$2 \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}$	$\sec^2 \frac{\vartheta}{k}$	$\sec^2 \frac{\vartheta}{2}$
Гинзбурга	$k \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{k}$	$\sec^2 \frac{\vartheta}{k}$	$\frac{\rho}{\sin \vartheta}$
Радиопромежуточная	ϑ	1	$\frac{\rho}{\sin \vartheta}$
Гинзбурга	$k \sin \frac{\vartheta}{k}$	$\cos \frac{\vartheta}{2}$	$\frac{\rho}{\sin \vartheta}$
Равновеликая	$2 \sin \frac{\vartheta}{2}$	$\cos \frac{\vartheta}{2}$	$\sec \frac{\vartheta}{2}$
Ортографическая	$\sin \vartheta$	$\cos \vartheta$	1
Маловичко	$2 \sin \frac{\vartheta}{2} \sec^k \frac{\vartheta}{2}$	$\frac{d\rho}{d\vartheta}$	$\sec^k + 1 \frac{\rho}{2}$

Параметр проекции k задается.

Цилиндрические проекции.

Общие уравнения:

$$x = f(\varphi); \quad y = \cos \varphi_0 \cdot \lambda; \quad m = \frac{dx}{d\varphi}; \quad n = \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi};$$

$$p = mn, \quad \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\alpha}{4} \right) = \sqrt{\frac{a}{b}}; \quad \varepsilon = 0.$$

Виды цилиндрических проекций	x	m
Равноугольная (Меркатора)	$\ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)$	$\cos \varphi_0 \sec \varphi$
Равнопромежуточная	φ	1
Равновеликая	$\sec \varphi_0 \sin \varphi$	$\sec \varphi_0 \cos \varphi$
Перспективно-цилиндрические	$(d + \cos \varphi_0) \frac{\sin \varphi}{d + \cos \varphi}$	$(d + \cos \varphi_0) \frac{1 + d \cos \varphi}{(d + \cos \varphi)^2}$
Урмаева	$a\varphi + b\varphi^3$	$a + 3b\varphi^2$

Здесь φ_0 — широта главной параллели, на которой $n = 1$;
 a и b — постоянные коэффициенты.

Проекция Гаусса

$$x = X + a_2 \lambda^2 + a_4 \lambda^4 + a_6 \lambda^6 + \dots;$$

$$y = b_1 \lambda + b_3 \lambda^3 + b_5 \lambda^5 + \dots,$$

где $a_2, a_4, a_6, \dots, b_1, b_3, b_5, \dots$ — коэффициенты, зависящие от широты.

В настоящей статье автор обращает внимание на нерешенные вопросы по терминологии в математической картографии, имея в виду унификацию и стандартизацию основных определений и обозначений, что имеет значение не только для учебных целей, но и для развития математической картографии как науки.

Литература

1. А. В. Гедымин О соотношении искажений площадей и форм в картографических проекциях «Сборник ГУГК», вып. 30, 1950.
2. Г. А. Гинзбург О некоторых основных вопросах математической картографии «Сборник ГУГК», вып. 22, 1948.
3. Г. А. Гинзбург Математическое обоснование карт комплексных мировых географических атласов «Труды ЦНИИГАиК», вып. 91, 1952.
4. Г. А. Гинзбург Картографические проекции с изоколами в виде овалов и овалов «Сборник статей по картографии ГУГК», вып. 1, 1952.
5. Г. А. Гинзбург, Н. С. Карпов, Т. Д. Салманова. Математическая картография в СССР. Часть I Исторический очерк и справочные данные «Труды ЦНИИГАиК», вып. 90, 1955.
6. А. В. Граур Математическая картография Издание второе, переработанное и дополненное А. А. Павловым Изд. Ленингр. университета, 1956.
7. В. В. Каврайский Картографические проекции БСЭ, 2 изд., т. 20.
8. А. А. Павлов. О классификации и наименованиях картографических проекций «Вестник Ленинградского университета», № 12. Серия геологии и географии, вып. 2, 1956.
9. М. Д. Соловьев Картографические проекции, М., 1946.
10. Н. А. Урмаев Исследования по математической картографии «Труды ЦНИИГАиК», вып. 98, 1953.

В. И. ВОРОБЬЕВ

ДЛИНА БЕРЕГОВОЙ ЛИНИИ МОРЕЙ СССР

Протяжение морской береговой линии является важным географическим показателем, позволяющим судить о характере берега, его изрезанности и т. д. Кроме того, знание длины береговой линии имеет практическое значение для различных расчетов и соображений, например о навигационном оборудовании побережья. Тем больший интерес представляют достоверные данные о протяжении морской береговой линии (а также о длине морской государственной границы) для великой морской державы — Союза Советских Социалистических Республик Встречающиеся в научной и популярной литературе сведения о длине береговой линии не основаны на точных, методически верных, систематически проведенных измерениях, получены в результате приближенных и несопоставимых отдельных подсчетов, а потому подчас противоречивы и не могут быть приняты в качестве достоверных. Достаточно сказать, что нередко одни и те же цифры то фигурируют в качестве показателя протяженности береговой линии морей СССР, то приписываются длине морской государственной границы СССР, тогда как в действительности два этих понятия совершенно различны. Длина береговой линии (термин физико-географический) учитывает все извилины морского побережья, заливов, бухт, островов, в то время как морская государственная граница (термин международно-правовой и политико-географический) проходит по внешнему обводу прибрежной полосы территориальных вод и, как нетрудно себе представить, в большинстве случаев значительно короче береговой линии, так как не проникает в сравнительно узкие заливы; в настоящей статье рассматриваются вопросы измерения длины морской береговой линии.

За последние годы некоторые проблемы картометрии — вообще говоря достаточно сложной и до недавнего времени сравнительно мало разработанной отрасли математической картографии — явились предметом обстоятельных исследований советских ученых, что позволяет теперь выполнять крупные картографические измерения на принципиально новых научно-методических основах и получать, следовательно, наиболее точные выводы. Известно, что развитие картометрии как науки обязано трудам крупных отечественных геодезистов и географов И. А. Стрельбицкого, А. А. Тилло и в особенности Ю. М. Шокальского, выполнивших ряд фундаментальных работ в области практической картометрии на базе оригинальной методики. Однако в прежних картометрических измерениях (в частности, в измерениях длин рек), методически разработанных этими учеными, хотя и были установлены важнейшие закономерности, положенные в основу предложений Н. М. Волкова, но большое значение имела субъективная оценка извилистости кривой линии на карте для введения

соответствующей поправки с целью приведения измеренной длины линии к «истинной».

Вопрос о необходимости и целесообразности нового измерения по картам длины береговой линии морей, омывающих берега СССР, был поставлен Президиумом Географического общества СССР после опубликования Н. М. Волковым в «Известиях АН» (1949 г.), предложенного им еще в 1946 году метода редуцирования, который и был принят при новом картометрическом измерении протяжения береговой линии и морской границы СССР.

Способ проф. Н. М. Волкова¹ основан на математической интерпретации закономерности, с которой происходит на картах обобщение рисунка извилистой линии (берега, реки), а следовательно, и спрямление, уменьшение ее длины по мере уменьшения масштаба карты. В качестве коренного улучшения по сравнению с прежними методами, во многом зависящими от субъективной оценки извилистости, новый способ устраняет существенное влияние личной ошибки и устанавливает возможность математического расчета конечного результата на основе произведенных непосредственных картометрических измерений.

Для усиления принятого порядка измерительно-вычислительной работы и вывода окончательных результатов напомним принципиальную сущность способа Н. М. Волкова, а также основное содержание критики этого способа, нашедшей должное отражение в исполненной работе.

Длина извилистой линии (реки, берега), измеренная на карте данного масштаба, возрастает по мере уменьшения растворения циркуля; частные значения этой длины располагаются на графике по кривой, которой удовлетворяет уравнение параболы, если по оси абсцисс отложены величины растворений циркуля (в миллиметрах), а по оси ординат — полученные длины кривой (в километрах). При дальнейшем уменьшении растворения, в пределе приближающегося к нулю, получилась бы действительная или «предельная» длина линии на данной карте с учетом всех ее малейших изгибов и изгибов, равная

$$l_{np} = l_d + \beta \sqrt{d_1},$$

где d_1 — величина растворения циркуля,
 l_d — длина линии, полученная при данном растворении,
 β — некоторый коэффициент, зависящий от извилистости линии.

Увеличив растворение циркуля, получим новое значение длины линии l_d , отличие которой от l_d зависит от степени извилистости. Для определения двух неизвестных в уравнении — l_{np} и β — необходимо и достаточно произвести по данной карте два измерения той же извилистой линии, например участка береговой линии или реки, циркулями с различным растворением и затем совместно решить два уравнения; в результате определится

$$l_{np} = l_d + K(l_d - l_d),$$

где

$$K = \frac{\sqrt{d_1}}{\sqrt{d_2} - \sqrt{d_1}}.$$

В работе Н. М. Волкова приводится таблица значений коэффициента «K», вычисленная для наиболее употребительных растворений циркуля; рекомендуется применять специально изготовленные циркули

¹ Н. М. Волков. Новый способ измерения длины рек по картам. «Известия Академии Наук СССР». Серия географическая и геофизическая. 1949 г., том XIII, № 2. Его же. Принципы и методы картометрии. Изд. АН СССР, 1950, М. — Л., стр. 58—67

с достаточно различающимися (в 4—5 раз) постоянными растворениями, чтобы коэффициент «K» был не больше 1 и, таким образом, результат l_{np} был бы обременен ошибкой, не большей, чем ошибки непосредственных измерений l_d и l_d . Для рассматриваемой работы были изготовлены комплекты циркулей с постоянными растворениями, равными 1—1,25 мм и 4—5 мм. Точное знание действительной величины растворения в миллиметрах не столь существенно, так как оно необходимо лишь для выборки из таблиц коэффициента «K»; величина эта определялась для данного циркуля многократным контрольным измерением отрезка точно определенной длины. Более важно знать точное значение цены растворения циркуля в километрах на данном участке карты с учетом изменения масштаба карты с широтой и деформации бумаги. Для этого в каждой широтной зоне меркаторской карты, практически сохраняющей постоянство масштаба, циркулем измерялся определенный отрезок меридиана в 10'—15', истинная длина которого в километрах бралась из «Картографических таблиц».

Таким образом получалась «предельная», измеренная как бы циркулем с минимальным, «нулевым», растворением, длина участка береговой линии на данной карте.

Аналогичная «параболическая» зависимость устанавливается рассматриваемым методом и для возрастания длины объекта (береговой линии, реки) с увеличением масштаба карты; именно данная часть метода Н. М. Волкова представляет собой (по сравнению с прежними картометрическими методами измерения протяженности рек, берегов и т. д.) коренное, значительное нововведение, позволяющее, по мнению автора, рассчитать действительную длину этих объектов на местности, как бы в масштабе 1:1. Приведенная к масштабу 1:1, или «редуцированная», длина, соответствующая вершине параболы, построенной в координатных осях «масштаб — длина», может быть теоретически рассчитана по формуле

$$l_{ред} = l_{N_1} + \alpha \sqrt{N_1},$$

где l_{N_1} — значение в километрах длины реки или берега, измеренной на карте, знаменатель масштаба которой равен N_1 ,
 α — коэффициент, зависящий от извилистости линии.

Практически для получения $l_{ред}$ необходимо и достаточно произвести измерение линии (реки, берега) на двух картах, существенно различающихся по масштабу; тогда

$$l_{ред} = l_{N_1} + (l_{N_2} - l_{N_1}) \frac{\sqrt{N_1}}{\sqrt{N_2} - \sqrt{N_1}} = l_{N_1} + t(l_{N_2} - l_{N_1}),$$

где l_{N_1} — длина реки (берега) по карте более крупного масштаба $\frac{1}{N_1}$. Значение коэффициентов t для различных соотношений общепринятых стандартных масштабов выбирается из таблицы. При этом:

1. Длины извилистых линий, измеренные по каждой из двух карт, должны представлять собой действительную или «предельную» длину с учетом всех изгибов линии на данной карте, т. е. длину, как бы измеренную циркулем с наименьшим, предельно близким к нулю растворением (см. выше).

2. Карты должны быть идентичны, то-есть составлены по одним и тем же исходным материалам с правильным обобщением или генерализацией, береговой линии на карте более мелкого масштаба по сравнению с картой более крупного масштаба. Только при этом условии разность $(l_{N_2} - l_{N_1})$

окажется, как и должно быть, положительной, и редуцированная к условному масштабу 1:1 длина линии будет больше, чем по измерению на крупномасштабной карте.

При неправильной генерализации, при использовании для составления разномасштабных карт разных, неидентичных, несопоставимых между собой материалов, а также, например, при неверной, слишком грубой утрировке характера береговой линии на карте мелкого масштаба может получиться, что «предельная» длина линии окажется большей по измерению на сравнительно мелкомасштабной карте, чем по измерению на крупномасштабной карте. В практике произведенных картометрических измерений береговой линии СССР это имело место по отдельным участкам береговой линии на картах, хотя и редко, менее чем для 1% измерений. Если повторные контрольные измерения не обнаруживали ошибку и под тверждали превышение l_{N_2} над l_{N_1} (где знаменатель масштаба $N_2 > N_1$), то вследствие логической невозможности расчета редуцированной длины результат $l_{ред}$ условно принимался равным предельной длине береговой линии на карте более крупного масштаба, т. е. считалось, что $l_{ред} = l_{N, пред}$.

Итак, для расчета длины береговой линии оказывалось необходимым, применения метод Н. М. Волкова, произвести измерения:

1) малым раствором циркуля (1—1,25 мм) на карте сравнительно крупного масштаба (примерно 1:100 000—1:250 000) — l_1 ;

2) на той же, сравнительно крупномасштабной карте, но большим раствором циркуля (4—5 мм) — l_2 , после чего можно рассчитать $l_{пред}$ т. е. предельную, как бы измеренную циркулем с минимальным раствором, длину береговой линии на крупномасштабной карте с учетом всех извилин рисунка этой линии на карте;

3) тем же малым раствором циркуля на карте сравнительно мелкого масштаба (примерно 1:500 000—1:1 000 000) — l_3 . Соотношение масштабов карт бралось по возможности близким к 1:4—1:5, чтобы коэффициент l был близок к 1 или меньше;

4) тем же большим раствором циркуля на этой карте мелкого масштаба — l_4 . По l_3 и l_4 рассчитывается предельная длина береговой линии на карте мелкого масштаба — $l_{пред}$, после чего по $l_{пред}$ и $l_{ред}$ получается $l_{ред}$ — редуцированная, или действительная, как бы измеренная в масштабе 1:1 длина данного участка береговой линии, т. е. окончательный результат измерений и вычисления.

Для обнаружения возможных просчетов, грубых случайных ошибок и для их последующего исключения, а также для уменьшения систематической ошибки за счет параллакса каждое из измерений 1, 2, 3, 4 делалось в прямом и обратном направлениях, т. е. по существу дважды, а всего, таким образом, любой участок береговой линии измерялся восемь раз. Однако нетрудно видеть, что особенно трудоемким является лишь измерение 1 циркулем с малым раствором на карте крупного масштаба; измерения же 2 и 3 примерно в 4 раза, а измерение 4 примерно в 16 раз менее трудоемко, чем измерение 1. Впрочем, для общей характеристики трудоемкости работы достаточно сказать, что измерение по карте береговой линии протяженностью около 100 000 км указанным методом требует около 1000 технико-дней, включая необходимое время для обработки. Вывода итоговых результатов, проверки и пр. Однако и с точки зрения рациональности данный метод предпочтительнее перед прежними картометрическими измерениями, требовавшими значительно больших затрат времени для получения результата меньшей точности.

Метод Н. М. Волкова получил в общем положительную оценку со стороны ряда авторитетных учреждений и отдельных ученых (см. «Известия Академии Наук, серия географическая и геофизическая», т. XI, № 5,

1947, — статья академика А. А. Григорьева «Успехи советской физической географии за 30 лет» и журнал «Метеорология и гидрология», 1949, № 3, рецензия А. А. Соколова на работу Н. М. Волкова); метод опубликован и рекомендован комиссией, назначенной решением Президиума Географического общества СССР по вопросам методики измерений на картах протяженности морских границ. Следует констатировать, что эти положительные оценки не касались ни правильности эмпирических формул и выводов автора по существу темы, ни, тем более, действительной или вероятной точности результатов, так как метод не был практически испытан на крупных картометрических работах и тогда не имелось достаточного, обоснованного материала для суждения.

Обстоятельной критике подвергся метод Н. М. Волкова в 1951 году в статье А. К. Маловичко («Труды Новосибирского института инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии», том III, вып. 3, Новосибирск, 1951); затем в 1952 году в V томе тех же «Трудов» опубликована в порядке научной дискуссии ответная статья Н. М. Волкова «Об измерении длин рек по картам» и вторая статья А. К. Маловичко «О дискуссии по поводу картографических закономерностей». Критические замечания А. К. Маловичко (во многом справедливые для измерения длин рек), равно как возражения и уточнения Н. М. Волкова в его ответной статье, были тщательно изучены, но не изменили нашей точки зрения по трактовке вопросу — о пригодности и целесообразности применения метода Н. М. Волкова к задаче измерения длины морской береговой линии.

Однако математическая закономерность, какой бы формулой она ни выражалась, показывающая нарастание длины (в км) извилистой линии по мере увеличения масштаба карты и уменьшения раствора циркуля, не применима в одинаковой степени к измерению длин рек и к измерению длины береговой линии. Длина реки измеряется по «судовому ходу», «фарватеру», «средней линии», т. е. по весьма сглаженной линии с большим радиусом кривизны. Если измерится длина значительной реки, все протяжение которой от истока до устья показывается на карте любого масштаба, то нарастание длины реки по мере увеличения масштаба используемых карт происходит сперва, в зоне мелкомасштабных карт (примерные масштабы 1:500 000—1:3 000 000 для крупных рек), медленно; затем темп нарастания прогрессирует, и кривая на графике идет вверх, образуя выпуклость книзу; достигнув в масштабе примерно 1:200 000—1:50 000 значения, близкого к максимуму, нарастание длины реки приостанавливается и в дальнейшем, на крупномасштабных картах и планах, длина средней линии реки остается практически постоянной, а частные значения различаются лишь из-за ошибок измерений.¹

Измеряемая линия (воображаемая, в природе не означенная) — «судовой ход» или «средняя линия реки» — на крупномасштабных картах изображается прямой или почти прямой, с весьма малой кривизной, линией, легко поддающейся точному измерению; нарастание длины прекращается, следовательно, начиная с того масштаба, в котором все изгибы (меандры) реки выражаются в виде достаточно пологих кривых; кривая на графике образует выпуклость кверху и приближается к оси ординат (длины) по направлению, параллельному оси абсцисс (масштабов), начиная от масштабов 1:50 000—1:10 000 или крупнее, в зависимости от ширины и извилистости реки. Поэтому предельная длина большой реки, измеренная по крупномасштабной карте, не подлежит исправлению какими-либо

¹ Разумеется, при измерении длин всех рек какого-либо речного бассейна нарастание с увеличением масштаба используемых карт происходит непрерывно, поскольку на крупномасштабных картах «появляются» новые небольшие реки, ручьи, руды и т. д., вплоть до тех, извилины которых могут быть выражены и, следовательно, измерены только на картах самого крупного масштаба

поправочными коэффициентами, выводимыми из сравнительно точных измерений по мелкомасштабным картам, а должна непосредственно приниматься в качестве окончательного результата; в этом отношении прав А. К. Маловичко, с которым в конце концов, соглашается и Н. М. Волков. Таким образом, здесь вполне можно говорить о действительной, окончательной длине реки, о длине в натуральном масштабе 1:1, так как предельная длина средней линии реки, снятая с крупномасштабной карты, например 1:25 000—1:10 000, равна действительной длине этой линии и не изменится при дальнейшем увеличении масштаба хотя бы в 25 000 раз для доведения масштаба до 1:1. Кривизна линии на карте полностью учитывается благодаря измерению циркулями с разным растворением с последующим расчетом предельного значения. Однако поскольку фактически измерение на картах столь крупного масштаба слишком трудоемко, удовлетворительный результат вполне достигается редуцированием по методу Н. М. Волкова длин, измеренных по картам масштаба 1:200 000—1:50 000. Значение окончательной, или действительной, длины, соответствующее масштабу 1:25 000—1:10 000, лежит практически в вершине параболы, построенной в координатных осях «масштаб — длина» по арифметическому нарастанию аргументов.

Иное дело — измерение береговой линии, протяжение которой с учетом всех реально существующих неровностей и микронзвивлины непрерывно возрастает по мере увеличения масштаба карты. Береговая линия не является воображаемой, сглаженной, весьма пологой кривой (подобной «средней линии» реки), а имеет изгибы, детали, микроочертания, которые должны бы отобразиться на крупномасштабном плане. В отличие от возможности исчисления действительной длины реки не следует претендовать на возможность достоверного расчета действительной, существующей на местности длины береговой линии в натуральном масштабе 1:1; ведь, строго говоря, береговая линия даже в масштабе 1:1 имеет свои микроочертания. Но действительная длина морской береговой линии в масштабе 1:1 имеет лишь абстрактный, но отнюдь не серьезный теоретический, а тем более практический интерес, особенно принимая во внимание ее непостоянство из-за волнения, прибой, случайных колебаний уровня и т. п. Если бы было предпринято измерение длины береговой линии на местности, то оно велось бы мерительным прибором, например 25—50-метровой лентой, и все микронзвивлины в пределах этой мерительной величины несомненно не учитывались бы, равно как и отдельно лежащие небольшие скалы, камни (в свою очередь с неровными очертаниями!) и пр. Длина 25—50 м на местности вполне выражается и доступна измерению на карте масштаба примерно 1:25 000—1:50 000. На карте такого масштаба прямой линией отрезку, одному отложению ленты на местности, соответствует элементарный отрезок линии, поддающийся измерению циркулем с малым растворением. Все звивлины береговой линии, которые могут быть учтены на местности измерением лентой, отражены и на крупномасштабной карте, следовательно, достаточно получить длину береговой линии на карте масштаба 1:25 000—1:50 000, которая и является хотя не действительной длиной береговой линии в масштабе 1:1, но той же длиной, которая практически была бы измерена на местности.

Располагая лишь результатами измерений, выполненных на сравнительно мелкомасштабных картах, отличающихся по масштабу лишь в 3—4 раза (например, 1:1 000 000 и 1:250 000) и экстраполируя полученные данные на масштаб 1:1, т. е. в 250 тысяч раз более крупный, нельзя считать достоверным исчисление действительной, существующей на местности длины береговой линии. Но, придя к выводу, что нас не интересует «действительная» длина береговой линии со всеми ее, выражающимися в масштабе 1:1, микронзвивлинами, а достаточно рассчитать

длину этой линии в масштабе примерно 1:25 000, мы можем правомерно использовать возможность такого расчета, предоставляемую методом Н. М. Волкова, путем фактически осуществимого измерения в масштабах более мелких (1:1 000 000, 1:250 000 или 1:100 000) с исчислением длины в масштабе 1:25 000, т. е. для точки близ вершины параболы, построенной в координатных осях «масштаб — длина». Именно в пределах таких, не слишком мелких и не слишком крупных, масштабов (от 1:2 000 000 до 1:25 000) метод Н. М. Волкова дает возможность рассчитать длину береговой линии, как бы измеренную по картам, масштаб которых по крайней мере на один порядок крупнее.¹ Теоретически метод Н. М. Волкова претендует на возможность расчета действительной (или хотя бы соответствующей крупному масштабу) длины береговой линии по измерениям на картах любых, вплоть до весьма мелких масштабов. Так, теоретически, по этому методу, используя карты масштабов 1:20 000 000 и 1:5 000 000 или масштабов 1:10 000 000 и 1:2 500 000 (для этих соотношений коэффициент t равен единице), можно рассчитать «действительную» длину прибавлением к результату крупномасштабного измерения (1:5 000 000 или 1:2 500 000) величины его превышения над результатом мелкомасштабного измерения (соответственно 1:20 000 000 и 1:10 000 000). Очевидно, для удовлетворительной сходимости результатов независимых расчетов «действительной» длины береговой линии по двум парам карт, отличающихся по масштабу на один порядок, необходимо, чтобы это превышение у более мелкомасштабной пары было значительно больше, чем у более крупномасштабной пары карт, поскольку абсолютная величина предельной длины значительно меньше на более мелкомасштабной карте — в данном случае на карте масштаба 1:5 000 000.

Но практика измерений показывает, что в пределах мелких масштабов, от 1:50 000 000 примерно до 1:2 000 000, нарастание предельных длин идет весьма медленно, так что редуцированная длина, рассчитанная на основании измерений по картам 1:50 000 000 и 1:10 000 000 или 1:25 000 000 и 1:5 000 000 и даже 1:10 000 000 и 1:2 000 000, существенно меньше предельных длин, непосредственно измеренных по картам даже масштаба 1:500 000—1:250 000, не говоря уже о масштабах 1:50 000—1:25 000, а тем более о масштабах еще более крупных. Поэтому, используя карты столь мелких масштабов, никак нельзя ожидать получения удовлетворительных результатов, редуцированных на масштаб 1:1. В пределах же средних масштабов (примерно от 1:1 000 000 до 1:100 000) сходимости результатов измерений (редуцированных длин по картам разных масштабов) удовлетворительная, а абсолютная величина результата близка к предельной длине, полученной по картам масштаба 1:50 000—1:25 000 (т. е. масштаб которых, на целый порядок более крупный, не позволяет выразить только те детали береговой линии, которые все равно не были бы измерены и учтены при действительном измерении на местности).

Проверить на большом материале, что редуцированная длина на основании измерений по масштабам в пределах от 1:1 000 000—1:500 000 до 1:250 000—1:100 000 действительно весьма близка к предельной длине по масштабам 1:50 000—1:25 000, нет возможности как из-за крайней громоздкости измерений, так и по главной причине — отсутствия столь крупномасштабных карт на большой (десятки тысяч километров) сплошной участке береговой линии. Однако некоторые контрольные измерения, выполненные в процессе работ, показывают, что уклонения исчисленных

¹ В данном случае к одному порядку можно приравнять увеличение масштаба в 4 раза при котором редуцированная длина равна длине по более крупномасштабной карте плюс превышение этой длины над измеренной по более мелкомасштабной карте.

таким образом (по картам масштаба $1 : 1\,000\,000$ — $1 : 100\,000$) редуцированных длин от предельной длины по крупномасштабной карте ($1 : 50\,000$ — $1 : 25\,000$) хотя и относительно велики, но не имеют систематического характера, разнозначны, т. е. подчиняются закону случайных ошибок.

Метод Н. М. Волкова, не решая ненужной задачи получения длины береговой линии в масштабе $1 : 1$, тем не менее дает лучшую по сравнению с другими методами возможность расчета (по измерениям на мелкомасштабной карте) той длины береговой линии, которая получилась бы по измерениям на крупномасштабной карте. Следовательно, этот метод дает возможность, не производя чрезвычайно трудоемких измерений по крупномасштабным картам, рассчитать практическую длину береговой линии, как если бы она была измерена на местности с точностью, отвечающей крупному масштабу карт.

Если бы при любом характере береговой линии нарастание ее длины с увеличением масштаба карт, используемых для измерения, происходило равномерно, то не составило бы труда рассчитать длину для любого крупного масштаба карт по простой формуле

$$D_{кр} = D_{м} \left(1 + \frac{n}{100} \right)^k,$$

где $D_{м}$ — предельная длина береговой линии, измеренная по картам мелкого масштаба,

$D_{кр}$ — искомая длина той же береговой линии в заданном крупном масштабе, в котором выражаются все детали, т. е. действительная длина береговой линии,

n — выраженное в процентах нарастание длины береговой линии при увеличении масштаба карт на один порядок (в 4—5 раз),

k — число порядков для перехода от мелкого масштаба к предельно крупному.

Опыт измерений показывает, что для многих морей со сравнительно спокойной, не слишком изрезанной береговой линией нарастание длины береговой линии в пределах среднемасштабных карт (от $1 : 2\,000\,000$ до $1 : 200\,000$) происходит достаточно равномерно. с увеличением масштаба карт в 4 раза, т. е. на один порядок, измеренная длина береговой линии возрастает на 10—15% в зависимости от характера берега. Можно предположить, что «истинная» длина такой береговой линии в масштабе $1 : 1$ (если бы таковая длина представляла какой-то практический интерес) превосходила бы в $(1,1)^{10} \approx 2,6$ раза предельную длину по карте масштаба $1 : 1\,000\,000$, так как масштабы $1 : 1\,000\,000$ и $1 : 1$ разделены по крайней мере десятью порядками; при ограничении же предельно крупного масштаба величиной около $1 : 15\,000$ показатель степени уменьшается до 3 и длина, редуцированная на этот масштаб, составит 1,33 длины, измеренной по картам масштаба $1 : 1\,000\,000$. Было бы заманчиво, рассчитать для некоторого ограниченного участка побережья коэффициент увеличения длины с изменением масштаба карт на один порядок, принять его неизменным для всего протяжения береговой линии и, таким образом, свести работу к измерению предельной длины только на мелкомасштабной карте. Однако даже незначительное изменение коэффициента, неточность в его расчете и, следовательно, необоснованность его экстраполяции на всю береговую линию повлечет значительную ошибку в вычисленном результате. Между тем экспериментальные измерения показывают, что в большом диапазоне изменения масштабов, нарастание предельной длины береговой линии происходит по мере увеличения масштаба карт неодинаково

для различных побережий. Так, предельная длина береговой линии Черного моря при увеличении масштаба карт с $1 : 50\,000\,000$ до $1 : 5\,000\,000$ возрастает медленно; более быстрое нарастание имеет место в пределах масштабов $1 : 2\,000\,000$ — $1 : 200\,000$, а с дальнейшим укрупнением масштаба нарастание почти незаметно. В то же время для восточного побережья Адриатического моря наибольшее нарастание береговой линии наблюдается в пределах масштабов $1 : 5\,000\,000$ — $1 : 1\,000\,000$, а для шхерных берегов Кандалякской губы Белого моря или Финского залива (северный берег) максимальное нарастание длины береговой линии происходит в зоне значительно более крупных масштабов $1 : 200\,000$ — $1 : 50\,000$. Как уже говорилось выше, этим подтверждается, что достоверное исчисление редуцированной длины по любым формулам невозможно на основе измерений по мелкомасштабным картам (от $1 : 50\,000\,000$ до $1 : 2\,000\,000$). В широкой же зоне среднемасштабных карт расчет длины береговой линии, редуцированной на 1—2 порядка после измерения по картам масштаба около $1 : 1\,000\,000$ — $1 : 200\,000$, следует считать обоснованным и возможным для разнохарактерных берегов, если пренебречь небольшими извилинами, выражающимися лишь на крупномасштабных планах. При этом для менее изрезанных берегов, например для берегов советских северо-восточных арктических морей, вполне допустимо применять карты более мелких масштабов, чем для более развитой береговой линии Балтийского и других морей.

Изображение береговой линии даже на карте весьма крупного масштаба не дает уменьшенного фотографически подобия линии на местности, так как на карте по самой технике вычерчивания и издания могут быть выражены лишь детали, величина которых по крайней мере соответствует так называемой предельной точности масштаба, т. е. величине $0,2$ мм на карте. Следовательно, если бы технически возможно было осуществить измерение извилистой линии на карте циркулями с постоянным растворением $0,05$ — $0,1$ мм, то были бы учтены все детали изображения линии на карте вплоть до мельчайших, поддающихся вычерчиванию и воспроизведению в печати извилины, отвечающих предельной точности карты.

Но измерить извилистую линию на карте циркулями с таким малым раствором практически невозможно, а если бы такое измерение и было произведено, то результат его был бы грубо неверен и, вероятно, намного завышен, так как циркуль уклонился бы и не могло быть компенсировано увеличением отложений при измерении прямолинейного отрезка для определения цены деления циркуля.

Примененный метод дает возможность по измерению береговой линии двумя циркулями с различными, отличающимися на один «порядок» растворениями, позволяющими практически работать по карте, рассчитать длину этой линии, как бы измеренную минимальным (но, конечно, не нулевым) раствором циркуля, понимая под минимальным такое расстояние (около $0,1$ мм, т. е. на один порядок меньше самого малого обычно применяемого растворения), которое позволяет снимать и учитывать все детали, выражающиеся в масштабе карты, т. е. имеющиеся на карте величину около $0,2$ мм.

По мнению критиков способа Н. М. Волкова, универсальное применение единых расчетных формул для исчисления предельных и редуцированных длин не учитывает ни конкретных особенностей того или иного географического района, ни качества картографического материала. Главное значение придать ошибке якобы систематического характера, происходящей от принятия параболической кривой для выражения закона нарастания длины береговой линии с уменьшением растворения циркуля и с увеличением масштаба карты.

По критическим высказываниям, такая функциональная зависимость (парабола) дает завышенный результат. Однако вывод о получении завышенного результата может быть справедлив только для измерения протяженности крупных рек, поскольку истинной длиной реки считают ее длину по середине русла, т. е. весьма сглаженную кривую, изображающуюся на крупномасштабном плане прямой, без нарастания длины с дальнейшим увеличением масштаба. В то же время даже на сравнительно крупномасштабных картах берег реки имеет изгибы, не сказывающиеся на длине русла реки, но увеличивающие длину береговой линии; тем более это справедливо для береговой линии морей. Следовательно, длина морской береговой линии при расчете принятым методом не получается завышенной.

Некоторыми критиками метода Н. М. Волкова отвергается, как якобы необоснованный, выбор параболы в качестве кривой, дающей наилучшее согласование с фактически полученными частными значениями длин (реки, берега) на картах разного масштаба и различными растворениями циркуля. Эти возражения могли бы рассматриваться, если бы формально имелся в виду расчет длины в масштабе 1:1; но, как выше указывалось, нами признается достаточным рассчитать длину линии в крупном масштабе (1:50 000—1:25 000, но не 1:1) и притом, как бы измеренную циркулем с весьма малым растворением (но не с нулевым).

Вопрос о том, какой функцией лучше представить нарастание длины береговой линии с увеличением масштаба карты вплоть до масштаба 1:25 000—1:50 000, где изображаются все детали, которые учитывались бы при действительном измерении на местности, представляется не столь существенным. Этот вопрос имел бы большее значение, если бы результат рассматривался, как полученный в масштабе 1:1 экстраполяцией по измерениям в масштабах в сотни или десятки тысяч раз более мелких. Тогда принятие той или иной кривой (выпуклостью вверх или вниз в зоне самых крупных масштабов) или принятие прямолинейной зависимости, значительно сказались на окончательном, приведенном к масштабу 1:1, результате. В наших вычислениях, преследовавших практически необходимые и логично обоснованные цели при условии достаточной точности, выбор параболической функции и принятие расчетных формул Н. М. Волкова для приведения к крупному масштабу оказался вполне удачным и обеспечил хорошее согласие с непосредственными измерениями. В этой связи новые формулы, предлагаемые А. К. Маловичко, не говоря об их некоторой методической недоработанности (на что указывает Н. М. Волков в V томе Трудов НИИГАиК), пригодны в той или иной мере лишь для исчисления длин рек, достаточно крупных и широких, где явно намечается средняя линия русла или «судового хода». Принятие же формул А. К. Маловичко для расчета длины береговой линии дало бы беспорядочный заниженный результат.

Действительно, тот факт, что с увеличением масштаба карт непрерывно происходит нарастание длины, не вызывает сомнений, если, конечно, карты идентичны по содержанию и по качеству оформления соответственно масштабу, т. е. не имеют грубых утрировок (на мелкомасштабных картах), однородны по использованному материалу составления и не содержат расхождений по существу.

Так, если взять за основу морские навигационные карты и карты I тома Морского Атласа, идентичные по методике составления и оформления, правильно обобщенные и генерализованные соответственно масштабу, то можно легко убедиться в неперывности (но не в равномерности) нарастания длины береговой линии с увеличением масштаба карты. Например, в табл. 1 показано нарастание длины материковой береговой линии совет-

ского побережья Черного моря по измерениям циркулями с постоянным растворением 4—5 мм и 1—1,25 мм на картах разных масштабов.

Таблица 1

Масштаб карт	Длина по измерениям циркулями, км		Предельная длина, км
	4—5 мм	1—1,25 мм	
1:50 000 000	1250	1530	1780
1:30 000 000	1320	1575	1830
1:10 000 000	1580	1770	1960
1:5 000 000	1640	1830	2020
1:2 000 000	1780	2030	2280
1:600 000	2215	2350	2485
1:150 000	2430	2540	2650

Редуцированная длина береговой линии из двух последних, наиболее точных и надежных измерений, произведенных по среднемасштабным картам (от 1:750 000 до 1:125 000) составляет 2815 км; этот окончательный результат следует рассматривать как полученный по измерению предельной длины на картах, масштаб которых на один порядок крупнее (т. е. около 1:50 000—1:25 000).

Между тем, по А. К. Маловичко, если использовать результаты непосредственных измерений на картах масштаба 1:5 000 000 и 1:2 000 000 (такое соотношение масштабов, как и примерно аналогичное соотношение растворов циркулей рекомендует А. К. Маловичко), а именно 1830 и 2030 км, то окончательный, редуцированный результат составил бы около 2150 км. Заниженность этого результата ясна, поскольку непосредственное измерение даже по картам масштаба 1:600 000 дало 2350 км. Следовательно, предложения А. К. Маловичко, высказанные им в порядке критики способа Н. М. Волкова, могут быть распространены лишь на методику расчета протяжения крупных рек, но не береговой линии.

Интересно, что если эти же измерения использовать для расчета по Н. М. Волкову редуцированной длины в разных комбинациях достаточно различающихся по масштабу карт, то подтверждается непригодность использования мелкомасштабных карт. См. табл. 2.

Таблица 2

Масштабы карт	Предельные длины, км	Кэффициент	Редуцированная длина, км
1:50 000 000 и 1:10 000 000	1780 и 1960	0,81	2100
1:30 000 000 и 1:10 000 000	1830 и 1960	1,36	2140
1:30 000 000 и 1:5 000 000	1830 и 2020	0,69	2150
1:10 000 000 и 1:2 000 000	1960 и 2280	0,81	2540
1:2 000 000 и 1:600 000	2280 и 2485	1,21	2730
1:600 000 и 1:150 000	2485 и 2650	1,00	2815

Из последних строк табл. 2 усматривается, что если бы имелась возможность получить предельную длину по измерениям на картах еще более крупного масштаба, то она несомненно была бы близка к 2800 км.

Таким образом, перед рассмотрением результатов проведенных измерений береговой линии морей СССР надлежит привести уточненную формулировку:

Принимаемая в результате проведенной работы за окончательную, длина береговой линии морей СССР представляет собой длину этой линии, как бы измеренную на карте крупного масштаба, примерно 1 : 25 000—1 : 50 000 (учитывающую все практически существенные детали и извилины, которые были бы учтены при измерении на местности, но отнюдь не все извилины, которые выразились бы не только в теоретическом масштабе 1 : 1, но и в масштабах до 1 : 10 000), притом измеренную с тщательностью, позволяющей учесть детали, соответствующие предельной точности масштаба карты (т. е. на карте примерно величине 0,2 м.)

Измерение

По инициативе Президиума Географического общества СССР было признано целесообразным произвести измерение длины береговой линии морей СССР, и эта работа была выполнена в Главной редакции Морского Атласа ВМФ¹ по вышеназванной методике, в основу которой был принят способ Н. М. Волкова.

Измерялась длина береговой черты, показанная на картах, по которым велись измерения (т. е. показанная на средний уровень моря в безливных морях или на уровень, соответствующий теоретическому нулю глубин в морях с заметными приливами), со всеми заливами и бухтами, исключая устья рек, где за береговую линию принималась прямая линия, соединяющая мысы правого и левого берега рукавов при впадении их в море. Отдельно от материковой береговой линии измерялась береговая линия островов, исключая острова в дельтах рек (у которых измерялся лишь внешний обвод со стороны моря, включая ширину рукавов).

Поскольку при измерениях использовались морские навигационные карты масштаба не крупнее 1 : 150 000, то береговая линия малых островов, вовсе не выражающаяся в масштабе этих карт или не поддающаяся измерению циркулем даже с малым растворением, теоретически принималась в расчет в порядке исчисления редуцированной длины. Осушка не включалась в измерения. Береговая черта лагуны также не входила в измерения, поскольку лагуны представляют собой будущий участок суши; не учитывалась также береговая черта лиманов, за исключением крупных.

После подбора карт двух различных, отличающихся один от другого в 4—5 раз, масштабов в пределах от 1 : 150 000 до 1 : 2 000 000 по всем морям на картах была наметена разбивка береговой линии между приметными точками (мысами, устьями рек, населенными пунктами) на участки, подлежащие отдельным измерениям. Определение действительной величины растворения циркулей произведено с точностью до $\pm 0,02$ м. многократным измерением отрезка прямой точно известной длины исключительно с целью выборки из таблиц коэффициента «К» для расчета предельной длины изображения береговой линии на карте данного масштаба. После разбивки широтных зон, для которых на данной карте меркаторской проекции масштаб в пределах требующейся точности может считаться постоянным, производилось измерение размеченных участков береговой линии двумя циркулями с различными растворениями (обычно 1 и 4 мм, реже 1,25 и 5 мм) по картам двух масштабов в обоих направлениях («туда» и «обратно»), т. е. всего 8 измерений. На измеряемом участке

¹ Измерение береговой линии морей СССР производилось в ГРМА ВМФ группой техников-картографов под непосредственным руководством Г. А. Мигалкина по работе инструкции, составленной А. Б. Зильбершерам

допускалось расхождение числа отложенных растворов циркуля не свыше 1%; если на коротких участках повторные измерения давали расхождения, несколько превышавшие 1%, бралось среднее арифметическое. Цена одного растворения циркуля в километрах определялась для каждой широтной зоны по измерению отрезка вертикальной (широтной) рамки карты, истинная длина которого выбиралась из картографических таблиц (для сфероида Ф. Н. Красовского).

Когда, в весьма редких случаях (около 1%), длина отдельных участков береговой линии по измерению на мелкомасштабной карте получалась больше, чем по измерению на крупномасштабной карте, то после проверки за окончательный результат принималась длина, измеренная по крупномасштабной карте, предельная или измеренная циркулем с малым растворением. Это имело место, например, при измерении береговой линии малых островов, величина которых нередко утрируется на мелкомасштабной карте для выражения общего характера побережья.

Балтийское море. Измерение велось почти исключительно по картам масштаба 1 : 1 000 000 и 1 : 200 000 ($t = 0,81$).

Черное море. Карты масштаба 1 : 750 000 и 1 : 150 000 ($t = 0,81$). Вход в Керченский пролив между мысами Такиль и Панagia в береговую линию Черного моря не включен. Керченский пролив — карты масштаба 1 : 150 000 и 1 : 650 000 ($t = 0,92$).

Азовское море. От мыса Хрони до порта Генчиск карты масштаба 1 : 150 000 и 1 : 500 000 ($t = 1,21$), далее до мыса Ахиллеон — масштаба 1 : 150 000 и 1 : 650 000 ($t = 0,92$). В качестве окончательного результата для участка береговой линии от порта Ейск до станции Приморско-Ахтарская, а также для островов в Азовском море принята предельная длина по крупномасштабной карте, так как по карте масштаба 1 : 650 000 из-за неточной рисовки береговой черты получено большее значение, и редуцирование, таким образом, было невозможно.

Каспийское море. Основные масштабы карт 1 : 200 000 и 1 : 750 000 ($t = 1,07$); северный берег от параллели $45^{\circ}15'$ до мыса Бурунчук измерен по картам масштаба 1 : 750 000 и 1 : 2 000 000 ($t = 1,58$), а берег залива Кара-Богаз-Гол — по картам масштаба 1 : 300 000 и 1 : 750 000 ($t = 1,72$).

Японское море. Карты масштаба 1 : 250 000 и 1 : 2 000 000 ($t = 0,55$) до входа в Амурский лиман на линии мысов Лазарева и Погоби. Берег Амурского лимана — по картам того же масштаба (до мысов Тамлева и Мешникова).

Охотское море. В качестве мелкомасштабных использованы карты масштаба 1 : 2 000 000, а в качестве более крупномасштабных по берегам: остров Сахалин, Амурский лиман, западный берег Камчатки от мыса Лопатка до параллели 54° — карты масштаба 1 : 250 000 ($t = 0,55$); весь остальной, материковый, берег моря — карты масштабов 1 : 365 400 ($t = 0,74$), 1 : 500 000 ($t = 1,0$), 1 : 584 370 ($t = 1,17$) и 1 : 730 800 ($t = 1,53$); участок берега Сахалина от порта Оха до порта Москваля измерен по картам масштабов 1 : 250 000 и 1 : 730 800 ($t = 1,41$). Для сравнительно мало изрезанных берегов Охотского моря с весьма сглаженными очертаниями применение карт таких масштабов вполне достаточно. Однако для Большого и Малого Шантарских, Белничьего и некоторых мелких островов с изрезанной береговой линией измерение по мелкомасштабным картам не могло дать удовлетворительного результата (получилось большее значение, чем по картам более крупного масштаба) и поэтому для них в качестве окончательной принята предельная длина береговой линии по картам более крупного (в данном случае 1 : 365 400) масштаба.

Курильские острова. В качестве крупномасштабных были приняты карты масштаба 1:250 000, а в качестве мелкомасштабных — 1:1 000 000 ($t=1,0$) и 1:1 023 120 ($t=0,98$).

Тихий океан. Океанский берег Камчатки от мыса Лопатка до мыса Африка (граничный мыс Берингова моря) измерен по картам масштабов 1:250 000 и 1:2 000 000 ($t=0,55$), Командорские острова — по картам масштабов 1:500 000 и 1:2 000 000 ($t=1,0$).

Берингово море. Основные масштабы карт 1:350 000 и 1:2 000 000 ($t=0,71$); лишь часть восточного берега Камчатки от мыса Африка до мыса Ильинский измерена по картам масштабов 1:250 000 и 1:2 000 000 ($t=0,55$). Для небольших (всего 51 км) участков берега: мыс Ныгльган — мыс Незгачи и мыс Черкасский — мыс Чукотский принята предельная длина по крупномасштабной (1:350 000) карте, поскольку по карте мелкого масштаба из-за неидентичности очертаний береговой линии получено большее значение.

Чукотское море и остров Врангеля. Карты масштабов 1:700 000 и 1:2 000 000 ($t=1,44$).

Восточно-Сибирское море. Карты тех же масштабов.

Море Лаптевых. В основном карты тех же масштабов; Восточно-таймырский берег от бухты М. Прончишевой (включительно) до мыса Челюскин и острова у входа в пролив Вилькицкого измерены по картам масштабов 1:500 000 и 1:2 000 000 ($t=1,0$).

Северная Земля. Карты масштабов 1:2 000 000 и 1:5 000 000 ($t=1,72$); для ровных берегов, частью ледниковых или с нескрывающимися припаями — масштаб достаточен.

Карское море. Основные масштабы карт 1:700 000 и 1:2 000 000 ($t=1,44$); берег от мыса Челюскин до мыса Отдаленного — по картам масштабов 1:350 000 и 1:2 000 000 ($t=0,71$); западный берег Ямала и Байдаракской губы севернее параллели 69° с проливом Югорский Шар, восточный берег южного острова Новой Земли с проливом Маточкин Шар — карты масштабов 1:1 000 000 и 1:2 000 000 ($t=2,42$); вершина Байдаракской губы — карты масштабов 1:250 000 и 1:2 000 000 ($t=0,55$); остров Вайгач и пролив Карские Ворота — карты масштабов 1:750 000 и 1:2 000 000 ($t=1,54$).

Баренцево море. От государственной границы с Норвегией до мыса Святой Нос — карты масштабов 1:200 000 и 1:750 000 ($t=1,07$); от мыса Канин Нос до пролива Югорский Шар, о. Вайгач и Новая Земля до мыса Сев. Гусиный Нос — карты масштабов 1:750 000 и 1:2 000 000 ($t=1,58$); Новая Земля до мыса Литке — 1:1 000 000 и 1:2 000 000 ($t=2,42$); от мыса Литке до мыса Желания — 1:700 000 и 1:2 000 000 ($t=1,44$). Длина береговой линии острова Колгуев, мелких островов, прилегающих к западному берегу Новой Земли, а также берега Новой Земли от мыса Медвежий до мыса Желания принята предельная по картам более крупного масштаба вследствие неидентичности карт.

Белое море. Для всего моря с островами использованы карты масштабов 1:200 000 и 1:750 000 ($t=1,07$), причем для береговой линии части мелких островов принята предельная длина по карте крупного масштаба.

Земля Франца Иосифа. Карты масштабов 1:700 000 и 1:2 000 000 ($t=1,44$); береговая линия островов Грэм-Белл, Солсбери, Циглера, Земли Вильчека, Луиджи, Нортбрук, Мак-Клинтонга, Галля и Сальм получена как предельная по карте масштаба 1:700 000.

Результаты измерений

Ниже приводятся результаты измерений длины береговой линии морей СССР; длина дана по участкам с округлением до километра.

Участки береговой линии	Длина км	Участки береговой линии	Длина км
<i>Балтийское море</i>			
Государственная граница с Польской Народной Республикой — Клайпеда	716	Сочи — Сухуми	150
Клайпеда — мыс Овиши	234	Сухуми — Потн	122
Мыс Овиши — устье Зап. Двины	226	Потн — государственная граница с Турцией	80
Устье Зап. Двины — Хапсалу	625	Береговая линия материка	2813
Хапсалу — мыс Писапеа	182	Острова Джарылгач, Березань, Змеиный и др.	115
Мыс Писапеа — Таллин	186	Береговая линия островов	115
Таллин — Нарва-Ймьесу	424	Всего	2928
Нарва-Ймьесу — Ленинград	337	<i>Керченский пролив</i>	
Ленинград — Выборг	408	Западный берег:	
Выборг — государственная граница с Финляндией	259	Мыс Такня — мыс Хронн	89
Береговая линия материка	3597	Восточный берег:	
Острова:		Мыс Папагня — мыс Ахиллеон	173
Сарема	938	Береговая линия материка	262
Хиума	304	Острова	27
Муху	109	Всего	289
Абруку, Рухну, Кихиу	64	<i>Азовское море</i>	
Вормси	105	Западный берег:	
Гогланд	31	Мыс Хронн — вход в реку Дон	1014
Лавенсарн	41	Восточный берег:	
Котьян	31	Вход в реку Дон — Ейск	128
Бьерке	62	Ейск — мыс Ахиллеон	355
Прочие острова	1908	Береговая линия материка	1497
Береговая линия островов	3593	Острова	17
Всего	7190	Всего	1514
<i>Черное море</i>			
Государственная граница с Румынской Народной Республикой — Одесса	258	<i>Каспийское море</i>	
Одесса — мыс Тендра	550	Государственная граница с Ираном у Астары — Баку	536
Мыс Тендра — Скадовск	227	Баку — Дербент	398
Скадовск — Тарханкут	399	Дербент — Махачкала	139
Тарханкут — Севастополь	205	Махачкала — вход в Бахтемирский рукав реки Волга	718
Севастополь — мыс Сарыч	109		
Мыс Сарыч — мыс Такиль	324		
Мыс Папагня — Новоросси́йск	141		
Новоросси́йск — Сочи	248		

Продолжение

Участки береговой линии	Длина км	Участки береговой линии	Длина км
Вход в Бахтемирский рукав Волги — вход в реку Урал	798	Мыс Ламанон — мыс Крыльон	362
Мыс Бурунчук — Форт-Шевченко	354	Острова:	
Форт-Шевченко — мыс Песчаный	230	Путятинна	46
Мыс Песчаный — вход в пролив Кара-Богаз-Гол	463	Русский	151
Вход в пролив Кара-Богаз-Гол — Красноводск	273	Мелкие острова	400
Красноводск — маяк Челекенский	362	Береговая линия островов	1462
Маяк Челекенский — государственная граница с Ираном у Гассан-Кули	553	Всего	4664
Берег залива Кара-Богаз-Гол (с проливом)	929	<i>Амурский лиман</i>	
Береговая линия материка	6346	Западный (материковый) берег:	
Острова у западного и северного берегов	604	Мыс Лазарева — мыс Меншикова	189
У восточного берега	186	Восточный берег (остров Сахалин):	
В заливе Кара-Богаз-Гол	47	Мыс Погоби — мыс Тамлево	155
Береговая линия островов	837	Всего	344
Всего	7183	<i>Охотское море</i>	
<i>Японское море</i>		Мыс Меншикова — мыс Александра	274
Государственная граница с Корейской Народно-Демократической Республикой — мыс Брюса	355	Мыс Александра — мыс Чумикан	1102
Мыс Брюса — Владивосток	315	Мыс Чумикан — Аян	351
Владивосток — мыс Поворотный	475	Аян — Охотск	610
Мыс Поворотный — порт Ольга	355	Охотск — мыс Шестакова	526
Порт Ольга — мыс Белкина	454	Мыс Шестакова — Магадан	263
Мыс Белкина — мыс Золотой	220	Магадан — мыс Таран	301
Мыс Золотой — Советская Гавань	292	Мыс Таран — мыс Толстой	534
Советская Гавань — порт Де-Кастри	582	Мыс Толстой — мыс Островной	441
Порт Де-Кастри — мыс Лазарева	151	Мыс Островной — мыс Тайгонос (Гижигинская губа)	826
Береговая линия материка	3202	Мыс Тайгонос — мыс Дальний (Пенжинская губа)	1150
Остров Сахалин		Мыс Дальний — мыс Харнузова	632
Мыс Погоби — порт Александровск	229	Мыс Харнузова — мыс Лопатка	761
Порт Александровск — мыс Ламанон	274	Береговая линия материка	7771
		Остров Сахалин	
		Мыс Крыльон — порт Корсаков	132
		Порт Корсаков — мыс Ашпа	107
		Мыс Ашпа — мыс Терпения	627

Продолжение

Участки береговой линии	Длина км	Участки береговой линии	Длина км
Мыс Терпения — порт Оха	613	Командорские острова:	
Порт Оха — порт Москальво	359	Беринга	274
Порт Москальво — мыс Тамлево	148	Медный	154
Всего	1986	Мелкие острова: Моржовый, Крашенинникова, Уташуд	9
Шантарские острова		Береговая линия островов	437
Большой Шантар	248	Всего	1890
Малый Шантар	65	<i>Берингово море</i>	
Феклистова	130	Мыс Африка — мыс Озерный	246
Беличий	52	Мыс Озерный — мыс Ильинский	722
Прочие острова и море	683	Мыс Ильинский — мыс Говена	255
Береговая линия островов	3164	Мыс Говена — мыс Олюторский	430
Всего	10 935	Мыс Олюторский — мыс Низкий	559
<i>Курильские острова</i>		Мыс Низкий — мыс Наварина	338
Крупные острова		Мыс Наварина — мыс Гека	320
Шумшу	103	Анадырский лиман	258
Парамушир	339	Мыс Русский — мыс Уэлькаль	187
Онекотан	132	Мыс Уэлькаль — восточный входной мыс залива Креста	457
Уруп	186	Восточный входной мыс залива Креста — мыс Беринга	226
Итуруп	305	Мыс Беринга — мыс Столетия	181
Кунашир	644	Мыс Столетия — мыс Чукотский	133
Шанберга	355	Мыс Чукотский — мыс Черкасский	24
15 средних островов	163	Мыс Черкасский — мыс Чаплина	114
Мелкие острова	547	Мыс Чаплина — мыс Неэгчан	227
Всего	147	Мыс Неэгчан — мыс Ныгланган	27
		Мыс Ныгланган — мыс Новосильского	319
		Мыс Новосильского — мыс Нуныгмо	120
		Мыс Нуныгмо — мыс Дежнева	113
		Береговая линия материка	5256
<i>Берег Тихого океана</i>		Острова	
Мыс Лопатка — мыс Поворотный	303	Карাগицкий	333
Мыс Поворотный — Петропавловск	260	Прочие (включая остров Ратманова)	408
Петропавловск — мыс Шипуцкий	191	Береговая линия островов	741
Мыс Шипуцкий — мыс Кроноцкий	407	Всего	5997
Мыс Кроноцкий — мыс Камчатский	261		
Мыс Камчатский — мыс Африка (граница Берингова моря)	31		
Береговая линия материка	1453		

Продолжение

Участки береговой линии	Длина км	Участки береговой линии	Длина км
<i>Чукотское море</i> (с островом Врангеля)			
Мыс Дежнева — мыс Сердце-Камень	153	Новая Сибирь	413
Мыс Сердце-Камень — мыс Шмидта	490	Фаддеский	437
Мыс Шмидта — мыс Билянгина	223	Большой Лиховский	370
Берег Колочинской губы	253	Малый Лиховский	140
		Земля Бунге	338
		Котельный (восточный берег острова, от мыса Медвежий до мыса Анисий)	309
Береговая линия материка	1119	Прочие острова (Медвежий и др.)	516
Острова:		Береговая линия островов . . 2902	
Геральд	41	Всего 5918	
Остров Врангеля (от мыса Блоссом до мыса Литке):		<i>Море Лаптевых</i>	
южный берег	185	Мыс Святой Нос — мыс Агардом	460
северный берег	275	Мыс Агардом — мыс Буорхая	636
Береговая линия островов	501	Мыс Буорхая — порт Тикси	404
Всего	1620	Порт Тикси — мыс Быкова	84
		Мыс Быкова — мыс Станнах-Хочо	739
		Мыс Станнах-Хочо — мыс Терпий Тумус	226
<i>Восточно-Сибирское море</i>			
Мыс Билянгина — мыс Шелагский	315	Мыс Терпий Тумус — мыс Хорго	219
Мыс Шелагский — Западный входной мыс в Чаунскую губу (Чаунский)	435	Мыс Хорго — мыс Пакса	67
Мыс Чаунский — Амбарчик	277	Мыс Пакса — Норданк	119
Амбарчик — мыс Крестовый	249	Норданк — Кожевникова	227
Мыс Крестовый — вход в реку Алазея	235	Кожевникова — мыс Б. Корга	269
Вход в реку Алазея — вход в губу Уларовская	173	Мыс Б. Корга — мыс Сибирский	348
Вход в губу Уларовская — вход в губу Хромская	362	Мыс Сибирский — вход в бухту Марии Прочищевой	122
Губа Хромская	487	Берег бухты	187
Губа Омуляхская	256	Вход в бухту Марии Прочищевой — мыс Игнатия	467
Западный входной мыс в губу Омуляхская — мыс Святой Нос (южный берег пролива Дм. Лаптева)	227	Мыс Игнатия — мыс Фаддея	188
Береговая линия материка	3016	Мыс Фаддея — мыс Лассинуса	227
		Мыс Лассинуса — мыс Челюскина	265
Острова:		Береговая линия материка . . 5254	
Айон	249	Острова	
Группа островов Де-Лонга	130	Котельный (западный берег острова, от мыса Анисий до мыса Медвежий)	320
		Большой Бегичев	284

Продолжение

Участки береговой линии	Длина км	Участки береговой линии	Длина км
Бельковский	141	Остров Пионер	420
Столбовой	112	Остров Шмидта	76
Ярок	147	Береговая линия островов Северной Земли 34981	
Северный	151	<i>Карское море</i>	
Большой	88	Мыс Челюскина — мыс Оскара	297
Прочие острова	1026	Мыс Оскара — мыс Отдаленный	357
Береговая линия островов	2269	Мыс Отдаленный — мыс Де-Колонга	377
Всего	7523	Мыс Де-Колонга — мыс Лемана	237
		Мыс Лемана — мыс Михайлова	433
		Мыс Михайлова — мыс Восточный	700
<i>Северная земля</i>			
Остров Старокадомского	129	Мыс Восточный — мыс Северо-Восточный	309
Малый Таймыр	127	Мыс Северо-Восточный — мыс Сопочная Карга	389
Остров Большевик:		Мыс Сопочная Карга — Ошмарно	14
Мыс Вайгач — мыс Лаврова	130	Ошмарно — мыс Лескина	249
Мыс Лаврова — мыс Песчаный	195	Мыс Лескина — мыс Минина	237
Мыс Песчаный — мыс Неупокоева	363	Мыс Минина — мыс Арканова	510
Мыс Неупокоева — мыс Вайгач	235	Мыс Арканова — мыс Туры-Сале	161
	923	Мыс Туры-Сале — мыс Трехбугорный	496
Остров Октябрьской Революции		Мыс Трехбугорный — вход в реку Таз	552
Мыс Алучина — мыс Ворошилова	214	Вход в реку Таз — мыс Круглый	413
Мыс Ворошилова — западный мыс полуострова Парижская Коммуна	203	Мыс Круглый — мыс Сантба	318
Западный мыс полуострова Парижская Коммуна — мыс Массивный	477	Мыс Сантба — мыс Ямсале	351
Мыс Массивный — мыс Алучина	181	Мыс Ямсале — мыс Каменный	349
	1075	Мыс Каменный — мыс Дровяной	584
Остров Комсомолец:		Мыс Дровяной — мыс Скуратова	201
Восточный входной мыс пролива Красной Армии — северная оконечность острова Комсомолец	193	Мыс Скуратова — мыс Марре-Сале	568
Северная оконечность острова Комсомолец — мыс Фрунзе	339	Мыс Марре-Сале — мыс Толстик	547
Мыс Фрунзе — восточный входной мыс пролива Красной Армии	216	Мыс Толстик — мыс Соколий	332
	748	Материковый берег пролива Югорский Шар (мыс Соколий — мыс Белый Нос)	66
		Береговая линия материка	3047
		1 Из 348 км береговой линии Северной Земли — 732 км (восточные берега островов Большевик, Октябрьской Революции и Комсомолец — от мыса Вайгач до северной оконечности острова Комсомолец) относятся к морю Лаптевых; остальные 276 км (включая берега северо-земельских проливов) — к Карскому морю.	

Продолжение

Участки береговой линии	Длина км	Участки береговой линии	Длина км
Острова.		Мыс Столбовой — Малые Кармакулы	371
В проливе Вилькицкого и у северо-западного берега Таймырского полуострова	575	Малые Кармакулы — мыс Южный Гусиный Нос	325
У Северной Земли	703	Мыс Южный Гусиный Нос — мыс Черный	778
Острова Северо-восточной части моря и у западного Таймырского берега до реки Енисей	1330	Мыс Черный — мыс Саханна	295
Таймыр	271	Мыс Саханна — мыс Логниова	440
Петерсен	115	Мыс Логниова — мыс Меншикова	164
Русский	225		3109
Колосовых	207	Остров Междушарский	408
Арктического Института	223		3517
Сибирякова	144	<i>Новая Земля (Северный остров)</i>	
Олений	158	Мыс Выходной — мыс Пять Пальцев	434
Вилькицкого	91	Мыс Пять Пальцев — мыс Высокий	415
Шокальского	119	Мыс Высокий — мыс Опасный	281
Белый	223	Мыс Опасный — мыс Спорный Наволок	172
Сложный, Красин, Тройной, Пологий Олений, Нерпичий, Подкова, Круглый, Песцовый, Зверобой	288	Мыс Спорный Наволок — мыс Желания	124
Олений, Нерпичий, Подкова, Круглый, Песцовый, Зверобой	417	Мыс Желания — мыс Литке	395
Каменные, Расторгуева	175	Мыс Литке — мыс Николая	499
Литке, Левдиев и др.	375	Мыс Николая — мыс Прокофьева	405
Береговая линия островов	5558	Мыс Прокофьева — мыс Серебряный	445
Всего	14 706	Северный берег пролива Маточкин Шар (мыс Серебряный — мыс Выходной)	234
<i>Вайгач и Новая Земля</i>			3404
Остров Вайгач:		Мелкие острова у берегов Новой Земли и Вайгача	551
Мыс Белый (северо-западный берег пролива Югорский Шар) — мыс Гребень	106		8213 ¹
Мыс Гребень — мыс Рогатый	354		
Мыс Рогатый — мыс Болванский Нос	112		
Мыс Болванский Нос — мыс Белый	169		
Всего	741		
<i>Новая Земля (Южный остров)</i>			
Мыс Меншикова — мыс Курочкина	197		
Мыс Курочкина — мыс Рок	408		
Южный берег пролива Маточкин Шар (мыс Рок — мыс Столбовой)	131		

¹ Из 8213 км общей длины береговой линии Новой Земли и Вайгача — 5051 км следует отнести к побережью Баренцева моря (западные берега с прилегающими мелкими островами); остальные 3162 км (включая пролив Маточкин Шар, пролив Карские Ворота до мысов Логниова и Рогатого и Вайгачский берег пролива Югорский Шар) относятся к островной береговой линии Карского моря.

Продолжение

Участки береговой линии	Длина км	Участки береговой линии	Длина км
<i>Земли Франца Иосифа</i>	1425 ¹	<i>Белое море</i>	
<i>Баренцево море</i>		Мыс Святой Нос — Пулонга	557
Мыс Белый Нос (вход в Югорский Шар) — мыс Медвильский Запорог	347	Пулонга — Кандалакша	941
Мыс Медвильский Запорог — мыс Болванский Нос	293	Кандалакша — Кереть	653
Мыс Болванский Нос — западный входной мыс в Печорский залив	322	Кереть — Кемь	823
Западный входной мыс в Печорский залив — мыс Святой Нос (Тиманский)	424	Кемь — Беломорск	166
Мыс Святой Нос (Тиманский) — мыс Канин Нос	670	Беломорск — Онега	379
Мыс Святой Нос — мыс Терiberский	748	Онега — Северодвинск	632
Мыс Терiberский — Мурманск	339	Северодвинск — вход в реку Северная Двина	106
Мурманск — мыс Сеть-Наволоок	198	Вход в реку Северная Двина — Ишцы	230
Мыс Сеть-Наволоок — мыс Немецкий	554	Ишцы — мыс Рябиков	322
Мыс Немецкий — государственная граница с Норвегией	306	Мыс Рябиков — мыс Канин Нос	353
Береговая линия материка	4201		5062
Острова		<i>Береговая линия материка</i>	5062
Долгий	119	Острова:	
Колгуев	246	Олений	177
Острова у Кольского полуострова	524	Соловецкий	244
Прочие острова	1555	Аозерский	80
Береговая линия островов	2444	Мудьюгский	51
Всего	6645	Моржовец	40
		Великий	119
		Прочие острова, включая мелкие	4176
		Береговая линия островов	4887
		Всего	9949
		Морская береговая линия СССР:	
		Береговая линия материка	60 085.
		Береговая линия островов	48 261
		Итого	108346

¹ По новой съемке Земли Франца Иосифа длина береговой линии отдельных островов архипелага по сравнению со старыми картами значительно изменилась, общая же длина береговой линии всех островов архипелага изменилась по новой съемке незначительно.

Округляя полученный результат, следует принять, что длина материковой береговой линии морей СССР составляет 60 тыс. км., а длина береговой линии всех принадлежащих СССР морских островов (включая мелкие) 48 тыс. км.; итого 108 тыс. километров.

Точность результата измерений

Для суждения о точности результатов измерений морской береговой линии по навигационным картам следовало бы рассмотреть по материалам самих измерений и вычислений те ошибки, которые влияют на результат, или сравнить между собой отдельные, независимо полученные и равновесные значения результатов измерений. Строго говоря, характеристику точности картометрического расчета длины береговой линии, можно было бы получить, измерив каждый участок двумя парами циркулей по двум парам карт, соответственно подобранным по их масштабам.

Такой метод вывода точности, однако, не применим не только в силу его чрезвычайной трудоемкости, но в основном из-за отсутствия надлежащих карт.

Измерения должны вестись по картам не слишком мелкого масштаба, не мельче 1 : 2 000 000, и две пары карт должны существенно (в 3—5 раз) отличаться по масштабу, т. е. необходимо иметь по всему району сплошное обеспечение крупномасштабными картами. Также и измерение двумя парами циркулей практически невозможно, поскольку, с одной стороны, растворения циркулей должны существенно отличаться одно от другого (для исключения систематической ошибки от неверности коэффициента K), а, с другой стороны, растворения не могут быть ни слишком большими (более 5 мм), ни слишком малыми (менее 1 мм). Как минимум, представляется возможным обойтись измерением хотя бы двумя циркулями по трем картам разных масштабов, но даже и для такого неполноценного вывода подбор карт весьма затруднителен. Поэтому суждение о точности результата в целом можно иметь лишь по косвенным, но логически обоснованным показателям, хотя для некоторых отдельных участков можно вывести точность также и по непосредственному сопоставлению выводов, полученных независимо один от другого.

При рассмотрении точности произведенных измерений необходимо последовательно коснуться трех основных вопросов, а именно:

- 1) технической ошибки измерения линии на карте и влияния этой ошибки на окончательный результат,
- 2) ошибку вычислительного порядка при расчете предельных и редуцированных длин по измеренным и
- 3) ошибки выведенного результата в целом.¹

Как указывает Н. М. Волков (см. «Принципы и методы картометрии», 1950, стр. 160), не представляется возможным вывести техническую ошибку измерений, если они произведены только двумя циркулями по двум картам. Однако в таком случае, помимо общих соображений для суждения о точности, вывод величины технической ошибки может быть произведен, если измерения, как это и имело место в рассматриваемой работе, выполнены двойные, т. е. и отрезки меридиана рамки карты для вывода цены растворения циркуля и измерения отрезков береговой черты производились дважды, «туда» и «обратно».

Техническая ошибка измерений береговой линии морей СССР выведена из измерений береговой черты Черного моря, произведенных циркулями с растворениями 1 и 4 мм по картам масштабов 1 : 150 000 и 1 : 750 000. Были получены следующие исходные данные для вывода технической ошибки (см. табл. 4).

¹ Ниже выводится техническая точность результата, без учета картографической ошибки, зависящей от качества карт и их соответствия с действительностью.

Таблица 4

Масштаб карт	Растворение циркуля мм	$\Sigma \delta_1^2$		n (число измерений отрезка рамки)	m (число участков береговой черты)
		$\Sigma \delta_1^2$	$\Sigma \delta_2^2$		
1 : 150 000	1	1,02	27,64	77	121
	4	0,0125	25,78	77	121
1 : 750 000	1	0,01	9,28	48	48
	4	0,03	4,30	48	48

Здесь δ_1 — отдельные значения расхождений при измерении отрезка рамки карты «туда» и «обратно».

δ_2 — отдельные значения расхождений при измерении участка береговой черты «туда» и «обратно».

(δ_1 и δ_2 — даны в растворенных циркулях)

отсюда:

Растворение циркуля в мм	Масштабы карт			
	1 : 150 000 раств. 1	1 : 150 000 раств. 4	1 : 750 000 раств. 1	1 : 750 000 раств. 4
Ошибки				
Средняя техническая ошибка среднего из двух измерений отрезка по рамке $\mu' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Sigma \delta_1^2}{n}}$	$\pm 0,057$ мм	0	0	0
Средняя техническая ошибка среднего из двух измерений участка береговой черты $\mu'' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Sigma \delta_2^2}{m}}$	$\pm 0,239$ мм	$\pm 0,23$	$\pm 0,22$ мм	$\pm 0,151$
Средняя суммарная техническая ошибка двойного измерения одного отрезка $\mu_3 = \pm \sqrt{\mu'^2 + \mu''^2}$	$\pm 0,247$ мм	$\pm 0,23$	$\pm 0,22$ мм	$\pm 0,151$
Суммарная техническая ошибка измерения всего берега Черного моря	$\pm 2,72$ мм (± 408 м)	$\pm 2,53 =$ $\pm 10,12$ мм (≈ 1518 м)	$\pm 1,525$ мм (≈ 1144 м)	$\pm 1,035 =$ $4,140$ мм (≈ 3105 м)

Примечание. В скобках даны величины ошибок в метрах в натуре.

Если l_1, l_2, l_3, l_4 — длины береговой линии, измеренные по картам двух масштабов двумя растворениями циркулей, то после вычисления значений предельных и редуцированных длин по формулам

$$l'_{np} = l_1 + K(l_1 - l_2),$$

$$l''_{np} = l_3 + K(l_3 - l_4),$$

$$l_{ред} = l'_{np} + t(l'_{np} - l''_{np})$$

могут быть путем подстановки найденных значений средних суммарных технических ошибок ($\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$) отдельных измерений (l_1, l_2, l_3, l_4) получены средние

квадратические ошибки результатов измерения (зависящие от технических ошибок), а именно:

$$\mu_{I_{np}}^2 = \mu_1^2 + K^2(\mu_1^2 + \mu_2^2) = 408^2 + 1 \cdot (408^2 + 1518^2);$$

$$\mu_{I_{np}}^2 = \mu_3^2 + K^2(\mu_3^2 + \mu_4^2) = 1144^2 + 1 \cdot (1144^2 + 3105^2);$$

$$\mu_{I_{np}}^2 = \mu_{I_{np}}^2 + I^2(\mu_{I_{np}}^2 + \mu_{I_{np}}^2) = 2637,25 + 0,81^2 \cdot 14895,75 = 12410,35 \text{ м};$$

$$\mu_{I_{ред}} = \pm 3,52 \text{ км.}$$

Следовательно, техническая ошибка результата измерения $I_{ред}$ длины береговой линии Черного моря по картам масштабов 1:150 000 и 1:750 000 циркулями с раствором 1 и 4 мм составляет 0,1%, общей длины береговой линии моря (равной 2928 км); однако эта величина по существу характеризует лишь техническую точность измерения извилистой линии (береговой черты) на карте.

Вычисления, несложные сами по себе, подвержены ошибкам вследствие огромного числа отдельных измерений по небольшим участкам и потому велись в две руки. Для исключения возможности повторения некоторых часто встречающихся вычислительных ошибок контрольные вычисления велись по формуле

$$I_{ред} = [l_1 + t(l_1 - l_2)] + K\{|l_1 + t(l_1 - l_3) - [l_2 + t(l_2 - l_4)]\},$$

которая тождественна рекомендуемой формуле

$$I_{ред} = [l_1 + K(l_1 - l_2)] + t\{|l_1 + K(l_1 - l_2) - [l_3 + K(l_3 - l_4)]\},$$

т. е., если в первую руку вычислялась редуцированная (на крупный масштаб) длина по двум предельным значениям из разномасштабных измерений, то во вторую руку вычислялись предельные значения двух редуцированных длин, измеренных циркулями с разными растворами.

В табл. 5 окончательных результатов измерений и вычислений рассчитаны косвенные показатели точности, в основу которых положены следующие соображения:

1. Если в данном измерении использованы карты двух разных масштабов и циркули двух разных растворов, причем относительное увеличение масштаба карт равно относительному увеличению раствора циркулей, то измерение большим раствором циркуля по карте крупного масштаба, обозначенное в таблице величиной l_2 , представляет собой при условии идентичности карт фотографически увеличенное повторение измерения малым раствором циркуля по карте мелкого масштаба, обозначенное в таблице величиной l_3 . Следовательно, при условии идентичности карт, оба результата измерений (большим раствором по крупномасштабной карте и малым раствором по мелкомасштабной карте) должны быть одинаковы, т. е. $l_2 = l_3$. Сходимость результатов (разность $l_2 - l_3$) является косвенным показателем точности измерений, однако это положение справедливо лишь для весьма больших участков побережья, где встречаются берега различного типа. В частных же случаях, по отдельным побережьям и морям могут быть значительные расхождения в величинах l_2 и l_3 , если, например, некоторые многочленные детали береговой линии вовсе не выражаются или, наоборот, слишком утрированы на мелкомасштабной карте; такие случаи подходят под понятие неидентичности карт, неудовлетворительной генерализации береговой линии, а следовательно, суждение о точности измерений по сходимости l_2 и l_3 применимо лишь для весьма протяженной и разнохарактерной береговой линии, например, для всех морей СССР в целом.

Таблица 5

№ п.п.	Береговая линия	Результаты измерений		Прямые длины		Окончательный результат (редуцированная длина) $I_{ред}$	Расчет показателей точности										
		по карте крупного масштаба		по карте мелкого масштаба			I		II								
		магн. 1-1:25 м.м. l_1	магн. 4-5 м.м. l_2	магн. 1:25 м.м. l_3	большое 4-5 м.м. l_4		о/о	$\frac{l_1 + l_2}{2}$	$\frac{l_3 + l_4}{2}$	$\frac{l_1 + l_2}{2} - \frac{l_3 + l_4}{2}$	о/о						
1	Балтийское море	5148	4353	3745	3083	5944	4406	7190	4116	4049	+67	1,6					
2	Черное море	2648	2553	2424	2290	2762	2556	2928	2469	2478	-9	0,4					
3	Азовское море с Керчен-ским проливом	1677	1597	1615	1504	1756	1706	1833	1591	1606	-15	0,9					
4	Каспийское море	6377	6026	5820	5305	6728	6334	7183	5811	5933	-82	1,4					
5	Средиземное море	11028	10222	10372	9275	11423	10321	12140	10152	10291	-36	1,4					
6	Берингово море и берег Чукотского острова	7263	6815	6685	5904	7626	7232	7887	6130	6599	-151	2,3					
8	Курильские острова	2517	2362	2292	2163	2672	2420	2922	2340	2327	+13	0,6					
9	Чукотское море	1405	1386	1418	1347	1543	1490	1620	1406	1402	+4	0,2					
10	Осточно-Сибирское море Беловодскими островами	5766	5447	5488	5080	6195	5871	6491	5433	5467	-34	0,9					
11	Море Лаптевых	5853	5218	5301	4464	6488	6125	6949	5158	5260	-102	1,9					
12	Карское море с Северной Землей и о. Вайгач	15166	1316	13768	11178	17171	16569	19132	13172	13464	-292	2,2					
13	Новая Земля	5088	4181	3655	5986	5749	6462	6472	5023	4456	-64	1,4					
14	Баренцьево море	5514	4021	4740	3749	6402	5687	7473	4632	4681	-49	1,1					
15	Белое море	5199	3774	3504	3523	5576	5023	5949	4857	4639	+248	5,3					
16	Земля Франца Иосифа	3586	3681	3599	3506	4082	3800	4425	3596	3640	-44	1,2					
Общая длина береговой линии морей СССР							88734	79186	78860	67931	108346	+925	0,4	78332	79023	-691	0,8

Примечание. Измерения велись с условной точностью до 0,01 км; в таблице все величины даны с округлением до целых километров.

2. При равенстве увеличения масштаба карт увеличению растворения циркулей результат измерения малым раствором циркуля по карте крупного масштаба l_1 так относится к результату измерения по той же карте большим раствором циркуля l_2 , как относятся один к другому результаты аналогичных измерений по карте мелкого масштаба l_3 и l_4 , т. е. $l_1 : l_2 = l_3 : l_4$ или $l_1 l_4 = l_2 l_3$. Но поскольку величина l_2 должна быть весьма близка к величине l_3 , (а величина отношений $\frac{l_1}{l_2}$ и $\frac{l_3}{l_4}$ не превышает 1,2), то с точностью до величин второго порядка измерения длины l_1, l_2, l_3, l_4 должны удовлетворять равенству $\frac{l_1 + l_4}{2} = \frac{l_2 + l_3}{2}$; сходимость этих полусумм также является показателем точности всего результата измерений.

Хотя в произведенных измерениях увеличение масштаба карт в большинстве случаев не точно равно увеличению растворения циркулей (в одних случаях оно несколько больше, в других — несколько меньше), в целом равенство этих соотношений соблюдено удовлетворительно, так что при многочисленных измерениях отдельные отклонения величин l_2 и l_3 компенсируются. Эти величины l_2 и l_3 можно считать как бы полученными в условиях равенства увеличения масштаба карт увеличению растворения циркулей, а карты в целом — взаимно-идентичными, с уклонениями в обе стороны по закону случайных ошибок.

Как видно из таблицы, для измерений всей береговой линии морей СССР относительное расхождение величин l_2 и l_3 составляет 0,4%, а так как обе эти величины участвуют в выводе окончательного результата, то влияние этого расхождения на указанный результат имеет относительную величину $\frac{0,4}{\sqrt{2}}$, т. е. около 0,3%. Столь удовлетворительное согласие результата измерений всей береговой линии морей СССР обязано удачной компенсации; для отдельных же морей расхождение $l_2 - l_3$ достигает 15—17% (при средней величине $\pm 5\%$), благодаря главным образом несоответствию между увеличением масштаба карт и увеличением растворения циркулей.

Второй показатель точности — расхождение между полусуммами $\frac{l_1 + l_4}{2}$ и $\frac{l_2 + l_3}{2}$ — составляет для всей береговой линии 0,8% при частных значениях для отдельных морей до 5%; средняя величина уклонений по побережьям морей составляет $\pm 1,5\%$.

Наконец, можно применить еще дополнительный критерий точности, а именно могут быть выявлены из большого ряда измерений длины разнохарактерных берегов средневесовые коэффициенты для перехода от каждой из непосредственно измеренных величин l_1, l_2, l_3, l_4 к окончательному результату $l_{ред}$. Применив эти коэффициенты к суммарным для всего побережья значениям этих величин можно рассчитать четыре независимых одно от другого значения $l_{ред}$, по сходимости которых можно судить о точности результата.

Не приводя здесь этих расчетов, ввиду их значительного объема, достаточно сказать, что при правильном отборе типовых участков берега, пропорциональном протяженности берегов того или иного типа, среднеквадратичная величина уклонения каждого из четырех частных значений $l_{ред}$ составляет около 1,5%, так что окончательно результат должен считаться вычисленным с относительной ошибкой около $\pm 0,8\%$.

Вполне удовлетворительная сходимость всех трех условных (косвенных) показателей технической точности вывода окончательного, суммарного результата измерения береговой линии морей СССР, основанная на

большом количестве измерений, компенсирующем влияние случайных ошибок, позволяет признать достаточно обоснованными примененные критерии оценки точности окончательного результата.

Что касается абсолютной величины протяжения береговой линии, то полученное значение $l_{ред} = 60,1$ тыс. км. материковой и 48,3 тыс. км. островной береговой линии хотя и значительно превышает цифры, называвшиеся до сего времени, но тем не менее не является завышенным. Наоборот, этот результат следует считать несколько (незначительно) преуменьшенным, поскольку в случае неидентичности изображения отдельных участков береговой черты на картах разных масштабов по карте мелкого масштаба иногда получалось большее значение длины береговой черты, чем по карте крупного масштаба. Как указано выше, в таких случаях (не более 1% всех участков) вместо $l_{ред}$ за окончательный результат принимались величины $l'_{пр}$ по крупномасштабной карте, т. е. заведомо несколько заниженные. Однако в общем итоге это занижение не может превышать десятых долей процента длины всей береговой линии.

В итоге, приняв во внимание полученные значения ошибок измерений, выведенные различными путями, а также учитывая принятие для небольшого числа отдельных участков берега предельных длин вместо редуцированных, следует считать, что окончательный результат измерения береговой линии морей СССР по морским картам методом Н. М. Волкова получен с технической точностью порядка $\pm 1\%$. Поэтому результат надлежит принимать округленным: материковая береговая линия 60,1 тыс. км $\pm 0,6$ тыс. км, а островная береговая линия 48,3 тыс. км $\pm 0,5$ тыс. км; общая длина 108,3 тыс. км $\pm 1,1$ тыс. км. Береговую линию отдельных морей следует считать исчисленной с относительной ошибкой около $\pm 4\%$, поскольку все протяжение берегов СССР складывается из 15—20 крупных равновесных участков (такая же точность для отдельных морей получается и по величине уклонений l_2 от l_3 и $\frac{l_1 + l_4}{2}$ от $\frac{l_2 + l_3}{2}$ см. табл. 5).

Таковы результаты измерения береговой линии морей СССР.

О. С. СТЕБЛИН-КАМЕНСКАЯ

КАРТОГРАФИЯ США

В советской картографической литературе очень слабо освещается деятельность американских картографов. Отдельные статьи и части книг или очень конспективны [3, 4], или касаются сравнительно узких вопросов [5, 7, 8, 12, 13], или говорят лишь об общем направлении работ [1, 6, 9].

В статье С. А. Салыева «О топографической обеспеченности США» [10] дается программа картографирования территории США, кратко описываются работы, выполненные тремя важнейшими организациями, и приводится схема разграфки и номенклатуры военно-топографических карт.

В настоящей статье, основанной на материалах опубликованных в американской периодической печати (ежегодник ООН — World Cartography, журналы: Surveying and Mapping, Geographical Review, Proceedings American Society of Civil Engineers и др.), излагаются структура и деятельность основных американских картографических организаций и ближайшие перспективы их работ.

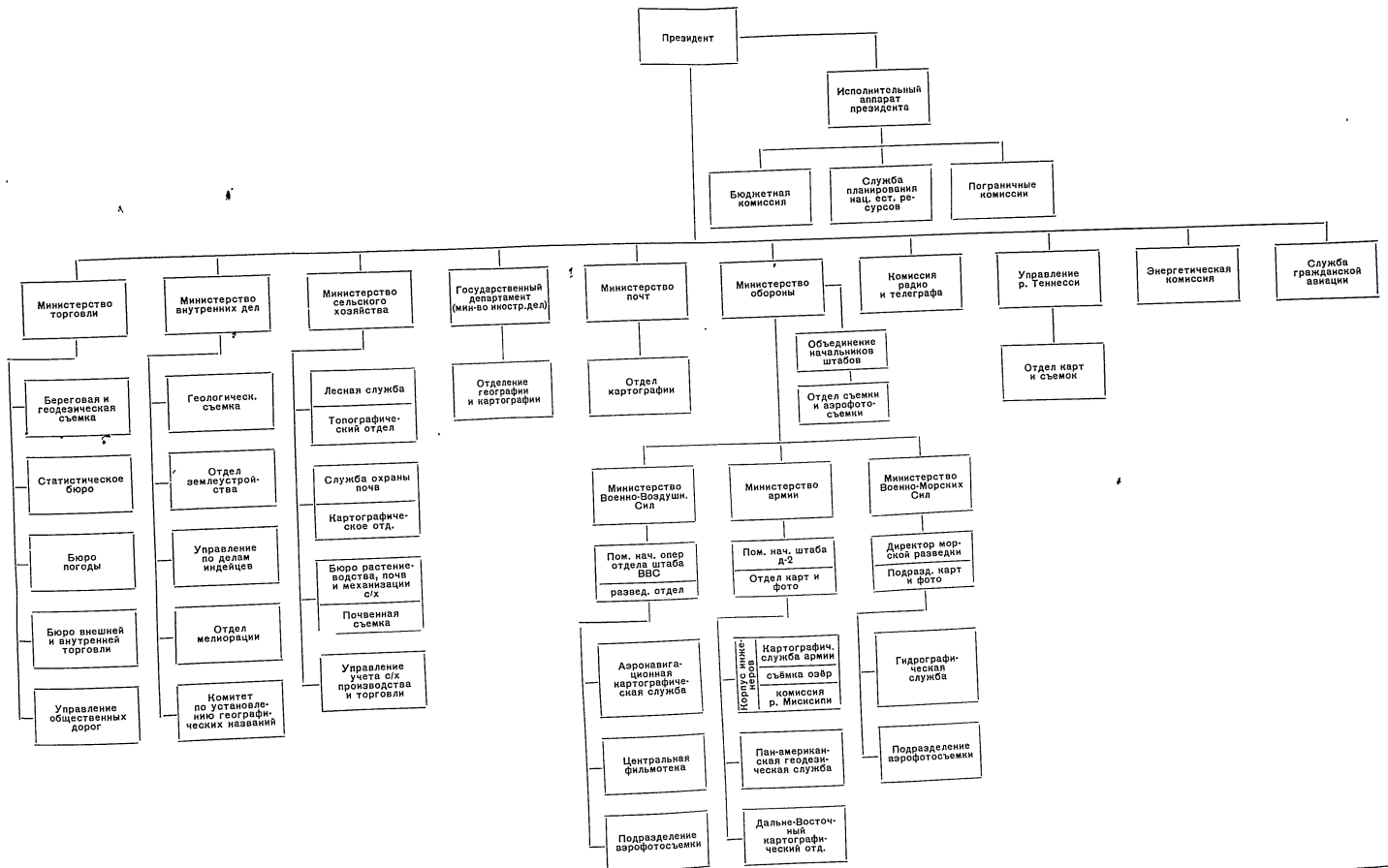
Аэрофотосъемкой, геодезическими работами и составлением топографических и специальных карт в США занимаются десятки государственных (федеральных) организаций, административные органы штатов, частные коммерческие и общественные организации.

Организация государственной картографической службы США наиболее наглядно может быть выражена схемой (см. схему). Схема заимствована из статьи «Cartography in the United States of America». World Cartography, v. 1, 1951, United Nations, N. Y. и дополнена на основании American Year Book. 1950. N. Y. 1951. Стр. 222—235, Encyclopedia Americana, 1944 г., и предварительного списка государственных картографических организаций [33].

Работа всех правительственных картографических организаций с 1940 г. координируется бюджетной комиссией (Bureau of Budget), которая помогает отдельным министерствам разрабатывать план картирования, координирует их действия и рекомендует президенту размеры ассигнований на картографическую деятельность. По квартальным отчетам комиссия следит за деятельностью и стоимостью работы отдельных агентств. Через комиссию новые методы, позволяющие наиболее скоро и экономно выполнить программу, передаются от одного агентства к другому.

I. Береговая и Геодезическая съемка (Coast and Geodetic Survey) является одной из старейших картографических организаций страны, входящей в Министерство торговли (Department of Commerce). Береговая съемка была организована в 1816 г., первым руководителем ее был

Государственные картографические организации США



назначен Ф. Хасслер — видный ученый, организатор геодезической службы Швейцарии. В момент организации службы береговая линия США составляла всего 15 000 миль побережья Атлантики. БГС должна была обеспечить безопасность судоходства в Атлантических водах. Хасслер хорошо продумал план работ, учитывая возможность использования результатов в далеком будущем. По точности триангуляции Хасслера удовлетворяли не только скромные запросы геодезистов его времени, но и более требовательных потомков [20]. В 70-х годах XIX века возникла необходимость установления связи между Тихим и Атлантическим океанами. В 1878 г. эта связь была установлена, и Береговая съемка была переименована в Береговую и Геодезическую съемку. В настоящее время БГС производит геодезические работы первого и второго классов, гидрографические и топографические съемки береговых вод и прилегающих земель, составляет и издает гидрографические карты США, их территорий и владений и полетные карты для гражданской авиации. Кроме того, БГС ведет геомагнитные, сейсмологические и гравиметрические наблюдения и наблюдения над приливами и течениями [38].

II. Геологическая съемка (Geological Survey), созданная в 1879 г., административно входит в министерство внутренних дел (Department of Interior). Вначале топографические работы велись только для создания основы геологической карты, затем в ГС был организован крупный топографический отдел для создания основных топографических карт страны. Топографическими и картографическими работами ГС занимаются топографический и геологический отделы и отдел водных ресурсов.

1. Топографический отдел состоит из управления и картографического отделения, находящихся в Вашингтоне и четырех отделений в Виргинии, Миссури, Колорадо и Калифорнии. Выполняет геодезические работы 3-го и 4-го классов, проводит аэрофотосъемку, составляет и издает топографические карты США, их территорий и владений, дает до 80% топографической продукции страны. Издает и распространяет для гражданских целей топографические карты, выполненные другими правительственными организациями. Содержит службу картографической информации (Map Information Office).

2. Геологический отдел проводит геологическую съемку, публикует геологические карты и соответствующие сообщения.

3. Отдел водных ресурсов ведет исследования по водным ресурсам (поверхностные и грунтовые воды) и публикует соответствующие карты и сообщения.

III. Отдел землеустройства (Bureau of Land Management) Министерства внутренних дел, ранее Главное земельное управление (General Land Office) — старейшая съемочная и картографическая правительственная организация. В 1796 г. актом Конгресса был назначен главный землемер и дано указание о съемке земель к западу от р. Огайо. Последующий закон Конгресса в 1812 г. учредил Главное земельное управление, в 1946 г. переименованное в Отдел землеустройства. Отдел производит съемки общественных земель и издает их отдельными листами, ежегодно составляет карту США, показывающую охват территории землеустроительными съемками, издает карты общественных земель отдельных штатов, Аляски и Гавайских островов.

IV. Военные организации. Американские картографы признают, что они не были подготовлены ко второй мировой войне [34, стр. 225]. В картохранилище военного колледжа в Вашингтоне лежало 1/2 млн. карт, но среди них не было карт, необходимых для военных операций, в частности, отсутствовали планы городов.

До войны основной военной картографической организацией был Корпус инженеров Армии (Corps of Engineers); он составлял карты на области военного значения, на немногие районы, не захваченные топосъемкой Геологической съемки и производил обновление топографических карт Геологической съемки. В него входили Съемка озер (Lake Survey offices), которая ведет гидрографическую съемку Великих озер и составляет и издает карты водных путей по Великим озерам, и Комиссия реки Миссисипи (Mississippi River Commission), занимающаяся съемкой и постоянным обновлением топографических карт центрального и нижнего течения р. Миссисипи и прилегающих низменностей.

В 1942 г. в составе Корпуса инженеров была организована Картографическая служба Армии (Army Map Service), в задачи которой входило картографическое обеспечение военных операций США. АМС скоро стала обладательницей богатейшей картографической коллекции страны. В ее картохранилище насчитывалось 2 млн. карт. Хуже обстояло дело с квалифицированными кадрами. Первое время неопытные работники производили карты «ниже среднего уровня» [34, стр. 225]. Одновременно с обучением работников производства в колледжах по всей стране были организованы ускоренные курсы картографов и по окончании их сотни студентов влились в кадры АМС. В разгар деятельности в АМС работало 3500 человек, но, кроме того, АМС широко использовала кадры и оборудование частных коммерческих предприятий. За войну АМС составила около 30 000 листов карт и отпечатала их в количестве 500 млн. экземпляров. Большинство оригинальных карт составлялось АМС по данным триметричной съемки.¹ Качество карт, составленных АМС невысоко. После войны штат АМС не ликвидирован. В настоящее время в задачи АМС входит составление и издание отечественных и иностранных карт для министерства обороны, производство геодезических наблюдений и уравнивания на иностранных территориях, изготовление рельефных моделей для армий. При АМС находится центральное хранилище иностранных карт.

Большую картографическую работу во время войны проделало Управление стратегической службы (Office of Strategic Services). Если АМС занималась составлением оперативно-тактических карт, то в задачи ОСС входило создание стратегических карт. Тематика карт, составленных ОСС, очень разнообразна. Мы встречаем среди них и карты полезных ископаемых Аляски и церковно-приходские карты Венгрии. В ОСС также была собрана богатейшая коллекция в полмиллиона географических карт. Руководство деятельностью ОСС осуществлял видный ученый А. Робинсон, и этим американские картографы объясняют то, что необычная для США организация производства (обособленность картографа-составителя от чертежника-картографа) дала хорошие результаты. В 1946 г. ОСС была ликвидирована и функции ее частично переданы отделению географии и картографии Госдепартамента (министерства иностранных дел США).

Гидрографическая служба Военно-Морских Сил, основанная в 1883 г., производит гидрографические съемки, составляет и издает морские навигационные карты и указания мореплавателям для открытого моря и зарубежных стран. Составляет и публикует полетные карты для морской авиации.

¹ Триметричная аэрофотосъемочная камера дает одновременно один вертикальный и два косых снимка, наклоненных к вертикальному под углом в 60° и охватывающих местность до горизонта.

Аэронавигационная картографическая служба Военно-Воздушных Сил устанавливает технические требования к аэрофотосъемке, используемой для создания карт, составляет и издает полетные карты и соответствующие сообщения для ВВС, изготавливает рельефные модели. Все аэроснимки, снятые ВВС, хранятся в Центральной фильмотеке.

V. Картографические организации, подведомственные Министерству сельского хозяйства, ведут почвенную съемку, съемку лесов и пастбищ и составляют многочисленные лесные и почвенные карты, карты эрозии и использования земель, широко используя произведенную по специальным договорам аэрофотосъемку.

VI. Картографический отдел Министерства почт издает для нужд министерства почтовые дорожные карты на все штаты, округа и отдельные местности и владения США.

VII. Отдел карт и съемок управления р. Теннесси производит кадастровые съемки и составляет топографические карты на территории штатов, подведомственных управлению (Алабама, Джорджия, Кентукки, Миссисипи, Сев. Каролина, Теннесси и Виргиния).

VIII. Картографические организации службы гражданской авиации, управления общественных дорог, радио и телеграфа, энергетической комиссии, бюро погоды, отдела меллорации, статистического бюро и другие составляют и издают большими тиражами полетные и дорожные карты, карты радиосвязи и энергетические, синоптические и меллоративные карты, публикуют данные переписей и пр.

IX. Транскрипцией географических названий на картах, издаваемых в США, ведает комитет по установлению географических названий (U. S. Board on Geographical Names). Комитет был организован в 1890 г. и реорганизован в связи с расширением его задач в 1943 г. [17]. Ему был придан большой штат служащих: географов, лингвистов и историков. В задачи комитета входит установление названий внутри страны и транскрипция географических названий на зарубежных территориях. Комитет периодически публикует списки установленных им названий [8].

Кроме государственных организаций, картографической деятельностью в США занимаются общественные научные организации и коммерческие фирмы. Такими общественными организациями являются: Американское географическое общество, Национальное географическое общество, фотограмметрическое общество, Американский конгресс съемок и картоирования. Американское географическое общество в Нью-Йорке, основанное в 1852 г., издает научный журнал «Географическое обозрение» (Geographical Review), освещающий вопросы картографии. С 1922 по 1945 г. оно составило и издало 107 листов миллионной карты Латинской Америки [39], составило обзорные карты Америки, Африки и др. В настоящее время работает над обновлением карты Латинской Америки на основе аэрофотосъемки [14].

Национальное географическое общество в Вашингтоне, основанное в 1888 г., ежегодно издает миллионными тиражами мелкомасштабные географические карты.

Американский конгресс съемок и картоирования основан в 1941 г. В конгрессе работает 6 секций: инструментоведения, картографическая, землеустроительная, топографическая, геодезическая основы карт и картографического образования. Конгресс издает журнал «Съемка и картоирование» (Surveying and Mapping), выходящий 4 раза в год и по типу напоминающий периодические издания ГУТКа.

Большое количество карт и атласов издается частными картографическими организациями (фирмы Ранд Мак Нелли, Гаммонд, Крэм и др.); так, фирма Ранд Мак Нелли ежегодно издает 250 миллионов карт [22, 24].

* * *

Обзор деятельности американских организаций будет неполон, если в нем не будут упомянуты международные картографические организации; некоторые из них организованы США, а в других США с недавнего времени заняли командные посты и играют главную роль. Эти организации используются США:

- 1) для установления стандартов съемочной и картографической продукции;
- 2) для обмена картографическими материалами, информацией о картографической деятельности и технических новшествах;
- 3) для обмена научными и техническими кадрами.

Идеалом американцев является полное подчинение картографической деятельности отдельных государств американскому влиянию, с тем чтобы американцы могли использовать картографическую продукцию страны, не прибегая к дополнительным инструкциям [36, 41]. Такими международными организациями являются:

Панамериканский институт истории и географии, в котором с 1941 г. создана картографическая комиссия с шестью подкомитетами [35]. Комиссия выработала стандарты для геодезических наблюдений, общие условные знаки для топографических карт и миллионной полетной карты, составили словарь картографических терминов и совместно с картографическими организациями США выпустила ряд фильмов на картографические темы.

Межамериканская геодезическая служба, организованная картографической комиссией панамериканского института. В программу службы входит производство триангуляций и точных нивелировок в центральной и южной Америке и связь их с триангуляцией Канады и США. США вошли в двойственные соглашения со всеми латиноамериканскими странами. По этим соглашениям правительства латиноамериканских стран предоставляют людей и средства для производства работ. После окончания триангуляции и нивелировок будет выработана программа составления и обновления топографических и полетных карт [37].

США занимают руководящие посты в Международном гидрографическом бюро, в Международной организации гражданской авиации, в Международном геодезическом и геофизическом союзе. На XVII Международном географическом конгрессе, состоявшемся в 1952 г. в Вашингтоне, под влиянием США было принято решение о переводе Центрального комитета по международной миллионной карте из Лондона в Вашингтон [16]. Правительство США использует аппарат ООН для получения интересующих его сведений. Выдвинутый США проект свободной аэрофото съемки над чужими территориями для контроля над вооружениями, является одним из звеньев программы, в результате выполнения которой США будут обладателями картографических материалов на большую часть земного шара. Картографическая программа НАТО (Северо-Атлантического пакта) включает в себя все вышеуказанные требования [28]. Верховный штаб союзных держав Европы (ШЭП) имеет небольшой штаб под руководством инженера, который устанавливает порядок картографирования различных частей Европы.

Для Западной Европы американцы ввели единую систему координат. Картографическая служба Армии, используя материалы и кадры европейских стран, произвела уравнивание триангуляционных сетей Европы на сферонде Хейфорда. В результате перевычисления триангуляции Картографическая служба Армии разослала по странам Европы 450 000 копий с 1500 каталогов триангуляционных пунктов. Для печати каталогов

АМС использовала 40 частных фирм. В каталогах помещены координаты и описания 420 000 пунктов. На составленных под руководством ШЭПа топографических картах Европы применяется поперечная меркаторская система прямоугольных координат (UTM grid) [27]. Основные функции по наблюдению за выполнением программы переданы ШЭПом командованию объединенных сил Центральной Европы. Географический отдел штаба регулярно проводит международные совещания, на которые участники НАТО присылают своих представителей. На совещаниях устанавливается очередность топографических работ, условные знаки и заручное оформление карт, транскрипция географических названий и пр.

Казалось бы, что большое количество картографических организаций, немалые правительственные ассигнования, большая издательская деятельность¹ должны были бы поставить США на одно из первых мест в мире по картографической изученности и по качеству карт. На деле этого не наблюдается, и сами американцы в этом признаются [40]. Это подтверждается итогами работ по отдельным видам картографической деятельности [19].

1. Геодезия. Все работы по триангуляции I и II классов и по точному нивелированию выполняются Береговой и Геодезической съемкой (БГС). Она обслуживает нужды Геологической съемки, министерства обороны и отдела мелнорации. Первые цепи первоклассных треугольников были проложены на американском материке в 1871 г. В настоящее время вся территория США покрыта сетью триангуляции I класса. Связующие цепи первоклассной триангуляции лежат на расстоянии 40—60 миль друг от друга. Пространство между ними заполняется триангуляцией II класса. В 1940 г. началось создание сплошных сетей I класса. Заполняющая сеть планируется таким образом, чтобы на трапецию с размерами сторон по 7,5 приходился один пункт. Всего БГС выполнила 110 000 миль первоклассной и второклассной триангуляции, определила координаты 150 000 пунктов [20].

В 1927 г. вся триангуляция США была перевычислена. В настоящее время она вычислена на сферонде Кларка (1866 г.) с исходным началом в центре страны (Meades Ranch, Kans, широта $39^{\circ}13'26''$, долгота $98^{\circ}32'30''$, 506'). Инструкции предъявляют пониженные требования к точности триангуляции. Так, относительная ошибка стороны триангуляции первого класса по инструкции равна $1/25\ 000$, по сравнению с $1/75\ 000$. Средняя ошибка стороны наиболее удаленного треугольника первоклассной триангуляции СССР принимается равной $1/200\ 000$. Средняя невязка первоклассного треугольника $1''$.

БГС проложила триангуляционные ряды на Аляску и через Канаду связала их с рядами США.

Нивелировки проводятся БГС по дорогам и побережьям. Первоначально линии первоклассной нивелировки шли через 100 миль, затем через 50 миль, сейчас связующие линии проводятся через 6 миль. К 1951 г. насчитывалось 370 000 миль точных нивелировок и 275 000 нивелирных марок. Нивелирные марки ставятся через 1 милю. Точность нивелировки I класса — $4,00\ \text{мм}/\sqrt{l}$, II класса $8,4\ \text{мм}/\sqrt{l}$, где l — длина хода в км [42].

Окончательные вычисления проводятся штатом из 70 вычислителей в Нью-Йорке и Вашингтоне. Для вычислений характерно широкое применение электронных машин. Географические и плоские прямоугольные

¹ Печатная картографическая продукция США составляла в 1952 г. 500 728 000 экземпляров [22].

координаты пунктов публикуются в виде каталогов по штатам. БГС издает две серии среднemaшштабных карт штатов (примерно 1 : 650 000), на которых показаны все пункты триангуляции I и II классов и все линии нивелировок.

2. Аэрофотосъемка впервые была применена около 1920 г. одновременно Корпусом инженеров Армии и Геологической съемкой в связи с составлением «планиметрических»¹ карт и изучением наводнений. В тридцатых годах аэрофотоснимки привлекли внимание нефтепромышленников, и к 1934 г. была сфотографирована большая часть нефтеносных районов. В 1936 г. управление по съемкам долины р. Теннесси впервые применило аэроснимки для составления топографических карт с рельефом в горизонталях. С этого момента началось быстрое развитие фотограмметрической техники США. В 1936 г. Управление учета сельскохозяйственного производства и торговли (Production and Marketing administration) составило план контроля урожая по аэроснимкам и в 1937 г. начало съемку сельскохозяйственных земель. В настоящее время вся территория США покрыта аэрофотосъемкой, ряд районов снимался неоднократно². Аэрофотосъемка ведется частными предприятиями по договорам, заключаемым с правительственными организациями. В 1956 г. аэрофотосъемкой занималось около 40 компаний.

Топографические карты. Топографические съемки в США начались в 1777 г. во время войны за независимость, когда Конгресс назначил географического съемщика (geographical surveyor) для зарисовки местности. В 1813 г. Конгресс назначил 8 топографов-инженеров и 8 помощников инженеров, подчиненных Генеральному штабу. В таком составе группа офицеров работала до организации Корпуса инженеров армии в 1863 г. В 1879 г. Конгресс создал Геологическую съемку в задачи которой входила «классификация общественных земель, исследование геологического строения и природных ресурсов страны». При Геологической съемке был создан Топографический отдел, в настоящее время дающий 80% топографической продукции. Топографические карты на территорию США составляются в масштабах 1 : 24 000 — 1 : 250 000. Гражданские организации применяют масштабы 1 : 24 000; 1 : 31 680; 1 : 62 500; 1 : 125 000; 1 : 250 000; для военных целей применяются карты масштабов: 1 : 25 000, 1 : 50 000; 1 : 100 000; 1 : 250 000. Обычно карты этих масштабов на территорию США получают путем фотоуменьшения или фотоувеличения гражданских карт. Выбор масштаба зависит от типа местности и потребности в картах. Размер листов карт масштаба 1 : 24 000, 1 : 31 680 — 7,5 по широте и 7,5 по долготe; размер листов масштаба 1 : 62 500 — 15' по широте и долготe. Листы топографических карт США не имеют номенклатуры и располагаются внутри территории штата алфавитно по названиям. Правительство США одобрило общую систему индекса для всех топографических карт мира: на листе подписываются широта и долгота угла, ближайшего к пересечению экватора и начального меридиана, и размер карты в градусах и минутах. Так, лист Бостон карты масштаба 1 : 62 500 обозначается индексом N—4215—W7100/15', который помещается в нижнем правом углу. На австралийских листах индекс помещается в левом верхнем углу.

¹ Термин «планиметрические» карты широко применяется в США. Это карты без горизонталей с подробной контурной нагрузкой. Составлением их в настоящее время занимается лесная служба, служба охраны почв, бюро расчленения, почв и механизации сельского хозяйства, управление учета сельскохозяйственного производства и торговли, управление долины р. Теннесси и др.

² Аэроснимки покрывают площадь в 6 500 000 кв. миль, вся территория страны 3 000 000 кв. миль [19].

До 1933 г. в топографо-геодезических работах США не применялось какой-либо общей системы прямоугольных координат. Для всех пунктов государственной сети вычислялись только географические координаты. В 1936 г. специальная комиссия Правительственного комитета по съемкам и картам (существовавшего с 1920 по 1946 г.) предложила ряд координатных систем для различных штатов. Координатные зоны и проекции карт были выбраны таким образом, чтобы величина линейного искажения ни где не превышала 1 : 10 000. В США приняты 2 равноугольные проекции: коническая проекция Ламберта (Гаусса) для штатов, вытянутых с востока на запад, и поперечно-цилиндрическая проекция Меркатора (Гаусса) для штатов, вытянутых с юга на север. В проекции Ламберта берется секущий конус, в проекции Меркатора масштаб на осевом меридиане несколько меньше единицы [5]. Принятая система страдает отсутствием стройности и единообразия, хотя и обеспечивает малые линейные искажения.

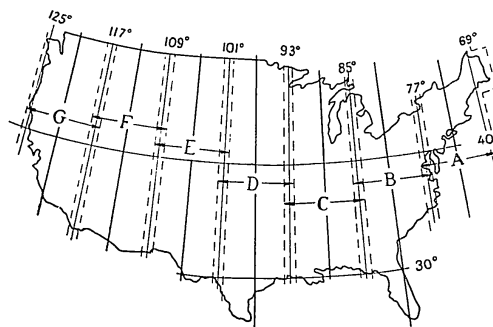


Рис 1

На листах новых топографических карт США, издаваемых БГС и ГС, наносится сетка в системе прямоугольных координат. Эта система разработана БГС совместно с Корпусом инженеров Армии. США делятся на 7 зон, каждая из которых занимает 8° по долготe (рис. 1). Вычисление координат производится по зонам в поликонической проекции, началом координат служит пересечение осевого меридиана зоны с параллелью 40°30'. Линии сетки проводятся через 1000 ярдов. Для того, чтобы избежать отрицательных значений x и y точка начала координат имеет координаты: $x = 1\,000\,000$ ярдов и $y = 2\,000\,000$ ярдов. Точка 865,925—2172,142 Zone В лежит вблизи Детройта (рис 2) Для военных топографических карт принята поперечная цилиндрическая меркаторская проекция (UTM) с шестиградусными зонами. Номенклатура военных карт согласована между собой, сетка на картах километровая [10]. На листах многих современных карт США одновременно даются четыре координатных системы: параллели и меридианы, сетка в системе прямоугольных координат, сетка штатов и сетка тауншипов, о которой речь будет идти

ниже, при разборе землеустроительных карт. Большинство топографических карт издано в 3—4 краски. Их положительной чертой является четкое подробное изображение рельефа горизонталями, высота сечения которых меняется в зависимости от ландшафта.¹ Ценность карт снижается из-за отсутствия или из-за плохого изображения элементов почвенного и растительного покрова и контуров сельскохозяйственных угодий.

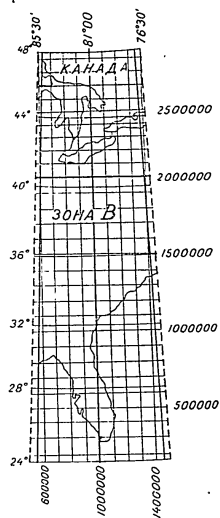


Рис. 2

and bounds) или в системе тауншипов (township), представляющих собой своеобразную сетку прямоугольных координат. В США узаконен 31 осевой меридиан и начальная параллель, к которым примыкают 24-мильные блоки. Блок делится на ряды и тауншипы. Каждый тауншип обозначается буквами и цифрами (рис. 4). Тауншип делится на 36 секций, обозначающихся порядковыми номерами (рис 5). Каждая секция делится на 4 участка, каждый участок еще на 4 участка и так до бесконечности.

Номенклатура такого участка очень сложна (рис. 6). На землеустроительных планах даются границы участков и схематически показываются

¹ На картах масштаба 1 : 24 000, 1 : 25 000, 1 : 31 680 принимается высота сечения в 5, 10 и 20 фут; на картах масштаба 1 : 50 000, 1 : 62 500 — 10, 20, 40 иногда 100 и 200 фут; карты масштабов мельче 1 : 62 500 — 100, 200, 500 и 1000 фут.

² С 1910 г по 1954 г было картографировано лишь 137 млн. акров — 18% всей площади США, 100 млн. акров еще никогда не подвергалось съемке [31]

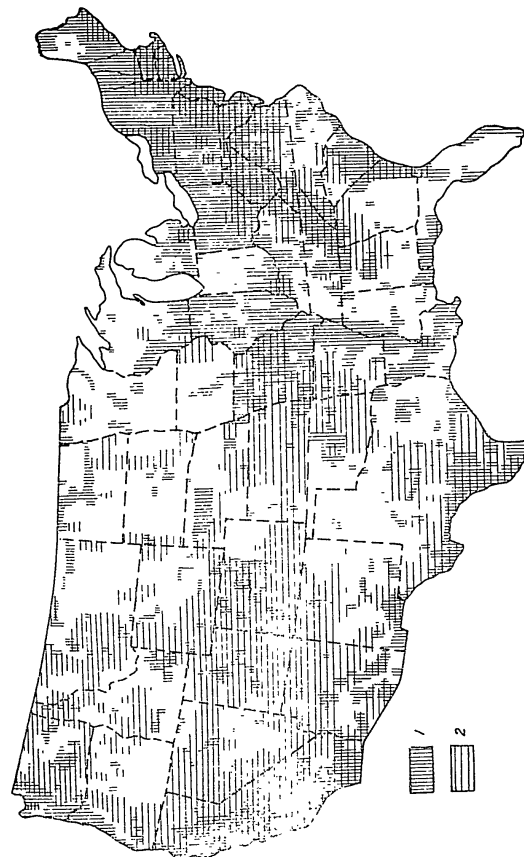


Рис. 3

контуры; рельеф на них обычно не наносится. Землеустроительные съемки проводятся по периодически обновляемым инструкциям. Первая инструкция была составлена в 1855 г., последняя — в 1947 г. Углы одноименных четырехугольников показываются на картах Геологической съемки, но



Рис. 4

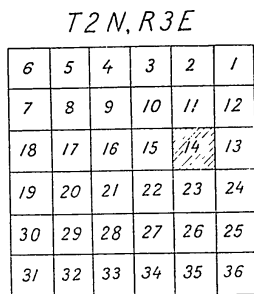
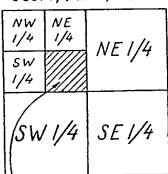


Рис. 5

так как на местности они часто разрушены, в условных знаках предусматриваются три типа обозначений (верный угол, предполагаемый и теоретический).

Sec 1/4, T2N, R3E



SE 1/4 of the NW 1/4 of Sec 1/4, T2N, R3E

Рис. 6

Большинство землеустроительных съемок произведено 75-90 лет тому назад, вершины углов и линии между ними на местности потеряны, и планы нуждаются в переделке.

Карты и атласы США

США сравнительно плохо обеспечены среднимасштабными картами. Из 42 листов международной миллионной карты, покрывающих территорию США, к XVII международному географическому конгрессу было готово лишь 9 [19]. К концу 1957 г. АМС должна была окончить составление 468 листов карты масштаба 1 : 250 000, покрывающей всю страну [25, 26]. Содержание среднимасштабных и мелкомасштабных карт США небогато, рельеф на них или не изображается или изображается шкалой с разреженным сечением. В США ежегодно выпускается около 42 млн. экземпляров морских навигационных карт, 35 млн. аэронавигационных карт и 100 млн. автомобильных карт [22].

Береговая и геодезическая служба издает: путевые карты (масштаба 1 : 600 000), общие карты (масштаба от 1 : 100 000 до 1 : 600 000), береговые карты (масштаб 1 : 50 000 — 1 : 100 000), карты гаваней (масштаба крупнее 1 : 50 000) и карты прибрежных водных путей (серия карт Атлантического побережья в масштабе 1 : 40 000). В 1950 г. БГС составил 1000 морских карт [19].

Аэронавигационная картографическая служба издает карты масштаба 1 : 2 000 000, 1 : 3 000 000 и 1 : 4 377 740 для высокоскоростных боевых самолетов и специальные карты для ракетных самолетов. Составлено около 1000 листов мировой аэронавигационной карты в масштабе 1 : 1 000 000, 43 листа карты в масштабе 1 : 5 000 000 и 76 листов трехмиллионной карты Среднемасштабные приближенные карты (масштаб 1 : 250 000 — 1 : 500 000) составляются по данным триметровой съемки. В 1950 г. было использовано 1 330 000 кв. миль триметровой съемки [15]. Для территории США издаются частные полетные карты в масштабе 1 : 500 000 (серия карт США — 87 листов), полетные карты-полосы масштаба 1 : 1000 000, покрывающие по 100 миль с каждой стороны важнейших авиалиний (37 карт по авиалиниям США) и местные карты масштаба 1 : 250 000 для точной ориентировки на местности в густонаселенных районах (15 карт для городских районов США) [19].

Несмотря на то, что в США издается много специальных карт, большая часть территории США не обеспечена крупномасштабными геологическими, почвенными и другими картами. Лишь 10% площади США покрыты геологическими картами масштаба 1 : 62 500 и крупнее. Разнообразные мелкомасштабные геологические карты покрывают всю территорию страны. Почвенные съемки охватили 650 млн. акров, но 1/3 их устарела и нуждается в обновлении. На основании детальных почвенных съемок публикуются почвенные карты в масштабах 1 : 31 680, 1 : 15 840. Карты округов издаются в масштабах 1 : 62 500 1 : 125 000.

Статистические карты составляются и издаются статистическим бюро (Bureau of the Census) на основании проводящихся раз в 10 лет переписей. В 1953 г. издана карта размещения городского и сельского населения США в масштабе 1 : 3 000 000. На карте изображены районы скопления городского населения, города и сельские поселения с числом жителей свыше 1000 и точками (весом в 500 человек) показано остальное сельское население [47].

Специальные карты для нужд радио и телевидения издаются комиссией радио и телеграфа, карты электростанций, линий электропередач и газопроводов — энергетической комиссией, дорожные карты — управлением общественных дорог совместно с Геологической службой.

Частные фирмы, научные и учебные учреждения ежегодно издают большое количество атласов. Из общегеографических атласов особого внимания заслуживает мировой коммерческий атлас Мак Нелли, изданный в 1950 г. 81-м изданием [46]. В атласе особенно подробно отображена территория США. На картах отдельных штатов показаны населенные пункты, реки, пути сообщения и границы округов. Карта штата сопровождается статистическими данными о промышленности и сельском хозяйстве штата, покупательной способности населения, числе магазинов, количестве проданных товаров и т. п. Карты зарубежных государств мелкомасштабны и в силу этого значительно менее подробны. К ним прилагаются таблицы расстояний между главнейшими портами, списки авиалиний и таблицы экономической деятельности важнейших стран. Для оформления атласа характерна «пуританская деловитость и сдержанность» [18]. Физико-географические элементы ландшафта почти не нашли отражения в атласе, подписи сделаны типографским набором и плохо читаются. Атлас Мак Нелли проигрывает при сравнении его с примерным равным ему по объему советским Атласом Мира (1954). Научный подход к изображению гидрографии, рельефа и социально-экономических элементов ландшафта, удачный выбор масштабов и проекций позволил советским картографам уже в первом издании дать произведение, превосходящее американские образцы, созданные в течение десятилетий.

Несколько в ином стиле составлен мировой атлас Гаммонда [45]. Ряд карт этого атласа составлен в «глобальном» стиле и стремится в общедоступном и живописном виде довести до читателя сведения о положении на земном шаре океанов и материков, природных ресурсов и рельефа отдельных стран и т. п. В атласе много специальных мировых карт (климата, растительности, размещения населения и др.). Атлас заканчивается словарем иностранных терминов и указателем географических названий, в котором помещены планы городов и отдельные характерные фотографии. Советским картографам следовало бы подумать о помещении кратких указателей с пояснительным текстом в советских атласах. Такие указатели помогут советскому читателю получить нужную справку, будут содействовать развитию у него более широких представлений о физической, экономической и политической географии мира.

Из специальных атласов заслуживает внимания, издаваемый в настоящее время Университетом Мэриленда атлас мировых природных ресурсов [43]. В 1952 г. вышел 2 том атласа — минеральные ресурсы (под минеральными ресурсами американцы понимают не только уголь, руды и нефть, но и водные ресурсы). В 1954 г. вышел 1 том — сельскохозяйственные ресурсы. Готовится к печати 3 том — лесные и рыбные ресурсы С. Фишером, профессором университета Индианы, в 1954 г. издан Климатический атлас США [44], состоящий из 1031 карты и диаграммы и пояснительного текста. Все карты атласа однокрасочные и небольшие по размеру, основаны на большом количестве статистических данных. В конце атласа дан список использованных картографических материалов.

Большим пробелом в американской картографии было отсутствие национального атласа, подобного БСАМ, атласу Франции, Чехословакии или Финляндии. В конце 1954 г. в естественном отделении национальной Академии Наук состоялось организационное собрание по национальному атласу США. В организационный комитет вошло 13 членов: от национального исследовательского комитета, сельскохозяйственной, исследовательской службы, картографической службы армии, статистического бюро, архива и библиотеки Конгресса [21]. В 1955 г. комитет издал рекомендации правительственным организациям, занимающимся составлением специальных карт. В рекомендациях указываются размеры листов, масштабы и проекции карт атласа и говорится о желательности составления карт природных ресурсов, специальных физико-географических и экономико-географических карт таким образом, чтобы можно было без переделки использовать их для атласа [29].

В 1957 г. опубликован предварительный список карт атласа (135 наименований, распределенных по 14 разделам) [11, 32].

Современная постановка картографических работ в США вызывает опасения у американских картографов. Большинство высококвалифицированных специалистов работает в Вашингтоне, хорошо обеспечено и занимается узкоспециализированной работой. Подготовка новых кадров и научно-исследовательская работа в университетах почти не ведется из-за отсутствия средств и заскученности сведений. Такое положение может вызвать упадок картографии и свести ее к черчению [2, стр. 541].

Литература

- 1 Авдеев Л. М., Салеев С. А. Американская картография на службе агрессии. Вопросы географии, сб. 34, М., 1954, стр. 164—173.
- 2 Американская география. Современное состояние и перспективы. М., 1957.
- 3 Виноградов Н. В. Картография Северной и Центральной Америки. Геодезист, 1940, № 12, стр. 88—92.
- 4 Виноградов Н. В. Карты иностранных государств и международная миллионная карта мира. М., 1946.

- 5 Вировец А. М. Системы плоских прямоугольных координат, применяемые в топографо-геодезических работах США. Сборник научно-технических и производственных статей ГУГК, вып. XVIII, 1948, стр. 115—119.
- 6 Зиман Л. Я. Американская картография на службе поджигателей войны. Сборник научно-технических и производственных статей ГУГК, вып. XXV, 1949, стр. 35—41.
- 7 Лазарев Н. И. Современная политическая картография в США. Изв. ВГО, 1944, вып. 1, стр. 21—51.
- 8 Поселов Е. М. Транскрипция географических названий в США. Геодезия и картография, 1958, № 2, стр. 64—67.
- 9 Резникова В. И. Американская картография на службе у поджигателей войны. Вопросы географии, сб. 22, М., 1950, стр. 186—203.
- 10 Салеев С. А. О топографической обеспеченности территории США. Геодезия и картография, 1957, № 4, стр. 62—66.
- 11 Стеблин-Каменская О. С. О национальном атласе США. Вестник ЛГУ, 1957, № 12, стр. 189.
- 12 Усенский М. С. О закреплении пунктов опорных геодезических сетей в зарубежных странах. «Геодезия и картография», 1958, № 2, стр. 45—52.
- 13 Широков С. В. Американские методы геодезических работ. М., 1935.
- 14 American Geographical Society. Geographical Review, 1954, Apr., pp. 282—288.
- 15 The American Year Book, 1950. N. Y., 1951.
- 16 Atkinson V. K. Cartography in the Seventeenth International Geographical Congress. Surveying and Mapping, 1953, 1, pp. 84—87.
- 17 Burill M. F. Reorganisation of the United States Board on Geographical Names. Geographical Review, 1915, Oct., pp. 647—652.
- 18 Carlberg B. Kartographie in den U. S. A. Petermanns Mitteilungen, 1950, 2, pp. 113—117.
- 19 Cartography in the United States of America. World Cartography, v. 1, N. Y., 1951, pp. 81—97.
- 20 Colbert L. O. National Geodesy, Status and Planning. Proceedings American Society of Civil Engineers, 1951, v. 67, March, 63.
- 21 Dix W. Committee on a National Atlas of the U. S. Surveying and Mapping, 1954, 2, p. 232.
- 22 Dix W. S. Map reproduction in the U. S. A. World Cartography, v. 2, N. Y., 1952.
- 23 Fennell E. J. Planning for national map coverage. Surveying and Mapping, 1954, 3.
- 24 Fitchet D. 100 years and Rand McNally. Surveying and Mapping, 1956, 2, pp. 126—132.
- 25 Fitzgerald G. The National Mapping Program — a Review of Progress. Surveying and Mapping, 1956, pp. 447—458.
- 26 Griffith S. The National Mapping Program. Surveying and Mapping, 1957, 1, pp. 49—54.
- 27 Ladd J. G. Maps for Defence. Surveying and Mapping, 1952, 4.
- 28 Lieber A. C. International Cooperation in Mapping. Surveying and Mapping, 1954, 1, pp. 71—74.
- 29 Map Standardization for a Loose Leaf National Atlas. Recommendations of the Committee of National Atlas of the U. S. Wash., 1955.
- 30 Mardesson L. E. Public Land Lines on Topographical Maps. Surveying and Mapping, 1951, 2, pp. 107—115.
- 31 Mc Kay D. Surveys and Maps Prepare the Way for National Growth. Surveying and Mapping, 1954, 2.
- 32 National Atlas of United States. Surveying and Mapping, 1957, 2, p. 195.
- 33 Provisional list of governmental agencies in the field of Surveying and Mapping including the publication of special purpose Maps. World Cartography, v. III, 1953, pp. 67—68.
- 34 Raisz E. General Cartography. N. Y., 1948.
- 35 Randall R. Consultation on Cartography. Geographical Review, 1944, 1, pp. 129—130.
- 36 Randall R. Asce. M. International Cartography. Proceedings American Society of Civil Engineers, 1951, v. 77, May, 68.
- 37 Robertson R. Accomplishments of Inter American Geodetic Survey. Surveying and Mapping, 1955, 4, pp. 449—453.

38. Shalowitz A. 150 years of Nautical Charting Progress. Surveying and Mapping, 1937, 3, pp. 249—262.
 39. The Society's Cartographic Section. Geographical Review, 1948, 2, pp. 175—177
 40. Stolerman W. G. Mapping and Photogrammetry Save Dollars. Surveying and Mapping, 1953, 3.
 41. Te-Lou Tch ang International Cooperation on Cartography with Particular Reference to the United Nations. Surveying and Mapping, 1953, 4, pp. 509—514
 42. U. S. Coast and Geodetic Survey Surveying and Mapping 1951 I, pp. 61—73.

Карты и атласы

43. Atlas of the World's resources.
 v 1. Agricultural resources of the world W van Royen N. Y., 1954
 v 2. Mineral resources. W. van Royen, O Bowles. N. Y., 1952
 v 3. Forest and fishery resources (Готовится к печати).
 44. Climatic atlas of the U. S. S. Vi her. Indiana University, 1954
 45. Hammond's ambassador world atlas, 1953.
 46. Rand Mc Nally. Commercial Atlas and Marketing Guide 81-ое изд., 1950
 47. U. S. map of population distribution. Urban and rural. 1950. Bureau of the Census. Wash., 1953.

Ф А ШИБАНОВ

А. П. БОЛОТОВ

(К 150-летию со дня рождения и 100-летию со дня смерти)¹

Алексей Павлович Болотов, выдающийся русский геодезист, первый профессор геодезии Академии Генерального штаба, один из основоположников русской геодезической науки, страстный патриот, старейший член Географического общества, принадлежит к числу замечательных людей русской науки XIX века.

Алексей Павлович Болотов происходит из небогатой дворянской семьи²; он родился 17 марта³ 1803 года в деревне Гнилое Болото Орловской губернии Кромского уезда⁴ в семье своего прославленного деда Андрея Тимофеевича Болотова (1738—1833), автора многочисленных трудов по самым разнообразным вопросам и в особенности по сельскому хозяйству. Больше всего известен Андрей Болотов как автор четырехтомных «Записок» («Жизнь и приключения Андрея Болотова, описанная самим им для своих потомков»), где с поразительной подробностью и яркостью представлена почти столетняя история быта и жизни мелкопоместного дворянства.

Бесспорно, что «Записки», оконченные в 1816 г. и хранившиеся в прекрасно оформленной рукописи⁵ в домашней библиотеке Болотовых, неоднократно и с большим увлечением читал и перечитывал Алексей Павлович Болотов. Также бесспорно и то, что «Записки» и вся деятельность Андрея Тимофеевича Болотова оказали решающее влияние на дальнейшую деятельность А. П. Болотова

¹ Доложено 20 марта 1953 г. на заседании Отделения математической географии и картографии ВГО

² По сведениям А. Г. Болотова, он имел в 8 деревнях 27 дворов крестьян «Доходы наши с них были чрезвычайно малы и ничего почти не значущими», — писал А. Т. Болотов («Записки», т. 2, СПб., 1871, стр. 329—330) В 1790 году, как замечает А. Т., его «капитал составлял сумму около 10.000 рублей. Значительным источником жизни семьи Андрея Болотова была его служебная деятельность. Он в течение 23 лет (с 1774 г.) был управляющим «волостями его величества», за что получал 600 рублей ежегодно. От печатных трудов, по словам самого Андрея Болотова, он имел незначительный доход.

³ Здесь и ниже даты даны по старому стилю, по другим данным, 18 и 26 марта.

⁴ Справка Центрального Государственного Исторического Архива в Ленинграде от 27 марта 1953 г. № 498, хранится в делах Картографической комиссии ВГО за 1953 г.; указанное место рождения А. П. Болотова кажется несколько сомнительным, так как из «Записок» Андрея Болотова не следует, что у Болотовых в этом районе была какая-либо недвижимость. Родовое имение Болотовых находилось в деревне Дворяниново Тульской губернии Алексинского уезда, где родились дед и отец А. П. Болотова.

⁵ «Записки Андрея Тимофеевича Болотова» были полностью опубликованы в начале 70-х г. XIX в. в журнале «Русская старина» при содействии его правнуков Павла Алексеевича и Владимира Алексеевича Болотовых (сыновья Алексея Павловича Болотова)

Отец Алексея Павловича (Павел Андреевич — единственный сын Андрея Тимофеевича) ничем особым не проявил себя в общественной жизни. Известно только, что родился Павел Андреевич 7 марта 1771 г. в деревне Дворянинове (см. выше), в 1789 г. вступил в военную службу, а через год в чине капитана уже вышел в отставку (заметим, что в этом же чине вышел в отставку в 1762 г. и его отец, Андрей Болотов). По возвращении к себе на родину (семья Андрея Болотова жила тогда в Богородицке Тульской губ.) Павел Андреевич с увлечением стал заниматься сельским хозяйством, следуя во всем своему отцу — лучшему знатоку этого дела того времени, одному из основоположников русской агрономической науки.

Около 1815—1817 гг. Алексей Павлович определен был в «Московский университетский благородный пансион»,¹ в котором продолжал заниматься до 1820 г. В том же 1820 г. А. П. Болотов поступил в офицерский класс Московского учебного заведения для колонновожатых, по окончании которого в 1821 г. произведен (14 апреля) в прапорщики по квартирмейстерской части и оставлен в училище преподавателем фортификации.

В 1823 г. «Заведение» было переведено в Петербург и преобразовано в «Училище для колонновожатых», а А. П. Болотову поручили окончание топографической съемки окрестностей Москвы. В 1824 г. он был назначен в Училище колонновожатых преподавателем математики, где и продолжал свою деятельность вплоть до 1826 г., до упразднения этого заведения. После упразднения Училища Болотов был переведен в Гдинский штаб, а в 1828 году его направляют в действующую армию против Турции на европейском театре войны (Молдавия и Валахия), где до 1830 года А. П. Болотов занимался топографо-геодезическими работами.

Научно-педагогическая деятельность А. П. Болотова началась в 1832 году в Академии Генерального штаба, куда он первоначально (с 1 июля 1832 г.) был зачислен исполняющим должность адъюнкт-профессора, затем, с 1 ноября 1833 г., — адъюнкт-профессором и профессором с 9 февраля 1843 года.²

Первая лекция была им прочитана в Академии 29 ноября 1832 года. Эта дата и считается датой фактического открытия Академии Генерального штаба.³

Согласно академическому уставу в курсе Академии полагалось проходить лишь начальные основы геодезии и топографии, черчение топографических планов и глазомерную съемку. «К счастью, подлежащая постановка этого предмета, — писал Н. П. Глинноецкий, ученик Болотова, — была обеспечена назначением на должность профессора капитана Болотова, который... имел теоретическую и практическую подготовку для успешного ведения курса геодезии и топографии».⁴

Курс геодезии и топографии, читанный А. П. Болотовым в Академии, сложился примерно из следующих разделов.

1. Сферическая тригонометрия как необходимая ступень в подготовке к слушанию геодезии и элементов астрономии.

2. Астрономическая геодезия, или сведения из математической географии.

3. Высшая геодезия, куда входило описание и употребление главнейших геодезических инструментов и производство полевых и камеральных вычислительных работ. При изложении этого отдела вся теоретическая математическая часть была сокращена до минимума.

¹ Учрежден в 1779 г. и существовал до 1830 г.

² Глинноецкий Н. П. Исторический очерк Николаевской Академии Генерального штаба, СПб., 1882, приложение, стр. 22.

³ Глинноецкий Н. П. См. указ. соч., стр. 37.

⁴ Глинноецкий Н. П. См. указ. соч., стр. 72.

4. Проекция карт, причем особенно почему-то обращено было внимание на перспективные проекции. Давались элементарные сведения и о других видах проекций — «произвольных», конических (простая, Делиля), Меркатора и Бонна.

5. Нивелирование геометрическое, тригонометрическое и барометрическое.

6. Низшая геодезия, или топография, где давалось описание устройства и употребления инструментов для измерения линий и углов, а также излагались различные способы производства инструментальных и глазомерных съемок.

На чтение всего этого курса отводилось две лекции в неделю в первый и второй год обучения. Как правило, теоретическую часть курса Болотов заканчивал в младшем классе, а в старшем делались повторения и решения всевозможного рода геодезических задач и вычислений.

«Дав прочное начало курсу геодезии, А. П. Болотов, занимая кафедру этого предмета в течение 20 лет, не переставал его совершенствовать, стараясь придать ему возможно более популярное изложение»...¹

Слушатели Академии летом занимались топографической съемкой: офицеры младшего класса один месяц, старшего — до двух месяцев. В младшем классе каждый должен был произвести инструментальную съемку на площади до двух квадратных верст (в масштабе 100 саж в дюйме), в старшем — на площади 6 кв. верст (200 саж. в дюйме), плюс глазомерную съемку на площади до пяти квадратных верст. С 1849 года объем полевых топографических работ был значительно увеличен. Так, в младшем классе на съемку отводилось около трех месяцев, и каждый офицер обязан был снять инструментально площадь в 4 кв. версты (в масштабе 100 саж. в дюйме), до 20 верст маршрута и до 20 кв. верст глазомерной съемки. В старшем классе инструментальной съемкой офицеры занимались полтора месяца, при этом каждый должен был произвести съемку площадью в 12 кв. верст (в масштабе 200 саж. в дюйме) и глазомерную съемку от 90 до 120 кв. верст.

Так в общих чертах был поставлен курс геодезии и топографии в Академии Генерального штаба. Такому прочному началу топографо-геодезической подготовки слушателей Военной Академии обязана исключительно А. П. Болотову. Только благодаря его неустанным стараниям и умелой организации педагогического процесса и возможно было выполнить столь обширный курс, включавший в себя геодезию, топографию, практическую астрономию и начала математической картографии.

Огромную услугу оказал А. П. Болотов геодезической науке опубликованием в 1836—1837 гг. в России и русской геодезической науке опубликованием в 1836—1837 гг. в двухтомной «Геодезии, или руководства к исследованию общего вида Земли, построению карт и производству тригонометрических и топографических съемок и нивелировок». Геодезию А. П. Болотов делил на «общую» и «частную». В «общую геодезию» он включал астрономическую геодезию (или математическую географию), сферическую и практическую астрономию, высшую геодезию, проекции карт и нивелирование. Под «частной геодезией» А. П. Болотов понимал топографическую съемку. Геодезия, по взглядам Болотова, «имеет целью исследование общего вида земной поверхности и изображение ее на бумаге».

Первая часть «Геодезии», опубликованная в 1836 году (XVI + 360 стр.), содержит два больших раздела.

1. «Астрономическую геодезию», куда включено учение о шарообразности Земли, о суточном движении Земли и о «небесных и земных кружках», о видимом движении Солнца, учение о времени, об определении

¹ Глинноецкий Н. П. См. указ. соч., стр. 74.

полуденной линии и азимута предмета и об определении широт и долгот (последние — перевозкой хронометров, по пороховым вспышкам, по затмениям Луны и спутников Юпитера, по лунным расстояниям и по кульминациям звезд и Луны).

2. «Высшую геодезию», где изложены в основном те же вопросы, которые излагаются и ныне в подобных курсах. В главе III этого раздела А. П. Болотов высказал чрезвычайно любопытную мысль о появлении теодолита, изобретение которого, как известно, большинство авторов относят к концу XVIII века. Говоря об усовершенствовании астролябии, Болотов заключает: «Таким образом улучшая астролябию, сделали незаметный переход к теодолиту, орудию, вначале весьма мало разнствовавшему от первой». Если к этому добавить, что термин «теодолит» встречается уже в самом начале XVIII в. (в русских источниках в 1718 г.), а может быть и раньше, то станет совершенно очевидным, что изобретение теодолита было не кратковременным актом, как это многие считают, а делом довольно длительным.

Вторая часть «Геодезии» опубликована в 1837 году (445 стр. — 14 листов чертежей). Она состоит из трех отделов, каждый из которых разбит на несколько глав. Нумерация отделов, или отделений, общая для обеих частей «Геодезии».

Отделение III («Проекция карт») состоит из двух глав: 1 — о перспективных и 2 — о произвольных проекциях. В первой главе рассмотрена вся группа перспективных проекций, в том числе и «внешних». Во второй главе изложены проекции равноугольная азимутальная Ламберта, проекция Арроусмидта (английский картограф, 1750—1823), простая коническая проекция и проекция И. Делля, проекция Флемстида, или, по современной номенклатуре, Сансона, проекция Бонна (с большими подробностями) и проекция Меркатора. Следовательно, выражение «произвольные проекции» в понятиях времен Болотова совершенно не совпадают с аналогичным понятием нашего времени.

Отделение IV («Нивелирование») включает геометрическое (по терминологии того времени — топографическое), тригонометрическое и барометрическое нивелирования.

Отделение V («Топография») состоит из четырех глав. Первая глава посвящена приборам и инструментам, служащим для измерения линий и углов. Следует обратить внимание на то, что здесь уже подробно изложено устройство и применение кипрегеля, тогда как в некоторых исторических трудах изобретение его относят к 1840 году. Во второй главе речь идет о производстве топографической и инструментальной съемки. Третья глава посвящена производству глазомерной съемки и четвертая — производству хозяйственных съемок, лесных и межвых. Вот краткое содержание «Геодезии» А. П. Болотова.

Труд А. П. Болотова получил высокую оценку как со стороны практиков, так и со стороны русских академических кругов. Ему была присуждена в 1938 году Академией наук половина Демидовская премия (2500 руб.).¹

Бесспорно, что появление «Геодезии» Болотова было выдающимся событием в летописях русской геодезической науки. Это был первый труд на русском языке, охватывавший геодезию, практическую астрономию, топографию и математическую картографию.

На выход труда А. П. Болотова откликнулся также и ряд журналов. Например, автор рецензии, помещенной в 18 том журнала «Библиотека для чтения», писал: «Эта Геодезия национальная русская, так как автор старается знакомить читателя между прочим не только со способами,

¹ Журнал Мин. Нар. Просвещения, июль, 1838, стр. 129—130; «VII присуждение учрежденных П. Н. Демидовым наград» СПб., 1838, стр. 121—131.

которые преимущественно употребляются в России при измерении и съемке подробностей Земли и построения топографической карты империи, но и с результатами географических исследований наших ученых и офицеров».¹ Очень пространная рецензия на обе части «Геодезии» помещена была в «Сыне Отечества» за 1838 год (стр. 56—64). Автор этой рецензии (лектор М. Н.) «Топографию» Болотова (это почти вся вторая часть «Геодезии») считает совершенно и абсолютно оригинальной.

В 1842 году А. П. Болотов опубликовал новый труд под названием «Руководство к производству хозяйственной съемки, межевания и нивелирования» (370 стр. — 8 листов чертежей). «Руководство» состоит из 8 глав. Глава I посвящена основным понятиям и определениям в топографии. Во II главе изложены вешние линии, устройство эскера и производство эскерной съемки. В главе III даны устройство буссоли, определение склонения и буссольная съемка. Глава IV («О мензуле») излагает устройство мензулы с ее принадлежностями и производство мензульной съемки. Глава V («Об астролябии») содержит устройство, употребление и производство съемки с помощью этого инструмента. Глава VI («О решении различных вопросов по снятым планам») подразделена на «А. Определение поверхности Земли» (т. е. площадей) и «В. Межевание». В главе VII речь идет о лесных съемках и, наконец, в главе VIII изложено геометрическое нивелирование». На двенадцатом конкурсе присуждения Демидовских премий за 1842 год этот труд А. П. Болотова был удостоен «Почетного отзыва» Академии наук.² Второе издание «Руководства» без всяких изменений и дополнений вышло в 1856 году, после смерти А. П. Болотова, и третье — в 1862 году. Уже это одно обстоятельство доказывает, что и данный труд Болотова был принят специалистами весьма сочувственно. Положительные рецензии о «Руководстве» поместили на своих страницах «Журнал Министерства государственных имуществ» за 1842 год (часть V), «Отечественные записки» за 1842 год (т. 21), газета «Сев Пчела» за 1842 г. (№ 43) и «Отечественные Записки» за 1857 год (т. 63).

А. П. Болотов не переставал трудиться над совершенствованием своего детища «Геодезии», в результате чего в 1845 году появился новый его труд, первая часть «Курса высшей и низшей геодезии» (XII + 580 стр.). В предисловии к этому сочинению А. П. Болотов писал: «Предлагаемый ныне публике «Курс геодезии», есть не 2-е издание напечатанной в 1836 ныне книги под заглавием «Геодезия»,... а совершенно вновь обработанное и гораздо исправнейшее изложение тех же самых предметов». Действительно, достоинство простого сравнения оглавления «Геодезии» и «Курса», чтобы убедиться в справедливости приведенных выше слов А. П. Болотова.

Первая часть «Курса высшей и низшей геодезии» состоит из трех главных разделов: сферической астрономии, высшей геодезии и полевой, или практической, астрономии. Кроме того, в ней даны краткие сведения по практической, астрономии. Книга написана прекрасным языком, и, несмотря на ее почтенный возраст, читается чрезвычайно легко. Это в одинаковой степени относится ко всем сочинениям А. П. Болотова, это характерно для всего его творчества.

И эта книга А. П. Болотова получила прекрасной отзыв современников.³

¹ «Библиотека для чтения», т. 18, СПб., 1836, стр. 50—53. (Рецензия на часть I «Геодезии». Имя автора рецензии не указано)

² Журнал Мин. Нар. Просвещения, июль, СПб., 1843, отд. III, стр. 28.

³ «Отечественные Записки», т. 40, СПб., 1845, отд. VI, стр. 24—25. Рецензии были помещены также в «Сев Пчела» (1845, 104), «Финском вестнике» (1846, т. X) и в «Русском инвалиде» (1845, 155)

Вторая часть «Курса высшей и низшей геодезии», которая в основном должна была содержать вопросы топографии, была закончена Болотовым еще до опубликования в 1845 году первой части. Однако после его поездки в 1845 году в Западную Европу для ознакомления там с постановкой геодезических и топографических работ и после бесед со многими учеными (Гауссом, Бесселем и др.) Болотов убедился, как он сам замечает, в необходимости подвергнуть книгу коренной переработке.¹ Видимо, переработка эта требовала от автора довольно много времени, почему опубликованная в 1849 году вторая часть «Курса высшей и низшей геодезии» оказалась неполной, незаконченной. В ней вопросы, относящиеся к топографии, совершенно отсутствуют.

Вторая часть «Курса... геодезии» (300 стр. + 4 стр. таблиц) включает вопросы высшей геодезии и математической картографии. Высшей геодезии отведено шесть небольших глав, а именно: Глава I — «определение географического положения точек тригонометрической сети», Глава II — «О координатах», Глава III — «О вычислении широты и долготы точек сети посредством координат», Глава IV — «О геодезической линии», Глава V — «Об измерении дуг меридианов и параллелей» и Глава VI — «О контроле и исправлении результатов действий геодезических». Все эти вопросы в 1836 году включались Болотовым в первую часть «Геодезии».

В разделе «Проекция карт» изложены в основном те же вопросы, что и в соответствующем разделе второй части «Геодезии» 1837 года. Совершенно новой главой во второй части «Курса высшей и низшей геодезии» является «Общая теория проекции Гаусса», где Болотов впервые в русской литературе изложил общую теорию Гаусса равноугольного изображения одной поверхности на другую. В этой же главе дан вывод общих формул конических равноугольных проекций и разобрано четыре случая выбора параметров этих проекций, причем два из них, по данным Н. С. Карпова,² были предложены Болотовым. В русской дореволюционной и советской литературе на эту сторону деятельности А. П. Болотова, кажется, впервые обратил внимание именно Н. С. Карпов, разобравший довольно подробно изложенную Болотовым теорию равноугольных конических проекций.

А. П. Болотов при рассмотрении равноугольной конической проекции не ограничился лишь математической стороной дела, а детально разобрал ее преимущества для карты России по сравнению с проекцией Бонна, которая имела тогда широкое распространение в картографической практике как у нас, так и за границей. Болотов особенно рекомендовал проекцию с выбором параметров под условием: «масштаб равен единице на двух заданных параллелях» («IV случай»). Несомненно, что благодаря этим рекомендациям Болотова, в чем Н. С. Карпов абсолютно прав, конические равноугольные проекции, в особенности указанная выше, получили в дореволюционной России чрезвычайно широкое распространение. В этой проекции составлены были такие карты: Специальная карта Европейской России в масштабе 10 верст в дюйме, Военно-Дорожная карта Европейской России в масштабе 25 верст в дюйме, Карта Европейской России, изданная Географическим обществом в 1862 году на 12 листах в масштабе 40 верст в дюйме, карта Европейской России в масштабе 1 : 2 000 000 на 16 листах под редакцией Ю. М. Шокальского, помещенная в Атласе Маркса, и др.

¹ Болотов А. Курс высшей и низшей геодезии, часть II, СПб, 1849, предисловие.

² Карпов Н. С. О некоторых работах по математической картографии в дореволюционной России. «Сборник статей по картографии», вып. 2, М., 1952, стр. 56.

Опубликованием в 1849 году второй части «Курса высшей и низшей геодезии» А. П. Болотов завершил, как выразился один его современник, «полный трактат о высшей геодезии».

Естественно, что выход в свет подобного труда, как «Курс высшей... геодезии», должен был привлечь внимание научной общественности. И, действительно, два крупнейших журнала того времени, «Современник» и «Отечественные Записки», поместили в 1850 году обширные рецензии на I и II части «Курса». Оба журнала дали чрезвычайно высокую оценку трудам и всей деятельности А. П. Болотова.

Из многочисленных высказываний о трудах и деятельности А. П. Болотова я позволю себе привести отзыв П. И. Кузнецова — крупнейшего картографа-критика XIX в. В 1866 г. П. И. Кузнецов писал: «Что же касается собственно до съемочной литературы, то радикальный поворот ее на истинный научный путь был произведен профессором Военной академии Болотовым в 1836 г. (нужно 1836—1837 гг. Ф. Ш.), когда появилось первое издание его Геодезии. Замечательно, что в этой книге, unprecedentedной никакими подготовительными трудами, получили мы вдруг, как с неба упавшее, такое сочинение, которому по свежести фактов, современности взглядов и систематичности изложения, едва ли было подобное в Европе... Такие достоинства Геодезии Болотова сразу сделали ее исходной точкой нового периода нашей геодезической литературы и родоначальницей целого ряда последующих руководств собственно по съемочной науке, т. е. топографии Высшая же геодезия после него еще никем другим разрабатываемая у нас не была»¹ вплоть до 90-х годов. Данная оценка значения трудов А. П. Болотова полностью соответствует исторической истине.

Ради точности должен заметить, что в некоторых справочниках даются искаженные сведения о трудах А. П. Болотова. По этим сведениям выходит, что будто бы «Геодезия» имела два издания (1836—1837 и 1845—1849 гг.) и «Курс высшей и низшей геодезии» будто бы имел также два издания (1837 и 1845 гг.). Этой путанице не избежал даже В. В. Витковский, поместивший в «Критико-биографическом словаре русских писателей и ученых» (т. V, 1897, стр. 89—90) С. А. Венгерова небольшую заметку об А. П. Болотове. В действительности же, как мы убедились, ничего подобного не было. И «Геодезия», и «Курс» имели по одному изданию.

Последняя часть «Курса высшей и низшей геодезии», именно «Низшая геодезия», или «Топография», так и не появилась в печати. Главной причиной тому была большая занятость и преждевременная смерть А. П. Болотова.

Известно, что в 1845—1952 гг. А. П. Болотов являлся активным членом Географического общества и членом Военно-ученого комитета. Как член последнего Болотов в указанные годы редактировал и издавал «Военный журнал», в котором опубликовал и несколько своих статей: «О вычислении многоугольника в тригонометрической съемке»,² «О новом аэриальном инструменте Штампфера»,³ «О снарядах Гретера для измерения непреступных расстояний»⁴ (т. е. о дальномере).

Кроме всего этого, как известно, Болотов предложил новую шкалу штрихов для изображения рельефа и простейший графический способ решения задачи Потенота.

В заключение остается сказать несколько слов о деятельности А. П. Болотова в Географическом обществе, членом которого он состоял.

¹ П. К. [Кузнецов] — Наша съемочная наука (статья I-я) «Инженерный журнал», № 4, СПб., 1866, отд. III, стр. 144—172.
² «Военный журнал», № 11, 1848, стр. 165—177.
³ «Военный журнал», № V, 1848, стр. 143—146.
⁴ «Военный журнал», № III, 1852, стр. 145—153.

с 12 декабря 1845 года. В следующем году А. П. Болотов был избран помощником управляющего по Отделению географии России, а в 1850 году — членом Совета Общества.

Уже в первый год своего существования Географическое общество развернуло активнейшую деятельность по собиранию и пропаганде географических познаний. В числе первых собирателей и пропагандистов этих сведений стоит имя А. П. Болотова. В заседании Общества 8 мая 1846 г. он прочитал пространный доклад под названием «Взгляд на современное состояние геодезических и топографических действий», опубликованный в том же году в первой книжке «Записок» Общества. Этот доклад Болотова есть образец страстного патриотизма и гордости за успехи русской науки. Сказанные им слова о русской геодезической науке более ста лет тому назад звучат и сегодня также гордо и страстно.

В этом докладе Алексей Павлович высказал пожелание, «чтобы у различных наших ведомств водворилось, наконец, в работах единство и взаимное друг другу содействие», а также о введении в практику топографических работ России кипрегеля-дальномера и выражение рельефа горизонталями.¹

По свидетельству П. П. Семенова-Тян-Шанского, А. П. Болотов был крупнейшим знатоком картографии Азии. Вот почему Общество и поручило ему (в 1849—1850 гг.) вместе с Я. В. Ханьковым составление общей карты северо-западной части Средней Азии. В 1851 году А. П. Болотов принимал деятельное участие в разработке программы астрономо-геодезических работ для предполагавшейся обширной экспедиции Общества в Восточную Сибирь, которая состоялась в 1855—1858 гг. На основании данных этой экспедиции Общество опубликовало в 1864 году карту Южной Сибири на 7 листах в масштабе 40 верст в дюйме.

Как картограф А. П. Болотов стоял впереди своего времени. Например, о термине «специальные» карты, под которыми тогда понимали общегеографические карты среднего масштаба, Болотов замечает: «Слово «специальные» имеет здесь весьма неуместное применение и должно было бы заменяться словом «подробные», точнее выражающим назначение карты; тогда специальными картами можно было бы означать все, не для географии и топографии, но для других предметов составленные карты, как-то гидрографические, лесные, агрономические и т. д.»² Следовательно, в классификации карт по их содержанию А. П. Болотов, по существу, придерживался тех же взглядов, каких придерживается и современная советская картография.

В 1852 году А. П. Болотов (по делам Географического общества но в основном для лечения) уехал за границу. К несчастью, поездка эта для него оказалась трагической. Какие-то обстоятельства (видимо, недуг) забросили Алексея Павловича в Марсель, где 19 марта 1853 года он и скончался³ в расцвете творческих сил и способностей.⁴ Похоронен

¹ Болотов А. Взгляд на современное состояние геодезических и топографических действий. «Записки РГО», кн. 1, 1846, стр. 116—135.

² В 1847 г., в Записках В. Т. Д. (часть X), Болотов опубликовал пространный (около 3-х п. л.) «Отчет о поездке его в 1845 г. за границу «для обозрения геодезических и топографических работ».

³ Военный журнал, № II, 1849, списка, стр. 82.

⁴ Гениади Григорий. Справочный словарь о русских писателях и ученых, умерших в XVIII и XIX ст., часть I. Берлин, 1876, стр. 101; Венгеров С. А. Критико-биографический словарь русских писателей и ученых, т. VI, СПб., 1897, стр. 89—90, «Русский провинциальный некрополь», т. I, М., 1914, стр. 94 — это единственный источник, где указана точная дата смерти и место погребения А. П. Болотова.

⁵ Умер Болотов в чине генерал-майора В этот чин он был произведен 6 октября 1849 г., в чин же полковника — 14 апреля 1840 г.

А. П. Болотов на станции Любань Николаевской (Октябрьской) железной дороги, куда прах его был перевезен в 1869 году.

В заключение должен заметить, что приведенная выше дата смерти А. П. Болотова не единственная, встречающаяся в литературе дата, но она наиболее близка к действительности. У Петра Долгорукова¹ эта дата отнесена на май 1853 года, что, конечно, неверно, так как уже 19 марта 1853 года на должность профессора геодезии Академии Генерального штаба вместо А. П. Болотова был назначен подполковник Корпуса военных топографов Войнов.

Вот те немногие сведения о жизни А. П. Болотова, которые мне удалось собрать к 150-летию со дня его рождения и 100-летию со дня смерти.

Список трудов А. П. Болотова

- 1 Геодезия, или руководство к исследованию общего вида Земли, построению карт и производству тригонометрических и топографических съемок и нивелировок, часть I (Сферическая тригонометрия, Астрономическая геодезия, Высшая геодезия), СПб., 1836, XVI + 360 стр.
- 2 Геодезия, или руководство к исследованию общего вида Земли, построению карт и производству тригонометрических и топографических съемок и нивелировок, часть II (проекции карт, нивелирование, топография), СПб., 1837, 445 стр. + 14 листов чертежей.
- 3 Руководство к производству хозяйственной съемки, межевания и нивелирования, СПб., 1842, 362 стр. + 4 листа таблиц и 8 листов чертежей, издание второе, 1856, 360 стр., третье — в 1862.
- 4 Курс высшей и низшей геодезии, часть I, СПб., 1845, XII + 580 стр.
- 5 Взгляд на современное состояние геодезических и топографических действий Записки Р. Г. О., книжка первая, СПб., 1846, стр. 116—135.
- 6 Отчет Генерального штаба полковника Болотова о поездке его, по высочайшему повелению, для обозрения геодезических и топографических работ за границу, в 1845 году. Записки Военно-топографического Делю, часть X, СПб., 1847, стр. 27—65.
- 7 О вычислении многоугольников в тригонометрической съемке. «Военный журнал», № III, СПб., 1848, стр. 165—177.
- 8 О новом нивелирном инструменте Штампфера «Военный журнал», № V, СПб., 1848, 143—146.
- 9 Курс высшей и низшей геодезии, часть II, СПб., 1849, 300 стр. + 4 стр. таблиц.
- 10 О снаряде Гретера для измерения непрямых расстояний «Военный журнал», № III, СПб., 1852, стр. 145—153.
- 11 Exposé de la projection de m. Tausch Bulletin de la classe physico-mathématique de l'Académie Impériale des sciences de St. Petersburg т. XIII, № 1, St. Petersburg, 1855, 4^e, p. 1—13.
- 12 Извлечение из путевых заметок о геодезических и топографических работах за границу в 1845 году СПб., 1846, 8^e, 41 стр.

¹ П. Долгоруков. Российская родословная Книга, часть IV, СПб., 1857, стр. 302.

В. Г. ЧУРКИН

ПЕРВАЯ ПОПЫТКА СОЗДАНИЯ БОЛЬШОГО
СОВЕТСКОГО АТЛАСА МИРА

Первые шаги советской картографии по пути создания географических атласов были предприняты по инициативе В. И. Ленина. Это были попытки составления двух важнейших видов атласов: атласа своей страны и атласа мира. О значении, которое придавал этим работам Ленин, можно судить по его вниманию ко всем вопросам, связанным с составлением упомянутых атласов. Далеко не ограничиваясь руководящими указаниями, он направлял всю работу как в организационном, так и в научно-техническом отношении, в частности, давал указания по составлению программ атласов и отдельных карт, вносил в представленные ему проекты исправления, детально рецензировал пробный экземпляр атласа России и требовал представить ему для просмотра перед сдачей в печать текст и карты атласа мира. Значение ленинских указаний выходит далеко за пределы частных вопросов составления упомянутых атласов. Они являются для советской картографии общей методологической основой при создании лучших произведений этого рода.

О самих атласах, составлявшихся по указаниям В. И. Ленина, известно почти исключительно из его писем. Опубликованные сведения сводятся к следующему. 10 августа 1920 г. письмом в адрес Петроградского Совета Ленин предложил издать атлас России в одной книжке малого формата, подобной книге «Железные дороги России» (издание картографического заведения А. Ильина. Петроград, 1 сентября 1918 г.) и дал ряд конкретных предложений по его составлению [3, стр. 344]. Работа над атласом велась в 1 государственном картографическом заведении. В письме от 20 августа того же года комитету 1 государственного картографического заведения, указывая на необходимость тщательного сбора сведений по новому административному делению, Ленин добавляет «Едва ли без комиссии при СНК дело выйдет» [3, стр. 345]. 23 апреля 1921 г. Ленину был доставлен пробный экземпляр атласа. Составители, по-видимому, формально подошли к своей задаче — лишь отчасти подновили издание Ильина и не учли должным образом указаний Ленина. В письме от 24 апреля (т. е. на другой же день!) Ленин подверг представленный экземпляр уничтожающей критике и дал много конкретных указаний по исправлению атласа [1, стр. 317—319]. 26 апреля 1921 г. была организована особая научная комиссия под председательством В. Д. Кайсарова по составлению географического атласа. Ей было поручено составление учебного географического атласа мира. Методическим и организационным вопросам составления этого атласа Ленин уделял много внимания, о чем свидетельствуют его письма и записки к разным

лицам от 31 мая, 25 июня, 15 и 26 июля [1, стр. 320—322], 17 августа, 9 и 13 сентября 1921 г. [2, стр. 206—207].

О судьбе этого начинания известно очень немного. В примечаниях к письмам Ленина говорится следующее: «Работа по подготовке издания гтнулась с 1921 по 1927 г., но издание осуществлено не было» [1, стр. 321]. Несколько более подробные сведения содержатся в «Объяснительной записке к программе Большого советского атласа мира», где указывается, что «несмотря на огромную помощь, оказанную Лениным этой комиссии, она с работой не справилась, вследствие неудачного подбора авторов и редакторов. Проработав ряд лет, она создала и даже отпечатала большое число карт этого атласа (названного ею «Большой всемирный настольный атлас»). Однако работа не была закончена, так как в 1926 г. специальная комиссия географов установила наличие в большей части карт грубейших ошибок географического и политического характера и признала невозможным выпустить атлас в таком виде» [6, стр. 7]. В этом сообщении, кстати сказать, допущены следующие неточности: во-первых, атлас был назван «Новым большим всемирным настольным атласом», во-вторых, комиссия географов в 1926 г. решила продолжать над ним работу — она была окончательно приостановлена Коллегией Наркомпроса в 1927 г. Но об этом далее.

На цитируемых сведениях основывается все, что было написано об этом атласе в поздней опубликованной литературе, а он упоминается во всех работах, касающихся раннего периода советской картографии. В литературе, относящейся к более раннему времени, мне удалось найти в книге М. П. Павловича лишь следующие дополнительные сведения, касающиеся работы Особой научной комиссии: «Через посредство т. Ионова т. Ленин дал комиссии руководящее указание переработать, дополнить и переиздать. Всеобщий Географический атлас Петри, изд. А. Маркса. Таким образом, работа расширилась, вместо учебного атласа России, была поставлена Лениным задача составить заново «Всемирный Географический Атлас» [5, стр. 7]. Следует пояснить, что издания под названием «Всеобщий географический атлас Петри» не существовало и Павлович, по-видимому, имел в виду «Учебный географический атлас» Э. Ю. Петри, изданный А. Ф. Марксом. Как показано далее, именно этот атлас был вначале положен в основу готовящегося издания.

Таким образом, имеющиеся в литературе сведения о составлявшемся атласе весьма скудны и не совсем точны.

В картографическом отделе Государственной публичной библиотеки им. М. Е. Салтыкова-Щедрина хранится в особой папке большое количество напечатанных карт различного содержания и формата (значительную часть их составляют пробные оттиски), которые значатся в библиотеке как «Атлас Кайсарова» [10]. Говоря точнее, они являются картографическими материалами Особой научной комиссии под председательством В. Д. Кайсарова. В 1948 г. при приеме этих карт в библиотеку¹ В. А. Бриллиант, заведовавший отделом картографии, произвел их разборку, попытавшись сгруппировать карты по степени их причастности к атласу. Несколько позднее некоторые уточнения в такой раскладке были достигнуты с помощью П. П. Померанцева² и при консультации

¹ Они поступили в библиотеку как дар от частного лица в количестве 105 листов. Позднее В. А. Бриллиант присоединил к ним ряд карт, имевших, по его мнению, отношение к этому атласу, доведя общее количество листов до 123.

² Председателя картографической комиссии им. Ю. М. Шокальского Всесоюзного Географического общества, работавшего в годы составления атласа в 1 государственном картографическом заведении.

К. Д. Егорова¹. При этом не преследовалась цель выяснить общий характер содержания и структуру составлявшегося атласа.

Однако последняя задача отнюдь не лишена интереса, если принять во внимание следующие обстоятельства. Особая научная комиссия, созданная по инициативе В. И. Ленина, работала некоторое время под его личным наблюдением (это очевидно из упомянутых выше писем и записок Ленина, относящихся к маю — сентябрю 1921 г.) и под непосредственным влиянием его идей. Поэтому, несмотря на то, что работа комиссии затянулась надолго и не была доведена до конца, а в составленных картах были обнаружены существенные недостатки, в атласе (как в отдельных картах, так и в общем характере его тематки и структуры) следовало ожидать отражения в какой-то мере ленинских указаний. И во всяком случае он интересен как первая попытка, предпринятая советской картографией, создать большой атлас мира. А о том, что большая часть усилий комиссии была направлена именно на составление такого атласа, видно уже из общего просмотра указанных материалов.

Изучая более детально эти материалы и не находя в литературе сколько-нибудь удовлетворительных сведений о работе Особой научной комиссии, я обратился к архивам. В результате мне удалось найти ряд материалов о деятельности комиссии в архиве Петроградского (позднее Ленинградского) отделения Государственного издательства [11], которое должно было выпустить атлас в свет, а также ознакомиться с личным архивом В. Д. Кайсарова [12], любезно предоставленным в мое распоряжение его дочерью Н. В. Ознобишиной. В данной статье использованы сведения, почерпнутые из всех упомянутых выше источников. Кроме того, ряд ценных указаний был мною получен от В. А. Бриллианта и М. Б. Вольфа. Всем указанным лицам приношу искреннюю благодарность.

В статье даются основные сведения о работе Особой научной комиссии по составлению географического атласа и описание последнего.

* * *

Как уже упоминалось, пробный экземпляр атласа России, представленный Ленину 23 апреля 1921 г., был им категорически забракован. Вслед за тем было решено создать комиссию по составлению атласа. Организация ее была поручена Лениным заведующему Петроградским отделением Государственного издательства (Петрогосиздат) И. И. Ионову. В результате была образована Особая научная комиссия под председательством В. Д. Кайсарова.

В. Д. Кайсаров (1878—1942 гг.) получил военное образование, завершившееся окончанием в 1908 г. Инженерной академии в Петербурге. В дальнейшей его деятельности большое место занимала редакционная и литературная работа. Им написан ряд статей и книг по вопросам военной техники, радиотехники, военной истории и такие брошюры, как «Мировой океан» и «Происхождение земли»². В 1923 г. он был избран действительным членом Русского Географического общества. В своей автобиографии [12, датирована 3/II 1935 г.] Кайсаров пишет, что в августе 1920 г. ему было предложено принять участие в составлении атласа в качестве руководителя военно-исторического отдела. Отсюда можно

¹ Работавшего ранее в секретариате В. И. Ленина, автора статей «Ленин — основоположник советской картографии» и «Картография в годы гражданской войны» (Сб. научно-техн. и проз. статей ГУГК, вып. 2, М., 1943, стр. 4—11 и вып. 8, М., 1945, стр. 93—104).

² Популярная библиотека «Наука и техника», вв. 6 и 12, изд. «Красной газеты», Л., 1926.

заключить, что он, по-видимому, принимал участие в работе и над упомянутым выше атласом России.

Вновь образованной комиссии вначале была оставлена прежняя задача — издать атлас России. Однако Ленин вскоре расширил задание, поручив комиссии составление учебного атласа мира, о чем, в частности, свидетельствует его письмо Павлову от 31 мая [1, стр. 320], в котором он предлагает последнему составить для атласа серию карт, характеризующих империализм в капиталистических странах.

Какова же была программа атласа мира, который должна была составить комиссия по заданию В. И. Ленина?

В архиве Петрогосиздата имеется письмо В. Д. Кайсарова заведующему Петрогосиздатом, написанное от имени Особой научной комиссии и датированное 17 июня 1921 г. [11, к. 21, д. 236, л. 126—127]. В нем Кайсаров сообщает, что за основу нового атласа берется последнее издание «Учебного географического атласа» Э. Ю. Петри и перечисляет намеченные изменения и дополнения к этому атласу. Они сводятся в основном к следующему. Карты средней, западной и южной частей Европейской России атласа Петри (таблицы 25, 26, 27) заменяются соответствующими картами из учебного атласа А. Ильина, и к последним добавляются 3 новые карты на недостающие части Европейской России. Кроме того, из атласа Петри изымается карта «Святой земли» и добавляются следующие: железных дорог России, высших учебных заведений, электрификации России и военно-исторические карты (гражданской войны за 1918—1920 гг.), последние на 4 таблицах. Все остальные таблицы атласа Петри подвергаются в той или иной степени переработке и дополнению. Всего в новом атласе Кайсаровым было намечено около 58 таблиц¹ вместо 48 таблиц атласа Петри. Таблицам должны предшествовать (как и в атласе Петри) предисловие, оглавление, краткие указания для учащихся и методологическое введение. В качестве приложений в атлас включались: таблица судоходных свойств русских рек, таблица статистических данных городов России, таблица зависимости между временем в Москве и в других городах России, алфавитный указатель (для чего географические сетки карт должны были дополнительно получить обычные в таких случаях буквенные и цифровые обозначения) и, наконец, краткий очерк гражданской войны в 1918—1920 гг. в пояснение к военно-историческим картам. В письме указывается, что к нему прилагается экземпляр атласа Петри, на таблицах которого сделаны надписи о характере исправлений, на вкладных же листах даны сведения о содержании дополнительных карт и приложений.

В письме Петрогосиздата В. И. Ленину от 18 июня 1921 г., подписанном И. И. Ионовым, сообщается, что работа по подготовке листов атласа к печати рассчитана на 4 месяца, причем печатание карт и приложений будет происходить по мере их подготовки [копия письма — 11, к. 21, д. 236, л. 120]. Той же датой помечен «Список редакционной коллегии Особой научной комиссии по составлению атласа», адресованный Ленину и подписанный Ионовым [11, к. 21, д. 236, л. 121]. Этот список включает в себя председателя редакционной коллегии В. Д. Кайсарова, 8 редакторов, в том числе Ю. М. Шокальского и А. А. Ильина, и 7 научных сотрудников.

Следует полагать, что программа нового атласа, изложенная в письме Кайсарова от 17 июня (и, возможно, затем несколько отредактированная

¹ В письме Кайсарова в этом вопросе неточность: перечислено 57 таблиц, причем один номер пропущен, вследствие чего заканчивается номером 58, в тексте же упоминается 59 таблиц.

Ионовым) и является, вместе с письмами Ионова от 18 июня, теми материалами, по поводу которых В. И. Ленин написал следующее письмо

Петроград

1) Председателю Комиссии
КАЙСАРОВУ

25 VI 1921 г.

2) ИОНОВУ

По поводу учебного атласа

Получил материалы об Атласе. Просмотрел безло и внес небольшие дополнения (в тексте красными чернилами).

Прошу прислать мне

1) календарную программу работы (не при лучших условиях — «если дадут то-то и то — а при теперешних»); особенно: когда кончат работу;

2) распределение работы между членами комиссии;

3) текст и карты, когда будут готовы, перед сдачей их в печать;

4) заключение по вопросу о том, представляется ли желательным и возможным (по каким причинам — в смысле положительного) и отрицательного ответа на вопросы привлечение к этой работе Анучина и Борзова;

5) заключение о том, возьмутся ли члены комиссии или ее председатель сделать дополнительную работу, о коей сказано в прилагаемой копии моего письма к Павлову. Павлович не взялся. Я заказал одному товарищу в Германии, но ответа еще не имею. Хорошо бы, если бы сделала комиссия.

Пр. СНК В. Ульянов (Ленин)

[1, стр. 320—321]

Как видно из недатированного письма Кайсарова, полученного Лениным во всяком случае до 15 июля, комиссия взяла на себя составление карт империализма [1, стр. 321—322].

Таким образом, к июлю 1921 г. задачи Особой научной комиссии определились. Она должна была составить учебный географический атлас мира. За основу его брался атлас Петри — лучший учебный атлас, созданный в дореволюционной России [8]. При этом последний весьма существенно дополнялся. Больше внимания уделялось нашей стране. Она была бы более подробно и равномерно представлена на общегеографических картах ее частей. Кроме того, для нее давался ряд новых специальных карт в соответствии с указаниями Ленина, содержащимися в его письмах от 10 августа 1920 г. и 24 апреля 1921 г. по поводу атласа России. Капиталистический мир должен был дополнительно характеризоваться картами, раскрывающими его империалистическую сущность. Наконец, те карты, которые заимствовались из атласа Петри, подвергались необходимым исправлениям и дополнениям. В атлас включался отсутствующий у Петри алфавитный указатель наименований.

Следует заметить, что указания В. И. Ленина по составлению учебных атласов свидетельствуют о том, что он имел в виду атласы не узко школьного назначения. Так, за прототип атласа России он предложил взять книгу «Железные дороги России» издания А. Ильина (отнодь не

школьного типа) и подчеркивал необходимость показа на картах атласа всех уездных городов («Все уездные города вставить») и железнодорожных станций («железные дороги с указанием каждой станции») [3, стр. 344]. Намеченная им программа карт империализма и, во всяком случае, то большое внимание, которое он уделял всем вопросам, связанным с выпуском в свет атласа мира, также говорят о том, что Ленин имел в виду географические атласы, предназначенные для широких слоев населения.

В заявлении в Петрогосиздат от 2 августа Кайсаров сообщает, что им представлены Председателю Совнаркома:

1) Программа атласа с экземпляром атласа Петри, в который внесены все изменения и дополнения, вызванные новыми заданиями;

2) Календарный план работы;

3) Распределение работы между ответственными редакторами.

4) Экономическая программа атласа;

5) Список членов экономической подкомиссии.

[11, к. 21, д. 236, л. 100].

Позднее, в недатированной записке Ионову Кайсаров упоминает, что 24 июля им была представлена Ленину программа атласа [11, к. 21, д. 236, л. 46-а]. По-видимому, к этой дате относится высылка Ленину всех перечисленных выше материалов.

Дальнейшие указания Ленина по атласу известны из его пометок и записок от 15 и 26 июля [1, стр. 321—322], 17 августа, 9 и 13 сентября 1921 г. [2, стр. 206—207]. Они касаются преимущественно организационных вопросов, в частности, по картам империализма, заказанным в Берлине через П. Л. Ланнского. Однако и позднее Ленин не упускал из виду работу над атласом. Об этом свидетельствует письмо Ионову заместителя управляющего делами Совнаркома В. А. Смольянинова от 15 мая 1922 г., в котором он предлагает прислать ему в десятидневный срок краткий доклад о ходе работ по изданию атласа для доклада Ленину [11, к. 22, д. 238, л. 257].

На этом заканчиваются сведения о непосредственном участии Ленина в создании географического атласа, работа над которым была начата по его указаниям. К этому времени у Владимира Ильича уже обнаружился признаки тяжелого заболевания, которое ограничило его деятельность и впоследствии привело к смерти.

Возвратимся к деятельности Особой научной комиссии. По указанию В. И. Ленина московские географы Д. Н. Анучин и А. А. Борзов были привлечены к редактированию карт атласа. Излагая организацию работ по атласу, Кайсаров писал, что выверенные красочные оттиски с карт поступают на окончательную редакцию одновременно к Шокальскому, Борзову, Анучину и ему — Кайсарову, после чего делаются новые, исправленные оттиски для отсылки на заключение Ленину. Эта организация изложена Кайсаровым в составленном им плане работ [11, к. 21, д. 236, л. 47]. Последний не датирован, но по своему содержанию относится к осени 1921 г. В сопроводительном же письме от 30 сентября 1921 г. Кайсаров сообщает о представлении в Госиздат наряду с другими документами плана работ [11, к. 21, д. 236, л. 77]. Весьма вероятно, что здесь речь идет именно об указанном выше плане. Сведения о том, что здесь речь идет именно об указанном выше плане, содержатся в книге Г. В. Карлова об Анучине. Карпов пишет, что подготовленные к печати карты обычно получал из Петрограда А. А. Борзов, который, сделав свои замечания, передавал их для внесения окончательных исправлений Д. Н. Анучину. Оба они, вдохновляемые конкретными указаниями В. И. Ленина, вложили немало труда в это нужное стране дело

[4, стр. 35]. Псылались ли затем какие-либо карты на заключение Ленину, об этом никаких сведений в известных мне материалах не содержится.

В вопросе издания атласа вначале существовал вариант о печатании карт в Германии, за что брался П. Л. Лапинский.¹ Однако этот вариант был оставлен. Атлас печатался в Ленинграде на 1 государственной картографической фабрике и в типографии им. Евгения Соколовой (бывшая типография А. Ф. Маркса). Что же касается карт, заказанных Лениным в Германии, то, как видно из письма Горбунова Кайсарову от 19 ноября 1921 г. [11, к. 21, д. 236, л. 53], Лапинский готовил в Берлине 3 мировых карты колониальных владений в 1876, 1914 и 1921 гг., мировую карту железнодорожных и морских сообщений, 2 карты железных дорог Африки и Восточной Азии и, кроме того, серии картограмм по вопросам мировой экономики. В августе — ноябре 1922 г. изготовленные карты и диаграммы были перешланы Кайсарову, который обнаружил в них много недостатков, вследствие чего они перерабатывались Особой научной комиссией. В упомянутых выше картографических материалах¹⁰ имеются пробные оттиски трех карт — колониальных владений в 1923 г. и железных дорог Африки и Восточной Азии, напечатанные в типографии им. Евгения Соколовой, по-видимому, с оригиналов, присланных Лапинским из Берлина.

В процессе работы над атласом его программа дополнялась новыми таблицами, а к августу 1922 г. она существенно изменилась. В плане атласа, датированном 27 августа и подписанном Ионовым и Кайсаровым копия плана с приложением перечня таблиц — 11, к. 22, д. 238, л. 195—198, предусматривается 126 таблиц формата 37,5 × 31,5 см. Указанный формат, кстати сказать, соответствует размеру отпечатанных листов этого атласа, находящихся в картографических материалах [10, причем наиболее ранние даты выпуска, поставленные на некоторых из листов, относятся к сентябрю — декабрю 1922 г. Согласно плану атлас должен был содержать следующие отделы:

1. Отдел физической географии.
2. Отдел политической географии.
3. Отдел этнографии.
4. Отдел экономической географии.
5. Финансовый отдел.
6. Исторический отдел.
7. Военно-исторический отдел (гражданская война в России).
8. Карты электрификации РСФСР, транселеграфной связи и мировой сети радиостанций.

Кроме того, в атлас включались карта высших учебных заведений РСФСР и планы некоторых городов (в том числе и исторические).

Картам атласа должны были предшествовать методологическое введение, написанное Ю. М. Шокальским, и ряд справочных таблиц. В конце атласа предусматривались очерки по этнографии, а также исторический и военно-исторический очерки. В заключение давался систематический указатель. В качестве редакторов отделов атласа и очерков в плане указываются Д. Н. Анучин, А. А. Борзов, Ю. М. Шокальский, В. Д. Кайсаров, академики С. Ф. Платонов и В. Л. Комаров и ряд других лиц. Общее редактирование ведется В. Д. Кайсаровым при ближайшем участии Ю. М. Шокальского.

Таким образом, к августу 1922 г. или даже несколько ранее (указанный план был представлен Кайсаровым Ионову за датой 3 июля 1922 г.

¹ П. Л. Лапинский — польский коммунист, экономист, автор книг по вопросам мирового хозяйства [1, стр. 323]

[11, к. 22, д. 238, л. 220—221]). Особая научная комиссия взялась за составление труда, который позднее был назван «Новым большим всемирным настольным атласом». Само название говорит о том, что по мысли составителей он должен был заменить «Большой всемирный настольный атлас Маркса». По поводу же учебного атласа Ионов и Кайсаров в письме от 11 апреля 1924 г. [копия письма — 11, к. 62, д. 644, л. 21—22] указывают, что в 1923 г. Госиздат, согласно пожеланию ГУСа, приступил к изданию специального школьного элементарного атласа, в который включены те из подготовленных комиссией материалов, которые необходимы для школ I ступени. Здесь имеется в виду «Элементарный учебный атлас для школ первой ступени», составленный под редакцией В. Д. Кайсарова и изданный Государственным издательством в 1924 г. [9]. Большой же атлас по мысли Особой научной комиссии и Ленинградского отделения Госиздата, как указано в том же письме, должен представлять собой, подобно лучшим атласам мира, фундаментальную научную работу.

В конце января 1924 г. в центральных газетах были помещены сообщения о готовящемся издании большого географического атласа, содержащего свыше 150 карт. Эти сообщения появились как отклик на смерть Владимира Ильича под заголовками «Ленинский географический атлас» («Правда» от 27 января 1924 г.) или «Географический атлас Ильича» («Известия» от 30 января 1924 г.), так как работы над атласом начались, как указывается в сообщениях, под его непосредственным руководством и при его участии. Примерно с этого времени в переписке об атласе он именуется «Всемирным атласом имени В. И. Ленина».

В упомянутом выше письме от 11 апреля 1924 г. (написанном в связи с вопросом дальнейшего финансирования работ по составлению атласа и направленном в Наркомпрос, Управляющему делами Совнаркома Н. П. Горбунову, а также в другие организации) указывается, что атлас будет состоять из 7 отделов (11 подотделов) и будет содержать 150 таблиц формата 32 × 28 см. Здесь, вероятно, ошибка: 32 × 28 см вместо 32 × 38 см, которые соответствуют как письму от 27 августа 1922 г., так и напечатанным листам. Срок выпуска атласа намечен годичный. В перечне приложений к письму указывается отзыв об атласе Ю. М. Шокальского, который приводится ниже:

Влад. Лм. КИПСАРОВУ

Ознакомившись в подробности с картами вновь составляемого Всемирного Географич. Атласа считаю долгом высказать свое мнение, что Атлас получится весьма обстоятельный, интересный и по его характеру, еще у нас не бывалый. Во всяком случае интересный.

Заслуж. Профессор Ю. Шокальский

[11, к. 90, д. 996, л. 246]

В процессе дальнейшей работы над атласом программа его продолжала дополняться. С увеличением общего объема работ оттягивались сроки ее завершения. Вместе с тем с течением времени некоторые из ранее составленных и даже отпечатанных листов уже настолько не соответствовали более поздним данным, что возникла необходимость в их исправлении или даже полной замене. Соответственно всему этому срок выпуска атласа в свет все оттягивался и так продолжалось до 1926 г. В начале 1926 г. в связи со слиянием Лениотгиза с Госиздатом при редакционном отделе Лениотгиза была образована экспертная комиссия

из географов и картографов для обследования состояния работ по атласу. В состав ее, в частности, были включены Ю. М. Шокальский и В. Д. Кайсаров. К этому времени программа атласа включала в себя более 200 листов. 85 листов были отпечатаны (тиражом в 5000), примерно столько же находилось в работе. Ознакомившись с отпечатанными листами, экспертная комиссия пришла к заключению, что часть их нуждается в исправлениях и часть должна быть пересоставлена заново. В связи с этим типографские работы в феврале 1926 г. были временно приостановлены. Экспертная комиссия была преобразована в редакционную комиссию для продолжения работ по атласу, рассмотрела его программу и в мае 1926 г. наметила новую, согласно которой часть отпечатанных листов исправлялась или заменялась новыми и в атлас включались дополнительные листы, так что его общий объем по сравнению с прежней программой несколько увеличивался. Однако по этой новой программе почти ничего не было сделано. Госиздат в вопросе об атласе занял очень сдержанную позицию и не давал разрешения на типографские работы, которые так и не возобновились.

Наконец, в мае 1927 г. Коллегия Наркомпроса направила в Ленинград члена Коллегии О. Ю. Шмидта и члена Правления Госиздата М. М. Кантора для обследования состояния работ по атласу. Была организована новая комиссия. В протоколе заседания этой комиссии от 25 мая 1927 г. (присутствовали: И. С. Гефт — председатель, А. М. Файнштейн — секретарь, О. Ю. Шмидт, М. М. Кантор и Л. Б. Горохов) указывается, что почти весь подготовленный для атласа материал непригоден, так как карты частью скопированы из разных иностранных атласов, частью составлены по устаревшим материалам и нецелесообразны по содержанию. Совещание постановило считать атлас в том виде, в каком он составлялся, для издания неприемлемым и вместе с тем признало необходимым издание школьного Ленинского атласа, для которого может быть использована незначительная часть заготовленных для большого атласа физических карт [копия протокола — 11, к. 90, д. 996, л. 20—21]. 26 мая 1927 г., т. е. на следующий же день, решения комиссии были подтверждены Коллегией Наркомпроса (выписка из протокола заседания Коллегии Наркомпроса — 11, к. 90, д. 996, л. 61—62). Как известно, школьного атласа имени В. И. Ленина издано не было. Часть напечатанных листов «Нового большого всемирного настольного атласа» поступила в розничную продажу. Так завершилась первая попытка создания Большого советского атласа мира.

Упомянутые выше картографические материалы [10] содержат преимущественно отпечатанные листы этого атласа, представленные в различных вариантах, соответствующих различным стадиям работы над ними. Карты напечатаны, как правило, на одной стороне каждого листа. На обратной стороне листов печатались соответствующий пояснительный текст. Отбор и изучение листов атласа позволили выяснить конкретное содержание и вид многих карт, различных графиков, таблиц и текста, а также особенности составлявшегося атласа в целом. Ниже дается его краткое описание. Названия отделов и подразделов атласа, а также сведения об отсутствующих листах даны в соответствии с последним вариантом плана атласа, так называемым «перечнем таблиц», по которому еще велись работы [11, к. 90, д. 996, л. 162—167].

«Новый большой всемирный настольный атлас» должен был содержать следующие отделы:

I отдел. Общий обзор. Этот отдел должен был состоять из обычных в мировых атласах карт и других графических изображений вводного назначения, а также серии мировых карт, характеризующих основные черты физической географии и населения земного шара. Согласно

переносу отдел должен был занимать 26 листов. Из них в картографических материалах имеется 17 листов, при составлении которых в большинстве случаев за основу были взяты карты из атласов Петри [8] и Маркса [7]. Следует пояснить, что формат составлявшегося атласа настолько больше формата атласа Петри, что лист разворота атласа Петри помещается в одиннадцатую страницу нового атласа и остается еще свободное место. При компоновке карт из атласа Петри на листах нового атласа свободные места использовались для дополнительных карт, диаграмм и т. п.

II отдел. Физический обзор стран света. Отдел должен был содержать физико-географические карты материков, расположенные на 6 листах. Из них в материалах имеется 4 листа. Основные карты составлены по картам атласа Петри в одном масштабе 1:50 000 000 (за исключением карты Австралии и Океании, составленной в масштабе 1:40 000 000).

III отдел. Союз Советских Социалистических Республик. Это самый большой отдел атласа — ему отводилось 88 листов. Он состоит из трех подразделов.

А. Физический обзор. Подотдел должен был содержать на 22 листах серию карт природы, а именно: карты гипсометрические, геологические, полезных ископаемых, климата, почв и растительности. Для каждой темы отводилось две карты: одна для Европейской части Советского Союза, другая для его Азиатской части (или СССР в целом). В материалах имеется 12 листов со следующими картами: две гипсометрические карты — Европейская часть Советского Союза и СССР в целом (последняя составлена Ю. М. Шокальским), карты Европейской части: геологическая, полезных ископаемых (составлены А. П. Герасимовичи), почв (составлена по карте К. Д. Глинки) и распределения растений (составлена академиком В. Л. Комаровым). Последние 4 карты даны на единой общегеографической основе в масштабе 1:10 500 000.

В. Политический обзор. Этот подраздел должен был занять 54 листа. В начале его намечались 2 карты населения: Европы и Советского Союза, а также политические карты на те же территории. За ними следовали политико-административные (или, возможно, общегеографические) карты частей Советского Союза и соседних государств, входивших в состав дореволюционной России. В заключение предполагалось дать карту учебных заведений СССР и 2 карты за проектом электрификации — Европейской и Азиатской частей Советского Союза. В материалах имеются только 4 листа с картами населения Европы и картой проекта электрификации Европейской части Советского Союза, составленной на той же общегеографической основе, что и карты природы (в масштабе 1:10 500 000) предыдущего подраздела.

С. Исторический обзор. Подотдел должен был содержать 10 листов с картами, характеризующими территориальное расширение Русского государства. В материалах имеется лишь ранний вариант одной из таких карт (на двух листах). Исторические карты населения, экономического развития России и военные должны были находиться в других отделах атласа соответственно тематике этих карт.

IV отдел. Политический обзор. На 25 листах этого отдела должны были помещаться политические карты стран капиталистического мира, а именно, карты государств Западной Европы и политические карты других частей света. В состав карт Европы включалась физическая карта Центральной Европы. В материалах имеется 13 листов, на которых даны политическая карта Центральной Европы (составлена В. Д. Кайсаровым), гипсометрическая карта Западной и Центральной Европы, а также часть карт европейских государств и материков, составленных по картам

атласов Петри и Маркса. Для государств Европы основные карты даны в масштабе 1 : 5 000 000. Карты материков даны в том же масштабе, что и соответствующие им физические карты II отдела атласа.

V отдел. Колонии и мировые сообщения. Этот оригинальный отдел должен был занимать 16 листов, из которых в наличии имеется 14. На них даны мировые карты колоний в 1876, 1914 и 1925 гг., ряд других карт по истории колонизации, диаграммы и, кроме того, мировые карты почтовых пароходных рейсов, важнейших кабельных и наземных телеграфных линий, главнейших радиостанций общественного пользования и карты железных дорог Африки и Восточной Азии. По сравнению с перечнем в отделе отсутствует только одна карта мировых средств сообщения.

VI отдел. Экономический обзор. Отдел должен был дать разностороннюю характеристику мировой экономики и экономики Советского Союза, причем для ряда тем предусматривались и исторические карты. Он состоит из трех подразделов.

A. Мировое хозяйство. На 33 листах этого подраздела было намечено показать сельское хозяйство, промышленность и транспорт мира в целом, Европы и Советского Союза.

B. Мировая торговля. 7 листов этого подраздела предназначались для характеристики мировой торговли и 2 листа посвящались внешней торговле Советского Союза.

C. Финансовый обзор. На 9 листах этого подраздела должны были характеризоваться бюджеты, время государственных платежей, развитие государственного кредита, частные банки, фондовая биржа, денежное обращение, инфляция и стоимость национальных валют на международном рынке.

Таким образом, отдел в целом должен был занимать 51 лист. По отношению к намеченному объему для него было напечатано наименьшее количество листов (всего 11), содержащих карты и диаграммы по отдельным вопросам.

VII отдел. Военно-исторический. Из 6 листов, намеченных в этом последнем отделе атласа, в материалах имеются 4 листа, содержащие 2 карты фронтов гражданской войны — в 1918 и 1919 гг., составленные на одной и той же общегеографической основе в масштабе 1 : 10 500 000, а также карты и диаграммы под общим названием «Мировая война и ее последствия». Все листы составлены В. Д. Кайсаровым. Отсутствуют 2 листа с картой (или картами) гражданской войны в 1920 г.

Таковы были содержание и структура этого атласа, составлявшегося Особой научной комиссией в течение трех с половиной лет (с осени 1922 г. до весны 1926 г.). Ко времени прекращения работ его предполагаемый объем составлял свыше 200 листов карт и различных графиков (218 таблиц по перечню). По формату он приблизительно соответствовал «Большому всемирному настольному атласу Маркса», но должен был в два раза превзойти его по объему (атлас А. Ф. Маркса во втором издании содержит 110 листов карт). В отличие от последнего, являющегося типичным общегеографическим атласом обзорно-справочного типа, почти лишенным специальных карт, «Новый большой настольный атлас» должен был отобразить природные условия, особенно Советского Союза, и дать развернутую социально-экономическую характеристику мира. Указания В. И. Ленина о необходимости показа явлений в их историческом развитии получили или должны были получить свое отражение на многих листах атласа, особенно в социально-экономических темах III—VI отделов и в VII военно-историческом отделе. Из карт, непосредственно предложенных Лениным для атласов России и мира, были составлены: карта Европейской части СССР с проектом электрификации,

карты колониальных владений в 1876, 1914 и в 1925 гг. (т. е. на наиболее поздний год, на который можно было составить карту), карты положения фронтов гражданской войны в 1918 и 1919 гг. В свете указаний Ленина составлены политическая карта Центральной Европы с ссылками на мирные договоры, определявшие государственные границы; и мировая карта главнейших радиостанций общественного пользования; на картах железных дорог Африки и Восточной Азии показано, кому принадлежат те или иные железные дороги и особо отмечены проектируемые. Наконец, программой атласа предусматривались карта с проектом электрификации Азиатской части СССР и карта высших учебных заведений Советского Союза. На обратной стороне листов помещался объяснительный текст.

Немаловажным достоинством атласа является то, что рельеф земной поверхности изображался гипсометрически как на специальных картах рельефа, так и на всех общих физико-географических и общегеографических картах. Следует также отметить высокое для того времени качество оформления карт и печати подготовленных листов. Наконец, для всего труда был предусмотрен систематический указатель.

В целом составлявшийся атлас по характеру своего содержания, структуре, а также и по объему являлся произведением, не имевшим аналога ни в дореволюционной России, ни за рубежом и нельзя не согласиться с приведенным выше мнением Ю. М. Шокальского, что он был бы «весьма обстоятельный, интересный и по его характеру, где у нас не бывалый. Во всяком случае интересный».

Основная особенность этого «небывалого» атласа в отношении содержания заключается в многогранном отображении мира, а также в стремлении показать его в историческом развитии и в его незаулавываемой, полной противоречий действительности. Эти задачи обусловили включение в атлас карт различного специального содержания, объединенных общностью многосторонней географической темы. Попытка создать такой атлас не является случайным эпизодом в истории советской картографии. Одной из основных ее особенностей является небывалое развитие специального и, еще более, комплексного картографирования, вызванного задачами народнохозяйственного и культурного строительства и в назидательном порядке отвечающего современному состоянию географических знаний. В прошлом и до настоящего времени комплексное картографирование осуществлялось на практике главным образом в форме географических атласов — так называемых комплексных атласов. Под этим термин я подразумеваю географические, объединенных, разумеется, общегеографического содержания, атласы специального содержания, составленные в России по географической теме. Комплексные атласы составлялись в Российской империи и в других странах и ранее, но только в условиях советского государства они получают полное и всестороннее развитие. Именно комплексные атласы, такие, как «Атлас промышленности СССР» (1929—1931 гг.), «Атлас Московской области» (1933 г.), «Атлас Ленинградской области и Карельской АССР» (1934 г.), «Промышленность СССР на начало второй пятилетки» (1934 г.), «Атлас энергетических ресурсов СССР» (1933—1935 гг.), «Большой советский атлас мира» (I т. — 1937 г., II т. — 1939 г.), «Морской атлас» (I т. — 1950 г., II т. — 1953 г., III т. — 1958 г.) и целый ряд составленных или намеченных к составлению новых атласов — именно такие произведения определяют основное направление в развитии современной картографии. На подступах к созданию этого выдающегося произведения «Большой советский атлас мира» составленного под «Новым большим всемирным настольным атласом», составившимся под непосредственным влиянием идей В. И. Ленина. Историк советского периода в развитии картографии не вправе обходить молчанием этот атлас, как это было, по существу, до настоящего времени.

Указывать недостатки этой большой, новаторской и к тому же незавершенной работы не представляет труда — особенно теперь, по истечении более чем 30 лет, за которые советская картография ушла далеко вперед. Отмечу только как наиболее общий недостаток атласа элемент эклектизма в содержании и методах его отображения. Атлас объединял карты, составленные заново в свете новых требований, с картами, составленными по старым образцам или даже заимствованными без достаточной переработки из других атласов, тогда как и лучшие из старых образцов не соответствовали новым задачам и диссонировали с новыми картами. Однако даже несмотря на привлечение к работе над атласом таких крупных ученых, как Ю. М. Шокальский, Д. Н. Анучин, А. А. Борзов, В. Л. Комаров, и ряда выдающихся специалистов, указанного недостатка трудно было избежать в те ранние годы формирования советской картографии. Учитывая отсутствие опыта в создании подобных произведений, слабую материально-техническую базу и отсутствие того масштаба в постановке работ, который позднее был придан работам по созданию «Большого советского атласа мира», — учитывая все это, следует признать, что за три с половиной года было сделано не так уж мало и не так уж плохо. И думается, эта попытка была не бесплодной. Трудно представить, что приобретенный опыт не был учтен при работе над «Большим советским атласом мира».

Первая попытка создать большой географический атлас, который должен был отобразить в едином комплексе физическую, экономическую и политическую географию мира, осветив его с позиций марксистско-ленинской науки, осталась незавершенной. Работа над атласом была окончательно оставлена в 1927 г. Но уже в 1933 г. вышло постановление ЦИК и СНК СССР «Об издании Большого советского атласа мира». К этому времени советская картография выросла в научном и техническом отношении, накопила опыт и успешно вырабатывала свой стиль и почерк. И ею было создано одно из самых замечательных и своеобразных произведений мировой картографии.

Использованные материалы

1. Ленин В. И. Письма об учебном атласе. Ленинский сборник, т. 20, стр. 317—323.
2. Ленин В. И. Записки об учебном атласе. Ленинский сборник, т. 23, стр. 206—208.
3. Ленин В. И. Указания об издании учебного атласа Ленинский сборник, т. 34, стр. 344—345.
4. Карпов Г. В. Д. Н. Анучин. Географизм, М., 1954.
5. Павлович М. (Вельтман М.) Ленин. Изд. «Красная новь», М., 1924.
6. Проект программы Большого советского атласа мира. Изд. НИИ БСАМ, М., 1934.
7. Большой всемирный настольный атлас Маркса, изд. 2-е, доработка 1916 г. Изд. А. Ф. Маркса, Пгтр., 1916.
8. Петри Э. Ю. Учебный географический атлас, изд. 9-е, А. Ф. Маркса, Пгтр., 1917.
9. Элементарный учебный атлас для школ первой ступени под ред. В. Д. Кайсарова. Госиздат, М.-Пгтр., 1924.
10. Картографические материалы Особой научной комиссии под председательством В. Д. Кайсарова по составлению географического атласа, хранящиеся в Гос. публ. библ. им. Салтыкова-Шчедрина («Атлас Кайсарова»).
11. Архив Петрогр. (позднее Ленингр.) отделения Госиздата, хранящийся в Государственном архиве Октябрьской революции и социалистического строительства Ленинградской области, фонд № 2913. 1
12. Личный архив В. Д. Кайсарова, хранящийся у Н. В. Ознобишиной

¹ При ссылках на архивные материалы приняты следующие сокращения: к — ко-робка, д. — дело, л. — лист.

А Н ЛАРИОНОВА

СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА
ИЗОБРАЖЕНИЯ ПОДВОДНОГО РЕЛЬЕФА
НА ГЕОГРАФИЧЕСКИХ КАРТАХ

Сравнение и анализ ряда современных географических карт, изданных за последнее десятилетие как в Советском Союзе, так и за рубежом позволяют установить, что при показе на них рельефа дна океанов и морей посредством изобат, существуют различные методы построения последних. Однако в отечественной литературе о методах рисовки изобат можно найти указания, основанные на устаревшем представлении о чрезвычайной плавности и сглаженности подводной топографии, якобы отличающейся от топографии суши, в соответствии с чем существенно отличаются при проведении изобат на картах использование только сведений об измеренных глубинах, без привлечения данных других наук: геологии моря, геоморфологии, геотектоники и океанографии [19, стр. 30], [20, стр. 37] и [11, стр. 21]. В соответствии с этими указаниями, например, составлены и продолжают составляться листы «Общей батиметрической карты океанов» [IV] и батиметрия на «Карте Антарктики» [V].

Теоретические принципы, положенные в основу нового подхода к изображению рельефа дна морей и океанов на картах фундаментальных произведений, изданных в последние годы в Советском Союзе — физико-географического тома «Морского атласа» (изд. 1953 г.) и «Атласа мира» (большого, изд. ГУГК 1954 г.), а также способы построения на них изобат не освещены в нашей печати. Изложению вопроса проведения изобат на листах «Гипсометрической карты СССР» (изд. ГУГК 1949 г.), как нами отмечалось ранее [10], уделено весьма мало внимания [4], [5], [6].

Из числа иностранных авторов вопросу картографического изображения подводного рельефа посвящены работы Шпарда и Эмери и Смитта [22 и 25].

Подводя итог изложенному, можно отметить, что систематическое изложение современных принципов построения изобат на географических картах в литературе отсутствует.

Настоящая статья представляет собой попытку дать краткую сводку основных методов построения изобат на общегеографических картах и специальных картах рельефа (гипсометрических, батиметрических).¹

¹ При отображении рельефа дна на картах специального назначения (навигационных, гидрологических, рыбопромысловых) составитель связан дополнительно поставленными ему особыми условиями

* * *

До конца XIX века наука располагала совершенно недостаточными данными для суждения о рельефе дна океанов, его характере и строении. Техника производства промерных работ была такова, что могли быть известны глубины только отдельных точек; малое их число, особенно в пределах больших глубин, не могло послужить материалом для правильного суждения о подводном рельефе. В конце XIX и в начале XX веков в связи с массовой прокладкой трансокеанских телеграфных кабелей значительно возрос объем глубоководных промерных работ. В это же время увеличилось и число океанографических экспедиций, производивших измерения глубин в открытых частях океанов. Тем не менее ко времени появления эхолотов (1920-е годы) число измеренных глубин по-прежнему составило о рельефе дна океанов и большинства морей только самое общее представление.

О том, какова была изученность рельефа дна Мирового океана в самом недавнем прошлом, можно судить из того, что наиболее полная батиметрическая карта — «Общая батиметрическая карта океанов» во втором издании 1912—1927 гг. была составлена на основании всего лишь 17 856 отметок¹ измеренных глубин [16, стр. 148]. По подсчетам В. А. Снежинского это составляет в среднем примерно по одному измерению глубины на каждые 20 000 км² площади Мирового океана (без материковой отмели) с весьма неравномерным притом распределением по площади. Небезынтересно привести таблицу их распространения по глубинам.²

Значения глубин в м	Площадь в млн. км ²	Количество измеренных глубин
200—1000	43,6	4 475
	(с материковой отмелью)	
1000—2000	14,8	2925
2000—3000	23,7	2915
3000—4000	72,0	2800
4000—5000	121,8	2804
5000—6000	81,7	1663
6000—7000	3,8	1731
7000—8000		69
8000—9000	0,8	24
более 9000		8

Не располагая никакими другими дополнительными данными для суждения о подводном рельефе, кроме наблюдений над абразионно-аккумулятивной работой моря в прибрежной полосе, стали сильно преувеличивать рельефообразующую роль экзогенных факторов, причем особенно большое значение придавалось процессу отложения осадков, которые якобы сглаживают неровности на морском дне.

Насколько большее значение в формировании подводного рельефа придавалось экзогенным факторам можно судить хотя бы по тому, что в прошлом считалось, а некоторые ученые и теперь еще продолжают счи-

¹ В это число включены почти полностью все достоверно измеренные глубины

² Заимствована из [16, стр. 148]

тать формирование пространств материковой отмели результатом денудационного и абразионно-аккумулятивного воздействия моря на берега и дно при различных его уровнях. (Например, [18, стр. 171—189] и [23, стр. 25].) Вполне закономерно, что в результате такого преувеличения экзогенных факторов рельефообразования на морском дне и недооценки эндогенных¹ при общем недостаточном количестве измеренных глубин сложилось неправильное представление о чрезвычайной сглаженности подводной топографии.

Изобретение эхолота и его использование для производства измерений больших глубин произвело настоящий переворот в промерных работах. Количество измеренных глубин во всем Мировом океане резко возросло. На смену единичным измерениям больших глубин, требовавшим значительного времени для каждого из них, пришли эхолотные измерения. Так, с помощью эхолота на э/с «Метеор» (1925—1927 гг.) за один год плавания были измерены глубины в 30 000 точках. Постепенное накопление новых данных о глубинах дна морей и океанов поколебало прежнее представление. Выяснилось, что подводный рельеф в ряде случаев характеризуется не меньшей сложностью, чем рельеф суши, и что структуры суши могут быть прослежены под водой на громадные расстояния [1, стр. 506—509], [9, стр. 66].

Роль, которая отводилась процессу отложения осадков на морском дне, постепенно уменьшалась, так как стало известно, что оно происходит чрезвычайно медленно, особенно в открытых частях океанов [2].

Накопленные к настоящему времени данные о подводном рельефе показали, что на дне океанов имеются громадной протяженности горные хребты, аналогичные горным системам суши, такие, как Атлантический хребет, Южно-Антильский хребет (Южно-Антильская островная дуга), Центральный Индийский хребет, крайние абиссальные впадины, расположенные вдоль края гористых берегов материка или вдоль внешней стороны островных дуг. Стало известно также, что материковый склон расчленен во многих местах желобами и каньонами. Даже в пределах больших глубин, остающихся все же наименее изученными, выявлены мелкие формы рельефа, как например, отдельно стоящие горы в средней части Тихого океана [8]. Наиболее изучен рельеф дна материковой отмели, где наряду с крупными формами хорошо известны также формы второстепенные; многие из них описаны в литературе и представлены графически морфологическими и эхолотными профилями.

Накопление сведений о подводном рельефе привело к возникновению новой отрасли науки — геоморфологии морского дна, основные задачи и проблемы которой в общих чертах были намечены Д. Г. Пановым [12], [13].

В связи с развитием геоморфологии морского дна советскими учеными был предпринят ряд попыток составления геоморфологических карт морского дна. На весь Мировой океан имеется одна карта — «Геоморфология материков и дна океанов», опубликованная в физико-географическом томе «Морского атласа» (карта № 12).

Попытки классифицировать типы и формы подводного рельефа, принятые в Советском Союзе [4], [7], [14], [15], [17] и [1], карта № 12, находятся в связи с геоморфологическим картографированием. В основу

¹ Современные данные позволяют утверждать, что эндогенные факторы проявляются с одинаковой силой как в пределах материков, так и в пределах океанического дна

всех приведенных классификаций положен генетический принцип, т. е. происхождение форм рельефа.¹

Развитие геоморфологии морского дна способствует более правильному подходу к вопросу картографического изображения подводного рельефа. Особенно же большое значение для практики картосоставительских работ имеет наличие детально разработанной классификации форм подводного рельефа.

* * *

Картограф, приступивший к составлению карты наземного рельефа, имеет значительные преимущества перед составителем карты подводного рельефа. При составлении он располагает материалами, которые были получены путем непосредственного наблюдения местности. Составление же карт подводного рельефа затруднено тем обстоятельством, что рельеф дна недоступен непосредственному наблюдению. Его изображение приходится строить поэтому в несколько более обобщенном виде, нежели изображение рельефа суши, что, однако, не исключает возможности правильного показа на карте как общего характера подводного рельефа, так и его отдельных черт.

Тем не менее на некоторых общеизвестных картах, изданных в последние годы (например, [V]) многообразие форм подводного рельефа не нашло своего правильного отражения. Это объясняется тем, что построение изобат на картах основано на предположении о равномерном уклоне дна между каждой парой измеренных глубин, а другие данные о подводном рельефе не были приняты во внимание. Как отмечено выше, такая практика механического обобщения глубинных отметок и проведение изобат методом линейного интерполирования могла соответствовать первой стадии изучения подводного рельефа, когда были известны только глубины отдельных точек. Современной изученности подводного рельефа и современной технике промерных работ этот способ обобщения промерного материала уже не может соответствовать.

Изобаты, проведенные на карте в соответствии с предположением о равномерном уклоне дна между каждой парой измеренных глубин, дают рисунок сглаженного, лишённого своих характерных черт рельефа, часто очень далекого от действительности. При большой сгущенности промерных точек такой способ не приводит обычно к грубым ошибкам, но если промерные точки находятся в значительном удалении одна от другой, то задача усложняется и не может быть решена механически, путем интерполирования местоположения изобат.

Составителям карт хорошо известно, как добавление даже небольшого числа промерных точек может совершенно изменить рисунок изобат. Насколько произвольна картина подводного рельефа на карте, если построение изобат на ней основано только на немногих отметках глубин и на допущении равномерного уклона дна между этими отметками, — остроумным и убедительным приемом показал французский океанограф Ж. Туле в статье, озаглавленной «Частота измерений глубин и достоверность батиметрических морских карт» [24], где он допускает, что Франция с рельефом, обратным существующему (т. е. высоты которого стали глубинами), погружена в воду. В качестве показателей глубин он использовал ограниченное количество случайно взятых высот. Игнорируя остальные данные, определяющие рельеф воображаемого дна и пользуясь только

¹ Из зарубежных авторов попытки классифицировать формы подводного рельефа по генетическим признакам были предприняты Е. Мартоном [21], Х. У. Сведарупом [23] и Ж. Буркаром [3, стр. 68—69].

этими случайными отметками, он составил 4 батиметрические карты с изобатами, проведенными через 10, 20, 50, 100 и далее через каждые 100 м.¹ Первая карта составлена на основании 15, вторая — 31, третья — 154 и четвертая — 308 отметок глубины. Изображенный на картах рельеф начинает приобретать некоторое сходство с действительным рельефом только на третьей карте (при площади Франции 551 тыс. км² это соответствует одной высотной точке примерно на 3—4 тыс. км²), а очертания отдельных орографических единиц можно узнать лишь на четвертой карте, однако общие их контуры остаются и здесь чрезвычайно грубыми.

* * *

Новые методы картографирования подводного рельефа, примененные в советской картографии последних лет (Гипсометрическая карта СССР в масштабе 1 : 2 500 000; Морской атлас (физико-географический том) и Атлас мира (большой) характеризуются тем, что местоположение изобат на картах определяется не одними только промерными данными. Измеренные глубины хотя и служат основой, но не являются единственным критерием для суждения о рельефе данного участка морского дна. При проведении изобат в качестве дополнительного материала используется вся совокупность сведений о рельефе дна бассейна, его происхождение и развитии, строении прилегающих участков суши, их сейсмичности, о расположении гидрографической сети и т. д. Составление подводного рельефа, основанное не только на некотором количестве измеренных глубин, но с учетом всех этих данных, позволяет дать при том же самом числе измерений более верное его изображение.

В настоящее время разработано и применяется в практике картосоставительских работ несколько способов обобщения промерного материала на основе привлечения геолого-геоморфологических данных.

Так, в 1944 г. В. П. Зенкович предложил новый метод изображения подводного рельефа, который нашел свое воплощение на листах Гипсометрической карты СССР. В соответствии с этим методом способ рисовки изобат не был единым, но изменялся в зависимости от обеспечения картируемого участка дна промерами.

В районах, хорошо обеспеченных промерами, построение изобат производилось на основании измерений глубин с дополнительным использованием геолого-геоморфологических данных. Естественно, что изображение рельефа этих участков дна отличалось детальностью.

Для проведения изобат на участках дна, недостаточно обеспеченных промером или даже лишённых его, применялся иной способ, а именно характер рельефа этих участков строился по аналогии с изученными участками дна аналогичного происхождения.

Благодаря применению обоих этих приемов рисунок рельефа дна всего океана или моря на карте характеризуется одинаковой степенью детальности, не зависящей от степени обеспеченности промером. По существу, метод построения изобат В. П. Зенковича может быть характеризован как метод картографирования типов рельефа, в соответствии с чем он и был применен при картографировании пространств материковой отмели и материкового склона на листах Гипсометрической карты СССР.

В тех случаях, когда имеют в виду дать общее, наглядное представление о характере подводного рельефа, считается с большой долей его гипотетичности, использование изложенных приемов вполне уместно.

¹ Эти карты воспроизведены в русском переводе книги Ж. Буркара «Рельеф океанов и морей» [3] на стр. 50—53.

В связи с составлением карт рельефа дна океанов для физико-географического тома Морского атласа в его Главной Редакции при участии автора настоящей статьи был разработан другой метод построения изобат на географических картах, суть которого сводится к следующему.

При картографировании подводного рельефа учитывалась (так же, как и в первом случае) вся совокупность геологических, геоморфологических и океанографических данных. При этом, однако, основное внимание было направлено на изучение геометрии и на картографирование основных форм рельефа. Такой подход к изображению подводного рельефа обеспечивает, как нам представляется, меньшую его гипотетичность по сравнению с методом В. П. Зенковича. Применение этого метода при составлении карт приводит к тому, что детальность изображения формы определяется детальностью промера.

В практике картосоставительских работ этот метод может быть применен при картографировании любого участка дна Мирового океана. Он и был применен при составлении батиметрических карт второго тома Морского атласа.

Изображение рельефа на картах географического Атласа мира (большого) имеет в своей основе также использование всех измерений глубин в сочетании с геологическими, геоморфологическими и океанографическими данными. Однако рисовка рельефа на картах этого Атласа отличается по сравнению с листами Гипсометрической карты уже меньшей детальностью даже для пространства материковой отмели и склона.¹ При картографировании же пространств океанического дна, очевидно, был учтен опыт Главной Редакции Морского атласа ВМФ.

К сожалению, общим недостатком построения изобат в камеральных условиях является невозможность осуществить сравнение изображенного на карте рельефа с действительным. Как часто в процессе работы составителю «не хватает» двух, трех, а иногда даже одного измерения глубины в каком-либо определенном месте, для того чтобы быть совершенно уверенным в правильности своих построений. Поэтому метод построения изобат, основанный на сочетании камеральных составительских и промерных работ является наиболее плодотворным для повышения точности карт. Его применение уже имело место в СССР при картографировании прибрежных участков дна Черного моря (В. А. Снежинский), а также в США при картографировании «континентального бордерленда» у берегов Калифорнии и материкового склона Северной Америки в Атлантическом океане [22], [25].

При сочетании промерных и камеральных работ обычно устанавливается такая последовательность:

- 1) промерные работы (предварительные);
- 2) нанесение промеров на крупномасштабные карты и рисовка на них изобат (получение предварительной батиметрической карты);
- 3) составление схемы дополнительного промера;
- 4) промерные работы (дополнительные);
- 5) нанесение дополнительных промеров на предварительную батиметрическую карту;
- 6) окончательная рисовка батиметрии на карте.

Полученные таким путем крупномасштабные батиметрические карты отдельных участков в дальнейшем могут быть сведены в карту района.

Учитывая при промерных работах данные по геотектонике и геоморфологии картируемого участка морского дна, грунтовые данные, сведения по топографии и расположению водных артерий прилегающих пространств суши, характер течений и волнения в различных участках моря,

¹ Что может быть отчасти объяснено и более мелкими масштабами карт атласа

можно обосновать наличие определенных форм подводного рельефа в каждом отдельном участке на основании даже небольшого количества промеров и наметить местонахождение наиболее характерных точек рельефа.

В результате изложенной организации и последовательности работ может быть получена батиметрическая карта достаточно высокой точности.

* * *

В заключение нашего обзора следует отметить, что батиметрическая карта является основой, необходимой для всестороннего изучения дна океанов и морей;¹ поэтому можно ожидать, что наиболее правильное изображение подводного рельефа окажется весьма плодотворным и для развития других, смежных наук.

Карты и атласы

1. Гипсометрическая карта СССР в масштабе 1 : 2 500 000 на 32 листах, под общей редакцией И. П. Заруцкой. Изд. ГУГК при Совете Министров СССР. М., 1949.
2. Морской атлас, том II, физико-географический. Изд. Главного Штаба Военно-Морских Сил, 1953.
3. Атлас мира (большой). Изд. ГУГК ВМД СССР. М., 1954.
4. Carte générale bathymétrique des océans. Ed. publiée par le Bureau hydrographique International. Feuilles de 3-ème ed. Monaco, 1935.
5. Kosack H. — P. Karte der Antarktis in 4 Blätt. Petermanns geogr. Mitteilungen, 1954, Heft 2, Tafel 14.

Литература

1. Белоусов В. В. Основные вопросы геотектоники. М., 1954.
2. Бруевич С. В. Скорость образования донных отложений в Мировом океане. Тр. Инст. Океанолог., т. 111, 1949, стр. 90—118.
3. Буркар Ж. Рельеф океанов и морей. М., 1953.
4. Заруцкая И. П. Гипсометрическая карта СССР в масштабе 1 : 2 500 000. Тр. Второго Всесоюзного географ. съезда, т. III, М., 1949, стр. 67—81.
5. Заруцкая И. П. О методике изображения рельефа на Гипсометрической карте СССР в масштабе 1 : 2 500 000. Вопросы геогр., сб. 11, М., 1949, стр. 73—94.
6. Заруцкая И. П. и Зенкович В. П. Гипсометрическая карта СССР в м 1 : 2 500 000. Изв. АН СССР, сер. географ. № 1, М., 1951, стр. 74—79.
7. Зенкович В. П. Типы и генезис рельефа дна морей Европейской части СССР. Изв. АН СССР, сер. географ. и геофиз. № 4, 1938, стр. 371—398.
8. Зубов Н. Н. О путях заселения Гавайских островов и острова Пасхи. Изв. ВГО, т. 81, вып. 1, 1949, стр. 53—68.
9. Кленова М. В. Геология моря. М., 1948.
10. Ларионова А. Н. Гипсометрическая карта СССР в масштабе 1 : 2 500 000. Изв. ВГО, т. 84, вып. 4, 1952, стр. 416—418.
11. Назаров В. С. и Муромцев А. М. Океанография. М., 1954.
12. Панов Д. Г. Основные вопросы геоморфологии морского дна. Изв. ВГО, т. 71, вып. 7, 1939, стр. 1163—1179.
13. Панов Д. Г. Геоморфология моря, ее задачи и проблемы. Изв. ВГО, т. 80, 1943, стр. 3—15.
14. Панов Д. Г. Успехи картографии рельефа дна морей СССР. Изв. ВГО, т. 80, вып. 4, 1948, стр. 329—339.

¹ См., например, В. В. Белоусов «Применение батиметрического метода к изучению тектоники океанов» [3, стр. 506—509].

15. Панов Д. Г. Современные проблемы геоморфологии материков и дна Мирового океана. Материалы к 2-му съезду Геогр. Об-ва СССР. М., 1954.
16. Слепневский В. А. Практическая океанография. Л., 1954.
17. Уднцев Г. Б. Рельеф дна Охотского моря. Тр. Инст. Океанолог., т. XXII, 1957, стр. 1—76.
18. Шиллард Ф. Геология моря. М., 1951.
19. Шокальский Ю. М. Океанография. Пттр., 1917.
20. Шокальский Ю. М. Физическая океанография. Л., 1933.
21. Martonne E. Manuel pour les observations océanographiques a la mer. Commission Internationale pour l'exploration scientifique de la mer Méditerranée. Tome I, part III Venezia, 1932.
22. Shepard F. P. and Emery K. O. Submarine Topography of the California coast, canyons and tectonic interpretations. Bull. of the Geol. Soc. of America. Spec. Paper № 31, 1941.
23. Sverdrup H. U., Johnson M. W., Fleming H. F. The oceans N—J., 1942.
24. Thoulet J. Densité des sondages et véracité des cartes bathymétriques sous-marines. Annales de l'Institut Océanographique de Monaco, tome III, Fasc. I, 1911. Paris. p. 9—14.
25. Veath A. C. and Smith P. A. Atlantic submarine valleys of the United States and the Congo submarine valley. Bull. Geol. Soc. of America, Spec. paper, № 7, 1939.

В. И. РЯЗАНЦЕВ

МОРСКИЕ КАРТЫ С РАДИОЛОКАЦИОННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ МЕСТНОСТИ

Состояние вопроса

В настоящее время радиолокационные станции (РЛС) широко применяются в морской навигации почти во всех странах мира. Быстрое оснащение торговых судов радиолокационными станциями объясняется прежде всего способностью РЛС давать на экране изображение местности в виде плана. Простое сравнение этого рисунка с идентичным рисунком карты позволяет опознать свое место.

При непосредственном отождествлении идентичных точек на экране и карте возникают трудности, которые проистекают из того, что все местные предметы, независимо от их отличительных свойств (формы, цвета и пр.), обычно изображаются на экране РЛС светящимися точками (пятнами) или дужками, похожими друг на друга, а имеемое различие в их яркости на экране, в общем случае недостаточно, чтобы безошибочно определить объект по его изображению на экране. Поэтому при отождествлении объектов на карте и экране возникают ошибки, которые входят в измеренные по экрану РЛС расстояния или направления, а следовательно, и в определяемое место судна.

Стремление избавиться от этой ошибки и тем самым повысить точность определения места судна с помощью радиолокационных станций приводит к необходимости иметь карты, на которых были бы нанесены и соответствующим образом выделены все местные предметы, хорошо изображающиеся на экране при облучении их антенной РЛС. Другими словами, на карте необходимо иметь радиолокационные элементы местности.

Выполнить это можно двояко: путем впечатывания их на обычные навигационные карты или путем составления специальной карты.

За границей были применены оба указанных способа. Впоследствии, когда были подведены первые итоги по применению этих карт, то почти всюду пришли к выводу, что целесообразно иметь на судне две карты (специальную и навигационную), служащих в конечном итоге одной и той же цели. Поэтому было решено, что радиолокационные карты должны составляться на базе обычных навигационных карт.

Итак, в дальнейшем будем понимать под морскими радиолокационными картами обычные морские навигационные карты, на которых дополнительно показаны радиолокационные элементы местности и произведены некоторые изменения в изображении объектов суши. Иногда эти карты называют навигационно-радиолокационными.

Из этого определения видно, что нанесение на карту радиолокационных элементов местности не только не меняет ее навигационной сущности, но во многом обогащает ее, делая навигационную карту пригодной для обеспечения судовождения в любых условиях видимости и независимо от наличия на море навигационного ограждения.

Применение радиолокационных карт ограничивается лишь дальностью нахождения судна от берега, которая обычно не превышает 30 миль.

Поэтому морские радиолокационные карты предназначаются для обеспечения плавания вдоль берега, при подходе к берегу, прохода узкостей, входа в порты, гавани, на рейды.

Плавание в непосредственной близости от берега обеспечивается частыми картами, а вдоль берега на незначительном удалении от него, — путевыми картами. Отсюда наилучшими масштабами для морских радиолокационных карт считаются масштабы частных и путевых карт, т. е. от 1 : 25 000 до 1 : 300 000, а в некоторых случаях до 1 : 500 000 включительно.

Значение морских радиолокационных карт трудно переоценить. Достаточно указать, что на заседании Лондонского Института Навигации, происходившем в Королевском Географическом Обществе 17 июня 1955 года, со стороны Министерства Транспорта указывалось, что «радиолокационные карты могут также оказаться очень ценными при посещении судном неизвестного района. Они совершенно необходимы для военно-морских кораблей, рыболовных и спасательных судов, траулеров и т. д.»

В настоящее время радиолокационные карты разрабатываются во многих странах, причем уделяется большое внимание не только морским, но и речным картам.

В США разработкой радиолокационных карт занимается несколько организаций: «Береговая и Геодезическая съемка», «Инженерный Корпус», «Съемка Озер», «Гидрографическая Служба» и др. Указанные организации издают не только экспериментальные карты, но и выпускают целые серии их. Так, например, «Инженерный Корпус» составил на р. Огайо серию карт от Абердина до Кейро в количестве 124 штук, покрыв ими участок протяженностью в 300 км.

В Англии радиолокационные карты разрабатываются уже в течение ряда лет. В результате изданы карты № Р1607 (устье р. Темзы, 1946 г.), карта № 2649 (западная и восточная части Английского канала, 1949 г.), карта № 1826 (от м. Барроу-Хед до порта Ливерпуль, 1954 г.) и др.

Интересно отметить, что в объяснительной записке о бюджете военно-морского флота Англии на 1955—1956 гг. сказано: «адмиралтейские карты числом 3600 должны быть изменены для соответствия новым методам навигации с помощью радиолокатора и других радиосредств».

Кроме США и Англии, разработка радиолокационных карт производится во Франции, Италии, Греции Швеции и других странах.

Все это говорит о том, что потребность в издании радиолокационных карт стала для мореплавателя делом сегодняшнего дня.

Радиолокационное изображение

Излучаемая в пространство антенной РЛС электромагнитная энергия, отражаясь от местных предметов (рельефа, зданий, буев и пр.), принимается обратно через антенну приемником РЛС и после некоторого преобразования подается в виде падающего электронного потока на экран электронно-лучевой трубки. Экран электронно-лучевой трубки покрыт специальным люминофором, способным светиться от воздействия на него электронного потока. Поэтому в местах удара электронов происходит свечение зерен люминофора. Совокупность светящихся точек (пятен)

люминофора образует на экране видимый простым глазом рисунок, называемый радиолокационным изображением местности.

В картографической практике имеют значение следующие свойства радиолокационного изображения: повторяемость изображения, его линейность, проекция и возможность фотографирования.

Остановимся кратко на этих свойствах.

С началом применения радиолокационных станций в целях судовождения мореплаватели быстро заметили, что при облучении антенной РЛС одного и того же участка изображение в общем случае повторяется. Это сразу навело их на мысль делать зарисовки изображения и затем пользоваться ими при повторном посещении данного района.

В первый период считали, что радиолокационное изображение повторяется лишь в совершенно одинаковых условиях, т. е., если оно снова получено на экране той же станции, из той же точки и под тем же направлением.

Однако, как показывают исследования, это не совсем так. Существуют определенные районы, в границах которых радиолокационное изображение остается в общих чертах постоянным.

Более того, оно приблизительно остается постоянным, сохраняя свою форму даже и в том случае, если повторное изображение получено на экране другой станции, в других условиях.

Это важное положение хорошо подтверждается приведенными на стр. 138 photographиями устья р. Темзы, взятыми из [3].

На рис. 1 дано мозаичное радиолокационное изображение юго-восточной части Англии (устье р. Темзы), составленное из отдельных фотографий, а на рис. 2 дана фотография входа в р. Темзу. По поводу этих фотографий на упомянутой выше дискуссии в Королевском Географическом Обществе было сказано, что несмотря на то, что эти снимки были сделаны через 10 лет один после другого, причем второй снимок получен с другого судна, при другой радиолокационной установке и, возможно, в других условиях, не может быть сомнений, что сигналы, представленные на отдельной фотографии, можно узнать на общей составной фотографии. Эти фотографии показывают, что радиолокационные сигналы, как и человеческие лица, характерны и единственны в своем роде.

Следует обратить внимание, что на втором снимке отсутствует изображение бонов и хорошо виден ответный сигнал радиомаяка Танг. (Таг-бже).

Линейность развертки На экранах кругового обзора, которыми снабжаются радиолокационные станции, построение радиолокационного изображения происходит по линейному закону, т. е., чем дальше объект находится от судна, тем дальше от центра экрана (центра развертки) будет его изображение на экране.

Линейность развертки экрана РЛС обеспечивает построение радиолокационного изображения в определенном масштабе. В частном случае этот масштаб может быть равен масштабу навигационной карты.

Строго говоря, построение радиолокационного изображения происходит с нарушением линейности развертки. Однако это отступление, т. е. нелинейность развертки, незначительно и для картографической практики не имеет существенного значения.

Проекция. Как показывают исследования автора, радиолокационное изображение, получаемое на экране РЛС, строится по определенному закону, т. е. в определенной проекции.

Напомним, что радиолокационное изображение строится на поверхности сферического экрана разверткой, исходящей из его центра, путем вращения вокруг своей оси. Вследствие этого, направления, совпадающие с направлениями развертки, будут представлять собою большие



Рис. 2



Рис. 1

круги — вертикалы, а окружности, которые описывают точки, лежащие на развертке, при ее вращении — малые круги — альмукантараты. При этом мыслится, что центр развертки совмещен с точкой зенита.

При изображении на плоскости вид этих кривых будет: вертикалы — прямые, сходящиеся в одной точке, а альмукантараты — concentрические окружности с центром, совпадающим с точкой схождения вертикалов.

Как уже можно было заметить, положение любой точки в практике использования радиолокационного изображения определяется полярными координатами: азимутом A и радиус-вектором S .

Переход от плоских полярных координат к прямоугольным осуществляется по известным формулам:

$$\left. \begin{aligned} x &= S \cos A \\ y &= S \sin A \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

При этом начало координат помещается в точке схождения вертикалов, и за ось абсцисс берется одно из направлений развертки (вертикала), от которого отсчитывается угол A .

Если принять центр развертки за полюс нормальной системы координат, то расстояние S явится функцией от зенитного расстояния и тогда (1) с учетом масштаба μ_1 по вертикалу будет:

$$\left. \begin{aligned} x &= \mu_1 f(z) \cos A \\ y &= \mu_1 f(z) \sin A \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Характер проекции будет определяться в зависимости от характера функции $f(z)$. Так как радиолокационное изображение строится по линейному закону, то это дает нам право утверждать, что $f(z)$ есть линейная функция. А раз так, то масштаб по вертикалу будет постоянным, т. е. $\mu_1 = \text{const}$.

Итак, проекция радиолокационного изображения, получаемого на экране РЛС, является проекцией азимутальной, равнопромежуточной, в косом положении. Последнее видно из того, что за полюс нами взят центр развертки, находящийся между географическим полюсом и экватором.

Напомним, что азимутальная равнопромежуточная проекция в косом положении удобна для определения расстояний и азимутов из центра проекции (центра развертки) до любой точки карты, так как они в ней не искажаются.

Линейность функции $f(z)$ позволяет нам выразить дугу s в радиальной мере через радиус сферы и угол, т. е.

$$s = Rz;$$

тогда (2) будет:

$$\left. \begin{aligned} x &= \mu_1 Rz \cos A \\ y &= \mu_1 Rz \sin A \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Определим масштабы по главным направлениям. Как отмечалось выше, масштаб по вертикалу будет:

$$\mu_1 = k = \text{const.} \quad (4)$$

Масштаб по альмукантарату:

$$\mu_2 = \frac{\sqrt{G}}{r}, \quad (5)$$

где

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial A}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial A}\right)^2;$$

$$r = R \sin Z.$$

Частные производные $\frac{\partial x}{\partial A}$ и $\frac{\partial y}{\partial A}$ найдем из (3) с учетом (4), тогда

$$\frac{\partial x}{\partial A} = -kRZ \sin A;$$

$$\frac{\partial y}{\partial A} = kRZ \cos A$$

Возводя в квадрат, а затем складывая и извлекая корень, получим:

$$\sqrt{G} = kRZ. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5), получим:

$$\mu_2 = \frac{kz}{\sin z} \cong k \left(1 + \frac{z^2}{6} + \dots\right) \quad (7)$$

Масштаб площади ρ будет:

$$\rho = \mu_2 \mu_1 = \frac{k^2 z}{\sin z}. \quad (8)$$

Искажение углов:

$$\sin \omega = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \cong \frac{1 + \frac{z^2}{6} + \dots - 1}{1 + \frac{z^2}{6} + \dots + 1} \quad (9)$$

Итак, формулы проекции радиолокационного изображения будут.

$$\delta = A;$$

$$\rho = \mu_1 R z \text{ при } z_n = 0;$$

$$x = \mu_1 R z \cos A;$$

$$y = \mu_1 R z \sin A;$$

$$\mu_1 = k = \text{const};$$

$$\mu_2 = \frac{kz}{\sin z} \cong k \left(1 + \frac{z^2}{6} + \dots\right);$$

$$\rho = \frac{k^2 z}{\sin z};$$

$$\sin \omega = \frac{z - \sin z}{z + \sin z} \cong \frac{1 + \frac{z^2}{6} + \dots - 1}{1 + \frac{z^2}{6} + \dots + 1}.$$

Подсчитаем по форм. (7) максимальное искажение на границе сегмента, ограниченного максимальной дальностью РЛС в 30 миль, т. е. для $z = 30'$, тогда при $\mu_1 = k = 1$ получим:

$$\mu_2 = \frac{30' \text{ arc } 1'}{\sin 30'} = 1,0000.$$

Из этого видно, что искажения вдоль альмукантаратов, и, как выше было показано, вдоль вертикалов, т. е. по главным направлениям, отсутствуют.

Посмотрим, каковы искажения в произвольном направлении. Для этого получим масштаб по любому направлению. Возьмем на местности произвольную точку M и проведем через нее две дуги большого круга ML_1 и ML_2 под азимутом A .

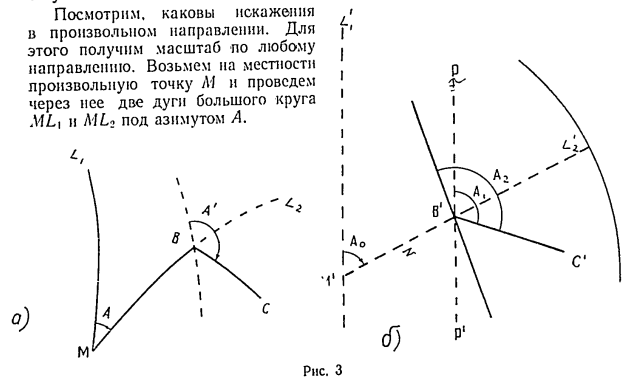


Рис. 3

Точке M местности пусть соответствует центр снимка M' (место судна), а дугам больших кругов — прямые вертикалы $M'L_1$ и $M'L_2$, пересекающиеся под углом $A_0 - A$ (рис. 3б).

Возьмем далее на местности произвольное направление BC , под произвольным азимутом A' . На снимке этому отрезку будет соответствовать отрезок $B'C'$ под азимутом A_2A' .

Проведем через точку B' координатную линию $PP' \parallel M'L_1$ и обозначим угол между этой линией и направлением $B'C'$ через A_1 .

Для вывода формулы увеличения масштаба «с» по любому направлению $B'C'$ воспользуемся формулой, приведенной в курсе картографии А. П. Ющенко, а именно:

$$c^2 = m^2 \cos^2 A_1 + 2mn \cos \psi \cos A_1 \sin A_1 + n^2 \sin^2 A_1, \quad (10)$$

где m и n — масштабы по меридиану и параллели соответственно;

ψ — угол между меридианом и параллелью;

A_1 — угол между направлением и координатной линией (рис. 3б).

В азимутальной равнопромежуточной проекции в косом положении мы имеем дело с сеткой, образованной вертикалами и альмукантаратами, пересекающимися под прямым углом, т. е. $\psi = 90^\circ$.

Учитывая это и обозначая, как и ранее, через μ_1 — масштаб по вертикали, а через μ_2 — масштаб по альмукантарату, перепишем (10) в виде:

$$c^2 = \mu_1^2 \cos^2 A_1 + \mu_2^2 \sin^2 A_1. \quad (11)$$

Или с учетом (4) и (7), принимая $k = 1$, получим окончательно:

$$c^2 = \cos^2 A_1 + \left(1 + \frac{z^2}{6} + \dots\right) \sin^2 A_1. \quad (12)$$

Из форм. (12) видно, что увеличение масштаба по любому направлению отличается от единицы на величину $\frac{z^2}{6}$. Максимальное значение этой величины на краю изображаемой территории получим, если возьмем обычную максимальную дальность РЛС 30 миль, что соответствует $z = 30'$.

Тогда:

$$\frac{z^2}{6} = \frac{30'^2}{6 \cdot 3438'^2} \approx \frac{1}{80000}.$$

Из этого видно, что искажение масштаба в любом направлении незначительно. Поэтому при решении практических задач можно считать, что изображение, получаемое на экране РЛС, подобно местности, т. е. является плановым изображением, хотя, строго говоря, это и не так.

Для вычисления масштаба по любому направлению по форм. (12) необходимо знать угол A_1 . Выразим его через азимут A_2 . Для этого снова обратимся к указанному труду А. П. Ющенко.

Имеем

$$\operatorname{tg} A_2 = \frac{n \sin \psi \operatorname{tg} A_1}{m + n \cos \psi \operatorname{tg} A_1}, \quad (13)$$

где A_2 — азимут, снимаемый с карт.

Для нашего случая с учетом выше сказанного будем иметь:

$$\operatorname{tg} A_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1} \operatorname{tg} A_1 \quad (14)$$

или

$$\operatorname{tg} A_1 = \frac{\mu_1}{\mu_2} \operatorname{tg} A_2. \quad (15)$$

Учитывая (4) и (7), получим окончательно

$$\operatorname{tg} A_1 = \frac{1}{1 + \frac{z^2}{6}} \operatorname{tg} A_2. \quad (16)$$

Следует иметь в виду, что при вычислении увеличения масштаба по любому направлению по формуле (12) мы получаем увеличение масштаба для начальной точки B' , а не для всех точек взятого направления $B'C'$.

Для получения масштаба, характеризующего весь отрезок $B'C'$, необходимо точку, до которой мы измеряем зенитное расстояние, брать не в начале направления, а в его середине и до нее измерять z или, что то же самое, провести через нее альмукантарат, который пересечется с радиус-вектором, проходящим через точку B в какой-то точке, и до этой точки измерить зенитное расстояние.

Как было указано выше, в полученной проекции вертикалы совпадают с радиус-вектором (разверткой), а альмукантараты — концентрические окружности, являющиеся на местности малыми кругами.

В проекции Меркатора малые круги изображаются особыми кривыми, носящими название циклических кривых.

Напомним, что различают три вида циклических кривых: первый вид — круги не включают полюсов; второй вид — круги разделяют полюса и третий вид — круги проходят через один из полюсов.

Поскольку мы ограничены дальностью РЛС в 30 миль и практически ближе этого расстояния от полюсов находиться не будем, то поэтому нас будут интересовать только кривые первого вида.

Как показал Гюйю, построение циклических кривых на картах в проекции Меркатора можно заменить построением эллипсов, имеющих те же оси, или еще проще, построением концентрических кругов с диаметрами равными большой полуоси циклических кривых.

Аналитически это выражено:

для круга

$$\delta_{окр} = -\frac{a^2}{6} \sin^2 \varphi; \quad (17)$$

для эллипса

$$\delta_{эл} = \frac{a^5}{360} \sin^2 2\varphi, \quad (18)$$

где φ — угол, образуемый радиус-вектором в рассматриваемой точке с меридианом;

a — большая полуось циклической кривой.

Для морских карт удобно за единицу длины взять длину одной минуты экватора (милю), тогда формулы (17) и (18) перепишутся в таком виде:

$$\delta_{окр} = -\frac{a'^3 \sin^2 \varphi}{6\rho'^2}; \quad (17')$$

$$\delta_{эл} = \frac{a'^5 \sin^2 2\varphi}{360\rho'^4}. \quad (18')$$

Поскольку циклическая кривая ближе подходит к эллипсу, чем к кругу, мы в дальнейшем ограничимся рассмотрением лишь форм. (17), тем более, что круг легче провести, чем эллипс.

Максимальное допустимое расстояние, при котором циклическую кривую можно заменить кругом, будет при $\varphi = 90^\circ$; тогда, опуская знак

$$\delta_{max} = \frac{a'^3}{6\rho'^2}. \quad (17'')$$

Вводя масштаб $M = \frac{1}{m}$ и ограничивая ошибку δ графической точностью масштаба, т. е. $\delta \leq 0,2$ мм, или 10^{-7} экваториальных минут, из (17) получим

$$a' \leq \sqrt[3]{6 \cdot 10^{-7} \rho'^2 m}. \quad (19)$$

Но, как видно из рис. 4, на экваторе ввиду отсутствия искажений можно считать

$$a = b = s_0.$$

Тогда из (19) с учетом выше сказанного

$$S_0 < \sqrt[3]{6 \cdot 10^{-7} \rho^2 m}. \quad (20)$$

Величина $S_0 > S_1 > S_2 \dots < S_r$.

Определим S_i
Из сферического треугольника APB

$$\frac{\sin S_i}{\sin \theta} = \frac{\sin(90^\circ - \varphi_a)}{\sin B}.$$

Но так как меридиан PD проведен так, что он касается круга в точке B , то, следовательно, угол $ABP = 90^\circ$.

Тогда

$$\sin S_i = \sin \theta \cos \varphi_a$$

или

$$\sin S_i = \cos \varphi_a \sin S_0. \quad (21)$$

Ввиду небольших величин S_i и S_0 разложим в ряд (21)

$$S_i - \frac{S_i^3}{6\rho^2} = \left(S_0 - \frac{S_0^3}{6\rho^2} \right) \cos \varphi_a$$

или

$$S_i = S_0 \cos \varphi_a - \frac{S_0^3}{6\rho^2} \cos \varphi_a + \frac{S_i^3}{6\rho^2}$$

Заменим S_i^3 приближенным его значением $(S_0 \cos \varphi_a)^3$; тогда

$$S_i = S_0 \cos \varphi_a - \frac{S_0^3}{6\rho^2} \cos \varphi_a + \frac{S_0^3 \cos^3 \varphi_a}{6\rho^2}$$

или

$$S_i = S_0 \cos \varphi_a - \frac{S_0^3}{6\rho^2} \cos \varphi_a \sin^2 \varphi_a. \quad (22)$$

Для практических целей вполне достаточно ограничиться первым членом разложения, тогда

$$S_i \cong S_0 \cos \varphi_a. \quad (23)$$

Подсчитаем величину второго члена

$$\Delta = \frac{S_0^3}{6\rho^2} \cos \varphi_a \sin^2 \varphi_a$$

или с учетом форм. (20)

$$\Delta = \frac{6 \cdot 10^{-7} \rho^2 m}{6\rho^2} \cos \varphi_a \sin^2 \varphi_a = 10^{-7} m \cos \varphi_a \sin^2 \varphi_a$$

При $\varphi_a = 60^\circ$ (Балтийское море), и $M = 1 : 100\,000$

$$\Delta = 0,004.$$

Мы получили величину, не имеющую практического значения.

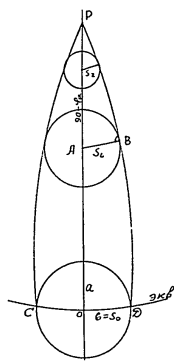


Рис. 4

Вычислим по форм. (20) S_0 для масштабов, в которых возможны морские карты с радиолокационным изображением местности (табл. 1).

Итак, предельное расстояние, при котором можно заменять циклическую кривую окружностью для любой точки, получим умножая S_0 на косинус широты данной точки.

Предлагаемый способ намного проще и быстрее чем отыскание этих расстояний с помощью таблиц меридиональных частей. Величины S для широт места, кратных 5° , можно выбрать из табл. 2.

Заметим, что для отечественных морей Черного и практически Балтийского, начиная с масштаба $1 : 50\,000$ и мельче, можно на всех дальностях КРЛС заменять циклические кривые окружностями с ошибкой, не выходящей за пределы графической точности масштаба.

Для северных морей и морей Дальнего Востока надо учитывать широту места.

Таблица 1

Масштабы	S'_0
1:25 000	26
1:50 000	69
1:100 000	90
1:200 000	112
1:300 000	129
1:400 000	141
1:500 000	153

Таблица 2

Широта	Масштабы карт						
	1:25 000	1:50 000	1:100 000	1:200 000	1:300 000	1:400 000	1:500 000
30°	23,0	61,0	80'	99'	114'	125'	136'
35	21,5	56,5	74	92	105	116	125
40	20,0	53,0	69	86	99	108	117
45	18,5	49,0	64	79	91	100	108
50	16,5	44,5	58	72	83	91	98
55	15,0	39,5	52	64	74	81	88
60	13,0	34,5	45	56	64	70	76
65	11,0	29,0	38	47	55	60	65
70	9,0	23,5	31	38	44	48	52
75	7,0	18,0	23	29	33	36	40
80	4,5	12,0	16	19	22	24	27
85	2,0	6,0	8	10	11	12	13

Фотографирование

Фотографирование радиолокационного изображения основано на свойстве экрана РЛС сохранять световой эффект в течение некоторого промежутка времени после прохождения луча антенны через данный предмет. Это свойство экранов называют послесвечением.

Продолжительность послесвечения различна для разных экранов. Обычно оно сохраняется в течение времени, необходимого для полного оборота антенны.

Послесвечение создает возможность видеть одновременно всю окружающую судию обстановку и тем самым зафиксировать ее на светочувствительную пленку.

Что же касается непосредственного фотографирования, то оно может осуществляться различными любительскими фотоаппаратами на обычные светочувствительные слои.

Содержание карт

Как уже ранее говорилось, радиолокационные карты представляют собой обычные морские навигационные карты. Поэтому содержание их в основном остается идентичным содержанию навигационных карт.

Различие здесь состоит, во-первых, в наличии на радиолокационных картах радиолокационных элементов местности, а во-вторых, в несколько иной степени показа элементов суши (побережья), чем это принято на обычных морских навигационных картах.

Радиолокационные элементы местности составляют прежде всего радиолокационные ориентиры или группы ориентиров.

К радиолокационным ориентирам относят все объекты, которые изображаются на экране в виде точки (пятна) при облучении их антенной РЛС. Указанные объекты или вновь наносят на карты или, если они были нанесены ранее, поднимают.

Обычно эти объекты заключаются в кружки и овалы красного или коричневого цвета. Так, например, на радиолокационной карте № 2649 (Англия) радиолокационные ориентиры показаны на карте малым кружком, заключенным в овал красного цвета, причем рядом с ориентиром подписывается пеленг, под которым данный ориентир усматривается с моря.

На карту помещаются как постоянные ориентиры, изображение которых на экране РЛС видно в любых условиях, так и эпизодические, которые видны на экране только при определенных условиях.

Последнее обстоятельство, по всей вероятности, послужило причиной тому, что на указанной выше дискуссии в Английском Королевском Географическом Обществе (17 июня 1955 г.) было высказано мнение, что при пользовании радиолокационными станциями необходимо отказаться от одиночных навигационных знаков и пользоваться группами знаков, радиомаяками или растянутыми объектами вроде береговой линии. Тем не менее радиолокационные ориентиры наносятся и на других образцах радиолокационных карт, в частности, на американских (карта № 6102) и др.

Вторым, не менее важным, радиолокационным элементом являются объекты, имеющие протяженность, такие, как береговая линия.

Изображению береговой линии на радиолокационных картах уделяется особое внимание.

Еще при обсуждении карты № 2649 (Лондонский Институт Навигации, 1949 г.) было замечено, что с удалением судна от берега береговая линия, изображаемая на экране, будет соответствовать определенной горизонтали, лежащей над горизонтом радиолокационной видимости. Так, например, острова Силли видны на экране с расстояния 12 миль, хотя вершина горы Сент-Мерис могла бы быть видна с расстояния вдвое большего. С другой стороны, 200-футовая горизонталь утесистого берега острова Гернсей (Нормандские острова) хорошо изображается с расстояния 24 мили, что очень важно при подходе к берегу, если вспомнить, что дальность современных навигационных РЛС 30 миль. Ввиду этого, на дискуссии было заявлено, что «200-футовая горизонталь становится «береговой линией подхода».

Много позже, на дискуссии (1955 г.), при обсуждении радиолокационной карты № 1826 с новой силой было обращено внимание на важность

изображения береговой линии. Так, представителем навигационной школы Миччелем было подчеркнуто, что на карте № 1826 «две наиболее важные черты — береговая линия и горизонталь, соответствующая 200 фут. Береговая линия в пределах 10 миль от берега будет хорошо изображаться на экране радиолокатора, а 200-футовая горизонталь обнаруживается на расстоянии до 26 миль при высоте антенны 50 фут.»

К сказанному следует добавить, что для повышения точности определения места судна можно на дистанции до 30 миль выбрать не две береговые линии (обычную и радиолокационную), как на карте № 1826, а больше, с тем, чтобы при переходе с одной линии на другую ошибка не превышала графической точности масштаба.

Итак, радиолокационное содержание морских радиолокационных карт составляют радиолокационные ориентиры или группы ориентиров, изображающиеся на экране РЛС постоянно или эпизодически (при определенных условиях), и радиолокационная береговая линия, которая может совпадать с определенной изобатой (Англия).

Обычно радиолокационное содержание карт впечатывается в морскую карту цветной тушью (красной или коричневой). Однако нередки случаи, когда радиолокационное содержание наносится на флуоресцирующей бумаге (радиолокационные карты на р. Огайо, США), или на обычную бумагу светящимися красками (радиолокационные карты на р. Санта-Мэрис, США). Такой рисунок не виден при дневном свете, но при облучении его ультрафиолетовой лампой радиолокационный рисунок приобретает зеленоватый цвет (подобно цвету на экране) и хорошо виден.

Кроме того, в США были изданы и специальные радиолокационные карты, так называемые «белым по черному». Прибрежные районы ориентиров показаны крестообразными штрихами, а приметные для РЛС элементы показаны кружочками. Из географических элементов на карте дан лишь рельеф в 3-мильной прибрежной полосе.

Этот тип карт широкого распространения не получил. При изображении элементов суши (побережья), как уже частично указывалось, исходят из того, чтобы радиолокационные элементы местности как можно четче выделялись на карте. Ввиду этого большое внимание придается рельефу суши.

Почти на всех без исключения образцах радиолокационных карт, изданных за границей, рельеф показывается горизонталями.

На первых образцах радиолокационных карт в Англии горизонтали сопровождались большим числом высотных отметок, и к тому же давалась последняя раскраска коричневым цветом ступенями через 50 фут. (карта № P1607, устье р. Темзы, 1946 г.).

При издании следующего образца радиолокационной карты № 2649 (западная и восточная часть Английского канала, 1949 г.) рельеф был изображен горизонталями, без последней раскраски, но с утолщением горизонталей с южной и восточной стороны. При втором издании этой карты (1952 г.) снова дана последняя раскраска ступенями через 400 фут. Наконец, на радиолокационной карте № 1826 (от мыса Барроу-400 фут. Хед до порта Ливерпуль), по которой состоялась дискуссия в 1955 г., высоты рельефа показаны слоями двух цветов: от 200 до 600 фут. светло-красным и свыше 600 фут. — темно-красным.

Последнюю раскраску рельефа суши мы находим также на радиолокационных картах, издаваемых в США, Греции и других государствах.

Однако следует отметить, что твердо установившегося мнения на этот счет нет.

Так, на той же дискуссии в Английском Королевском Географическом Обществе было высказано и другое мнение, а именно, что последняя раскраска рельефа имеет свои недостатки, заключающиеся в том, что она

недостаточно отражает детали, создает впечатление, что высота сама есть источник сигналов, не показывает наклон местности.

Причина этого, на наш взгляд, кроется в том, что отражение электромагнитной энергии идет непрерывно, от каждой точки местности, а не от каждой ступени рельефа, как это показано на карте. Поэтому, отождествление точек местности с соответствующим изображением их на экране при послышной раскраске не облегчается. Однако, если ступени для раскраски рельефа устанавливать не произвольно, а в зависимости от удаления судна от берега, т. е. в зависимости от степени изменения характера радиолокационного изображения, то такая раскраска будет иметь смысл. В противном случае предпочтительнее другие методы, как например, выделение на карте склонов, обращенных в сторону моря.

Кроме сказанного, на многих радиолокационных картах выделяются отдельные скалы (обрывы), вершины гор, холмов и пр., от которых чаще всего можно ожидать отраженные импульсы.

Остальные элементы на берегу даются с меньшей подробностью. Так, населенные пункты даются с разрядкой и изображаются на радиолокационных картах общим контуром. Однако отдельные постройки, видимые с моря, показываются со всей подробностью, так как они могут дать отраженные импульсы. Гидрографическая и дорожная сеть дается основными магистральями, уголья опускаются вовсе и т. д.

Оформление радиолокационных карт почти не отличается от оформления обычных навигационных карт. Дополнительно на радиолокационных картах показываются фотографии, на которых нанесена градусная сетка, всякого рода таблицы. Например, на радиолокационных картах, изданных в США, Англии, Греции и в других странах помещены таблицы дальности радиолокационной видимости, приливов и др.

Заключение

В течение всего послевоенного периода во многих странах продолжалась разработка радиолокационных карт. При этом наибольшее распространение получили исследования по приспособлению существующих карт к нуждам морской радиолокации, хотя вместе с этим разрабатывались и специальные радиолокационные карты.

Следует отметить, что до сих пор проблема разработки радиолокационных карт еще полностью не решена. Об этом, в частности, говорится в статье начальника Гидрографической службы США Ф. А. Сталдса, опубликованной в 1955 г. в Гидрографическом бюллетене Международного Гидрографического Бюро. Тем не менее нельзя отрицать того факта, что во многих странах собран значительный материал по радиолокационному изучению морских побережий и, несомненно, полученные данные могут быть с успехом использованы как при составлении карт, так и при составлении специальных разделов лоций и других пособий.

Недостаточное распространение карт с радиолокационным изображением местности, несмотря на их продолжительную разработку, говорит о трудности решения данной проблемы. Тем не менее можно утверждать, что к окончательному решению этого сложного вопроса ведут два пути накопление материала в результате производства радиолокационной съемки побережий и разработка методов, позволяющих наносить радиолокационные элементы местности на карты камеральным путем.

Первый путь является наиболее простым. Однако большой объем съемочных работ, который при этом становится неизбежным, а также недоступность некоторых районов для радиолокационной съемки ограничивает его применение и делает его рентабельным лишь для небольших участков моря.

Второй путь — камерального нанесения радиолокационного изображения на карты сулит неисчерпаемые возможности и уже по одному этому имеет исключительное значение. Разрабатываемая при этом методика, по-видимому, должна базироваться на установлении математической зависимости между дистанцией корабля от берега и высотой побережья, причем зависимость эта, вероятней всего, должна быть логарифмической.

При разработке камеральных методов составления радиолокационных карт необходимо применение аэрометодов в сочетании с дешифрированием радиолокационного изображения (формы, плотности и т. п.).

Создание специальных радиолокационных карт или только нанесение радиолокационных элементов местности на обычные морские навигационные карты на все районы морей вряд ли целесообразно.

Лучшим решением, по-видимому, будет составление радиолокационных карт на районы, важные в навигационном и оперативном отношениях (узкости, подходы к портам, к рейдам, места высадки десантов и пр.).

Что же касается лоций, содержащих разделы радиолокационного описания побережий, то указанные выше районы для составления радиолокационных карт, по-видимому, могут быть расширены.

Литература

1. А. П. Ющенко. Картография. Издательство Главсевморпути, Ленинград, 1953 г.
2. Записки по гидрографии. Выпуск XXV, 1903 г.
3. The Journal of the Institute of Navigation, т. 8, № 4, 1955 г.
4. Rewe Hydrographique Internationale, т. XIX, № 1, май 1952 г.

С. Т. ЗАЙКИН

О ТАБЛИЦАХ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ СЕТОК ГИПЕРБОЛ НА НАВИГАЦИОННЫХ КАРТАХ

При определении места корабля по гиперболическим радионавигационным системам измеряемые разности расстояний от корабля до береговых радиостанций (задающей и двух отражающих) являются функциями координат определяемой точки, а получаемые при этом изолинии являются гиперболами.

Аналитическое совместное решение двух уравнений гипербол представляет собой значительные трудности, поэтому для получения координат места корабля при определениях на значительных расстояниях от береговых радиостанций (свыше 200 миль) применяют вычислительно-графический метод. Этот метод заключается в том, что на навигационных картах, принимая местоположение береговых радиостанций за фокусы, заранее рассчитывают и строят два семейства софокусных гипербол. При определении места корабля по измеренным разностям расстояний находят точку пересечения соответствующих гипербол.

Из существующих способов построения сеток гипербол заслуживает внимания так называемый «прямой способ» [3], [7]. Гиперболы при этом способе построения проводятся по точкам, координаты которых находятся из решения уравнений гипербол в полярных или прямоугольных сферических координатах. Однако и этот способ является громоздким и трудоемким.

По существующим уравнениям гипербол не представляется возможным составить таблицы для облегчения вычислений, так как в них, помимо искомого координат, являются переменными в общем случае координаты береговых станций и разность расстояний.

В настоящей статье дан вывод уравнения гиперболы в косоугольной системе сферических координат, по которому можно будет составить таблицы и тем самым облегчить задачу по вычислению координат точек гиперболы.

На рис 1 точка P — географический полюс;
 точка Q — полюс косоугольной системы;
 φ_0, λ_0 — географические координаты точки Q ;

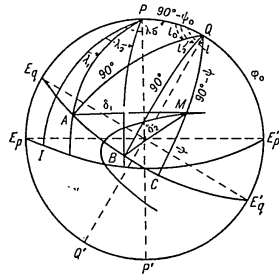


Рис 1

$\psi_1, l_1; \psi_2, l_2; \psi, l$ — сферические координаты (широты и долготы в косоугольной системе координат), соответственно точек A, B и M ;

$E_p E_q$ — дуга большого круга, проходящая через точки A и B (наибольший альмукантарат, являющийся экватором косоугольной системы);

σ_1, σ_2 — дуги больших кругов, проходящие через точку M на гиперболе и фокусы A и B (береговые радиостанции) гиперболы.

Обозначим

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 2\delta; \quad \sigma_1 - \sigma_2 = 2\alpha;$$

$$\frac{l_1 + l_2}{2} = \eta; \quad \frac{l_1 - l_2}{2} = \xi;$$

Из сферических «прямоугольных» треугольников AQM и BQM находим:

$$\cos \sigma_1 = \cos(l - l_1) \cos \psi;$$

$$\cos \sigma_2 = \cos(l - l_2) \cos \psi.$$

Образум полусумму

$$\frac{1}{2} (\cos \sigma_1 + \cos \sigma_2) = \cos \delta \cos \alpha = \frac{1}{2} [\cos(l - l_1) + \cos(l - l_2)] \cos \psi = \cos(l - \eta) \cos \xi \cos \psi;$$

отсюда

$$\cos^2 \delta = \frac{\cos^2(l - \eta) \cos^2 \xi \cos^2 \psi}{\cos^2 \alpha} \quad (1)$$

С другой стороны, образовав полуразность $\frac{1}{2} (\cos \sigma_1 - \cos \sigma_2)$, будем иметь

$$-\sin \delta = \frac{\sin(l - \eta) \sin \xi \cos \psi}{\sin \alpha}$$

или

$$\cos^2 \delta = \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \xi \sin^2(l - \eta) \cos^2 \psi}{\sin^2 \alpha} \quad (2)$$

Разделив равенство (2) на равенство (1), после простых преобразований получим:

$$\sin^2(l - \eta) = \frac{\cos^2 \alpha \sec^2 \psi - \cos^2 \xi}{\sin^2 \xi \operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \xi} \quad (3)$$

где ψ, l — текущие сферические координаты гиперболы;
 η, ξ — полусумма и полуразность долгот береговых радиостанций;
 α — полуразность расстояний от точки M до точек A и B .

Уравнение гиперболы (3) характерно тем, что оно зависит от полуразности долгот ξ и непосредственно не зависит от координат береговых радиостанций. Это является его существенным преимуществом перед другими существующими уравнениями сферических гипербол, так как позволяет по аргументам ξ, ψ и α составить таблицы для вычисления координат точек гипербол независимо от координат береговых станций.

Промежутки между значениями ψ будут зависеть от масштабов карт, на которых строится сетка, и при составлении таблиц должны быть взяты такими, чтобы обеспечить достаточную густоту точек для проведения гипербол.

Промежутки между значениями α зависят от расстояний между соседними береговыми радиостанциями, от длин радиоволн, посылаемых ими, и должны быть взяты такими, чтобы обеспечить достаточную густоту сетки для определения места корабля.

При таком условии интерполирование при пользовании таблицами будет производиться всего лишь по одному аргументу ξ .

Промежутки между значениями ξ , очевидно, должны обеспечить линейное интерполирование, причем, чем больше расстояния определяемых мест корабля от береговых радиостанций, тем меньше должны быть эти промежутки.

Предлагаемые таблицы рекомендуется составить в следующем виде:

$$\xi = 30'$$

$\alpha \setminus \psi$	20'	Δ	30'	Δ	40'	Δ	50'	Δ
15'	18'55"0	0,258	22'53,8	0,501	27'32,0	0,783	32'26,5	1,05
16'								

$$\xi = 31'$$

$\alpha \setminus \psi$	20'	Δ	30'	Δ	40'	Δ	50'	Δ
15'	18'39,5	0,258	22'23,0	0,501	26'45,0	0,783	31'23,0	1,05
16'								

В таблице Δ означает изменение величины $(l - \eta)$ при изменении ξ на $1''$ и для контроля может вычисляться по форм. (4), полученной из дифференцирования уравнения (3)

$$\Delta = - \frac{2 \operatorname{ctg}^2 \alpha \operatorname{ctg} \xi \operatorname{tg}^2 \psi \Delta \xi''}{\sin^2 (l - \eta) \sin^2 \xi (\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \xi)''} \quad (4)$$

Профессор А. П. Ющенко в своем труде «Картография» [1] отмечает то большое практическое значение, которое имеет применение косых проекций для составления навигационных морских карт и полетных карт полярных областей, где меркаторская проекция становится непригодной.

Наличие таблиц, составленных по уравнению (3), в значительной мере облегчит построение сеток гипербол на таких картах.

Применение карт, составленных в косой равноугольной цилиндрической проекции для целей навигации в северных морях Советского Союза, и указанных таблиц даст возможность судоводителю получать место корабля и без построения сеток гипербол. Для этого, зная полуразность

долгот береговых станций ξ , со счислимой широтой $\psi_{сч}$ и измеренной полуразностью расстояний α следует войти в таблицы и найти значение l , а затем по измененной счислимой широте $\psi'_{сч}$ из таблиц выбрать значение l' . Прямая, соединяющая полученные точки на карте, будет являться линией положения. Аналогичным образом следует получить вторую линию положения. Точка пересечения линий положения будет являться обсервованным местом корабля.

Следует заметить, что в косой системе сферических координат упрощается задача вычисления координат места корабля, определенного по расстояниям до береговых станций.

Это упрощение может быть достигнуто благодаря составлению таблиц по аргументам ξ , α_1 , α_2 по форм. (5), которые легко получить из уравнений (1) и (2).

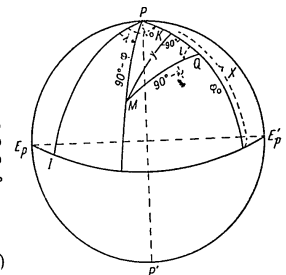


Рис 2

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 \psi &= \frac{\sin^2 \xi \sin^2 \alpha}{\sin^2 \xi} - \frac{\cos^2 \xi \cos^2 \alpha}{\cos^2 \xi} \\ \sin^2 (l - l') &= \frac{\cos^2 \psi - \cos^2 \alpha_1}{\cos^2 \psi} \end{aligned} \right\} (5)$$

При построении сеток гипербол на меркаторской карте после нахождения по таблицам координат ψ и l точки гиперболы надлежит сделать переход к географическим координатам φ и λ . Формулы перехода получаются из решения прямоугольных сферических треугольников QMK и PMK (рис. 2).

$$\left. \begin{aligned} \sin y &= \cos \varphi \sin l \\ \operatorname{tg} (x - \varphi_0) &= \operatorname{ctg} \psi \cos l \\ \sin \varphi &= \cos y \sin x \\ \sin (\lambda_0 - \lambda) &= \sin y \sec \varphi \end{aligned} \right\} (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi &= \cos y \sin x \\ \sin (\lambda_0 - \lambda) &= \sin y \sec \varphi \end{aligned} \right\} (7)$$

Чтобы упростить и ускорить переход от сферических координат к географическим по уравнению (6) можно составить таблицы, аналогичные табл. 14 «Картографических таблиц ЦНИИГАиК» [5].

Во всех указанных случаях вычисления координат точек гипербол необходимо знать географические координаты λ_0 , φ_0 полюса Q косой системы и долготы l береговых станций в косой системе сферических координат, которые вычисляются по простым общезвестным формулам [2], [6].

Сфероничность земли наиболее просто может быть учтена способом, предложенным В. Е. Ольховским [4].

Использованная литература

1. А. П. Ющенко. Картография. Главсевморпуть, Л. и М., 1953 г.
2. М. Д. Соловьев. Картографические проекции. Геодезиздат, М., 1946 г.
3. Делонг. Теория построения гиперболических сеток. Реферативный журнал. Астрономия, геодезия № 8 АН СССР, М., 1955 г.

4. В. Е. Ольховский. Учет сжатия Земли при решении некоторых навигационных задач. Ученые записки ВАМУ им. адм. Макарова, Выпуск IV, Главсевморпуть, Л. и М., 1953 г.
5. Картографические таблицы. Труды ЦНИИГАиК, Вып. 97, Геодезиздат, М., 1953 г.
6. М. Д. Соловьев — Практическое пособие по математической картографии Геодезиздат, М., 1952 г.
7. Loran, Massachusetts Institute of technology Radiation Laboratory. Series 4, New York, 1948.
8. D. H. Sadler. The construction of Hyperbolic Lattices. The Journal of the Institute of Navigation, vol. IV, № 3, July 1951, London.

А. Г. ДУРОВ

РУССКИЕ ГЕОГРАФИЧЕСКИЕ НАЗВАНИЯ В ТИХОМ ОКЕАНЕ,
НА ТЕРРИТОРИИ АЛЯСКИ И АЛЕУТСКИХ ОСТРОВОВ

Русские мореплаватели имеют большие заслуги в деле открытия и изучения новых земель. Кругосветные путешествия русских моряков обогатили не только русскую, но и мировую науку. Русские путешественники открыли и изучили северо-западное побережье Северной Америки, Алеутские острова, многочисленные острова в Тихом океане. Им принадлежит честь открытия материка Антарктиды и целого ряда островов в Антарктике.

Вопросы истории русских географических открытий и восстановление их приоритета занимают важное место в числе проблем, разрабатываемых советской исторической и географической наукой.

Следует заметить, что приоритет русских географических открытий сознательно замалчивается или прямо искажается буржуазными историками. В тех же случаях, когда они упоминают о русских географических открытиях, то стараются отвести им минимальное место. Подтверждением этого вывода служат многие книги, изданные в США и Англии.

Так, например, в книге Аусвейт, (в русском переводе Л. Аусвейт «Как открывали земной шар». М.-Л., 1939 г.) о русских открытиях в Северо-Западной Америке сказано всего лишь несколько слов. В книге Бейкера «A history of Geographical discovery and exploration. By YNL Baker», London, 1945 (в русском переводе Д. Бейкер «История географических открытий и исследований» М., 1950 г автор ничего не говорит о русских плаваниях и открытиях в Тихом океане, хотя именно эта книга, больше, чем какие-либо другие, объективна в оценке русских открытий и исследований).

Страдает отсутствием объективности и американский справочник, посвященный наименованиям в Антарктике «The geographical names of Antarctica»,¹ хотя авторы справочника и заявили, что они были объективны при его составлении. Об экспедиции Беллинсгаузена и Лазарева, открывшей материк Антарктиду, сказано лишь несколько слов, причем нигде не подчеркивается, что именно русская антарктическая экспедиция сделала это открытие. Ничего не сказано об открытии русской экспедицией антарктических островов. В справочнике дано лишь 6 русских географических названий. При составлении справочника не были использованы отчеты Беллинсгаузена, не упоминаются они также в списке литературы по Антарктике.

¹ Special publication 86 Department of the interior US Board on geographical names. Washington, May 1947 Supplement N/August, 1949, Supplement n2, April, 1951.

Недооценка русских географических исследований и открытий наблюдается также и во многих иностранных картографических произведениях, так например:

1) The Times Atlas gazetteer of the World», стр. 102, в группе островов Туамоту — не дает ни одного русского названия, хотя масштаб карты вполне позволяет дать ряд русских географических названий островов в этой группе;

2) Atlas historique et géographique Vidal-Lablache. Paris. Л. 58—59, на карте Океании, кроме подписи о. Лисянский, нет ни одного русского названия; на карте Антарктики, стр. 53 атласа, кроме названия — море Беллинсгаузена, нет ни одного русского названия;

3) «The library Atlas «Philip, Darby, 1938 г., на карте (стр. 19), посвященной исследованиям Антарктики, кроме подписи море Беллинсгаузена, нет других русских названий, в то время как иностранных названий дано много. Примерно такая же картина наблюдается и в других атласах, изданных за рубежом. Работы наших советских ученых Л. С. Берга, А. И. Андреева, А. В. Ефимова, Д. И. Лебедева и других раскрывают действительную картину истории географических открытий и заслуги в этой области наших соотечественников. Всемирно известны имена знаменитых русских мореплавателей В. И. Беринга, А. И. Чирикова, И. Ф. Крузенштерна, Ю. Ф. Лисянского, Л. А. Гагемейстера, В. М. Головнина, Ф. Ф. Беллинсгаузена, М. П. Лазарева, О. Е. Коцебу, З. И. Понафидина, Ф. П. Литке и других, открывших много неизвестных до того времени островов и земель. На карте мира за рубежом нашей Родины имеется много русских названий, присвоенных горным хребтам, вершинам, ледникам, островам, полуостровам, заливам, бухтам, мысам и т. д.

По праву первооткрывателей наши путешественники наносили эти русские названия на карту.

Следует заметить, что далеко не всегда русские путешественники давали русские названия вновь открытым географическим объектам. Крузенштерн первым предложил оставлять за островами, по мере возможности, местные названия. Все русские мореплаватели следовали предложению И. Ф. Крузенштерна. Уважая народы открытых земель, они оставляли за географическими объектами земельные названия, и только тогда, когда их не удавалось установить, географическим объектам давали русские названия.

Вполне понятно, что каждое русское название связано с плаванием русских мореплавателей, с преодолением ими огромных трудностей. Поэтому совершенно несправедливым является забвение их имен, замена на картах и в литературе русских названий другими.

На русских географических и навигационных картах ряд русских названий сохранен, но большинство их исчезло и замещено иностранными названиями. На иностранных картах, как было указано выше, русские названия игнорируются, не показываются.

Задачей советских географов и картографов является восстановление на картах и в литературе русских названий в Тихом океане, на Аляске и Алеутских островах, в Антарктике и других частях земного шара.

Первоисточниками установления этих названий следует считать отчеты о путешествиях самих русских путешественников, старинные русские атласы — Крузенштерна, Беллинсгаузена, Сарычева, Тебенькова и архивы. Первая попытка восстановить имена русских людей на карте мира сделана Н. А. Бендер в книге «Имена русских людей на карте мира», Географиз, 1948 г.

Это полезно начинать, как отметил редактор этой книги проф. Саушкин, следует продолжать. К сожалению, в книге Бендер указаны лишь имена, а не вообще русские названия за пределами нашей Родины, при этом список русских имен далеко неполный. Русские имена не сопровождаются координатами объектов, к которым они относятся, поэтому установление их местоположения на карте затруднительно.

В 1953 году вышел сборник «Русские мореплаватели» под редакцией В. С. Лупач. Сборник содержит очерки об известных русских и советских мореплавателях, биографические справки о них, словарь русских имен на карте мира и таблицу кругосветных и полукругосветных плаваний русских парусных судов, а также словарь русских имен на морской карте мира, составленный И. П. Магидовичем. На книгу в целом и на словарь в частности имеется обстоятельная рецензия В. О. Гурецкого,¹ в которой отмечены недостатки словаря русских имен, как-то: наличие фактических ошибок, отсутствие географических координат объектов, к которым относятся русские имена, отсутствие в словаре русских географических названий за пределами нашей Родины, не связанных с именами, но присвоенных русскими путешественниками открытым ими географическим объектам.

Русские географические названия за рубежом встречаем в работах А. И. Андреева, Л. С. Берга, А. В. Ефимова, Д. М. Лебедева, Н. Н. Зубова, посвященных географическим открытиям русских путешественников. Имеются также диссертации² и отдельные статьи, посвященные вопросам русских географических открытий.

Вопросу русских имен на карте мира посвящены также две статьи В. О. Гурецкого — Русские наименования в Антарктике³ и Русские географические названия в Японии.⁴

Нужно заметить, что очень часты сведения о тех или иных русских географических названиях у разных авторов противоречивы. Так например, по одним сведениям, мыс Румянцев (шир. 51°52' сев., долг. 166°17' зап.) был открыт В. С. Хромченко и А. К. Этолным, по другим, — Г. С. Шмидаревым; о-ва Прибылова были названы Г. А. Сарычевым, по другим сведениям, — Шелюховым, О. Св. Матвея был открыт в 1764 г., по другим сведениям, в 1766 г., острова Ближние открыты В. И. Берингом и А. И. Чириковым в 1728, по другим сведениям, — Невочичиным в 1745—47 гг., о. Кыска открыт В. И. Берингом в 1741 г., по другим сведениям, — Степаном Кожвининым в 1757—1761 гг.; п-ов Аляска открыт М. Гвоздевым в августе 1732 г., по другим сведениям, — Пушкаревым в 1760—62 гг.; Андреевские острова открыты А. И. Чириковым в 1741 г., по другим сведениям, — Андрианом Толстухиным в 1760—64 гг.; мыс Крузенштерна (шир. 68°20' сев., долг. 114° зап.) открыт О. Е. Коцебу в 1816 г., по другим сведениям, в 1817 г.; бухту Гейдена открыл и назвал Литке в 1828 г., по другим сведениям, — Станюкович.

Сведения о русских географических названиях разбросаны в разнообразных и многочисленных источниках, к тому же еще разноречивых, отсутствуют координаты объектов. Поэтому они не могут удовлетворить требований читателя. В более благоприятном положении находится вопрос о русских географических названиях в Антарктике; список русских названий на этот район обеспечен географическими координатами, названий на этот район нет, поэтому не нужно повторять эту работу. Этого составлено обстоятельно, поэтому нет нужды повторять эту работу. Этого нельзя сказать относительно установления русских наименований в Тихом океане, на территории Аляски и Алеутских островов, которым и посвя-

¹ Русские мореплаватели. Сборник статей. Издание 1953 г.

² Известия Всесоюзного Географического общества, ноябрь — декабрь, 1954 г.

Том № 86, вып. 6, стр. 559.

³ О. Е. Медведская. Русские географические открытия на Тихом океане

и в Северной Америке (50-е — начало 80-х годов XVIII века), 1952 г.; Р. В. Макарова.

Открытие и освоение русскими Алеутских островов по второй половине XVIII в., 1950.

⁴ Известия Всесоюзного Географического общества, том 86, вып. 5, 1954 г.

⁵ Известия Всесоюзного Географического общества, том 84, вып. 6, 1952 г.

шена данная работа. В ней автор не ставит задачу показать все русские географические названия в этих районах так как только в одной Русской Америке (Аляска и Алеутские острова), открытой русскими и принадлежавшей России до 1867 г., имелось около 2000 русских географических названий, в Тихом океане около 200.

В настоящей работе устанавливаются наиболее известные «приоритетные» русские географические названия, даются координаты объектов, к которым относятся русские названия, а также для большинства из них дается справка: когда и кем открыт данный объект, кто дал объекту русское название. Количество русских географических названий, приведенных в данной работе, вполне обеспечивает нагрузку справочных карт мира, материков и океанов в масштабах мельче 1 : 10 000 000, т. е. в пределах тех масштабов, в которых обычно составляются справочные карты на такие территории.

Для районов Алеутских островов, Ново-Гвинейского моря, островов России количество русских названий обеспечивает карты и более крупного масштаба, чем 1 : 10 000 000.

Таким образом, предлагаемый в работе список русских географических названий за пределами нашей Родины вполне обеспечивает практические требования картографии.

В дальнейшем, возможно, следует углубить исследования с целью составления подробного справочника русских географических названий за рубежом.

Русские географические названия в Тихом океане

Многие острова в Тихом океане носят имена выдающихся русских людей — Суворова, Кутузова, Чичагова, Ермолова, Крузенштерна, Беллинсгаузена, Румянцева, Лисянского, Сенявина, Римского-Корсакова и др. Эти острова были открыты русскими мореплавателями и им даны были русские названия.

Во время первого кругосветного плавания И. Ф. Крузенштерна и Ю. Ф. Лисянского в 1803—1806 гг. на кораблях «Надежда» и «Нева» к западу от Гавайских островов под широтой 26° с. ш. 15 октября (и ст.) 1804 г. Ю. Ф. Лисянский открыл остров названный его именем. Это был первый остров, открытый русскими во время кругосветных плаваний. Была открыта мель, названная по имени корабля «Нева» — Невской мелью.

В 1814 году знаменитый русский мореплаватель М. П. Лазарев на корабле «Суворов» открыл группу коралловых островов, названных им островами Суворова.

В 1816—1817 гг. О. Е. Коцебу на бриге «Рюрик» открыл ряд островов в архипелаге Туамоту (о. Рюрика, о. Спиридова, о. Крузенштерна и др.).

В группе Маршалловых островов в 1816 г. им были открыты острова Кутузова, Суворова, а в 1817 году в группе тех же Маршалловых островов были открыты о. Нового Года, о. Румянцева, о. Чичагова, о. Крузенштерна, о. Гейдена и др.

В 1819—1821 г. знаменитой первой русской антарктической экспедицией под руководством Ф. Ф. Беллинсгаузена и М. П. Лазарева на шлюпах «Восток» и «Мирный» был открыт материк Антарктида и антарктические острова — Петра I, Рожнова, Шнишкова и др., а в Тихом океане — о. Моллера, о. Аракчеева, о. Волконского, о. Барклай-де-Толли, о. Ермолова, о. Кутузова, о. Чичагова, о. Грейга и др., получившие общее название острова Россиян.

Русские географические названия в Тихом океане

№ п.п.	Русское название	Местоположение		Кто открыл	Когда открыл	Кто назвал	Примечание
		широта	долгота				
1	Азбелев, остров . . .	5°06' Ю	145°50' В	Офицеры корвета «Скобелев»	1883	Офицеры корвета «Скобелев»	Зал Астролябин
2	Александр, остров . . .	10°03' Ю	161°06' З	Ф. Ф. Беллинсгаузен на шлюпе «Восток»	1820	Ф. Ф. Беллинсгаузен	Острова Россиян
3	Александр, риф . . .	8°0' С	110°35' В	Офицеры корвета «Скобелев»	1883	Офицеры корвета «Скобелев»	То же
4	Алея, бухта . . .	Около 5°20' Ю	145°50' В	Ф. Ф. Беллинсгаузен на шлюпе «Восток»	10.07.1820	Ф. Ф. Беллинсгаузен	То же
5	Аракчеев, остров . . .	15°51' Ю	140°49' З	О. Е. Коцебу на бриге «Рюрик»	10.02.1817	О. Е. Коцебу	То же
6	Аракчеев, атолл . . .	8°45' С	171°05' В	Ф. Ф. Беллинсгаузен на шлюпе «Восток»	12.07.1820	Ф. Ф. Беллинсгаузен	То же
7	Барклай-де-Толли, атолл . . .	15°56' Ю	142°12' З	Офицеры корвета «Скобелев»	1883	Офицеры корвета «Скобелев»	Острова Россиян
8	Барна, мыс . . .	5°04' Ю	145°50' В	О. Е. Коцебу на шлюпе «Предприимчивый»	1824	О. Е. Коцебу	Острова Россиян
9	Беллинсгаузен, остров . . .	15°45' Ю	154°30' З	Офицеры корвета «Скобелев»	1871	Офицеры корвета «Скобелев»	Острова Россиян
10	Бендзмена, мыс . . .	5°27' Ю	145°57' В	Офицеры корвета «Витязь»	1871	Офицеры корвета «Витязь»	Острова Россиян
11	Бергисель, мель . . .	20°45' Ю	178°55' З	Ф. Ф. Беллинсгаузен на шлюпе «Восток»	19.08.1820	Ф. Ф. Беллинсгаузен	Острова Россиян
12	Бородин, острова . . .	25°55' С	131°15' В	З. И. Поляничин на корвете «Бородино»	1820	З. И. Поляничин	Острова Россиян
13	Виттенштейн, атолл . . .	16°21' Ю	145°33' З	Ф. Ф. Беллинсгаузен на шлюпе «Восток»	17.07.1820	Ф. Ф. Беллинсгаузен	Острова Россиян

№ п. п.	Русское название	Местное или иностранное название	Местоположение		Кто открыл	Когда открыл	Кто назвал	Примечание
			широта	долгота				
14	Витязь, остров	Билан-Билан	около 5°20' Ю	около 145°50' В	Офицеры корвета "Витязь"	1871	Офицеры корвета "Витязь"	Острова Россиян
15	Витязь, пролив	Такуве	5°30' Ю	146°50' В	То же	1871	То же	То же
16	Волковского, атолл		15°47' Ю	142°11' З	Ф. Ф. Беллинсгаузен на шлюпе "Восток"	12.07.1820	Ф. Ф. Беллинсгаузен	Острова Россиян
17	Восток, остров	Алагани	10°05' Ю	152°23' З	То же	1820	То же	То же
18	Гагелейстера, атолл		15°22' Ю	146°22' З	Л. А. Гагелейстер на военном транспорте "Кроткий"	Январь 1830	И. Ф. Крузенштерн	То же
19	Гейденга, атолл	Ликлеп	9°52' С	169°10' В	О. Е. Коцебу	5.11.1817	О. Е. Коцебу	Маршалловы острова
20	Грейга, остров	Ндау	16°02' Ю	146°22' З	Ф. Ф. Беллинсгаузен на шлюпе "Восток"	18.07.1820	Ф. Ф. Беллинсгаузен	Острова Россиян
21	Дювальных Ледей, архипелаг		5°0' Ю	145°50' В	То же	14.07.1820	Миклухо-Маклай	То же
22	Ермолова, атолл	Тагна	16°22' Ю	143°06' З	Ф. П. Литке	1828	Ф. Ф. Беллинсгаузен	То же
23	Завалишина, мыс		7°0' С	158°11' В	Ф. П. Литке	1828	Ф. П. Литке	То же
24	Изувуд, пролив		4°45' Ю	145°50' В	Описали офицеры капитана "Изувуд"	1872	Офицеры капитана "Изувуд"	Между островами Коралл и Новой Гвинеей
25	Константина, бухта	Лаэ	5°25' Ю	145°50' В	Описали офицеры корвета "Витязь"	1871	Офицеры корвета "Витязь"	Залив Астралабия
26	Константина, острова		8°55' С	166°20' В	П. Н. Бессарабский на военном транспорте "Данна"	5.08.1853	П. Н. Бессарабский	То же

№ п. п.	Русское название	Местное или иностранное название	Местоположение		Кто открыл	Когда открыл	Кто назвал	Примечание
			широта	долгота				
27	Коптев, мыс		около 5°20' Ю	около 145°40' В	Офицеры корвета "Витязь"	1871	Офицеры корвета "Витязь"	Залив Астралабия
28	Коцебу, атолл	Аратика	15°30' Ю	145°30' З	Открыт голландцем Роттеншеймом, впервые описан и положен на карту О. Е. Коцебу	1722 1816	Ф. Ф. Беллинсгаузен	То же
29	Коптелен, мыс	Ангук	около 5°20' Ю	около 145°15' В	Офицеры корвета "Витязь"	1871	Офицеры корвета "Витязь"	То же
30	Крузенштерна, атолл		10°20' С	170° 0' В	О. Е. Коцебу на бриге "Рюрик"	1817	О. Е. Коцебу	Маршалловы острова
31	Крузенштерна, риф		22°20' С	175°50' З	Ю. Ф. Лисицкий на корвете "Нева"	20.10.1805	Ю. Ф. Лисицкий	К югу от острова Мидауэи
32	Кузулова, атолл	Макэмо	16°37' Ю	143°35' З	Ф. Ф. Беллинсгаузен на шлюпе "Восток"	15.07.1820	Ф. Ф. Беллинсгаузен	Острова Россиян
33	Кутузова, атолл	Утирик	11°20' С	163°50' В	О. Е. Коцебу на бриге "Рюрик"	21.05.1816	О. Е. Коцебу	Маршалловы острова
34	Лаазарова, атолл	Матахина	14°56' Ю	148°38' З	М. П. Лаазаров на шлюпе "Мирный"	30.07.1820	Ф. Ф. Беллинсгаузен	Острова Россиян
35	Лебедева, остров		около 5°15' Ю	около 145°30' В	Офицеры корвета "Скребелет"	1883	Офицеры корвета "Скребелет"	Залив Астралабия
36	Лисицкого, остров		17°40' Ю	145°01' З	Ю. Ф. Лисицкий на корвете "Нева"	15.10.1805	Ю. Ф. Лисицкий	То же
37	Литке, остров	Фату	26°0' С	151°22' В	Ф. П. Литке на шлюпе "Северин"	1828	Команда шлюпа "Северин"	Сев.-вост. берег Нов. Гвиней
38	Маклая, берег		8°35' С	146°40' В	Исследовал Миклухо-Маклай	1871—72	Миклухо-Маклай	То же

Продолжение

№ п. п.	Русское название	Местное или иностранное название	Местоположение		Кто открыл	Когда открыл	Кто назвал	Примечание
			широта	долгота				
39	Меньшикова, атолл	Кваласелки	9°10' С	167°25' В	Л. А. Гагемейстер на транспорте "Кроткий"	3.08.1829	Л. А. Гагемейстер	Маршалловы острова
40	Милердолина, атолл	Фаланге	16°45' Ю	145°15' З	Ф. Ф. Беллинсгаузен на шлюпе "Восток"	16.07.1820	Ф. Ф. Беллинсгаузен	Острова Россиян
41	Михайлова, остров	Туана-Ира	21°02' Ю	178°45' З	Ф. Ф. Беллинсгаузен на шлюпе "Восток"	19.08.1820	То же	То же
42	Моллера, атолл	Аману	17°45' Ю	140°50' З	То же	18.07.1820	Ю. Ф. Лисинский	К зап. от Главных островов
43	Нева, риф		26°01' С	173°59' В	Ю. Ф. Лисинский на корвете "Нева"	15.10.1804	То же	Остров Нуку-Хина
44	Невка, река		8°50' Ю	около 145°30' В	То же	Май 1804	То же	То же
45	Нового Гола, атолл	Мажит	10°10' С	170°55' В	О. Е. Коцебу на бриге "Рорик"	1.01.1817	О. Е. Коцебу	Маршалловы острова
46	Новосельского, мыс		5°30' Ю	145°50' В	Описали офицеры корвета "Витязь"	1871	Офицеры корвета "Витязь"	Острова Россиян
47	Остен-Саксена, атолл	Катну	16°25' Ю	144°20' З	Ф. Ф. Беллинсгаузен на шлюпе "Восток"	15.07.1820	Ф. Ф. Беллинсгаузен	Острова Россиян
48	Полаффина, остров	Торисма	30°29' С	140°19' В	З. И. Полаффин на корвете "Боролло"	24.08.1820	И. Ф. Крузингер	То же
49	Предприятие, атолл	Фангахина	16°00' Ю	140°10' З	О. Е. Коцебу на шлюпе "Предприятие"	20.03.1824	О. Е. Коцебу	То же
50	Равского, острова		16°45' Ю	144°20' З	Ф. Ф. Беллинсгаузен на шлюпе "Восток"	15.07.1820	Ф. Ф. Беллинсгаузен	То же
51	Ринского-Корсакова, атолл	Роугелан	11°20' С	166°55' В	О. Е. Коцебу на шлюпе "Предприятие"	9.10.1825	О. Е. Коцебу	Маршалловы острова

Продолжение

№ п. п.	Русское название	Местное или иностранное название	Местоположение		Кто открыл	Когда открыл	Кто назвал	Примечание
			широта	долгота				
52	Ронгелский, мыс		около 5°25' Ю	около 145°50' В	Офицеры корвета "Витязь"	1871	Офицеры корвета "Витязь"	Залив Астролябия
53	Россиян, острова	Туамоту	14°50' Ю	148°45' З	Ф. Ф. Беллинсгаузен и М. П. Лазарев на бриге "Рорик"	1816—1829	Беллинсгаузен	Ю. Полинезия
54	Румянцева, атолл	Вотье	9°24' С	170°14' В	То же	4.01.1817	О. Е. Коцебу	Маршалловы острова
55	Румянцева, остров	Тинен	14°52' Ю	144°05' З	То же	20.04.1816	То же	То же
56	Рюрика, атолл	Арута	15°10' Ю	146°30' З	То же	23.04.1816	То же	Маршалловы острова
57	Рюрика, проход		9°28' С	169°49' В	То же	1817	То же	То же
58	Рюрика, риф		44°00' Ю	147°40' В	Штурман Е. А. Клоков на бриге "Рорик"	21.07.1821	Е. А. Клоков	К югу от острова Тасмания
59	Сарачева, остров	Кита-Ио	25°25' С	141°15' В	Описали офицеры корвета "Скобелев"	1883	Офицеры корвета "Скобелев"	Залив Астролябия
60	Сарачева, пролив	Отглия	5°10' Ю	145°50' В	То же	1883	То же	Ю. Полинезия
61	Сейянина, острова		6°55' С	158°05' В	Ф. П. Литке на шлюпе "Сейянин"	2.01.1828	Ф. П. Литке	Восточная группа Каролинских островов
62	Симопола, остров	Туана-Итоло	21°03' Ю	178°46' З	Ф. Ф. Беллинсгаузен на шлюпе "Восток"	19.08.1820	Ф. Ф. Беллинсгаузен	Меланезия
63	Скобелев, остров	Сек	5°05' Ю	145°50' В	Офицеры корвета "Скобелев"	1883	Офицеры корвета "Скобелев"	Самый большой из островов архипелага "Доловых людей"
64	Смирнова, остров		около 9°20' Ю	146°0' В	Описали офицеры корвета "Скобелев"	1883	Офицеры корвета "Скобелев"	Залив Астролябия

№ п. п.	Русское название	Местное или иностранное название	Местоположение		Кто открыл	Когда открыл	Кто назвал	Примечание
			широта	долгота				
65	Спридова, атолл	Такапото	14°45' Ю	148°10' З	О. Е. Коцебу на бриге „Рюрик“	21.04.1816	О. Е. Коцебу	К югу от островов Кука
66	Сунорова, атолл	Така	13°10' Ю	163°10' З	М. П. Лазарев на корабле „Суворов“	1814	М. П. Лазарев	Маршалловы острова
67	Сунорова, атолл	Така	11°09' С	169°37' В	О. Е. Коцебу на бриге „Рюрик“	21.05.1816	О. Е. Коцебу	То же
68	Траверсе, атолл	Аур	8°15' С	171°10' В	То же	1817	То же	Залив Астролябия
69	Таркова, мыс	Аур	около 5°20' Ю	145°08' В	Описан офицерами корабля „Скобелев“	1883	Офицеры корабля „Скобелев“	Острова Россиян
70	Чичагова, атолл	Таханеа	16°50' Ю	144°45' З	ф. ф. Беллинсгаузен на шлюпе „Восток“	16.07.1820	ф. ф. Беллинсгаузен	Маршалловы острова
71	Чичагова, атолл	Эрикуб	9°05' С	170°0' В	О. Е. Коцебу	7.02.1817	О. Е. Коцебу	Остров Нуку-Хиана
72	Чичагова, залив	Эрикуб	8°50' Ю	около 170° В	И. Ф. Крузенштерн на корабле „Надежда“	1804	И. Ф. Крузенштерн	Маркизские острова, остров Нуку-Хиана
73	Чичагова, мыс	Эрикуб	8°57' Ю	140°11' З	И. Ф. Крузенштерн и Ю. Ф. Лисевский	1804	То же	Маркизские острова, остров Нуку-Хиана
74	Чупрова, мыс	Вого	около 5° Ю	около 145°50' В	Описан офицерами корабля „Скобелев“	1883	Офицеры корабля „Скобелев“	Залив Астролябия, северная оконечность острова Скобелева
75	Шанца, атолл	Вого	10°11' С	165°55' В	И. И. Шанца на восточной транспортной „Америка“	29.05.1835	И. Ф. Крузенштерн	Маршалловы острова
76	Шимшарева, прокол	Бикни	9°24' С	170°07' В	О. Е. Коцебу на бриге „Рюрик“	1817	О. Е. Коцебу	То же
77	Эпипонца, атолл	Бикни	11°35' С	165°30' В	О. Е. Коцебу на шлюпе „Предприятие“	9.10.1825	То же	То же

Лейтенант З. И. Понафидин на корвете «Бородино» открыл в 1820-году о. Бородино и о. Понафидина.

В 1829 году капитан Л. А. Гагемейстер на военном транспорте «Кроткий» в Маршалловых островах, в группе Ралики, открыл остров Меншикова, а в 1830 году открыл атолл, названный позднее И. Ф. Крузенштерном именем Гагемейстера.

В 1828 г. Ф. П. Литке на шлюпе «Сенявина» открыл в группе Каролинских островов острова Сенявина, названные им по имени знаменитого флотоводца Сенявина.

П. Н. Бессарабский, штурман Клочков и другие мореплаватели также открыли ряд островов и атоллов в Тихом океане. На стр. 159—164 приводятся сведения об открытых русскими мореплавателями островах, атоллах, мысах и т. п., имеющих русские названия.

Русские географические названия на территории Аляски и Алеутских островов

Русским путешественникам принадлежит честь открытия пролива, отделяющего Азию от Америки, названного впоследствии Беринговым проливом. В 1648 году Семен Дежнев первым прошел этим проливом.

В 1732 году штурман Иван Федоров и геодезист Михаил Гвоздев пересекли Берингов пролив и открыли американский берег (берег Аляски).

В 1741 году В. И. Беринг и А. И. Чириков открыли Алеутские острова и берега северо-западной Америки. Алеутские острова посещали многие русские: Емельян Басов ходил 4 раза на Алеутские острова (Западная группа Алеутских островов); Степан Глотов в 1759 году был на острове Кадьяк; Умрица, открыл остров Уналашку, а в 1763 году был на острове Кадьяк; Андриан Толстых в 1760—64 гг. посетил и подробно обследовал острова, названные позже его именем (Андреевские острова); в 1768—1769 гг. Петр Креницын и Михаил Левашов основал две торговые компании из Умрица, остров Уналашку и западную часть полуострова Аляски и составили карту посещенных ими мест; в 1786 году Гавриил Прибылов открыл острова, названные его именем (острова Прибылова).

В открытии и исследовании островов северной части Тихого океана и берегов северо-западной Америки принимали участие многие другие русские люди. Шеллихову принадлежит план удержать за Россией новые открытые земли в Тихом океане и заселить их русскими поселенцами; план его был утвержден. В 1790 году Шеллихов основал две торговые компании. После смерти Шеллихова (1795 год) преемник его Баранов из всех ранее существовавших компаний создал в 1798 году одну «Российско-Американскую торгово-промышленную компанию».

В 1867 году полуостров Аляска и все северо-американские острова, бывшие во владении русских, общей площадью 1519 тыс. кв. км были проданы царским правительством Соединенным Штатам Америки за 7 млн. 200 тыс. долларов.

Ниже помещается сокращенный список наиболее известных русских географических названий на территории Аляски и Алеутских островов с указанием их географических координат, а также с указанием, кто и когда открыл острова, мысы, заливы, проливы в этой части земного шара и кем даны русские географические названия открытым объектам.

Русские географические названия на территории Аляски и Алеутских островов

№ п.п.	Русское название	Местное или иностранное название	Местоположение		Кто открыл	Когда открыл	Кто назвал	Примечание
			широта	долгота				
1	Авинова, мыс		59°40' С	163°10' З	В. С. Хромченко	1821	М. Н. Васильев	Остров Атту
2	Авраамия, бухта		52°51' С	172°44' В	В. И. Беринг	1741	В. И. Беринг	
3	Адмиралтейства, остров		57°40' С	131°20' З	А. И. Чириков	1741	Российско-Американская компания	Остров Унимак
4	Аксенова, мыс		54°53' С	164°33' З	Русские мореходы	Во второй половине XVIII в.		
5	Александр-архимеланг		57°00' С	135°00' З	То же	То же	То же	
6	Александра, мыс		55°47' С	159°24' З	А. И. Чириков	1741	Русские промышленники	Остров Алах
7	Алдреева, бухта		51°58' С	176°40' З	Алдреев Толстых	1760	Лазарев и Васютин	
8	Андреевские острова		52°00' С	175°00' З	А. И. Чириков	1741		
9	Андрионика, остров		55°20' С	160°05' З	В. И. Беринг	1741		
10	Баранов, населенный пункт		57°05' С	134°50' З	Основа русских мореходов	В первой половине 18 в.	Российско-Американской компании Ю. Ф. Лисянский (в 1805)	
11	Баранова, остров	Ситха	57°05' С	135°00' З	А. И. Чириков	1741	Неизвестно	Остров Улга
12	Баранова, бухта		55°16' С	160°30' З	В. И. Беринг	1741		
13	Бельковский, залив		55°06' С	162°10' З	Русские мореходы	XVIII в.	Российско-Американская компания	
14	Бельковский, мыс		55°04' С	162°03' З	То же	XVIII в.	То же	
15	Бельковское, селение		55°05' С	161°54' З	"	XVIII в.	"	
16	Беринга, залив	Якутат	59°40' С	140°10' З	Д. И. Бочаров и Г. А. Изаидов	1788	Ю. Ф. Лисянский (в 1805)	

Продолжение

№ п.п.	Русское название	Местное или иностранное название	Местоположение		Кто открыл	Когда открыл	Кто назвал	Примечание
			широта	долгота				
17	Беринга, море		58°00' С	180°00' З	С. Дежнев и Ф. Попов	1648	В. М. Головин (1822)	Впервые названо так кап. Головин-ым, раньше называлось Канчатское море
18	Берингтон, пролив		65°40' С	169°00' З	С. Дежнев и Гюадса положили на карту пролив, названный в честь Беринга и Америки	1648 1732	Кук (1778)	
19	Бесплоные, острова		58°47' С	152°03' З	Русские промышленники	В середине XVIII в.	Русские промышленники	Крейцшан остров
20	Бечевина, бухта		52°02' С	175°06' З	То же	То же	То же	
21	Бечевина, мыс		59°05' С	175°00' З	В. И. Беринг и А. И. Чириков	1728	Беринг (1728)	
22	Ближние острова		52°40' С	173°30' З				
23	Биллингс-Хед, мыс		57°17' С	165°28' З				
24	Бобровая, бухта		52°01' С	174°40' З	А. И. Чириков	1741	Определен М. Д. Топольков	
25	Бобровый, остров		51°54' С	177°26' З	Г. Л. Прибылов	1786	Определен М. Н. Васильев	
26	Бобровый, остров		57°03' С	170°00' З				
27	Бобрый, остров		58°32' С	152°13' З				
28	Бойс, мыс	Мохкан	60°15' С	167°30' З				
29	Бочарова, гора		57°30' С	155°55' З				

№ п.п.	Русское название	Местное или иностранное название	Местоположение		Кто открыл	Когда открыл	Кто назвал	Примечание
			широта	долгота				
30	Бочарова, населенный пункт		58°20' С	157°30' З		1791	Русские промышлявшие М. Н. Васильев Российско-Американская компания	У острова Ахта
31	Бочарова, озеро		57°55' С	156°25' З	Д. И. Бочаров	1741		
32	Васильева, бухта		52°06' С	174°20' З	В. И. Беринг и А. И. Чирикوف			
33	Васильева, мыс	Корун	60°00' С	165°30' З	М. Н. Васильев	1821		Остров Нулпак
34	Василий, мыс	Оттер	55°03' С	163°44' З	Российско-Американская компания			Остров Улимак
35	Веселова, мыс		54°01' С	166°40' З				
36	Воронцовского, остров				Мореходы Российско-Американской компании	В 30-х годах XIX в.		Залив Аляска
37	Воронцова, мыс		61°12' С	150°02' З	Мореходы компании Шенклова	В 80-х гг. XVIII в.	Г. И. Шенклов	То же
38	Вокресенский, мыс		59°51' С	149°13' З	Мореходы Российско-Американской компании	В XIX в.	Определен Архимандритов	
39	Врангели, мыс		52°56' С	172°27' В	То же	В 30-х годах XIX в.	Мореходы Российско-Американской компании	Остров Атту
40	Врангеля, остров		52°20' С	139°15' З		То же	То же	Залив Аляска
41	Всевидова, острова		52°59' С	168°28' З	Русские промышлявшие	2-я полов. XVIII в.	Определен Архимандритов	
42	Выходной, мыс		57°59' С	153°12' З	То же	То же	То же	
43	Галейстера, острова		58°40' С	160°45' З	В. С. Хроменко и А. К. Этолн	1821	В. С. Хроменко	

№ п.п.	Русское название	Местное или иностранное название	Местоположение		Кто открыл	Когда открыл	Кто назвал	Примечание
			широта	долгота				
44	Галейстер, пролива		58°45' С	161°10' З	В. С. Хроменко и А. К. Этолн	1821	В. С. Хроменко	
45	Гладзела, острова (Дюпю-милла)		65°45' С	169°08' З	С. Дежнев и Ф. Попов	1648	Миллер (в середине XVIII в.)	
46	Гейдена, бухта		56°50' С	158°40' З	Ф. П. Литке	1828	Ф. П. Литке	
47	Глаздала, мыс		55°15' С	162°58' З	М. Н. Станюкович	1828	М. Н. Станюкович	
48	Голова, бухта		64°30' С	163°00' З	В. С. Хроменко и А. К. Этолн	1821	В. С. Хроменко	
49	Грейга, мыс		57°43' С	157°43' З	М. Н. Станюкович	1828	М. Н. Станюкович	
50	Давыдова, бухта		70°55' С	179°20' З	Русские мореходы XVIII в.			
51	Давыдова, остров		51°58' С	178°21' В	То же	То же	Н. Л. Хлюстов	
52	Деларона, бухта		55°10' С	160°30' З	Е. И. Деларон	В конце XVIII в.		
53	Деларона, острова		51°25' С	178°30' З	Е. И. Деларон	То же		
54	Дюпюа (Гладзела острова)		65°45' С	169°08' З	В. И. Беринг	1728	В. И. Беринг	
55	Добрых Вестей, залив		59°05' С	161°45' З				
56	Елокевские острова		50°10' С	156°45' З	В. И. Беринг	1741	То же	Залив Аляска
57	Елазветы, острова		59°10' С	151°50' З	А. И. Чирикوف		Российско-Американская компания (в конце XVIII в.)	
58	Еловий, мыс		59°49' С	152°17' З	Русские мореходы XVIII в.	2-я полов. XVIII в.	Определен Архимандритов	

№ п.п.	Русское название	Местоположение		Кто открыл	Когда открыл	Кто назвал	Примечание
		местное или иностранное название	широта долгота				
59	Еловый, остров	57°53' С	152°20' З		30-е годы XIX в.	Российско-Американская компания	Залив Аляска
60	Зрельбо, остров	56°20' С	132°50' З	Д. Ф. Зрельбо	В конце XVIII в.	Русские мореходы	То же
61	Захра, бухта	57°34' С	153°44' З	Русские мореходы	В начале XIX в.	Российско-Американская компания	Остров Унга из группы островов Шуманиа
62	Захаринская, бухта	55°20' С	160°38' З	То же			
63	Ивакина, мыс	51°28' С	179°23' В	*	В конце XVIII в.	Российско-Американская компания	
64	Ипалов, мыс	55°33' С	159°30' З	*	В начале XIX в.	Определен Куртши в XIX в.	
65	Ипальева, мыс	59°45' С	166°05' З	М. Н. Васильев	1821	М. Н. Васильев в 1821	Остров Нуниак
66	Иванова, бухта	55°50' С	159°30' З	Русские мореходы	В начале XIX в.	Российско-Американская компания	Залив Аляска
67	Иггестрема, скалы	52°38' С	174°02' В	Штурман Иггестрем	1823—30	Российско-Американская компания в XIX в.	К востоку от Ближних островов
68	Июнна Богослова, остров	53°56' С	168°02' З	Штурман Крюков	1795	Штурман Крюков	Из группы Лисых островов
69	Казакова (Опасная), бухта	58°10' С	152°56' З	Русские мореходы	В конце XVIII в.	Русские мореходы	Залив Аляска
70	Камелый, мыс	64°21' С	162°55' З				

№ п.п.	Русское название	Местоположение		Кто открыл	Когда открыл	Кто назвал	Примечание
		местное или иностранное название	широта долгота				
71	Капитанский, залив	53°55' С	166°34' З	Опсала М. Д. Левашев	1768	Алеуты — жители острова	Остров Упалашка
72	Карл, озеро	54°45' С	123°20' З	Русские мореходы	В конце XVIII в.	Русские мореходы	Залив Аляска
73	Карла, остров	55°31' С	160°03' З	Опсала Иггестрем	1830—1832	Российско-Американская компания	Остров Амчитка
74	Кирилловская, гавань	51°26' С	179°14' В	Не выяснено		То же	Остров Атка
75	Кобальская, бухта	52°04' С	174°28' З	То же		То же	То же
76	Ковурова, мыс	52°07' С	174°54' З	То же		То же	То же
77	Константина Гавань, бухта	51°26' С	139°14' В	Опсала шт. Инггестрем	1830	Российско-Американская компания	Остров Амчитка
78	Константина, мыс	58°24' С	158°44' З	Устюгов	В 1-й половине XIX в.	Русские мореходы	Залив Бристоль
79	Корвина, остров	55°25' С	160°10' З	Русские мореходы	Во 2-й половине XVIII в.	Русские мореходы	Залив Аляска
80	Корвина, пролив	55°22' С	160°00' З	То же	То же	То же	Пролив между островами Попова и Корвина
81	Корвинская, бухта	52°15' С	174°16' З	Русские мореходы	Во 2-й половине XVIII в.	Русские мореходы	Остров Атка
82	Коринский, мыс	52°19' С	174°28' З	То же	То же	То же	То же
83	Косебу, залив	66°20' С	163°00' З	О. Е. Косебу	1816	Служники Косебу	То же
84	Креиничана, мыс	55°04' С	163°15' З	П. К. Креиници и М. Д. Левашев	1768	М. Н. Станюкович	Назвал М. Н. Станюкович
85	Креиничана, острова	54°10' С	165°30' З	То же	1769	М. Н. Станюкович	В группе Лисых островов

№ п.п.	Русское название	Местное или иностранное название	Местоположение		Кто открыл	Когда открыл	Кто назвал	Примечание
			широта	долгота				
86	Круаза, остров		57°10' С	138°45' З	Д. Каллини	1805	Ю. Ф. Лисицкий	Залив Аляска
87	Крузенштерна, мыс		67°05' С	163°45' З	О. Е. Коцебу	1816	О. Е. Коцебу	У входа в залив Коцебу
88	Крузенштерна, мыс		68°20' С	114°00' З	То же	1816	То же	Залив Коронейши
89	Крузенштерна, остров		65°46' С	168°55' З	"	1817	"	Острова Гвоздева
90	Крутой, мыс		58°12' С	153°05' З	Орделла		"	
91	Курлякова, гавань		55°46' С	159°15' З	Описали русские моряки Российско-Американской компании	В 30-х годах XIX в.	Российско-Американская компания	Залив Аляска
92	Курлякова, мыс		55°34' С	159°35' З	Описали моряки Российско-Американской компании	То же	То же	То же
93	Курлякова, остров		56°50' С	133°30' З	То же	"	"	"
94	Курлякова, полуостров		55°44' С	159°36' З	"	"	"	"
95	Курлякова, пролив		58°00' С	153°10' З	"	"	"	"
96	Кутузова, мыс		56°15' С	169°20' З	М. Н. Станюкович	1828	М. Н. Станюкович	"
97	Лазарева, мыс		54°36' С	163°30' З	"	"	Орделла	"
98	Лешаева, бухта (Камчатская бухта)		53°52' С	166°35' З	Олсаа	1768—69	М. Д. Левашов	Южная часть Камчатского залива
99	Ленцштерна (Ловенштерна), мыс		54°05' С	148°00' В	О. Е. Коцебу	1816	О. Е. Коцебу	Полуостров Сьюард

№ п.п.	Русское название	Местное или иностранное название	Местоположение		Кто открыл	Когда открыл	Кто назвал	Примечание
			широта	долгота				
100	Левый, мыс		57°14' С	152°51' З				
101	Лескова, мыс		55°46' С	162°05' З	М. Н. Станюкович	1828	Орделла	Залив Бристоль
102	Лисья, острова		54°00' С	166°00' З	С. Глоуэ	1759—62	М. Н. Станюкович	Северо-Восточная часть острова Улимак
103	Литке (Лутке), мыс		54°29' С	164°20' З	М. Н. Станюкович	1828	М. Н. Станюкович	
104	Макушин, населенный пункт		53°46' С	167°00' З				
105	Макушина, вулкан		53°53' С	166°55' З				
106	Макушинская, бухта		53°45' С	167°00' З				
107	Меншикова, бухта		71°35' С	99°40' З	Не выяснено		Не выяснено	Залив Бутля
108	Меншикова, бухта		57°30' С	157°58' З	М. Н. Станюкович	1828	М. Н. Станюкович	Залив Бристоль
109	Митрофанов, остров		55°50' С	158°45' З				К северо-востоку от островов Шумана
110	Митлякова, остров		59°40' С	139°50' З	П. П. Митляков	30-е годы XIX в.	Российско-Американская компания	Залив Аляска
111	Михаила, мыс		52°52' С	172°37' В	М. Неводчиков	1745 и 1746	М. Неводчиков	Остров Атту
112	Модера, залив (сел. 66-рег. Аляски)		160°35' С		М. Н. Станюкович	1828	М. Н. Станюкович	Судно „Моллер“
113	Морлашова, мыс		54°55' С	161°25' З	Олсаа	1828	То же	Остров Улимак
114	Морская, бухта		55°00' С	163°00' З	М. Н. Станюкович			

№ п.п.	Русское название	Местное или иностранное название	Местоположение		Кто открыл	Когда открыл	Кто назвал	Примечание
			широта	долгота				
115	Моржовый, населенный пункт		54°54' С	163°18' З			Определен Г. Л. Прибылов	1787 г.
116	Моржовые острова		58°40' С	169°20' З			Определены Г. Л. Прибылов	
117	Моржовый, остров		57°19' С	169°35' З			Определены Г. Л. Прибылов	
118	Моржовый, остров	Уолрес	60°44' С	172°52' З	Г. Л. Прибылов	1787		Остров Алах
119	Моржовый, остров	56°02' С	169°52' З					Остров Атту
120	Морозова, бухта	Кола-Бей	55°05' С	162°34' З			Определены Курриши и Гардер	
121	Морской, мыс		60°17' С	146°30' З			Определены Архимедаритов	
122	Мюффа, мыс		51°58' С	176°48' З				
123	Неводичкова, бухта		52°47' С	172°52' З	М. Неводичков	1745 и 1746		
124	Берлицкий, мыс		59°20' С	161°09' З				
125	Нивельский, мыс		56°59' С	154°28' З				
126	Никитка, бухта		60°47' С	151°18' З				Залив Кука
127	Ново-Архангельск	Ситка	57°20' С	135°47' З				
128	Никольская, бухта		52°57' С	168°54' З	Описал штурман Курриши	1846		Остров Уллак
129	Ольга, бухта		57°07' С	154°20' З	Русские мореходы			
130	Ольги, пролив средний		57°20' С	135°47' З	Мореходы Российско-Американской компании			Залив Аляска

№ п.п.	Русское название	Местное или иностранное название	Местоположение		Кто открыл	Когда открыл	Кто назвал	Примечание
			широта	долгота				
131	Ольга, скала		54°59' С	161°00' З	Мореходы Российско-Американской компании	1-я половина XIX в.	Российско-Американская компания	К западу от островов Шуманаги
132	Опасный, мыс		59°27' С	151°51' З				
133	Опаретин, остров	Нушиак	60°05' С	169°20' З	М. Н. Васильев	11.07.1821	Русские мореходы	Остров Уига
134	Очералана, бухта		55°10' С	160°44' З	Русские мореходы	2-я половина XVIII в.	То же	То же
135	Очералана, мыс		55°08' С	169°49' З	То же	То же	Российско-Американская компания	Залив Аляска
136	Пала, остров		59°47' С	159°19' З		1-я половина XIX в.		
137	Паллов, населенный пункт		58°34' С	161°23' З		2-я половина XVIII в.	То же	Полуостров Аляска
138	Паллова, бухта		58°25' С	161°36' З				То же
139	Паллова, вулкан		58°25' С	161°54' З				Залив Аляска
140	Паллова, острова		58°10' С	161°30' З				
141	Палловская, гавань		57°50' С	152°25' З				
142	Палловская, гавань		55°30' С	161°32' З				
143	Панюкская сопка		54°42' С	163°00' З	Описал Г. А. Сарычев	1791	Г. А. Сарычев	У мыса Палькова
144	Панькова, риф		54°40' С	163°04' З	То же	1791	То же	Остров Улимак
145	Панькова, мыс		58°17' С	152°57' З	Мореходы Российско-Американской компании	1-я половина XIX в.	Мореходы Российско-Американской компании	Залив Аляска
146	Парамопола, бухта		58°18' С	152°03' З	То же		То же	Залив Аляска

№ п.п.	Русское название	Местное или иностранное название	Местоположение		Кто открыл	Когда открыл	Кто назвал	Примечание
			широта	долгота				
147	Попона, остров		55°20' С	160°25' З	Русские мореходы	2-я половина XVIII в.	Русские мореходы	Острова Шувагина
148	Попона, пролив		55°18' С	160°32' З	То же	То же	То же	Между островами Шувагина
149	Порт Моллера		55°50' С	160°25' З	М. Н. Станюкович	1828	М. Н. Станюкович	
150	Правый, мыс		57°13' С	152°40' З	Г. А. Прибылов	1786-87	Г. А. Прибылов	
151	Прибылова, острова		57°10' С	170°00' З	Г. А. Прибылов		Острова	
152	Птичий, остров		54°46' С	159°40' З	М. Н. Станюкович	1828	М. Н. Станюкович	Залив Бристоль
153	Рожкова, мыс		55°50' С	160°50' З	Мореходы Российско-Американской компании	1-я половина XIX в.	М. Н. Станюкович	К востоку от устья реки Юкон
154	Розанова, мыс		63°15' С	162°50' З	Г. С. Шингарен	1821	Г. С. Шингарен	Независимо от Шингарева назван Хроном и Фли в 1821 г.
155	Рулищева, горы		69°00' С	145°00' З	Шлецов	1807	Росейкер-Американская компания	У берега Верх Калифорнии
156	Рулищева, мыс	Бодега	38°15' С	123°00' З	Шлецов	1807	О. Е. Коцебу	Лесной острова
157	Рулищева порт, залив	Улимак	54°20' С	165°00' З	О. Е. Коцебу на брига "Рорик"	1817	Росейкер-Американская компания	Андрэповские острова
158	Рорик, пролив		51°59' С	177°14' З	Саламатов	1846	М. Н. Станюкович	Остров Улимак
159	Саламатова, банка		54°26' С	164°56' З	Описал М. Н. Станюкович	1828		
160	Сарачева, мыс							

№ п.п.	Русское название	Местное или иностранное название	Местоположение		Кто открыл	Когда открыл	Кто назвал	Примечание
			широта	долгота				
161	Сарачева, остров		66°15' С	169°00' З	О. Е. Коцебу	1816	О. Е. Коцебу	Бухта Шингарева
162	Сарачева, пролив		60°35' С	172°50' З	Г. А. Сарачев	1791	Г. С. Шингарен	Двебу острова Шингарева, остров Холл
163	Селеникова, бухта		52°03' С	173°23' З	Русские мореходы	1-я половина XIX в.	Русские мореходы	Андрэповские острова
164	Св. Авраамия, остров		56°35' С	169°30' З	В. И. Беринг	1741	В. И. Беринг	Берег, зат. дату 1787 г.
165	Св. Георгия, остров		58°15' С	151°48' З	Г. Л. Прибылов	1786	Г. Л. Прибылов	Независимо от Беринга острова, переименовано на мыс
166	Св. Гервасия, мыс		60°20' С	141°00' З	В. И. Беринг	1741	В. И. Беринг	Остров Кака
167	Св. Ильи, гора		59°50' С	146°35' З	То же	1741	То же	
168	Св. Ильи, мыс		60°30' С	140°00' З	"	1728	"	
169	Св. Ильи, хребст		63°25' С	170°20' З	"	1741	"	
170	Св. Лаврентия, остров	Остров Амчитка	62°00' С	177°32' В	"	1766	И. Сидт	
171	Св. Мартина, остров		60°25' С	172°40' З	И. Сидт	1766	И. Сидт	
172	Св. Матвея, остров		63°30' С	162°05' З	Г. Л. Прибылов	1787	Г. Л. Прибылов	Прибылова острова
173	Св. Михаила		57°47' С	152°20' З	То же	1741	То же	
174	Св. Павла, гавань		57°08' С	170°01' З	А. И. Чириков	1741	А. И. Чириков	Остров Кыка
175	Св. Павла, острова		31°55' С	177°10' В	Русские мореходы	1-я половина XVIII в.	Русские мореходы	Остров Афонгак
176	Св. Стефана, мыс	Дак	58°07' С	152°29' З				
177	Солсепен, бухта							

№ п.п.	Русское название	Местное или иностранное название	Местоположение		Кто открыл	Когда открыл	Кто назвал	Примечание
			широта	долгота				
178	Сельевои, залива		59°30' С	151°40' З	Русские мореходы	В конце XVIII в.	Русские мореходы	Остров Сенсолоа
179	Сенсолоа, бухта		54°54' С	159°16' З	То же	То же	Российско-Американская компания	Один из Шумановских островов
180	Сенсолоа, остров		54°55' С	159°15' З	То же	То же	Г. А. Сарычев	Залив Бристоль
181	Сенсоловиный, остров		51°57' С	179°37' З	Г. А. Сарычев	1790	М. Н. Станюкович	Остров Атака
182	Селанова, мыс		59°24' С	160°03' З	М. Н. Станюкович	1828	Русские мореходы	
183	Сервисекап, бухта		52°01' С	175°00' З	Русские мореходы	2-я половина XVIII в.	То же	
184	Слуучий, мыс		54°23' С	164°39' З	То же	Середина XVIII в.	То же	
185	Славя, Россия, бухта		51°47' С	178°02' З	Г. А. Сарычев	1791	Русские мореходы	Остров Кааык
186	Спиридова, бухта		57°37' С	158°45' З	Русские мореходы	Конец XVIII в.	То же	
187	Стеллера, бухта		52°59' С	172°56' З	То же	Середина XVIII в.	То же	
188	Степового, залива		55°40' С	160°00' З	• • •	Середина XVIII в.	То же	
189	Стропанова, мыс		56°50' С	158°50' З	М. Н. Станюкович	1828	Российско-Американская компания	
190	Тельевока, мыс		54°00' С	166°53' З	Штурман Курциан	1846	Курциан	Остров Улаалашка
191	Толстой, мыс		63°35' С	161°00' З	А. Толстых		Архимадритов	
192	Толстой, мыс	Чинак	58°24' С	152°05' З	Русские мореходы	2-я половина XVIII в.	То же	
193	Топкий, мыс		57°25' С	152°14' З	Русские мореходы		Русские мореходы	Остров Кааык
194	Трех Святителей, гавань		57°07' С	159°26' З				

№ п.п.	Русское название	Местное или иностранное название	Местоположение		Кто открыл	Когда открыл	Кто назвал	Примечание
			широта	долгота				
195	Туалый остров (Чирикова)		55°50' С	155°40' З	В. И. Беринг	1741	В. И. Беринг (1741 г.)	Ванкупер в 1795 г. думал, что открыл новый остров, назвал его остров Чирикова
196	Угольный, залива		50°12' С	151°21' З	Мореходы Российско-Американской компании	1-я половина XIX в.	Российско-Американская компания	Залив Бристоль
197	Угольный, мыс		50°40' С	151°20' З	А. Худобин	1828	М. Н. Станюкович	То же
198	Устоюва, банка		58°15' С	158°40' З	А. Худобин	1791	Г. А. Сарычев	
199	Худобина, острова		56°00' С	161°00' З	Русские мореходы	2-я половина XIX в.	Русские мореходы	Остров Улаалашка
200	Худобина, острова		55°20' С	162°54' З	А. Худобин	1791	Г. А. Сарычев	Остров Атту
201	Черная, гора		56°35' С	158°47' З	Русские мореходы	2-я половина XIX в.	Российско-Американская компания	Залив Аляска
202	Черновская, бухта		59°25' С	167°22' З	А. И. Чириков	1742	А. И. Чириков	Остров Атака
203	Чирикова, мыс		68°15' С	175°55' З	Мореходы Российско-Американской компании	1827	А. К. Эголин	Залив Бристоль
204	Чичагова, бухта		55°39' С	160°14' З	А. К. Эголин	1827	М. Н. Станюкович	Архипелаг Аляска
205	Чичагова, Гавань, бухта		52°46' С	173°18' З	Мореходы Российско-Американской компании	В 1-й половине XIX в.	Ю. Ф. Липетский (1805)	
206	Чичагова, мыс		58°20' С	157°30' З	А. И. Чириков	1741	Ю. Ф. Липетский (1805)	
207	Чичагова, остров		57°50' С	158°40' З				
208	Чугачице, острова		56°03' С	151°57' З				

№ п.п.	Русское название	Местное или иностранное название	Местоположение		Кто открыл	Когда открыл	Кто назвал	Примечание
			широта	долгота				
209	Шелхова, бухта		57°10' С	135°40' З	Д. Каланин	1805	Ю. Ф. Лисенский	Архипелаг Але-ксандра, остров Залив Аласка
210	Шелхова, проли.		57°30' С	155°00' З	Русские мореходы	1783	Русские мореходы	Острова Улимак
211	Шелхова, озеро	Куксокек	59°10' С	155°25' З			Описан в 1828 г. и назван М. Н. Станюкович	
212	Шилова, мыс	Кейв	54°40' С	164°37' З				
213	Шимарева, населенный пункт		66°10' С	166°10' З	О. Е. Коцебу	1816	О. Е. Коцебу	Северо-западный берег Северной Кюку острова Шуманна
214	Шимарева, бухта		66°10' С	165°55' З	В. И. Беринг	1741	В. И. Беринг	
215	Шуманна, бухта		54°40' С	159°30' З	То же	1741	То же	
216	Шуманна, острова		55°00' С	160°00' З	О. Е. Коцебу	1816	О. Е. Коцебу	Залив Коцебу
217	Эспенберга, мыс		66°32' С	163°42' З	А. К. Этолин	1821	Крузенштерн	Между материком и островами От-кратне
218	Этолина, проли.		60°20' С	165°10' З	В. С. Хромченко	1821	Российско-Амери-канская компания	Остров Откратне (Шуманн)
219	Этолина (Хромченко), мыс		60°25' С	166°10' З	О. Е. Коцебу	1816	О. Е. Коцебу	Залив Коцебу
220	Эшольева, бухта		66°20' С	161°45' З	Архипелаг		Архипелагитов	
221	Южный, мыс		56°45' С	154°09' З	Ю. Ф. Лисенский	1741	Ю. Ф. Лисенский	Залив Аласка
222	Якобия, остров		58°00' С	136°25' З	В 1-й полто-вине XIX в.		Мореходы Российско-Американской компании	К северу от ост-рова Шуманна
223	Якова, остров		55°45' С	159°22' З				
224	Якорный, мыс		59°51' С	151°51' З				

Литература

- Андреев А. И. (редактор). Русские открытия в Тихом океане и Северной Америке в XVII—XIX вв. Сборник документов. Издательство Академии Наук СССР, Л., 1944.
- Андреев В. Документы по экспедиции капитана-командора Беринга в Америку в 1741 г. Морской сборник, 1893, № 5, стр. 1—16.
- Беллинсгаузен. Двукратные изыскания в Южном Ледовитом океане и плавание вокруг света в продолжение 1819, 1820 и 1821 годов, совершенные на шлюпах «Восток» и «Мирный» под начальством Беллинсгаузена, командира шлюпа «Восток» Шлюпом «Мирным» начальством лейтенанта Лазарева. 2 части, СПб., 1831. Переиздано Географическим издательством в 1949 г.
- Бендер Н. А. — Имена русских людей на карте мира Географизм, 1948.
- Берг Л. С. Из истории открытия Алеутских островов. Землеведение XXVI, вып. 1—2, М., 1924, стр. 114—132.
- Берг Л. С. Открытие Камчатки и экспедиция Беринга, М., 1946.
- Берг Л. С. Очерки по истории русских географических открытий, 2-е изд., 1949 г.
- Берх В. Н. Хронологическая история открытия Алеутских островов или подвиги российского купечества. СПб., 1823.
- Гичева В. Ф. Материалы для истории экспедиции Академии Наук в XVIII и XIX вв. Издание Академии Наук, Л., 1940.
- Гурецкий В. О. Русские мореплаватели. Сборник под редакцией В. С. Лупач (Критическая статья). Известия Географического общества, 1954 г., т. 86, вып. 6, стр. 539.
- Ефимов А. В. Из истории великих русских географических открытий, М., 1949.
- Ефимов А. В. Из истории русских экспедиций в Тихом океане Первая половина XVIII в. Воениздат, М., 1948, стр. 341.
- Ефимов А. В. Из истории русских географических открытий в Северном Ледовитом и Тихом океанах XVII — первая половина XVIII в. М., 1950.
- Зубов Н. Н. Отечественные мореплаватели — исследователи морей и океанов. Географизм, 1954.
- Ивановичев Н. Обзорение русских кругосветных путешествий. СПб., 1850.
- Коцебу О. Е. Путешествия вокруг света на военном шлюпе «Предприятие» в 1823—1826 годах. 1-ое изд. 1828, 2-ое изд. 1948.
- Коцебу О. Е. Путешествие в Южный океан и Берингов проли для отыскания северо-восточного морского прохода, предпринятое в 1815—1818 гг. на корабле «Юрлик» под начальством флота лейтенанта Коцебу, ч. I и II. 1821, 2-ое изд. 1948.
- Крузенштерн И. Ф. Путешествие вокруг света в 1803, 1804, 1805 и 1806 годах на кораблях «Надежда» и «Нева». Географизм М., 1950 (2-е издание).
- Лазарев М. П. Записки о плавании военного шлюпа «Благонамеренный» в Берингов пролив и вокруг света для открытия в 1819, 1820, 1821 и 1822 годах, вельные гвардейского экипажа лейтенантом М. П. Лазаревым (1950).
- Лазарев М. П. Описание шлюпов «Восток» и «Мирный» в 1819—1821 годах (переиздано в сб. «Русские открытия в Антарктике в 1819—1820 годах», 1951 г.).
- Лебедев Д. М. География в России XVII в. М.—Л., 1949.
- Лебедев Д. М. Плавание А. И. Чирикова на пакетботе «Св. Павла» к побережьям Америки, М., 1951.
- Лисенский Ю. Ф. Путешествие вокруг света в 1803—1806 гг. на корабле «Нева» под начальством флота капитан-лейтенанта, ныне капитана I ранга и кавалера Юрия Лисенского. 1812 г., 2-ое изд., 1947.
- Литке Ф. П. Путешествие вокруг света на военном шлюпе «Связия» в 1826—1829 гг. изд. 1835—1836. 2-е обработанное издание под редакцией Н. Зубова и А. Добровольского, 1948.
- Мякарова Р. В. Экспедиция русских промышленных людей в Тихом океане в XVIII в. Вопросы географии, Сб., 17, 1950.
- Медведева О. Е. Русские географические открытия в Тихом океане и в Северной Америке (50-е начало 80-х годов XVIII в.), издание 1952 г.
- Миклухо-Маклай Н. Н. Собрание сочинений, т. I Дневники путешествий 1870—1872, т. II Дневники путешествий 1873—1877 гг. М., 1950.
- Невский В. В. Первое путешествие России вокруг света. Географизм, 1951.

31. Охунь С. Б. Российско-Американская компания Госсюзквиз М.—Л., 1939
 32. Сарычев Г. А. Путешествие флота капитана Сарычева по Северо-восточной части Сибири, Ледовитому морю и Восточному океану в продолжение восьми лет при географической и Астрономической морской экспедиции... капитана Биллинга с 1785 по 1793 год. Изд. 1802 г., переиздано в 1952 г.

Архивные материалы

- ЦГВМА в гор. Ленинграде. Фонд Беринга.
 Дело № 22 «О плавании к американским берегам под командою Беринга и Чирикова 1734—1744».
 Дело № 27 «Инструкция сената капитан-командору Берингу, Адмиралтейства коллегии капитану Шпанбергу 1738».
 Дело № 109 «Журнал плавания капитана Шпанберга с тремя судами в Восточном океане 1738—39».

Русские атласы

1. Атлас Беллинсгаузена «Атлас к путешествию капитана Беллинсгаузена в Южном Ледовитом океане и вокруг света в продолжение 1819, 1820 и 1821 годов» СПб., 1831.
2. Атласы Крузенштерна. 1) «Атлас к путешествию вокруг света капитана Крузенштерна», СПб., 1813; 2) «Атлас Южного моря, сочиненный флота капитан-командором Крузенштерном», т. I, СПб., 1824 г., т. II, СПб., 1826 г.
3. Атлас Сарычева. «Атлас северной части Восточного океана». СПб., 1826.
4. Атлас Тебенъкова. «Атлас северо-западных берегов Америки от Берингова пролива до м. Корриентес, островов Алеутских с присовокуплением некоторых мест северо-восточного берега Азии», 1852 г.
5. Карта открытий росии в северо-восточной части Великого океана. Издана в С. Петербургском депо под наблюдением инж.-генерала Сухтелена в 1802 г.
6. Карта И. Трускотта, составленная им в 1754 г., «Карта открытий сделанных русскими в восточных морях», изд. 1758 г.
7. Морской Атлас, т. I, Навигационно-географический. Издание Морского генерального штаба 1960 г.
8. Морской Атлас, т. I Указатель географических названий Издание Морского генерального штаба, 1952 г.
9. Морской Атлас, т. II Физико-географический. Издание Главного Штаба Военно-Морских Сил, 1953 г.

Иностранная литература

- Аусвейт. Как открывали земной шар. Перевод с английского, М.—Л., 1939.
 Бейкер. История географических открытий и исследований Перевод с английского. М., 1950.
 Geographic Dictionary of Alaska, 1906.

Иностранные атласы

- Atlas historique et géographique. Vidal—Lablache Paris.
 The Library Atlas. Philip, Darby, 1938.
 The Times Atlas gazetter of the World.

В. Г. ЧЕРНИЧИН

ТАБЛИЦЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ
ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ ГАУССА ПО ГЕОГРАФИЧЕСКИМ
И ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Общие соображения

В нашем картографо-геодезическом производстве наряду с географическими координатами широкое применение имеют плоские конформные прямоугольные координаты Гаусса.

Одной из наиболее ответственных работ, связанных с применением координат Гаусса, является вычисление прямоугольных координат Гаусса по данным географическим координатам и решение обратной задачи.

Для этой цели у нас имеются следующие таблицы:

- 1) логарифмические таблицы Ф. Н. Красовского и А. А. Изотова [5];
- 2) нелогарифмические таблицы, составленные под руководством Д. А. Ларина и при участии А. А. Изотова [10];
- 3) нелогарифмические таблицы ГУ ВМС [11].

Перечисленные таблицы дают возможность удобно решать указанные задачи. Однако нельзя утверждать, что в этом направлении не может быть сделано дальнейших улучшений.

Покажем, как могут быть составлены таблицы, предназначенные для указанной цели, отличающиеся от существующих и имеющие некоторые преимущества в сравнении с последними.

Прежде всего отметим, что такие таблицы должны быть только нелогарифмическими. Применение логарифмических таблиц в настоящее время, в условиях широкого распространения арифмометров, нецелесообразно.

Все перечисленные выше таблицы, а также и все издававшиеся ранее в нашей стране (и за границей, за единственным исключением, о котором будет сказано ниже) составлены на основе формул с переменными, зависящими от широты коэффициентами. Поэтому при работе с ними возникает необходимость в интерполяции. Это обстоятельство усложняет работу, служит источником ошибок.

Целесообразно для составления таблиц применить формулы с постоянными коэффициентами, в результате чего отпадет надобность в интерполяции, действия станут проще и единообразнее, при этом число действий не возрастет.

Далее, ширина меридианных координатных полос, применяемых при пользовании проекцией и координатами Гаусса, уменьшается с удалением от экватора. В высоких широтах координатные полосы уже настолько узки, что становятся недостаточно удобными для практического применения.

Целесообразно иметь таблицы, позволяющие производить вычисления в расширенных в высоких широтах координатных полосах.

Итак, таблицы для вычисления прямоугольных координат Гаусса по географическим и для решения обратной задачи должны:

- а) быть нелогарифмическими, т. е. рассчитанными на применение арифмометра;
- б) основываться на формулах с постоянными коэффициентами и не требовать интерполяции;
- в) позволять вести вычисления в расширенных в высоких широтах координатных полосах.

Формулы с постоянными коэффициентами

Формулы с постоянными коэффициентами известны уже давно. Они были получены Иорданом в 1899 г. [14], [15] и [3].

Но выводы Иордана отличаются громоздкостью и неудобством, и им были получены формулы лишь с небольшим числом членов, недостаточным для вычислений даже в 3-градусных координатных полосах. Получение же следующих членов формул по методу Иордана настолько сложно, что практически вообще невозможно.

Вместе с тем указанные формулы можно получить очень простым и удобным способом.

Возьмем обычные формулы с переменными коэффициентами:

$$\left. \begin{aligned} x &= X + a_2 l^2 + a_4 l^4 + a_6 l^6 + \dots \\ y &= b_1 l + b_3 l^3 + b_5 l^5 + \dots \\ \varphi &= \varphi' + a'_2 y^2 + a'_4 y^4 + a'_6 y^6 + \dots \\ l &= b'_1 y + b'_3 y^3 + b'_5 y^5 + \dots \end{aligned} \right\} (1)$$

Разложим коэффициенты a_j и b_j , зависящие от широты φ , в ряд Тейлора по степеням $\Delta\varphi$ — разности между широтой φ данной точки и некоторым постоянным значением широты φ_0 . Коэффициенты a'_j и b'_j , зависящие от широты φ' , а значит и от x , разложим в ряды по степеням Δx — разности значений абсциссы данной точки x и некоторым постоянным значением X_0 , отвечающим широте φ_0 .

После этого форм. (1) приобретут вид:

$$\left. \begin{aligned} x &= X_0 + a_{10}\Delta\varphi + a_{20}\Delta\varphi^2 + a_{30}\Delta\varphi^3 + a_{40}\Delta\varphi^4 + a_{50}\Delta\varphi^5 + a_{60}\Delta\varphi^6 + \dots \\ &\quad + a_{14}\Delta\varphi l^4 + a_{16}\Delta\varphi l^6 + \dots \\ y &= b_{01}l + b_{11}\Delta\varphi l + b_{21}\Delta\varphi^2 l + b_{31}\Delta\varphi^3 l + b_{41}\Delta\varphi^4 l + b_{51}\Delta\varphi^5 l + b_{61}\Delta\varphi^6 l + \dots \\ &\quad + b_{13}\Delta\varphi l^3 + \dots \\ \varphi &= \varphi_0 + a'_{10}\Delta x + a'_{20}\Delta x^2 + a'_{30}\Delta x^3 + a'_{40}\Delta x^4 + a'_{50}\Delta x^5 + a'_{60}\Delta x^6 + \dots \\ &\quad + a'_{14}\Delta x y^4 + a'_{16}\Delta x y^6 + a'_{24}\Delta x^2 y^4 + a'_{26}\Delta x^2 y^6 + \dots \\ l &= b'_{01}y + b'_{11}\Delta x y + b'_{21}\Delta x^2 y + b'_{31}\Delta x^3 y + b'_{41}\Delta x^4 y + b'_{51}\Delta x^5 y + \dots \\ &\quad + b'_{23}\Delta x^2 y^3 + b'_{25}\Delta x^2 y^5 + b'_{33}\Delta x^3 y^3 + \dots \end{aligned} \right\} (2)$$

Аналогичным путем можно получить подобные же формулы для вычисления сближения меридианов τ и масштаба m .

В форм. (2) коэффициенты отнесены к некоторому постоянному значению широты φ_0 .

Такой прием получения формул с постоянными коэффициентами был применен болгарским геодезистом В. К. Христовым [12], продолжительное

время занимавшимся координатами Гаусса. Сущность этого приема настолько проста и очевидна, что не нуждается в подробных объяснениях, отметим только, что таким образом интерполяция заменяется разложением в ряд Тейлора.

В. К. Христов на основе формул (2) составил таблицы для вычисления только x и y с точностью до 0,001 м при значениях $l \leq 4^\circ$ [13].

Таблицы В. К. Христова составлены по размерам так называемого «международного» эллипсоида для широт от 0° до 90° . В таблицах даны значения коэффициентов форм. (2) через $10'$ по широте.

Эти таблицы были изданы в Болгарии в 1947 г. и затем вышли вторым изданием в 1948 г. с добавлением коэффициентов для вычисления сближения меридианов τ и масштаба m .

Формулы с постоянными коэффициентами (2), устанавливающие непосредственную связь между географическими и прямоугольными координатами, и следует использовать для составления таблиц. Эти формулы следует предпочесть формулам, полученным И. Г. Летовальцевым [6] и [7] таким же путем, которым Русиль [16] получил формулы для стереографической проекции эллипсоида. По этой причине в формулах И. Г. Летовальцева имеются промежуточные величины:

s — длина дуги меридиана, заключенной между параллелью данной точки и параллелью некоторой начальной точки;

s_1 — длина дуги параллели данной точки, заключенной между средним меридианом координатной полосы и меридианом данной точки.

Никаких преимуществ введение указанных промежуточных величин не дает и ведет лишь к ненужному усложнению вычислений. Вследствие этого появляется надобность в интерполяции, а при обратном переходе, кроме этого, в применении метода последовательных приближений. И, хотя эти добавочные действия и не отличаются в этом случае сложностью, все-таки они нарушают единообразие и простоту действий, которые получаются в случае применения форм. (2). Общий объем действий в обоих случаях одинаков.

Формулы для вычисления координат в расширенных в высоких широтах координатных полосах

Вряд ли есть необходимость доказывать целесообразность расширения координатных полос в высоких широтах. Около 40% территории СССР лежит севернее параллели с широтой 60° . Если в этой области расширить координатные полосы, положим, вдвое, то в результате этого вдвое сократится число координатных полос. А множественность координатных полос есть главный недостаток прямоугольных координат по сравнению с географическими.

Мысль о расширении координатных полос в высоких широтах не нова. Еще в 1938 году В. В. Каврайским был разработан по поручению Гидрографического управления ГУСМП проект таблиц для вычисления прямоугольных координат Гаусса в высоких широтах Севера.

Проект таблиц предусматривал вычисление x и y с точностью до 0,1 м от $\varphi = 64^\circ$ до $\varphi = 78^\circ$ в полосе в $13'$ по долготе ($l \leq 6^\circ 5'$), а далее, до $\varphi = 82^\circ$ или $\varphi = 84^\circ$ в полосе в $25'$ по долготе ($l \leq 12^\circ 5'$). Этот проект был одобрен на совещании по этому вопросу в Гидрографическом управлении ГУСМП, состоявшемся 25 апреля 1938 года, был одобрен, но осуществлен не был.

В 1948 году Гидрографическим управлением Военно-Морских Сил были изданы таблицы, составленные под руководством А. А. Павлова [11].

Эти таблицы с применением номограмм для получения малых членов дают возможность вычислять в широтах от 30° до 82° с $l \leq 6'$ прямоуголь-

ные координаты с точностью до 0,1 м. и географические — до 0",01. Но такая точность не всегда бывает достаточной, и эти таблицы не решают вопроса о точном вычислении координат в расширенных в высоких широтах координатных полосах.

Листы карты масштаба 1 : 1 000 000, расположенные между широтами 60° и 76°, принято сдвигать по долготе, а между широтами 76° и 88° брать учетверенными [9].

Целесообразно иметь и таблицы, дающие возможность вести вычисления в 12-градусных координатных полосах севернее параллели с широтой 60°.

Искажения на краях расширенных таким образом в высоких широтах координатных полос будут не слишком много отличаться от искажений на краях обычных 6-градусных полос в средних широтах.

Возникает лишь вопрос о том, насколько пригодны обычные форм. (1), составляющие основу форм. (2), для вычислений с увеличенными значениями долготы l в высоких широтах.

Если не требовать большой точности, то вопрос решается просто, что подтверждают таблицы ГУ ВМС [11].

В. В. Каврайский, вычисляя проекцию Гаусса для широкой полосы [2], применял форм. (1), ограничиваясь в x членом с l^6 , а в $y - c l^5$ (т. е. удерживая столько же членов, сколько их обычно берется для точного вычисления координат при $l \leq 3^{\circ}30'$). Для вычисления координат в высоких широтах со значениями долготы $l \leq 16^{\circ}$ он контролировал вычисления по формулам, пригодным для вычисления координат точек, произвольно удаленных от среднего меридиана. Погрешности при этом достигали в значениях x около 1 м, а в значениях y — около 2 м.

Но опыта точного вычисления координат (x и y — до 0,001 м, φ и l — до 0",0001) с увеличенными значениями долготы l не было.

Все наши таблицы для точного вычисления координат имеют в виду значения l , не превосходящие $3^{\circ}30' - 3^{\circ}40'$.

Таблицы В. К. Христовой [13] дают возможность вычислять точные значения x и y при $l \leq 4^{\circ}$.

Ясно, что решить вопрос о том, насколько пригодны для вычислений с увеличенными значениями долготы l , форм. (1), составляющие основу форм. (2), можно лишь путем тщательного исследования.

Форм. (1) являются приближенными. Приближенность их заключается в том, во-первых, что в них отброшены члены с высокими степенями l и y , и в том, во-вторых, что в коэффициентах членов (исключая члены с самыми малыми степенями l и y) отброшены вначале слагаемые, имеющие множителем η^2 , а затем и η^3 , по мере возрастания показателей степеней l и y (η — функция широты, равная произведению второго эксцентриситета меридианного эллипса на косинус широты).

Пренебрежение указанными членами и их слагаемыми, содержащими степени η , производилось, конечно, с учетом того, что значения l не должны превышать определенной величины ($3^{\circ} - 4^{\circ}$).

Отсюда ясно, что исследование форм (1) должно начаться с восстановления отброшенных членов формул, а также отброшенных слагаемых отдельных членов, содержащих степени η , вплоть до абсолютно пренебрегаемых.

Понятно, что при таком исследовании за основу целесообразно взять форм. (1) в таком виде, где они обрываются членами, содержащими l и y в наивысших степенях, и тот способ их получения, который позволяет без слишком больших затруднений находить выражения новых членов и их слагаемых, содержащих степени η .

Таблицы для вычисления прямоугольных координат Гаусса по географическим 187

Этим требованиям в наибольшей степени как в отношении числа членов, так и в отношении способа получения удовлетворяют формулы, полученные В. К. Христовым [12].

В. К. Христов получает формулы для x и y посредством разложения в ряд Тейлора аналитической функции

$$x + iy = f(q + il), \tag{3}$$

а формулы для φ и l , посредством разложения аналитической функции (4), обратной по отношению к функции (3).

$$q + il = F(x + iy). \tag{4}$$

Здесь

$$q = \int_0^{\varphi} \frac{M}{N \cos \varphi} d\varphi. \tag{5}$$

Производные в разложениях в первом случае относятся к точке среднего меридиана с широтой φ , а во втором случае — с широтой φ' (широта основания ординаты).

При получении формулы φ используется еще разложение в ряд приращения широты $\Delta\varphi$ по степеням Δq .

Для выражения сближения меридианов γ через φ и l используется разложение в ряд Тейлора производной аналитической функции $f'(q + il)$ по степеням il , в результате чего легко находится $\lg \gamma$.

Для получения же выражения γ через x и y применяется разложение производной аналитической функции $F'(x + iy)$ по степеням iy , в результате чего опять легко находится $\lg \gamma$.

Для получения формул масштаба m также используются указанные разложения в ряд Тейлора производных аналитических функций (3) и (4).

Формулы для вычисления x , y , φ , l , γ и m , полученные В. К. Христовым описанным способом, исследовались далее с целью выяснения их пригодности для точных вычислений со значениями $l \leq 7^{\circ}$ при $\varphi \geq 60^{\circ}$ (учитывая удвоенную величину перекрытия).

При этом принималось, что

x и y	должны иметь погрешности не более 0,001 м;
φ и l	" " " " 0",0001;
γ	" " " " 0",001;
$(m-1)10^6$	" " " " 1,

как это и делается при точных вычислениях.

В процессе исследования в случае надобности находились новые члены, с более высокими степенями l и y , а также слагаемые отдельных членов со степенями η либо с целью их присоединения к имеющимся членам формул, либо с той целью, чтобы убедиться, что ими можно пренебречь.

В результате были получены следующие формулы для вычислений с указанной точностью со значениями $l \leq 7^{\circ}$ при $\varphi \geq 60^{\circ}$.

$$x = X + \frac{1}{2} N \cos^2 \varphi l^2 + \frac{1}{24} N \cos^4 \varphi \cdot l (5 - l^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) \cdot l^4 + \frac{1}{720} N \cos^6 \varphi \cdot l (61 - 58l^2 + l^4 + 270\eta^2 - 330l^2 \eta^2) l^6 \tag{6}$$

$$y = N \cos \varphi \cdot l + \frac{1}{6} N \cos^3 \varphi (1 - l^2 + \eta^2) l^3 + \frac{1}{120} N \cos^5 \varphi (5 - 18l^2 + l^4 + 14\eta^2 - 58l^2\eta^2 + 13\eta^4 - 64l^2\eta^4) l^5 + \frac{1}{5040} N \cos^7 \varphi (61 - 479l^2 + 179l^4 - l^6 + 331\eta^2 - 3298l^2\eta^2 + 1771l^4\eta^2) l^7 \quad (7)$$

$$\varphi = \varphi' + \frac{1}{2N^2} l' (-1 - \eta'^2) y'^2 + \frac{1}{24N^4} l' (5 + 3l'^2 + 6\eta'^2 - 6l'^2\eta'^2 - 3\eta'^4 - 9l'^2\eta'^4) y'^4 + \frac{1}{720N^6} l' (-61 - 90l'^2 - 45l'^4 - 107\eta'^2 + 162l'^2\eta'^2 + 45l'^4\eta'^2) y'^6 + \frac{1}{40320N^8} l' (1385 + 3633l'^2 + 4095l'^4 + 1575l'^6) y'^8 \quad (8)$$

$$l = \frac{1}{N^2} y + \frac{1}{6N^4} y^3 (-1 - 2l'^2 - \eta'^2) y^3 + \frac{1}{120N^6} (5 + 28l'^2 + 24l'^4 + 6\eta'^2 + 8l'^2\eta'^2) y^5 + \frac{1}{5040N^8} (-61 - 662l'^2 - 1320l'^4 - 720l'^6 - 107\eta'^2 - 440l'^2\eta'^2 - 336l'^4\eta'^2) y^7 + \frac{1}{362880N^{10}} (1385 + 24568l'^2 + 83664l'^4 + 100800l'^6 + 40320l'^8) y^9 \quad (9)$$

$$\eta = \cos \varphi \cdot t \cdot l + \frac{1}{3} \cos^3 \varphi \cdot t (1 + 3\eta^2 + 2\eta^4) l^3 + \frac{1}{15} \cos^5 \varphi \cdot t (2 - l^2 + 15\eta^2 - 15l^2\eta^2 + 35\eta^4 - 50l^2\eta^4) l^5 \quad (10)$$

$$\eta = \frac{1}{N^2} l' y + \frac{1}{3N^4} l' (-1 - l'^2 + \eta'^2 + 2\eta'^4) y^3 + \frac{1}{16N^6} l' (2 + 5l'^2 + 3l'^4 + 2\eta'^2 + l'^2\eta'^2) y^5 + \frac{1}{315N^8} l' (-17 - 77l'^2 - 105l'^4 - 45l'^6) y^7 \quad (11)$$

$$m = 1 + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi (1 + \eta^2) l^2 + \frac{1}{24} \cos^4 \varphi (5 - 4l^2 + 14\eta^2 - 28l^2\eta^2 + 13\eta^4 - 48l^2\eta^4) l^4 + \frac{1}{720} \cos^6 \varphi (61 - 148l^2 + 16l^4) l^6 \quad (12)$$

$$m = 1 + \frac{1}{2N^2} (1 + \eta^2) y^2 + \frac{1}{24N^4} (1 + 6\eta^2) y^4 \quad (13)$$

В форм. (6) — (13) $t = \operatorname{tg} \varphi$.
Форм. (6) — (13) отличаются от формул, полученных В. К. Христова, следующим:

- 1) в x опущен член с l^5 ;
- 2) в y добавлено слагаемое с η^4 в члене с l^5 и слагаемое с η^2 в члене с l^7 ;
- 3) в l добавлено слагаемое с η^2 в члене с l^3 и добавлен член с y^7 ;
- 4) в η (через φ и l) опущен член с l^2 и добавлено слагаемое с η^4 в члене с l^5 ;
- 5) в m (через φ и l) добавлено слагаемое с η^4 в члене с l^4 ;
- 6) в m (через x и y) опущен член с y^6 .

Как видно, в формулах В. К. Христова понадобилось добавить лишь один новый член в l и в некоторых членах новые слагаемые со степенями η , но новых членов и новых слагаемых со степенями η в имеющихся членах, пришлось находить гораздо больше, не имея заранее уверенности в их пренебрегаемости.

Понятно, что при вычислениях с $l \leq 3^\circ 30'$ в средних широтах ($\varphi \leq 60^\circ$), некоторые из членов в указанных формулах отпадают.

Из форм. (6) — (13) легко получить указанным выше способом и формулы с постоянными коэффициентами вида (2).

Все члены форм. (6) — (13) войдут в формулы с постоянными коэффициентами (отнесенные к широте φ_0), кроме этого, появятся новые члены, содержащие степени $\Delta\varphi$ и Δx . Число этих новых членов будет зависеть от того, насколько часто будут браться значения φ_0 , т. е. от шага таблицы, а также и от заданной точности. Если требовать одинаковой линейной точности при вычислении географических координат, тогда для l можно понизить в самых высоких широтах точность, т. е. по сравнению с указанной выше, и принимать ее при $\varphi > 72^\circ - 0''.0002$ и при $\varphi > 80^\circ - 0''.0003$.

Самих формул с постоянными коэффициентами не приводим, так как способ их получения прост и ясен, и каждый легко найдет любой интересный его член; образцы таблиц, основанных на этих формулах, приводятся ниже.

Мы не касаемся здесь вопроса о вычислении редуцированных расстояний и направлений в расширенных в высоких широтах координатных полосах. Действие имеющихся форм. [4] ограничивается расстоянием между пунктами и их удалением от среднего меридиана. Поскольку расширение координатных полос в высоких широтах не сопровождается большим увеличением удаления границ координатной полосы от среднего меридиана (по сравнению с обычным удалением в средних широтах), можно ожидать, что имеющиеся формулы окажутся пригодными для вычисления без заметных изменений даже в случае наибольшей точности.

Составление (вычисление) таблиц и пользование ими

Из работ В. М. Бадниса [1] следует, что средняя квадратическая погрешность произведения двух k -значных приближенных чисел (ошибочных не более чем на 0,5 единицы последней значащей цифры) после округления результата до k значащих цифр составит примерно одну единицу последней значащей цифры.

Поэтому для получения результатов с указанной выше точностью необходимо, чтобы значение каждого коэффициента форм. (2) имело одну запасную значащую цифру по сравнению с тем числом цифр, которое получается в соответствующем члене (произведении).

В этом случае, если столько же значащих цифр будет в соответствующем произведении степеней $\Delta\varphi$ и l или y , каждый член (произведение) будет иметь среднюю квадратическую погрешность, равную половине 0,1 последней значащей цифры (не запасной).

Предельная погрешность каждого отдельного члена (слагаемого) не превышает в этом случае 0,3—0,4 единицы последней значащей цифры, а погрешности искомого величин (суммы) не выйдут из указанных выше пределов, так как погрешность суммы (средняя квадратическая и предельная) прямо пропорциональна квадратному корню из числа слагаемых, если слагаемые имеют одинаковые погрешности.

Таким образом, необходимо точно знать, сколько будет иметь каждый член форм. (2) значащих цифр при разных значениях широты. Удобно построить графики хода изменения каждого члена с широтой. В случае прямого перехода (когда даны географические координаты) графики чле-

пов всех величин строятся легко. При обратном переходе дело несколько осложняется, в значениях членов приходится y заменять его первым членом; такая приближенная подстановка вызывает погрешности, но не столь большие, чтобы искажалось число значащих цифр в членах.

Полезно иметь такие графики и для малых слагаемых отдельных членов, содержащих степени η , чтобы судить о том, когда эти слагаемые можно отбросить и когда следует удерживать.

Значения коэффициентов, имеющие много значащих цифр (5 и больше) удобнее вычислять на арифмометре, а имеющие мало значащих цифр (4 и меньше), удобнее вычислять с помощью логарифмов.

Значения коэффициентов прямого перехода удобно вычислять через $20'$ широты, а обратного — через $10'$ и получать их с двумя запасными значащими цифрами, имея в виду последующую интерполяцию.

У тех множителей, в результате перемножения которых получаются значения коэффициентов, следует иметь еще одну запасную значащую цифру (см. В. М. Брадис [1], Н. Н. Матусевич [8] и др.).

Интерполяцию при вычислении промежуточных значений коэффициентов удобно производить теми способами, которые указываются в работе Н. Н. Матусевича [8].

Таблицы целесообразно составить, как это обычно и делается, в пределах широт от 30° до 82° или 84° .

Коэффициенты должны быть даны с таким расчетом, чтобы можно было вести вычисления с $l \leq 3^\circ 30'$ при $\varphi \leq 60^\circ$ и с $l \leq 7^\circ$ при $\varphi > 60^\circ$.

Значения коэффициентов удобнее всего дать через $1'$, но если их иметь и через $5'$, то вычисления координат не сильно усложнятся, а объем таблиц уменьшится почти в 5 раз.

Устройство предлагаемых таблиц видно из приложенных образцов, вычисленных по размерам эллипсоида Ф. Н. Красовского (приложение 1, стр. 192).

Коэффициенты, которые отпадают при $l < 3^\circ 30'$, отделены жирной чертой, а отпадающие при $l < 1^\circ 45'$ — двойной чертой.

Примеры использования таблиц даны в приложении 2 (стр. 195). Надо иметь в виду, что

$$\overline{\Delta\varphi} = \Delta\varphi'' \cdot 10^{-4};$$

$$\overline{l} = l'' \cdot 10^{-4};$$

$$\overline{\Delta x} = \Delta x_m \cdot 10^{-5};$$

$$y = y_m \cdot 10^{-5};$$

Здесь:

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0,$$

где φ_0 — табличное значение широты, ближайшее к φ ;

$$\Delta x = x - X_0,$$

где X_0 — табличное значение $X = a_{\varphi_0}$, ближайшее к x .

Найдя $\overline{\Delta\varphi}$ (или $\overline{\Delta x}$), получают произведение степеней $\overline{\Delta\varphi}$ и \overline{l} ($\overline{\Delta x}$ и \overline{y}), при этом показатели степеней множителей должны соответствовать индексам коэффициентов. Например, коэффициенту a_{12} будет отвечать произведение $\overline{\Delta\varphi} \cdot \overline{l}^2$. В произведении надо оставить столько значащих цифр, сколько их имеется в соответствующем коэффициенте. А в каждом из множителей надо брать одной значащей цифрой больше, чем оставляют в произведении. Затем умножают произведения степеней $\overline{\Delta\varphi}$ и \overline{l} ($\overline{\Delta x}$ и \overline{y}) на соответствующие коэффициенты, оставляя в произведении одну запасную цифру.

Далее получаемые произведения суммируются, и находится искомая величина.

При вычислении \overline{y} и \overline{m} используются готовые произведения $\overline{\Delta\varphi}$ и \overline{l} ($\overline{\Delta x}$ и \overline{y}).

Контролем вычисления x , y , \overline{y} и \overline{m} по φ и l служит вычисление φ , l , \overline{y} и \overline{m} по данным x и y и наоборот.

Если брать $l \leq 14'$ при $\varphi > 78'$, то, пользуясь предлагаемыми таблицами, можно получать x , y , \overline{y} и \overline{m} с точностью в 10 раз меньше указанной, а значения φ , l , \overline{y} и \overline{m} (по данным x и y) с точностью в 100 раз меньше указанной, т. е. прямоугольные координаты можно получить с точностью до 0,01 м, а географические — до 0,01.

В одном из приведенных примеров вычислены все величины при $l = 7'$, а в другом вычислены x и y при $l = 3^\circ 30'$.

Последний пример показывает, что при пользовании предлагаемыми таблицами потребуется не больше действий, чем при пользовании любыми другими, если сравнение производить при соблюдении равенства условий (одинаковая величина l , одинаковый шаг таблиц, одинаковая точность).

Но несомненное преимущество предлагаемых таблиц заключается в простоте устройства и в простоте пользования ими, в полном единообразии действий при вычислении всех величин, сводящихся к одному умножению. Вследствие этого требуется меньше времени, чтобы разорваться в конструкции таблиц, уменьшается возможность ошибок при вычислениях, появляется возможность привлечения к работе работников не такой высокой квалификации, как при работе с другими таблицами. Указанные преимущества предлагаемых таблиц, вместе с пригодностью их для точных вычислений с увеличенными значениями долготы l в высоких широтах, позволяют надеяться, что они могут оказаться небесполезными для нашего картографо-геодезического производства.

Литература

- Брадис В. М. Теория и практика вычислений. М., 1935.
- Капранский В. В. Таблица проекции Гаусса-Крюгера для широкой полосы. Труды ЦНИИГАиК, выпуск 16, М., 1937.
- Кельд Н. Г. Высшая геодезия и геодезические работы. Часть I. Л.—М.—Новосибирск, 1932.
- Красовский Ф. Н. Руководство по высшей геодезии. Часть II, М., 1942.
- Красовский Ф. Н. и Изотов А. А. Таблицы для логарифмического вычисления координат Гаусса-Крюгера для широт от 30° до 80° . Эллипсоид Ф. Н. Красовского. М., 1946.
- Летовальцев И. Г. Равноугольная проекция Гаусса земного эллипсоида на плоскость. М., 1950.
- Летовальцев И. Г. Таблицы для вычисления прямоугольных и географических координат с постоянными коэффициентами. Сборник статей по геодезии, выпуск II, М., 1952.
- Матусевич П. Н. Методы и приемы математических вычислений в геодезических и астрономических работах. Геодезия Том IX, Л.—М., 1949.
- Наставление по составлению и подготовке к изданию карты масштаба 1:1 000 000. М., 1951.
- Таблицы для вычисления координат Гаусса-Крюгера в пределах широт от 30° до 80° . Эллипсоид Красовского. М., 1947.
- Таблицы для вычисления географических и прямоугольных координат Эллипсоид Ф. Н. Красовского ГУ ВМС, 1948.
- Христов В. К. Гаусс-Крюгеровы координаты вверху ротационния эллипсоида. София, 1946.
- Христов В. К. Таблицы за целия свят за исчисление с машина на Гаусс-Крюгерови координати, меридиана конергенция и масштаб от географски координати вверху интернационалния эллипсоид на Хейфорда. София, 1948.
- Jordan Potenzenreihen für konforme ebene Koordinaten und geographische Koordinaten. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1899, S. 162—176.
- Jordan — Eggert Handbuch der Vermessungskunde Dritter Band Stuttgart, 1923.
- Roussille H. Cours d'astronomie appliquée et géodésie. Paris, 1924.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Таблица для вычисления абсциссы x

φ	$a_{00} = X_0$	a_{10}	a_{20}	a_{30}	a_{40}	a_{50}	a_{60}	a_{70}	a_{80}	a_{90}
75°0'	8 327 081,746	+310 056,2	+1879,84175	-315,56	-0,22011	-0,017	-0,00007	18		
01'	8 328 912,084	+310 056,7	+1877,94810	-315,56	-0,22021	-0,017	-0,00007	16		
02'	8 330 802,425	+310 057,1	+1876,05381	-315,77	-0,22031	-0,016	-0,00007	13		
03'	8 332 662,769	+310 057,6	+1874,15888	-315,87	-0,22041	-0,016	-0,00007	11		
04'	8 334 523,116	+310 058,0	+1872,26331	-315,98	-0,22051	-0,016	-0,00007	08		
05'	8 336 383,466	+310 058,5	+1870,36711	-316,09	-0,22060	-0,016	-0,00007	05		

Таблица для вычисления ординаты y

φ	b_{01}	b_{11}	b_{21}	b_{31}	b_{41}	b_{51}	b_{61}	b_{71}	b_{81}	b_{91}
75°0'	+80 284,67278	-14 519,75	-96	-27,29320	+3,400	-0,00086	4	+0,002	+0,00000	16
01'	+80 197,55084	-14 520,00	-96	-27,21579	+3,406	-0,00085	4	+0,002	+0,00000	16
02'	+80 110,42198	-14 522,05	-96	-27,13834	+3,411	-0,00084	4	+0,002	+0,00000	16
03'	+80 023,29323	-14 523,20	-96	-27,17486	+3,416	-0,00083	4	+0,002	+0,00000	16
04'	+79 936,14357	-14 524,35	-96	-27,15155	+3,421	-0,00082	4	+0,002	+0,00000	16
05'	+79 848,99403	-14 525,50	-96	-27,13389	+3,426	-0,00081	4	+0,002	+0,00000	16

Продолжение прилож. I

Таблицы для вычисления прямоугольных координат Гаусса по географическим 193

Таблицы для вычисления широты φ

φ	a'_{10}	a'_{02}	a'_{12}	a'_{04}	a'_{22}	a'_{14}	a'_{06}	a'_{26}
75°06'	+3225,193	-94,72217	4	+0,09123	65	-0,35	+0,0160	17
07'	+3225,189	-94,83239	6	+0,09153	50	-0,35	+0,0161	26
08'	+3225,184	-94,94406	1	+0,09183	48	-0,35	+0,0162	35
09'	+3225,179	-95,05537	0	+0,09213	59	-0,35	+0,0162	44
10'	+3225,175	-95,16692	4	+0,09243	84	-0,35	+0,0163	53

Таблица для вычисления долготы l

φ	b'_{01}	b'_{11}	b'_{21}	b'_{31}	b'_{41}	b'_{51}	b'_{61}	b'_{71}	b'_{81}	b'_{91}
75°06'	+12537,32359	+736,4288	+44,8	-14,92905	5	-2,6808	+0,03234	66	+0,00972	345
07'	+12551,03980	+738,0980	+44,9	-14,97982	6	-2,7029	+0,03252	80	+0,00979	411
08'	+12564,78653	+739,7729	+45,1	-15,03022	1	-2,7150	+0,03271	07	+0,00985	477
09'	+12578,56459	+741,4534	+45,2	-15,08084	3	-2,7272	+0,03289	46	+0,00992	544
10'	+12592,37399	+743,1396	+45,4	-15,13169	3	-2,7395	+0,03307	97	+0,00999	611

Таблица для вычисления сближения меридианов γ по φ и η

φ	ϵ_{01}	ϵ_{11}	ϵ_{02}	ϵ_{12}	ϵ_{03}	ϵ_{13}	ϵ_{04}	ϵ_{14}	ϵ_{05}	ϵ_{15}	ϵ_{06}	ϵ_{16}	ϵ_{07}
75°01'	+9659,2826	+125,5	+0,50764	-0,18	-2,691	+0,03234	6	+0,0097	-0,00019	2	-0,00019	2	-0,00019
02'	+9660,01073	+125,3	+0,50657	-0,18	-2,703	+0,03252	8	+0,0098	-0,00019	1	-0,00019	1	-0,00019
03'	+9660,76238	+125,2	+0,50551	-0,18	-2,716	+0,03271	0	+0,0099	-0,00019	1	-0,00019	1	-0,00019
04'	+9661,53321	+125,1	+0,50445	-0,18	-2,728	+0,03290	4	+0,0099	-0,00019	1	-0,00019	1	-0,00019
05'	+9662,32322	+124,8	+0,50339	-0,18	-2,740	+0,03308	4	+0,0100	-0,00019	0	-0,00019	0	-0,00019
06'	+9663,12242		+0,50233										

Таблица для вычисления сближения меридианов γ по x и u

φ	ϵ_{01}	ϵ_{11}	ϵ_{02}	ϵ_{12}	ϵ_{03}	ϵ_{13}	ϵ_{04}	ϵ_{14}	ϵ_{05}	ϵ_{15}	ϵ_{06}	ϵ_{16}	ϵ_{07}
75°06'	+1215,8700	+4,5	-14,89005	-0,07	-2,691	+0,03234	6	+0,0097	-0,00008	35	-0,00008	35	-0,00008
07'	+1216,6693	+4,5	-14,87044	-0,07	-2,703	+0,03252	8	+0,0098	-0,00008	41	-0,00008	41	-0,00008
08'	+1217,4867	+4,5	-15,02065	-0,07	-2,716	+0,03271	0	+0,0099	-0,00008	48	-0,00008	48	-0,00008
09'	+1218,3218	+4,5	-15,17148	-0,07	-2,728	+0,03290	4	+0,0099	-0,00008	54	-0,00008	54	-0,00008
10'	+1219,1742	+4,5	-15,32334	-0,07	-2,740	+0,03308	4	+0,0100	-0,00008	61	-0,00008	61	-0,00008

Таблица для вычисления искажения длины ($m-1$); 10^8 (по φ и l)

φ	d_{02}	d_{12}	d_{04}	φ	d'_{02}	d'_{04}
75°01'	+7876,05	-2850	-5,256	75°06'	+12219,1	+0,25
02'	+7888,95	-2850	-5,246	07'	+12219,0	+0,25
03'	+7911,86	-2840	-5,237	08'	+12219,0	+0,25
04'	+7934,80	-2830	-5,228	09'	+12219,0	+0,25
05'	+7957,75	-2820	-5,218	10'	+12219,0	+0,25
	+7980,72	-2810	-5,209			

Пример 1

Вычисление x и y

$\varphi = 75^\circ 02' 30'' 0000$	$\Delta\varphi = +30'' 0000$	$\overline{\Delta\varphi} = +0,003$				
$l = +7^\circ$	$l = +25 200'' 0000$	$\overline{l} = +2,52$				
$\varphi_0 = 75^\circ 02'$		$\overline{\Delta\varphi^2} = +0,000009$				
$\overline{\varphi} = +$	6,3504	$a_{10}\Delta\varphi^2 = +$	$a_{12}\Delta\varphi^2 = -$	6,0157		
$\Delta\varphi^2 = +$	0,01905 1	930,1713	$a_{14}\overline{l} = -$	8,8847		
$\overline{\varphi} = +$	40,328	11 913,6921	$a_{14}\Delta\varphi^2 = -$	0,0019		
$\overline{\Delta\varphi^2} = +$	0,12	8 343 646,2884	$a_{06}\overline{l} = -$	0,0183		
$\overline{\varphi} = +$	256	14,9206	$a_{06}\Delta\varphi^2 = -$	14,9206		
		$x = +8 343 631,3676$ м				
$\Delta\varphi = +$	0,00756	$b_{01}\overline{l} = +$	201 878,2633	$b_{11}\Delta\varphi^2 = -$	109,7867	
$\Delta\varphi^2 = +$	0,00002 3	0,1633	$b_{19}\Delta\varphi^2 = +$	0,0022	$b_{03}\Delta\varphi^2 = -$	435,2076
$\overline{\varphi} = +$	16,00301	0,0000	$b_{07}\overline{l} = +$	0,0010	$b_{07}\overline{l} = -$	0,0866
$\Delta\varphi^2 = +$	0,04801	0,0010	$b_{07}\Delta\varphi^2 = +$	201 878,2633	$b_{07}\Delta\varphi^2 = -$	545,0823
$\overline{\varphi} = +$	102	545,0823	$y = +201 333,3466$ м			
$\Delta\varphi^2 = +$	0,3					
$\overline{\varphi} = +$	650					

Вычисление φ и l

$x = +8 343 631,3676$	$\overline{\Delta x} = -$	0,001935232	
$X_0 = +8 343 824,891$	$\overline{y} = +$	2,013333465	
$\Delta x = -$	193,5233 м	$\Delta x^2 = +$	0,000003745
$\varphi_0 = 75^\circ 09'$			
$\overline{\varphi} = +$	4,05351 160	$a_{10}\Delta x^2 = -$	6,24147
$\Delta x^2 = -$	0,00784 45	$a_{02}\overline{y}^2 = -$	385,3080
$\Delta x\overline{y}^2 = +$	0,00001 5	$a_{02}\Delta x^2\overline{y}^2 = -$	0,00001
$\overline{\varphi} = +$	16,43096	$a_{14}\Delta x^2\overline{y}^2 = -$	0,00052
$\Delta x\overline{y}^2 = -$	0,0318	$a_{06}\overline{y}^2 = -$	0,01095
$\overline{\varphi} = +$	66,603	-391,5609	$\overline{\varphi} = 75^\circ 09'$
$\overline{\varphi} = +$	270	+ 1,56097	$\Delta\varphi = 6' 30'' 0000$
		$\Delta\varphi = -390'' 0000$	$\varphi = 75^\circ 02' 29'' 9999$
$\Delta x\overline{y} = -$	0,00389 6269	$b_{01}\overline{y} = +$	25324,8450
$\Delta x^2\overline{y} = +$	0,00000 754	$b_{21}\Delta x^2\overline{y} = +$	0,00034
$\overline{y} = +$	8,16107 06	$b_{13}\Delta x^2\overline{y} = +$	0,04307
$\Delta x\overline{y} = -$	0,01579 4	$b_{05}\overline{y} = +$	1,08819
$\overline{y} = +$	33,0810	$b_{05}\overline{y} = +$	0,00013
$\Delta x^2\overline{y} = +$	0,00003 1	$b_{05}\Delta\varphi^2 = +$	25325,87676
$\Delta x\overline{y} = -$	0,0640	- 125,9768	$l = +25 199'' 9999$
$\overline{y} = +$	134,1		$l = 6^\circ 59' 59'' 9999$
$\overline{y} = +$	540		

Вычисление γ

$c_{01}\bar{l} = + 24345,121_2$	$c_{13}\Delta\varphi^2 = - 0,008_8$	$\varphi_0 = 75^\circ 02'$
$c_{11}\Delta\varphi\bar{l} = + 0,946_6$	$c_{03}\bar{l}^2 = - 0,019_3$	
$c_{02}\bar{l}^3 = + 8,089_2$	$- 0,028_1$	
$\frac{24345,121_2}{- 0,02_1}$		
$\gamma = + 24354,129_3 = 6^\circ 45' 54,129_3$		
$c'_{01}\bar{y} = + 24478,997_8$	$c'_{11}\Delta xy = - 2,988_8$	$\varphi_0 = 75^\circ 09'$
$c'_{21}\Delta x^2 y = + 0,000_3$	$c'_{02}y^2 = - 122,999_4$	
$c'_{13}\Delta xy^2 = + 0,043_1$	$c'_{16}\Delta xy^3 = - 0,000_6$	
$c'_{03}y^3 = + 1,038_2$	$c'_{17}y^4 = - 0,011_4$	
$\frac{24478,997_8}{- 126,000_2}$	$- 126,000_2$	
$\gamma = + 24354,129_3 = 6^\circ 45' 54,129_3$		

Вычисление $(m-1) \cdot 10^8$

$d_{12}\bar{l}^2 = + 49798_9$	$d_{12}\Delta\varphi^2\bar{l}^2 = - 54_1$	$\varphi_0 = 75^\circ 02'$
$- 265_3$	$d_{04}\bar{l}^4 = - 211_2$	
$(m-1) 10^8 = + 49533_6$	$- 265_3$	
$d'_{02}y^2 = + 49529_8$		$\varphi_0 = 75^\circ 09'$
$d'_{04}y^4 = + 4_0$		
$(m-1) 10^8 = + 49533_6$		

Пример 2

Вычисление x и y

$\varphi = 75^\circ 02' 30,0000$	$\Delta\varphi = + 30,0000$	$\Delta\bar{\varphi} = + 0,003$
$l = + 3^\circ 30'$	$l = + 12600,0000$	$\bar{l} = + 1,26$
$\varphi_0 = 75^\circ 02'$		$\Delta\bar{\varphi}^2 = + 0,00000 9$
$\bar{l}^2 = + 1,5876$	$a_{00} = + 8 330 802,425$	$a_{12}\Delta\varphi^2\bar{l} = - 1,503_9$
$\Delta\varphi^2\bar{l} = + 0,0047628$	$a_{10}\Delta\varphi = + 930,171_3$	$a_{04}\bar{l}^4 = - 0,555_2$
$\bar{l}^4 = + 2,5205$	$a_{02}\bar{l}^2 = + 2 978,423_0$	$- 2,059_2$
	$+ 8 334 711,019_3$	
	$- 2,059_2$	
	$x = + 8 334 708,960_1 \text{ м}$	
$\Delta\varphi\bar{l} = + 0,00378$	$a_{01}\bar{l} = + 100 939,131_7$	$a_{11}\Delta\varphi\bar{l} = - 54,893_3$
$\Delta\bar{\varphi}^2\bar{l} = + 0,00001 1$	$+ 0,020_2$	$a_{21}\Delta\varphi^2\bar{l} = - 0,001_1$
$\bar{l}^3 = + 2,00037 6$	$+ 100 939,152_2$	$a_{03}\bar{l}^3 = - 54,400_9$
$\Delta\varphi\bar{l}^3 = + 0,00600 1$	$- 109,298_2$	$a_{06}\bar{l}^6 = - 0,002_7$
$\bar{l}^6 = + 3,18$	$y = + 100 829,854_2 \text{ м}$	$- 109,298_2$

В. Н. КОБЛЯКОВА, И. Б. КОСТРИЦ

ВЫСТАВКА СОВЕТСКИХ КАРТ В ГЕОГРАФИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ СОЮЗА ССР

«Карта есть главнейшее орудие для географа, — писал выдающийся географ современности Ю. М. Шокальский, — при ее помощи он подготавливает свои исследования, на нее же наносит полученные результаты, которые в свою очередь будут служить ему ступенью для дальнейшего движения вперед».

И не только географам нужна карта. Трудно указать такую область знаний или такую отрасль хозяйства, в которых не находили бы себе применения географические карты.

Особенно велико значение карт в Советском Союзе — социалистической стране планового хозяйства. В составление карт вносят свой вклад многочисленные научные экспедиции, отряды аэрофотосъемки, геодезические партии. Рядовые картографы и топографы, люди скромные, малоизвестные, создают географические карты, значение которых трудно переоценить.

Нигде в мире не издается столько карт, как в Советском Союзе. И нигде они не стареют так быстро, как у нас. Непрерывно преобразуется земля. За прошедшие 40 лет коренным образом изменилась экономика, культура и быт страны, буквально преобразовалось само лицо земли. Обо всем этом рассказывает нам географическая карта. Она наполняет сердце советского человека патриотической гордостью. Карта — свидетельство наших великих успехов в строительстве коммунизма. В каждой клеточке карты запечатлено творчество всего народа.

Чрезвычайно интересна и показательна выставка, состоявшаяся в Географическом обществе Союза ССР. Она имела две экспозиции. Первая экспозиция, приуроченная к юбилейной научной сессии Общества, состоялась с ноября 1957 года по февраль 1958 года и была посвящена показу главнейших достижений советской картографии за 40 лет Второй экспозиция (спустя 20 лет после принятия решения СНК СССР о выпуске учебных карт), состоявшаяся с февраля по апрель 1958 года, более подробно отразила успехи в области создания учебных карт.

Выставка имела следующие разделы: общегеографические и гипсометрические карты, геологические карты, геоботанические карты, почвенные карты, экономические карты, туристские карты, учебные карты, морские карты, географические атласы, туристские карты, учебные карты.

Выдающимся достижением советской картографии в области создания общегеографических карт является представленная на выставке карта в масштабе 1 : 1 000 000. Начало создания этой карты восходит к первым годам Советского государства. Еще в 1918 году были составлены ее первые листы. Карта является ценным вкладом в дело географического по-

знания нашей Родины. Главное Управление геодезии и картографии при Совете Министров СССР за создание карты было награждено в 1947 году Большой золотой медалью Всесоюзного Географического общества. Миллионная карта послужила основой при создании в том же масштабе ряда специальных карт — геологических, почвенных, геоботанических и др.

Современной мировой картографии не известны гипсометрические карты, равные по своим качествам выставленным на выставке Гипсометрической карте Европейской части СССР в масштабе 1 : 1 500 000 и Гипсометрической карте СССР в масштабе 1 : 2 500 000. Ценнейшим свойством этих карт является то, что они отображают, кроме высотной зональности, еще и морфологическое строение земной поверхности.

Раздел геологических карт включал такие выдающиеся произведения, как Геологическая карта СССР масштаба 1 : 2 500 000 под редакцией Д. В. Наливкина и Тектоническая карта СССР и сопредельных стран под редакцией Н. С. Шатского, удостоенные в последние годы Ленинских премий. Кроме этого демонстрировалась Государственная геологическая карта СССР масштаба 1 : 1 000 000, Геологическая карта Сибирской платформы масштаба 1 : 1 500 000 и др.

В геоботаническом разделе карты были подобраны в хронологическом порядке. Основные и лучшие из них: Геоботаническая карта Европейской части СССР масштаба 1 : 1 050 000, 1932 г., составленная Н. И. Кузнецовым; Карта растительности Средней Азии масштаба 1 : 3 000 000, 1934, составленная Е. П. Коровиным; Карта растительности масштаба 1 : 2 500 000; Карта растительности Средней Азии масштаба 1 : 1 000 000 и Геоботаническая карта СССР масштаба 1 : 4 000 000, изданные в последнее время.

Среди почвенных карт следует, прежде всего, отметить Государственную почвенную карту СССР масштаба 1 : 1 000 000, Почвенную карту Европейской части СССР масштаба 1 : 2 500 000 и Почвенную карту СССР масштаба 1 : 4 000 000.

Широкое применение в нашей стране имеют экономические карты. Одни из них призваны быть настенными наглядными пособиями, другие служат иллюстрациями в энциклопедиях, учебных пособиях и т. п. Советские экономические карты показывают нашу социалистическую экономику во всем ее разнообразии, а экономику капиталистических стран — со всеми свойственными ей противоречиями.

Раздел экономических карт был особенно насыщенным. Здесь были выставлены образцы всех экономических карт, созданных в советское время, многочисленные экономические карты из атласов — Большого советского атласа мира, Атласа Московской области, Атласа Ленинградской области и Карельской АССР, Атласа промышленности СССР, атласа Промышленность СССР на начало второй пятилетки и др.

Были выделены учебные экономические карты, включающие карты по отдельным зарубежным государствам (Индия и Пакистан), областям и республикам СССР (Урал), а также по отдельным отраслям хозяйства СССР (Черная и цветная металлургия СССР) и т. д.

Политико-административные карты включали новую серию карт Союзных республик, краев и областей нашей страны (Воронежская область, Красноярский край), а также мировые карты, карты материков и отдельных зарубежных государств.

Морская картография была представлена 4 крупными разделами: первые русские морские карты, морские карты издания 1917—1945 гг., современные морские карты и морские карты Антарктики. Каждый раздел имел подробный пояснительный текст и охватывал карты совершенно различных участков Мирового океана. Особенно интересна

рукописная схема покрытия Мирового океана морскими путевыми картами за 1917—1957 гг., а также первая карта побережья Антарктиды, составленная советскими антарктическими экспедициями в последние годы.

Раздел туристских карт включал обзорные и маршрутные карты наиболее посещаемых районов нашей Родины (Кавказ, Закарпатье, Подмосковье).

Помимо отдельных географических карт, на выставке широко были представлены и географические атласы. Атлас — наиболее сложный вид картографического произведения. Инициатива создания первых советских географических атласов принадлежит В. И. Ленину. По его предложению в 1920 г. разрабатывался проект атласа России, и Владимир Ильич в ряде писем давал специальные указания и советы по оформлению атласа. Минувшие с того времени годы не прошли напрасно. Советская картография обогатилась многими превосходными географическими атласами. Выход в свет крупного, особенно комплексного, географического атласа всегда является немалым событием в научной жизни. Такие атласы не только отражают общее состояние географических знаний, но и подводят итог развития научных дисциплин.

Среди общегеографических атласов особое место занимает Атлас Мира, представляющий собой фундаментальное произведение. На 283 страницах многокрасочных карт изображена территория всего земного шара. Атлас предназначен для широкого круга работников различных отраслей науки и культуры, государственного аппарата, преподавателей и студентов. Этим определяется его большое общественное значение. Атлас Мира составлен с учетом новейших данных науки и дает обстоятельную сводку знаний по географии современного мира.

Превосходным примером комплексного атласа служит Морской Атлас — единственное в мире фундаментальное картографическое руководство по географии океанов, морей и военно-морской истории. Атлас состоит из трех томов. Первые два тома рассматривают общую и физическую географию океанов и морей, третий том посвящен военно-исторической тематике. Последний том атласа еще не вышел в свет. На выставке он был представлен картами Великой Октябрьской социалистической революции и гражданской войны. Однако изданные карты свидетельствуют о крупном успехе, достигнутом в деле создания исторических карт. Карты отличаются наглядным показом динамики важнейших исторических событий. Создание Морского Атласа явилось выдающимся событием в развитии научных знаний. За рубежом до сих пор нет атласа, который бы столь полно освещал весь комплекс физико-географических условий в океане. И это еще раз говорит о преимуществе советской науки, уверенно идущей вперед и смело решающей все новые и новые задачи.

Среди специальных атласов на выставке особое внимание привлекали: Атлас промышленности СССР, атлас Климат Союза Советских Социалистических Республик, Атлас теплового баланса и др.

Широко экспонировались атласы по республикам и областям СССР (например, Географический атлас Украины), учебные атласы — географические и исторические для средней школы, а также обзорно-справочные атласы по СССР и всему миру типа карманных.

Успешно развивается в нашей стране учебная картография. Об этом свидетельствуют представленные на выставке карты для начальной и средней школы. Достигнутый успех — результат тесного сотрудничества между картографами и педагогами. Накопленный опыт в деле создания учебных карт позволил перейти к созданию карт для студентов высших учебных заведений. Изданные серии карт для высшей школы — крупнейшее достижение советской картографии.

Экспозиция, посвященная советским учебным картам, объединяла три крупных раздела: карты для начальной, средней и высшей школы.

В разделе карт для начальной школы демонстрировался топографических план местности, служащий для первого ознакомления учащихся с картами, карты полушарий, СССР и отдельных материков - физические, политические, природных зон, отличающиеся простотой и наглядностью изображения содержания.

Карты для средней школы были представлены целыми сериями, служащими для более полного изучения всех разделов географии. На выставке экспонировались издающиеся в одинаковых проекциях, масштабах и условных знаках карты Советского Союза (климатическая, народов и т. д.), по отдельным отраслям хозяйства СССР (сельское хозяйство); карты отдельных районов СССР — общегеографические и экономические (Урал, Поволжье); карты мира (зоогеографическая, полезных ископаемых); карты материков и частей света — физические и политические (Антарктида, Америка); карты отдельных государств — физические и экономические (Китай, Польша и Чехословакия).

Карты для высшей школы включали специальные, гипсометрические и общегеографические карты. Специальные карты выделялись сериями карт природы СССР в масштабе 1 : 4 000 000 (геологическая, почвенная и др.). Гипсометрические карты объединяли серию карт крупных орографических районов СССР (Памир и Тянь-Шань) и карты отдельных горных систем (Альпы, Карпаты). Общегеографические карты были представлены сериями карт отдельных районов СССР (Кузбасс), иностранных государств (Венгрия, Испания и Португалия) и карт материков и океанов (Северная Америка).

В отдельный раздел были выделены исторические карты для средней (Древняя Греция, Великая Октябрьская социалистическая революция) и высшей школы (Великие географические открытия).

В целом на двух экспозициях выставки демонстрировалось более 300 карт и атласов. Посетило выставку около 9 тысяч человек. Выставка свидетельствует о выдающихся достижениях советской картографии. Она еще раз знакомит со многими картографическими произведениями, которые по своему содержанию и качеству исполнения заслужили одобрение не только советской, но и мировой географической общественности.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
И. Б. Костриц. Пути улучшения научной деятельности в области картографии	3
Ф. А. Шибанов. Картография, ее предмет, состав и метод	13
Материалы обсуждения доклада Ф. А. Шибанова. «Картография, ее предмет и метод». Сокращенные стенограммы выступлений: К. А. Звонарева, И. Б. Кострица, А. А. Павлова, Ю. М. Орлецкого, А. И. Ларионовой, А. Г. Иоаченко	27
А. П. Ющенко. Решение локсодромических треугольников	39
А. А. Павлов. О терминологии в математической картографии	49
В. И. Воробьев. Длина береговой линии морей СССР	63
О. С. Стеблин-Каменская. — Картография США	90
Ф. А. Шибанов. А. П. Болотов (к 150-летию со дня рождения и 100-летию	105

васа мира

одного

.

ами мест-

.

ациональных

.

е на тер-

.

нат Гаусса

.

в Геогра-

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

СПИСОК ОПЕЧАТОК

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
27	4 сверху	А. И. Ларионовой	А. Н. Ларионовой
201	7 и 16 сверху	А. И. Ларионовой	А. Н. Ларионовой
33	26 снизу	де	согласная
40	12 сверху	(D ₂ - D ₁) _ш ¹	(D ₂ - D ₁) _ш
42	9 сверху	эллипсана	эллипса на
49	5 снизу	K ₁	K
61	6 сверху	составили	составила
94	22 сверху	триангуляции	триангуляции СССР
95	14-15 сверху	СССР	
99			Объяснение условных знаков к рис. 3 1 — топографические карты масштаба 1 : 63360 и крупнее 2 — топографические карты масштаба мельче 1 : 63360
103	31 сверху	National governmental	National governmental
105	10 снизу	А. Г. Болотова	А. Т. Болотова
106	20 снизу (сноска 2)	была им прочитана	была прочитана
111	8 снизу	многоугольника	многоугольников
113	5 снизу	Tauss	Gauss

.

.

.

.

.

.

.

.

.

Экспозиция, посвященная советским учебным картам, объединяла три крупных раздела: карты для начальной, средней и высшей школы.

В разделе карт для начальной школы демонстрировался Топографических план местности, служащий для первого ознакомления учащихся с картами, карты полушарий, СССР и отдельных материков — физические, политические, природных зон, отличающиеся простотой и наглядностью изображения содержания.

Карты для средней школы были представлены целыми сериями, служащими для более полного изучения всех разделов географии. На выставке экспонировались издающиеся в одинаковых проекциях, масштабах и условных знаках карты Советского Союза (климатическая, народов и т. д.), по отдельным отраслям хозяйства СССР (сельское хозяйство); карты отдельных районов СССР — общегеографические и экономические (Урал, Поволжье); карты мира (зоогеографическая, полезных ископаемых); карты материков и частей света — физические и политические (Антарктида, Америка); карты отдельных государств — физические и экономические (Китай, Польша и Чехословакия).

Карты для высшей школы включали специальные, гипсометрические и общегеографические карты. Специальные карты выделялись серией карт природы СССР в масштабе 1 : 4 000 000 (геологическая, почвенная и др.). Гипсометрические карты объединяли серию карт крупных орографических районов СССР (Памир и Тянь-Шань) и карты отдельных горных систем (Альпы, Карпаты). Общегеографические карты были представлены сериями карт отдельных районов СССР (Кубасс), иностранных государств (Венгрия, Северная Америка, Восточная Африка, Древняя Греция и высшая школа). В целом 300 карт и атлас свидетельствуют еще раз знаковые по своему не только со-

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
И. Б. Костриц. Пути улучшения научной деятельности в области картографии	3
Ф. А. Шибанов. Картография, ее предмет, состав и метод	13
Материалы обсуждения доклада Ф. А. Шибанова. «Картография, ее предмет и метод». Сокращенные стенограммы выступлений: К. А. Заонарева, И. Б. Кострица, А. А. Павлова, Ю. М. Орлецкого, А. И. Ларионовой, А. Г. Исаченко	27
А. П. Ющенко. Решение локеодромических треугольников	39
А. А. Павлов. О терминологии в математической картографии	49
В. И. Воробьев. Длина береговой линии морей СССР	63
О. С. Стеблян-Каменская. — Картография США	90
Ф. А. Шибанов, А. П. Болотов (к 150-летию со дня рождения и 100-летию со дня смерти)	105
В. Г. Чуркин. Первая попытка создания Большого Советского атласа мира	114
А. И. Ларионова. Современное состояние вопроса изображения подводного рельефа на географических картах	127
В. И. Разанцев. Морские карты с радиолокационными элементами местности	135
С. Т. Занкин. О таблицах для построения сеток гипербола на навигационных картах	150
А. Г. Дуров. Русские географические названия в Тихом Океане на территории Аляски и Алеутских островов	155
В. Г. Черничин. Таблицы для вычисления прямоугольных координат Гаусса по географическим и для решения обратной задачи	183
В. Н. Коблякова, И. Б. Костриц. Выставка советских карт в Географическом Обществе Союза СССР	197

7 p. 10 к.

STAT

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ
РЕСПУБЛИК

БЮЛЛЕТЕНЬ ИНСТИТУТА
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ АСТРОНОМИИ

Том VII, № 1 (84)



ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА 1958 ЛЕНИНГРАД

STAT

Директор Института теоретической астрономии чл.-корр АН СССР М. Ф. Субботин
 Ответственный редактор проф. Г. А. Чеботарев

Бюллетень Института Теоретической Астрономии

Т. VII

1958

№ 1 (84)

О совместном определении систематических ошибок звездных каталогов и масс планет по наблюдениям астероидов

Е. Н. Макарова

Даны выражения классических уравнений Лагранжа вариации элементов в векторной форме; изложены методы Музена и Херрика вычисления возмущения векторных элементов. Методы Лагранжа и Музена применены для вычисления возмущений Паллады от Юпитера за период с 1955 по 1965 г. Рассмотрены условия совместного определения массы Юпитера и постоянных звездного каталога по наблюдениям Паллады за указанный период. Показано, что введение в уравнения новой неизвестной (поправки к массе Юпитера) не оказывает влияния на определение веса других неизвестных, в том числе веса элементов ориентации каталога.

ON THE SIMULTANEOUS DETERMINATION OF SYSTEMATIC ERRORS OF STELLAR CATALOGUES AND OF THE MASSES OF PLANETS FROM OBSERVATIONS OF ASTEROIDS, by E. N. Makarova. — The classical Lagrangean equations of variations of elements in vectorial form are derived and compared with the systems of Musen and Herriek. Perturbations of Pallas by Jupiter from 1955 to 1965 are computed by Lagrange's and Musen's methods. The conditions for a simultaneous determination of systematical errors of stellar catalogue and the mass of Jupiter, based on observations of Pallas in this period, are discussed. It is shown, that the introduction of a new unknown quantity (the correction to Jupiter's mass) does not affect the weights of constants of the catalogue.

Классические методы определения элементов ориентации звездных каталогов по наблюдениям Солнца, Луны и больших планет не удовлетворяют высоким требованиям, предъявляемым в настоящее время к звездным системам. Поэтому выдвинутая около 25 лет тому назад идея ориентации звездных каталогов по наблюдениям малых планет не потеряла своей актуальности. План создания Каталога слабых звезд включает определение постоянных каталога по наблюдениям малых планет. На 11-й Астрометрической конференции СССР, состоявшейся в мае 1954 г. в Пулково, была принята программа наблюдений с этой целью 10 планет в течение 10 лет, с 1955 по 1965 г. Наблюдения по этой программе уже ведутся как на советских, так и на зарубежных обсерваториях. Наряду с большими преимуществами определения систематических ошибок каталогов по наблюдениям малых планет существует одно затруднение — большое количество дополнительных неизвестных, подлежащих определению в ходе исследования. Действительно, невязки между наблюдаемыми и вычисленными положениями планеты зависят от неточности элементов планеты и Земли, неточности масс возмущающих планет и систематических ошибок каталога, к звездам которого сделана привязка положений планеты. Таким образом, минимальное количество неизвестных (когда определение неизвестных ведется по одной планете) — 12, а именно: 6 поправок к элементам планеты, 4 — к элементам Земли (среднесуточное движение Земли считается хорошо известным) и поправки $\Delta\alpha_0$ и $\Delta\delta_0$ — постоянные, определяющие положение точки весеннего равноденствия и экватора. Если же учесть 4 коэффициента периодических членов в выражениях систематических ошибок и считать массу хотя бы одной возмущающей планеты недостаточно хорошо известной, то количество неизвестных возрастет до 17. Когда в определении постоянных каталога участвуют несколько планет, то количество неизвестных возрастает соответственно числу планет.

Возникает естественное опасение, что такое большое количество неизвестных повлечет за собой сильную потерю точности их определения. К тому же некоторые неизвестные плохо разделяются. Труднее всего дело обстоит с разделением поправок ΔL и $\Delta L'$ (долготы планеты и Земли). Однако, как показали теоретические исследования В. В. Нумерова (1933, 1935), эти неизвестные достаточно хорошо разделяются при условии наблюдения планет вдали от оппозиции.

Г. Клаемс (Clémence, 1948) показал возможность решения этой задачи на практике, предавая пример определения ошибок 12 неизвестных на основании ряда фиктивных наблюдений Цереры.

В. И. Орельская (1957) проделала опыт определения поправок равноденствия и экватора каталога FK3 по наблюдениям Юноны с 1935 по 1943 г. Веса всех неизвестных оказались того же порядка, что и у Клаемса.

Е. Рабе (Rabe, 1950) при определении параллакса Солнца по наблюдениям Эроса нашел систематические ошибки сравнения Эроса и поправки к массам четырех внутренних планет.

Основная задача настоящей работы заключается в том, чтобы на конкретном примере установить, насколько уверенно может быть определена масса возмущающей планеты по наблюдениям малых планет, входящих в программу для определения постоянных Каталога слабых звезд, и как введение нового добавочного неизвестного — поправки массы — скажется на точности определения остальных неизвестных.

Наблюдения избранной группы планет начались только в 1955 г. и должны продолжаться в течение 10 лет, поэтому в настоящее время мы еще не имеем достаточного количества точных наблюдений этих планет. Но так как наша основная цель — определить точность вычисления неизвестных, т. е. их веса, то мы можем воспользоваться фиктивными моментами нормальных мест какой-нибудь планеты, выбрав их приблизительно так, как они в действительности будут располагаться в течение 10 лет, с 195 по 1965 г. Составив условные уравнения на эти моменты (без правых частей), мы сможем найти веса неизвестных, т. е. будем в состоянии судить о точности их определения.

Для определения постоянных звездного каталога по наблюдениям малых планет, кроме точных наблюдений, необходимо иметь точные эфемериды этих планет. Предполагается, что для вычисления точных эфемерид планет будет применен метод численного интегрирования в прямоугольных координатах, блестяще оправдавший себя при вычислении прямоугольных координат пяти внешних планет. Этим методом мы получаем прямоугольные координаты планеты с учетом возмущений сразу от всех больших планет, принятых во внимание. Для нашей задачи (определения поправок к массам планет) необходимо выделить влияние каждой возмущающей планеты отдельно, для того чтобы получить коэффициенты при поправке к массе в условных уравнениях.

Если численное интегрирование уже проведено, то мы можем определить этот коэффициент несколькими способами: во-первых, снова повторив интегрирование с несколько измененной массой интересующей нас планеты; во-вторых, вычислив возмущения от этой планеты по способу Энке дважды — один раз со старой массой, второй раз — с измененной, и, в-третьих, вычислив возмущения в элементах этой планеты методом вариации произвольных постоянных. В таком случае, если $\Delta M_1, \Delta e_1, \dots$ — возмущения элементов, вычисленные со значением массы m возмущающей планеты, то изменение прямоугольной координаты планеты, вызванное изменением массы Δm , будет равно

$$\delta x = \left(\frac{\partial x}{\partial M} \Delta M + \frac{\partial x}{\partial e} \Delta e + \dots \right) \frac{\Delta m}{m},$$

где $\frac{\partial x}{\partial M}, \frac{\partial x}{\partial e}, \dots$ — обычные коэффициенты условных уравнений, которые употребляются при улучшении элементов орбиты.

Последний способ наиболее прост при условии, что при вычислениях можно воспользоваться некоторыми данными, уже полученными в процессе численного интегрирования. Действительно, классические формулы способа вариации элементов Лагранжа можно преобразовать так, что правые части уравнений будут зависеть от прямоуголь-

ных координат планеты и от проекций возмущающих ускорений на экваториальные оси, имеющиеся в таблице интегрирования. При этом можно либо сохранить уравнения Лагранжа для определения возмущений оскулирующих элементов, преобразовав соответствующим образом правые части, либо ввести вместо них другие переменные, например векторные элементы.

Векторные элементы были введены в теорию возмущений Миланковичем (Миланкович, 1955). Билмович (Bilimovitch, 1943) и Попович (Popovitch, 1950) развили далее идеи Миланковича. Однако широкого распространения методы вычисления возмущений векторных элементов не получили, пока не были введены в практику астрономических вычислений быстродействующие электронные машины. С. Херрик (Herrick, 1948), а позднее П. Музен (Musen, 1954) получили уравнения для возмущений векторных элементов в форме, удобной для вычислений на машинах. В последнее время оба эти метода применяются в США для определения возмущений малых планет. Методы Херрика и Музена с успехом могут применяться и при вычислениях с настольными счетными машинами.

1. Уравнения движения малой планеты, записанные в векторной форме, имеют вид

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{F}, \quad \frac{d\vec{e}}{dt} = \vec{v}, \quad (1)$$

где \vec{F} — вектор возмущающей силы и постоянная Гаусса принята равной единице.

Обозначим через $\frac{\delta}{\delta t}$ операционный символ вариации под действием только возмущающей силы \vec{F} . Тогда условие оскуляции может быть представлено как

$$\frac{\delta \vec{r}}{\delta t} = \vec{F}, \quad \frac{\delta \vec{e}}{\delta t} = 0$$

и

$$\frac{\delta E}{\delta t} = \frac{dE}{dt}$$

для любого оскулирующего элемента.

Проще всего получить интересующие нас уравнения (Лагранжа, Музена и Херрика), применяя оператор $\frac{\delta}{\delta t}$ к известным интегралам невозмущенного движения.¹

В невозмущенном движении легко получить следующие четыре интеграла [(3)–(6)] в векторной форме.

Уравнения невозмущенного движения, записанные в виде

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{\vec{r}}{r^3}, \quad (2)$$

где $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, умножаем векторно на \vec{r} и интегрируем. Результат интегрирования дает интеграл площадей

$$\vec{r} \times \vec{v} = \text{const} = \vec{c}. \quad (3)$$

Умножая то же уравнение скалярно на $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ и интегрируя, получаем интеграл живых сил

$$\vec{v}^2 = \frac{2}{r} + h, \quad h = -\frac{1}{a}. \quad (4)$$

¹ Иначе говоря, применяя "основную операцию", по терминологии М. Ф. Субботина (1937).

Возникает естественное опасение, что такое большое количество неизвестных повлечет за собой сильную потерю точности их определения. К тому же некоторые неизвестные плохо разделяются. Труднее всего дело обстоит с разделением поправок ΔL и $\Delta L'$ (долготы планеты и Земли). Однако, как показали теоретические исследования В. В. Нумерова (1933, 1935), эти неизвестные достаточно хорошо разделяются при условии наблюдения планет вдали от оппозиции.

Г. Клеменс (Clemence, 1948) показал возможность решения этой задачи на практике, проделав пример определения ошибок 12 неизвестных на основании ряда фиктивных наблюдений Цереры.

В. И. Орельская (1957) проделала опыт определения поправок равноденствия и экватора каталога FK3 по наблюдениям Юноны с 1935 по 1943 г. Веса всех неизвестных оказались того же порядка, что и у Клеменса.

Е. Рабе (Rabe, 1950) при определении параллакса Солнца по наблюдениям Эроса наша систематические ошибки звезд сравнения Эроса и поправки к массам четырех внутренних планет.

Основная задача настоящей работы заключается в том, чтобы на конкретном примере установить, насколько уверенно может быть определена масса возмущающей планеты по наблюдениям малых планет, входящих в программу для определения постоянных Каталога слабых звезд, и как введение нового добавочного неизвестного — поправки массы — скажется на точности определения остальных неизвестных.

Наблюдения избранной группы планет начались только в 1955 г. и должны продолжаться в течение 10 лет, поэтому в настоящее время мы еще не имеем достаточного количества точных наблюдений этих планет. Но так как наша основная цель — определить точность вычисления неизвестных, т. е. их веса, то мы можем воспользоваться фиктивными моментами нормальных мест какой-нибудь планеты, выбрав их приблизительно так, как они в действительности будут располагаться в течение 10 лет, с 1955 по 1965 г. Составив условные уравнения на эти моменты (без правых частей), мы сможем найти веса неизвестных, т. е. будем в состоянии судить о точности их определения.

Для определения постоянных звездного каталога по наблюдениям малых планет, кроме точных наблюдений, необходимо иметь точные эфемериды этих планет. Предполагается, что для вычисления точных эфемерид планет будет применен метод численного интегрирования в прямоугольных координатах, блестяще оправдавший себя при вычислении прямоугольных координат пяти внешних планет. Этим методом мы получаем прямоугольные координаты планеты с учетом возмущений сразу от всех больших планет, принятых во внимание. Для нашей задачи (определения поправок к массам планет) необходимо выделить влияние каждой возмущающей планеты отдельно, для того чтобы получить коэффициенты при поправке к массе в условных уравнениях.

Если численное интегрирование уже проведено, то мы можем определить этот коэффициент несколькими способами: во-первых, снова повторив интегрирование с несколько измененной массой интересующей нас планеты; во-вторых, вычислив возмущения от этой планеты по способу Энке дважды — один раз со старой массой, второй раз — с измененной, и, в-третьих, вычислив возмущения в элементах этой планеты методом вариации произвольных постоянных. В таком случае, если ΔM , Δe , ... — возмущения элементов, вычисленные со значением массы m возмущающей планеты, то изменение прямоугольной координаты планеты, вызванное изменением массы Δm , будет равно

$$\Delta x = \left(\frac{\partial x}{\partial M} \Delta M + \frac{\partial x}{\partial e} \Delta e + \dots \right) \frac{\Delta m}{m},$$

где $\frac{\partial x}{\partial M}$, $\frac{\partial x}{\partial e}$, ... — обычные коэффициенты условных уравнений, которые употребляются при улучшении элементов орбиты.

Последний способ наиболее прост при условии, что при вычислениях можно воспользоваться некоторыми данными, уже полученными в процессе численного интегрирования. Действительно, классические формулы вариации элементов Лагранжа можно преобразовать так, что правые части уравнений будут зависеть от прямоуголь-

ных координат планеты и от проекций возмущающих ускорений на экваториальные оси, имеющиеся в таблице интегрирования. При этом можно либо сохранить уравнения Лагранжа для определения возмущений оскулирующих элементов, преобразовав соответствующим образом правые части, либо ввести вместо них другие переменные, например векторные элементы.

Векторные элементы были введены в теорию возмущений Миланковичем (Миланкович, 1955). Вилмович (Vilimovitch, 1943) и Попович (Popovitch, 1950) развили далее идеи Миланковича. Однако широкого распространения методы вычисления возмущений векторных элементов не получили, пока не были введены в практику астрономических вычислений быстродействующие электронные машины. С. Херрик (Herrick, 1948), а позднее П. Музен (Musen, 1954) получили уравнения для возмущений векторных элементов в форме, удобной для вычисления на машинах. В последнее время оба эти метода применяются в США для определения возмущений малых планет. Методы Херрика и Музена с успехом могут применяться и при вычислениях с настольными счетными машинами.

1. Уравнения движения малой планеты, записанные в векторной форме, имеют вид

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{F}, \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}, \quad (1)$$

где \vec{F} — вектор возмущающей силы и постоянная Гаусса принята равной единице.

Обозначим через $\frac{\delta}{dt}$ операционный символ вариации под действием только возмущающей силы \vec{F} . Тогда условие оскуляции может быть представлено как

$$\frac{\delta \vec{v}}{dt} = \vec{F}, \quad \frac{\delta \vec{r}}{dt} = 0$$

и

$$\frac{\delta E}{dt} = \frac{dE}{dt}$$

для любого оскулирующего элемента.

Проще всего получить интересующие нас уравнения (Лагранжа, Музена и Херрика), применяя оператор $\frac{\delta}{dt}$ к известным интегралам невозмущенного движения.¹

В невозмущенном движении легко получить следующие четыре интеграла [(3)–(6)] в векторной форме.

Уравнения невозмущенного движения, записанные в виде

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\vec{r}}{r^3}, \quad (2)$$

где $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, умножаем векторно на \vec{r} и интегрируем. Результат интегрирования дает интеграл площадей

$$\vec{r} \times \vec{v} = \text{const} = \vec{e}. \quad (3)$$

Умножая то же уравнение скалярно на $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ и интегрируя, получаем интеграл живых сил

$$\vec{v}^2 = \frac{2}{r} + h, \quad h = -\frac{1}{a}. \quad (4)$$

¹ Иначе говоря, применяя «основную операцию», по терминологии М. Ф. Субботина (1937).

Умножение уравнения невозмущенного движения на вектор \bar{e} векторно и последующее интегрирование позволяют получить интеграл Лапласа

$$\bar{e} \times \bar{v} + r^* + \bar{a} = 0, \quad r^* = \frac{r}{r}, \quad (5)$$

где \bar{a} — постоянная интегрирования.

Записав интеграл Лапласа в виде

$$\bar{v} \times \bar{e} = \bar{a} + r^*$$

и умножив его векторно на \bar{e} , получаем интеграл Гамильтона

$$\bar{v} = \bar{g} + \frac{\bar{e}}{c^2} r^*, \quad (6)$$

где \bar{g} — постоянный вектор, зависящий от \bar{a} и \bar{e} : $\bar{g} = \frac{\bar{e} \times \bar{a}}{c^2}$.

Для определения постоянных a и c умножим уравнение (5) на r скалярно и, учитывая, что

$$r(\bar{v} \times \bar{e}) = \bar{e} \cdot r \times \bar{v} = \bar{e} \cdot \bar{e} = c^2,$$

получаем из (5)

$$\bar{a} \cdot r = a \cdot r \cos \varphi = c^2 - r,$$

тогда

$$r = \frac{c^2}{1 + a \cos \varphi}.$$

Отсюда

$$c^2 = p, \quad a = e, \quad \varphi = f,$$

причем вектор \bar{e} перпендикулярен к плоскости орбиты, а вектор \bar{a} направлен от Солнца в перигелий (так как $f = \varphi$).

Обозначим через \bar{P} , \bar{Q} , \bar{R} орты орбитальных осей (\bar{P} направлен от Солнца в перигелий, \bar{R} — нормалью к плоскости орбиты, а $\bar{Q} = \bar{R} \times \bar{P}$), тогда

$$\bar{e} = \sqrt{p} \bar{R}, \quad \bar{a} = e \bar{P}, \quad \bar{b} = e \sqrt{p} \bar{Q}, \quad \bar{g} = \frac{e}{\sqrt{p}} \bar{Q}. \quad (7)$$

Для вывода уравнений Лагранжа в векторной форме применим сначала оператор вариации к интегралу площадей. Тогда

$$\frac{d\bar{e}}{dt} = r \times \bar{F} \quad (8)$$

или

$$\bar{R} \frac{dc}{dt} + c \frac{d\bar{R}}{dt} = r \times \bar{F}. \quad (9)$$

Вектор $\frac{d\bar{R}}{dt}$ может быть представлен как сумма двух векторов, первый из которых направлен по линии узлов, второй перпендикулярен ему. Орты этих направлений обозначим \bar{h} и \bar{l} , причем $\bar{l} = \bar{h} \times \bar{R}$. Тогда

$$\frac{1}{2c} \frac{dc}{dt} \bar{R} + c \bar{h} \sin i \frac{d\Omega}{dt} + c \bar{l} \frac{di}{dt} = r \times \bar{F}.$$

Умножим это равенство скалярно на \bar{R} , \bar{h} и \bar{l} . Результат умножения дает нам дифференциальные уравнения для возмущений параметра, узла и наклонности

$$\frac{1}{2c} \frac{dc}{dt} = (r \times \bar{F}) \cdot \bar{R}, \quad (10)$$

$$c \sin i \frac{d\Omega}{dt} = (r \times \bar{F}) \cdot \bar{h}, \quad (11)$$

$$c \frac{di}{dt} = (r \times \bar{F}) \cdot \bar{l}. \quad (12)$$

Изменение истинной аномалии при условии $\frac{dr}{dt} = 0$ зависит только от поворота осей в плоскости орбиты, т. е. от вариации ω и Ω , а именно

$$\left(\frac{df}{dt}\right) = -\frac{d\Omega}{dt} \cos i - \frac{d\omega}{dt}, \quad (13)$$

где $\left(\frac{df}{dt}\right)$ — производная от истинной аномалии, соответствующая зависимости от времени только через посредство оскулирующих элементов. С другой стороны, раз изменение истинной аномалии зависит только от поворота орбитальных осей в плоскости орбиты, то

$$\left(\frac{df}{dt}\right) = \bar{P} \cdot \frac{d\bar{Q}}{dt} = -\bar{Q} \cdot \frac{d\bar{P}}{dt}.$$

Умножим это равенство на e — эксцентриситет, тогда

$$e \left(\frac{df}{dt}\right) = c \left(\bar{P} \cdot \frac{d\bar{Q}}{dt}\right) = \left(\bar{Q} \cdot \frac{d\bar{a}}{dt}\right).$$

Следуя Музену, мы можем получить $\frac{d\bar{g}}{dt}$ из интеграла Гамильтона:

$$\frac{d\bar{g}}{dt} = \bar{F} + \frac{1}{c^2} (\bar{R} \times r^*) \frac{dc}{dt} - \frac{1}{c} \left(\frac{d\bar{R}}{dt} \times r^*\right). \quad (14)$$

Преобразуем полученное уравнение, заменив $\frac{dc}{dt}$ и $\frac{d\bar{R}}{dt}$ их значениями. Для этого умножим уравнение (9) сначала на \bar{R} скалярно, затем векторно, тогда

$$\frac{dc}{dt} = \bar{R} \cdot r \times \bar{F},$$

$$c \bar{R} \times \frac{d\bar{R}}{dt} = \bar{R} \times (r \times \bar{F}).$$

Вторичное умножение на \bar{R} векторно дает

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = \frac{\bar{F} \cdot \bar{R}}{c} (r \times \bar{R}).$$

Подставляя $\frac{dc}{dt}$ и $\frac{d\bar{R}}{dt}$ в уравнение (14), получаем

$$\frac{d\bar{g}}{dt} = \bar{F} + \frac{r \cdot \bar{F} \times \bar{e}}{c^2} (\bar{R} \times r^*) - \frac{r(\bar{F} \cdot \bar{R})}{c^2} \bar{R}.$$

Тождество

$$(r \cdot \bar{F} \times \bar{e})(\bar{R} \times r^*) = cr \bar{F} - \frac{r\bar{e}}{c} (\bar{F} \cdot r) - r \cdot c (\bar{F} \cdot \bar{R}) \bar{R}$$

позволяет придать уравнению для $\frac{d\bar{g}}{dt}$ форму

$$\frac{d\bar{g}}{dt} = \bar{K} - 2r \cdot \frac{(\bar{F} \cdot \bar{R}) \cdot \bar{R}}{c^2}, \quad (15)$$

если ввести обозначение

$$\bar{R} = \left(1 + \frac{r}{c^2}\right) \cdot \bar{F} - \frac{r(\bar{F} \cdot \bar{F})}{r \cdot c^2} \quad (16)$$

Отсюда

$$e \left(\frac{df}{dt}\right) = c \cdot \bar{K} \cdot \bar{P},$$

и из (13) получаем уравнение, определяющее возмущение аргумента перигелия ω :

$$e \frac{d\omega}{dt} = -c \cdot \bar{P} - e \cos i \frac{d\Omega}{dt} \quad (17)$$

Для возмущения средней аномалии имеем (Субботин, 1937, стр. 33—35):

$$\frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{dM}{dt}\right) = e \left(\frac{df}{dt}\right) - \frac{2e(\bar{F} \cdot \bar{F})}{c},$$

где $\left(\frac{dM}{dt}\right)$ — производная средней аномалии по времени, входящему лишь через посредство оскулирующих элементов. Следовательно,

$$\frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{dM}{dt}\right) = c \cdot \bar{K} \cdot \bar{P} - \frac{2(\bar{F} \cdot \bar{F})}{c} \quad (18)$$

Значение средней аномалии для любого момента t дается формулой

$$M = M_0 + n_0(t - t_0) + \int \left(\frac{dM}{dt}\right) dt + \int \frac{dn}{dt} dt^2 \quad (19)$$

Уравнение для возмущения эксцентриситета и среднего суточного движения может быть получено следующим образом:

$$\bar{g} = g\bar{Q}, \quad g = \frac{e}{c},$$

$$\frac{dg}{dt} = \bar{Q} \cdot \frac{dg}{dt},$$

т. е.

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{dg}{dt} = \frac{e}{c^2} \cdot \frac{dg}{dt} = \bar{Q} \frac{dg}{dt},$$

откуда на основании (15)

$$\frac{dg}{dt} = c\bar{Q} \cdot \bar{K} + \frac{e}{c} \cdot \frac{dc}{dt}.$$

Дифференцируя далее выражение

$$c^2 = a(1 - e^2),$$

будем иметь

$$\frac{dc}{dt} = \frac{2a^2e}{c^2} \cdot \frac{de}{dt} + \frac{2a}{c} \cdot \frac{da}{dt}$$

или

$$\frac{dc}{dt} = \frac{2a^2}{c^2} \left(ec\bar{Q} \cdot \bar{K} + \frac{1}{c} \cdot \frac{dc}{dt} \right) \quad (20)$$

Возмущение среднесуточного движения связано с возмущением большой полуоси соотношением

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{n}{a} \cdot \frac{da}{dt},$$

откуда

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{3an}{c^2} \left(ec\bar{Q} \cdot \bar{K} + \frac{1}{c} \cdot \frac{dc}{dt} \right) \quad (21)$$

причем

$$\frac{dc}{dt} = \frac{1}{2c} \cdot \frac{dp}{dt} = \bar{F} \times \bar{F} \cdot \bar{R}.$$

Окончательно получаем следующую систему формул для вычисления возмущений:

$$\left. \begin{aligned} \sin i \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{c} (\bar{F} \times \bar{F}) \cdot \bar{h}, \\ \frac{di}{dt} &= \frac{1}{c} (\bar{F} \times \bar{F}) \cdot \bar{l}, \\ \frac{de}{dt} &= c\bar{Q} \cdot \bar{K} + g \cdot (\bar{F} \times \bar{F}) \cdot \bar{R}, \\ \frac{dn}{dt} &= -\frac{3}{c^2 \sqrt{a}} \left[ec\bar{Q} \cdot \bar{K} + \frac{1}{c} (\bar{F} \times \bar{F}) \cdot \bar{R} \right], \\ \frac{dg}{dt} &= -\frac{1}{g} \cdot \bar{P} \cdot \bar{K} - \cos i \frac{d\Omega}{dt}, \\ \left(\frac{dM}{dt}\right) &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{g} \cdot \bar{P} \cdot \bar{K} - \frac{2\bar{F} \cdot \bar{F}}{c} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

где

$$\bar{K} = \left(1 + \frac{r}{c^2}\right) \cdot \bar{F} - \frac{r(\bar{F} \cdot \bar{F})}{rc^2},$$

$$c = \sqrt{\rho}, \quad g = \frac{e}{\sqrt{\rho}}, \quad \bar{F} = \sum m_j \left(\frac{r_j - r}{\Delta_j^3} - \frac{r_j}{r_j^3} \right), \quad k = 1.$$

Уравнения (22) могут служить для вычисления возмущений как экваториальных, так и эклиптичных элементов, только в первом случае вектор \bar{h} направлен по экваториальной линии узлов, а во втором — по эклиптичной. В соответствии с этим проекции на экваториальные оси векторов \bar{h} и \bar{l} имеют различный вид:

Экваториальные элементы	Эклиптичные элементы
$h_x = \cos \Omega,$	$h_x = \cos \Omega,$
$h_y = \sin \Omega,$	$h_y = \sin \Omega \cos \epsilon,$
$h_z = 0,$	$h_z = \cos \Omega \sin \epsilon,$
$l_x = \cos i \sin \Omega,$	$l_x = \cos i \sin \Omega,$
$l_y = -\cos i \cos \Omega,$	$l_y = -\cos i \cos \Omega \cos \epsilon + \sin i \sin \epsilon,$
$l_z = -\sin i.$	$l_z = -\cos i \cos \Omega \sin \epsilon - \sin i \cos \epsilon.$

Полученные уравнения совершенно равносильны обычным уравнениям Лагранжа, но значительно удобнее для работы с помощью современных вычислительных средств. Правые части зависят от вектора возмущающих сил \bar{F} , вектора \bar{F} и элементов. Подставляя постоянные элементы и невозмущенные значения прямоугольных координат, получим возмущения первого порядка. В нашей задаче имеется выполненное численное интегрирование и мы можем взять отсюда значения компонентов \bar{F} , \bar{F} , что значительно упрощает вычисления, и, меняя по мере надобности элементы, можем получить точные значения возмущений.

2. Любая пара векторов $\tilde{c} = \sqrt{p} \tilde{R}$, $\tilde{a} = e \tilde{P}$, $\tilde{b} = e \sqrt{p} \tilde{Q}$, $\tilde{g} = \frac{e}{\sqrt{p}} \tilde{Q}$ (кроме пары \tilde{b} и \tilde{g}) равносильна пяти независимым скалярным элементам. В качестве шестого элемента обычно берется средняя аномалия.

П. Музен выбирает векторы \tilde{c} и \tilde{g} . Возмущения этих векторов и средней аномалии определяются уравнениями (8), (15), (18), (19), к которым присоединяется уравнение для определения возмущений среднего суточного движения, получаемое применением оператора $\frac{d}{dt}$ к интегралу живых сил, т. е. совокупностью следующих формул (Musen, 1954):

$$\left. \begin{aligned} \frac{dc}{dt} &= \tilde{r} \times \tilde{F}, \\ \frac{dg}{dt} &= \tilde{R} - \frac{2r(\tilde{P} \cdot \tilde{R}) \cdot \tilde{R}}{c^2}, \\ \left(\frac{dM}{dt} \right) &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{g} \tilde{P} \cdot \tilde{R} - \frac{2(\tilde{F} \cdot \tilde{r})}{\sqrt{a}}, \\ \frac{dn}{dt} &= -\frac{3}{\sqrt{a}} (\tilde{F} \cdot \tilde{g} + \frac{1}{rc} \cdot \tilde{R} \cdot \frac{d\tilde{c}}{dt}), \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

где

$$\tilde{R} = \left(1 + \frac{r}{ca} \right) \tilde{F} - \frac{r(\tilde{F} \cdot \tilde{r})}{rc^2}.$$

Вычисляются возмущения восьми величин $c_x, c_y, c_z, g_x, g_y, g_z, \Delta M$ и Δn , при этом шесть первых связаны соотношениями

$$(\tilde{c} \cdot \tilde{g}) = 0, \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{ca^2} - g^2,$$

которые служат хорошим контролем.

Мы видим, что формулы Музена (23) имеют несколько более простой вид, чем формулы Лагранжа (22). Однако для нашей цели удобнее применять способ вариации эллиптических элементов, поскольку они непосредственно возмущения элементов, в то время как в способе Музена необходимо делать переход от возмущений векторов \tilde{c} и \tilde{g} к возмущениям элементов для каждого нормального места.

3. В правые части уравнений (22) и (23) входят элементы. Элементы ориентации могут быть исключены, если ввести вектор скорости \tilde{v} . Уравнения в таком виде были получены С. Херриком (Herrick, 1948; Musen, 1954), причем в качестве неизвестных были приняты векторы

$$\tilde{a} = e \tilde{P}, \quad \tilde{b} = e \sqrt{p} \tilde{Q}.$$

Учитывая, что $\tilde{v} \times \tilde{c} = \tilde{v} \times (\tilde{v} \times \tilde{r}) = \tilde{v}(\tilde{v} \cdot \tilde{r}) - \tilde{r}(\tilde{v} \cdot \tilde{v})$, интеграл Лапласа можно записать в виде

$$\tilde{a} = \tilde{r}(\tilde{v} \cdot \tilde{v}) - \tilde{r}(\tilde{v} \cdot \tilde{r}) - \tilde{r}^*$$

откуда для возмущения вектора \tilde{a} получаем выражение

$$\frac{d\tilde{a}}{dt} = 2\tilde{r}(\tilde{v} \cdot \tilde{F}) - \tilde{v}(\tilde{r} \cdot \tilde{F}) - \tilde{F}(\tilde{r} \cdot \tilde{v}). \quad (24)$$

Применив оператор вариации к интегралу Гамильтона в виде

$$\tilde{b} = e^2 \tilde{v} - \tilde{c} \times \tilde{r}^*,$$

получим уравнение для \tilde{b}

$$\frac{d\tilde{b}}{dt} = 2\left(\tilde{c} \cdot \frac{d\tilde{c}}{dt}\right) \tilde{v} + c^2 \tilde{F} - \frac{d\tilde{c}}{dt} \times \tilde{r}^*.$$

Но $\frac{d\tilde{c}}{dt} = \tilde{r} \times \tilde{F}$ и $\tilde{c} \cdot \frac{d\tilde{c}}{dt} = (\tilde{r} \times \tilde{v})(\tilde{r} \times \tilde{F}) = \tilde{r}^2(\tilde{v} \cdot \tilde{F}) - (\tilde{r}\tilde{v}) \cdot (\tilde{r} \cdot \tilde{F})$.

Тогда

$$\frac{d\tilde{b}}{dt} = \frac{\tilde{r}}{r}(\tilde{F} \cdot \tilde{r}) - 2[(\tilde{v}\tilde{F}) \cdot \tilde{r}^2 - (\tilde{v}\tilde{r})(\tilde{r}\tilde{F})] \tilde{v} - (p-r)\tilde{F}. \quad (25)$$

Далее

$$\left(\frac{d\tilde{f}}{dt} \right) = -\left(\tilde{Q} \cdot \frac{d\tilde{P}}{dt} \right) = -\frac{1}{ca} \left(\tilde{b} \cdot \frac{d\tilde{a}}{dt} \right).$$

Подставляя значение $\frac{d\tilde{a}}{dt}$ из формулы (24) и $\tilde{b} = e^2 \tilde{v} - \tilde{c} \times \tilde{r}^*$, получим для $\left(\frac{dM}{dt} \right)$ формулу

$$\left(\frac{dM}{dt} \right) = -[(r-p)(\tilde{r} \cdot \tilde{F}) - a(r+r)(\tilde{r}\tilde{v})(\tilde{v}\tilde{F})] a^{3/2} e^2. \quad (26)$$

Возмущение среднесуточного движения дается формулой

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{3}{\sqrt{a}} (\tilde{v} \cdot \tilde{F}). \quad (26')$$

Формулы (24), (25), (26) и (26') решают задачу.

Уравнения Лагранжа (22) можно преобразовать совершенно аналогичным образом, если положить в них $\sqrt{p}\tilde{R} = \tilde{r} \times \tilde{v}$ и для $\left(\frac{d\tilde{a}}{dt} \right)$ и $\left(\frac{dM}{dt} \right)$ принять выражения Херрика. Получим следующую систему формул:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\tilde{p}}{dt} &= 2(\tilde{r} \times \tilde{v})(\tilde{r} \times \tilde{F}) = 2[r^2(\tilde{v}\tilde{F}) - (\tilde{v}\tilde{r})(\tilde{r} \cdot \tilde{F})], \\ p \sin^2 i \frac{d\tilde{a}}{dt} &= (\tilde{r} \times \tilde{v}) \times (\tilde{r} \times \tilde{F}) \cdot \tilde{k}, \\ \sqrt{p} \sin i \frac{d\tilde{a}}{dt} &= (\tilde{r} \times \tilde{v}) \cdot \tilde{k} \cdot \frac{d\tilde{p}}{dt} - (\tilde{r} \times \tilde{F}) \cdot \tilde{k}, \\ \frac{d(1/a)}{dt} &= -2(\tilde{v} \cdot \tilde{F}), \\ \frac{d^2\tilde{a}}{dt^2} &= p \frac{d(1/a)}{dt} - \left(\frac{2}{r} - \psi \right) \frac{d\tilde{p}}{dt}, \\ \sqrt{p} \frac{d\tilde{a}}{dt} &= -\sqrt{a} \left(\frac{dM}{dt} \right) - 2(\tilde{F} \cdot \tilde{r}) - (\tilde{r} \times \tilde{v}) \cdot \tilde{k} \cdot \frac{d\tilde{a}}{dt}, \\ \left(\frac{dM}{dt} \right) &= -[(r-p)(\tilde{r} \cdot \tilde{F}) - a(r+r)(\tilde{r}\tilde{v})(\tilde{v}\tilde{F})] a^{3/2} e^2, \\ \frac{dn}{dt} &= -\frac{3}{\sqrt{a}} (\tilde{v} \cdot \tilde{F}), \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$p = |\tilde{r} \times \tilde{v}|, \quad p \sin^2 i = p - (\tilde{r} \times \tilde{v} \cdot \tilde{k})^2.$$

Эти формулы также годны для вычисления возмущений как экваториальных, так и эклиптичных уравнений. В первом случае \tilde{k} — орт экваториальной оси z , во втором — эклиптичной оси z . Формулы Херрика, а также и формулы Лагранжа (27) по виду не очень сложны, но в правые части их входит вектор скорости \tilde{v} , проекции которого на экваториальные оси должны быть вычислены на каждый момент интегрирования по формулам невозмущенного движения или, в нашем случае, на основании таблицы прямоугольных координат. Однако, имея возмущенное значение \tilde{v} на каждый момент интегрирования, мы можем сразу получить точные величины для p и a , подстановка которых в правые части остальных уравнений позволяет найти точные значения возмущений всех элементов.

4. Для исследования возможности совместного определения массы планеты и элементов ориентации каталога по наблюдениям малых планет рассмотрены условия определения массы Юпитера по наблюдениям Паллады в 1956—1963 гг.

За этот период Паллада будет 8 раз в оппозиции с Солнцем, и вся ее орбита будет покрыта наблюдениями приблизительно равномерно. В одной оппозиции планета должна наблюдаться 6—8 месяцев (условие наилучшего разделения неизвестных). Учитывая это, выбрали три момента фиктивных нормальных мест в каждую оппозицию: один вблизи оппозиции и два других — расположенных симметрично относительно первого, отделенных от него интервалом в 80 дней. Таким образом, было выбрано 24 момента нормальных мест, на которые и вычислялись коэффициенты условных уравнений:

1956 Май 27.0	1959 Февраль 1.0	1961 Июнь 20.0	1964 Март 16.0
Август 15.0	Апрель 22.0	Сентябрь 8.0	Июнь 4.0
Ноябрь 3.0	Июль 11.0	Ноябрь 27.0	Август 23.0
1957 Август 20.0	1960 Апрель 16.0	1962 Октябрь 13.0	1965 Май 10.0
Ноябрь 8.0	Июль 5.0	1963 Январь 1.0	Июль 29.0
1958 Январь 27.0	Сентябрь 23.0	Март 22.0	Октябрь 17.0

При всех вычислениях были использованы имевшиеся прямоугольные координаты Паллады: с 1953 по 1960 г. эти координаты брались из „Astronomical Papers“, vol. 11 (Hergel, 1950), координаты на следующие годы (1960—1965) были получены численным интегрированием в Институте теоретической астрономии АН СССР с учетом возмущений от Юпитера и Сатурна.

В качестве неизвестных были приняты 6 поправок к элементам Паллады, 4 поправки к элементам Земли, поправка к массе Юпитера и $\Delta x_0, \Delta \delta_0$ — систематические ошибки каталога.

Условные уравнения употреблялись в форме (Самойлова-Яхонтова, 1944, 1950):

$$\rho \cos \delta (\Delta \alpha - \Delta \alpha_0) = \bar{M} (\delta r - \delta r'),$$

$$\rho (\Delta \delta - \Delta \delta_0) = \bar{N} (\delta r - \delta r'),$$

где

$$\begin{pmatrix} M_x & N_x \\ M_y & N_y \\ M_z & N_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha & -\sin \delta \cos \alpha \\ \cos \alpha & -\sin \delta \sin \alpha \\ 0 & \cos \delta \end{pmatrix},$$

$$\delta r = \frac{\partial}{\partial n} \Delta L_0 + \left(K \frac{\partial}{\partial n} + H r \right) \delta e + \left(r - \frac{3}{2} t \dot{t} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial n} + \left(\bar{R} \times r - \frac{\partial}{\partial n} \right) e \delta \pi +$$

$$+ \text{cosec } i \left(\bar{k} \times r - \frac{\partial}{\partial n} \right) \sin i \delta \Omega + \left(\bar{h} \times r \right) \delta i + \frac{\partial x}{\partial m} \delta m,$$

$$\delta r' = \frac{\partial}{\partial n} \Delta L_0 + \left(K' \frac{\partial}{\partial n} + H' r \right) \delta e' + \left(\bar{R}' \times r' - \frac{\partial}{\partial n} \right) e' \delta \pi' + \left(\bar{h}' \times r' \right) \delta i',$$

$$K = \frac{r+p}{r} \cdot \frac{r}{a^2 e n}, \quad H = \frac{r+p}{ep} - \frac{2a}{n},$$

и аналогичные выражения для K' и H' . Величины, отмеченные штрихами, относятся к Земле.

Здесь \bar{h} , как и раньше (22), единичный вектор, направленный по линии узлов, \bar{k} — единичный вектор экваториальной или эклиптикальной оси z в зависимости от того, ищем мы поправки к экваториальным или эклиптикальным элементам, \bar{R} — единичный вектор, направленный в точку весеннего равноденствия, \bar{R}' — в полюс эклиптики, т. е. $h_x = 1, h_y = h_z = 0, R_x = 0, R_y = -\sin i, R_z = \cos i$.

Наибольшее затруднение, как уже говорилось, представляет вычисление коэффициента при поправке к массе планеты.

Изменение массы Юпитера вызывает изменение координат не только планеты, но также и Земли. Поэтому коэффициенты при $\frac{\delta m}{m}$ в условных уравнениях, кроме членов

вида $\frac{\delta r'}{\delta m}$, должны содержать еще члены $\frac{\delta r'}{\delta m}$. Однако возмущения Земли от Юпитера очень невелики по сравнению с возмущениями Паллады (не превосходят 0.002 на этом интервале) и не оказывают существенного влияния на величину коэффициентов, а поэтому во внимание не принимались. Изменение вектора r , вызванное изменением массы Юпитера, может быть представлено в виде

$$\delta r = \left[\frac{\partial}{\partial n} \Delta M - r \times \Delta \bar{v} - \frac{2}{3} r \frac{\Delta n}{n} + \left(H r + K \frac{\partial}{\partial n} \right) \Delta e \right] \frac{\delta m}{m},$$

где $\Delta M, \Delta \bar{v}, \Delta n, \Delta e$ — возмущения Паллады от Юпитера, причем

$$\Delta M = \int \left(\frac{dM}{dt} \right) dt + \int \int \frac{d^2 M}{dt^2} dt^2.$$

Вычислялись возмущения экваториальных элементов планеты $\Delta \Omega, \Delta i, \Delta \omega$. В таком случае

$$\Delta \bar{v} = \bar{k} \cdot \Delta \Omega + \bar{h} \cdot \Delta i + \bar{R} \Delta \omega,$$

$$h_x = \cos \Omega, h_y = \sin \Omega, h_z = 0,$$

$$k_x = k_y = 0, k_z = 1.$$

Возмущения элементов Паллады $\Delta M, \Delta e, \Delta i, \Delta \Omega, \Delta \omega, \Delta n$ были вычислены тремя различными методами, изложенными выше: методом Лагранжа (формулы 22), методом Мулена (формулы 23) и вторым вариантом метода Лагранжа (формулы 27).

Прежде всего на основании прямоугольных координат Паллады была получена следующая система оскулирующих элементов:

Эпоха и оскуляция 1957 июнь 11.0 вф. рр.

$M_0 = 27198154$	равноденствие и эклиптика 1950.0
$\omega = 309.7586$	
$\Omega = 172.9754$	
$i = 34.7980$	
$e = 0.2340307$	
$n = 768.8849$	
$n = 2.771811$	

Кроме того, были получены элементы ориентации, отнесенные к экватору:

$\omega = 324.0736$	равноденствие и экватор 1950.0
$\Omega = 160.1108$	
$i = 11.8380$	

На основании этих элементов вычислены проекции единичных векторов на экваториальные оси:

$P_x = -0.557552,$	$Q_x = -0.827202,$	$R_x = +0.069791,$
$P_y = +0.821113,$	$Q_y = -0.537174,$	$R_y = -0.192909,$
$P_z = -0.122084,$	$Q_z = +0.164864,$	$R_z = +0.978730,$
$l_x = +0.205709,$	$h_x = -0.940351,$	
$l_y = +0.568594,$	$h_y = +0.340206,$	
$l_z = -0.126739,$	$h_z = 0.$	

Вычисление возмущений велось на протяжении 10 лет с постоянным шагом интегрирования $\omega = 40$ дней в 9-м знаке после запятой (в радианах).

В правые части уравнений в любом способе входят компоненты возмущающей силы F_x, F_y, F_z . При численном интегрировании в прямоугольных координатах компоненты F_x, F_y, F_z получаются в процессе интегрирования, но мы могли ими воспользоваться только с 1960 по 1965 г. (интегрирование за этот период было выполнено в Институте теоре-

тической астрономии). Для периода с 1956 по 1960 г. пришлось составляющие вектора \vec{F} на каждый момент интегрирования вычислять специально по формуле

$$\omega \vec{F} = k \omega m_j \left(\frac{r_j - r}{\Delta^3} - \frac{r_j}{r_j^3} \right),$$

где m_j , r_j — масса и вектор положения Юпитера, r — вектор положения Паллады. Масса Юпитера принималась $m = 1 : 1047.355$.

При применении второго варианта метода Лагранжа необходимо иметь составляющие вектора скорости \dot{x}_i . Они вычислялись на основе таблицы прямоугольных координат Паллады, причем на интервале 1956—1960 гг. по формуле, полученной дифференцированием формулы Эверетта. Для вычисления на табличный момент эта формула имеет очень простой вид

$$\omega \dot{x}_i = x_i - x_0 - \frac{1}{3} \Delta_0^i - \frac{1}{6} \Delta_1^i + \frac{1}{20} M_i^i V - \frac{1}{30} M_i^i V^2.$$

Вторые разности и приведенные четвертые имеются в таблицах координат Паллады (Негел, 1950).

Интегрирование производилось от момента оскуляции 1957 июнь 11.0 эф. вр. \equiv 2436000.5 юл. дн. назад до 1955 апрель 3.0 \equiv 2435200.5 юл. дн. и вперед до 1965 ноябрь 16.0 \equiv 2439080.5.

В табл. 1 приведены возмущения элементов, вычисленные методом Лагранжа во втором варианте — по формулам (27), причем элементы e , a , p менялись на каждом шагу.

Для сравнения в табл. 2 приведены результаты вычисления возмущений тремя способами: методом Лагранжа в двух вариантах (индексы 1 и 2) и методом Музена (индекс 3). Результаты настолько близки, что для нашей задачи — вычисления дифференциальных коэффициентов — вполне можно было сохранять элементы постоянными.

Таблица 2

Table with 3 columns of coefficients (delta p1, delta p2, delta p3, etc.) and 3 rows of data points (Юл. дн. 243, 5200.5, 6000.5, 6800.5, 7600.5, 8400.5).

В результате вычислений получена система коэффициентов условных уравнений, приведенных в табл. 3.

Нормальные уравнения составлялись и решались при следующих предположениях: 1. Предполагается, что элементы Земли и масса Юпитера хорошо известны и не требуют поправок. Уравнения содержат 8 неизвестных.

Таблица 3
Условные уравнения

Large table with multiple columns (delta mu, delta delta, delta e, etc.) and multiple rows of numerical data points.

Таблица 3 (продолжение)

Table with 14 columns: M0, e cos w, sin i, delta, z/a, z/a, i, e cos w, M0, e sin w, e sin w, delta, delta, delta, delta. Rows 1-13.

Таблица 4

Table with 14 columns: M0, e cos w, sin i, delta, z/a, z/a, i, e cos w, M0, e sin w, e sin w, delta, delta, delta, delta. Rows 1-13.

2. Вводим поправку к массе Юпитера и решаем систему уравнений с 9 неизвестными. 3. Полагаем, что неизвестными являются рядом с поправками элементов Паллады и постоянными каталога также элементы Земли. 4. В дополнение к этим 12 неизвестным вводим поправку массы Юпитера и получаем систему с 13 неизвестными. Последняя система нормальных уравнений приведена в табл. 4.

Определив веса неизвестных во всех четырех случаях, находим ошибки искомым величин (табл. 5). В этой же таблице приведены для сравнения ошибки определения 12 неизвестных, взятые из работ Клеменса (Clemence, 1948) и В. И. Орельской (1957).

Таблица 5 Ошибки неизвестных

Table with 6 columns: Unknown type, Pallas 8, Pallas 9, Pallas 12, Pallas 13, Cerberus, Jupiter. Rows include Delta L, Delta e, Delta i, Delta delta, Delta a, Delta M, Delta m, Delta delta.

Из табл. 5 видно, что ошибки определения 12 неизвестных по наблюдениям Церера, Паллады и Юноны одного порядка. Введение добавочного неизвестного — поправки к массе Юпитера — не оказывает почти никакого влияния на точность определения остальных неизвестных (кроме поправки большой полуоси планеты, ошибка которой увеличилась в два раза). Сама поправка к массе Юпитера может быть определена, к сожалению, с небольшим весом: ошибка величины Delta (1/m), т. е. ошибка знаменателя, равна 0.66 epsilon_0, где epsilon_0 — ошибка одного нормального места, выраженная в секундах дуги. Точность наблюдений сейчас такова, что вряд ли можно надеяться получить среднюю ошибку единицы веса меньше 0.1 — 0.2 и, следовательно, ошибку величины Delta (1/m) меньше 0.06 — 0.10. Причина небольшого веса лежит в слишком малом промежутке времени (10 лет), в течение которого должны вестись наблюдения, и в неблагоприятном взаимном расположении Паллады и Юпитера (это главным образом). Следовательно, масса Юпитера не может быть определена с достаточной точностью из наблюдений Паллады за рассматриваемый промежуток времени. Однако, судя по современным определениям Де Ситтера (De Sitter, 1938), Осена (Osena, 1928), Куанкова (1950), принятое Хиллом значение массы Юпитера преувеличено и требуется поправка к величине 1/m = 1047.355 порядка 0.05 — 0.10.

Все планеты, входящие в программу наблюдений для определения постоянных Католага слабых звезд, обладают большим суточным движением, но благодаря значительным эксцентриситетам часть этих планет — 1 Церера, 2 Паллада, 3 Юнона, 6 Геба, 18 Мельпомена — могут подходить к Юпитеру на расстояние около 2,0 а. е. Ожидаемая ошибка в массе Юпитера может вызвать в геоцентрических координатах этих планет ошибку порядка нескольких десятых секунды (как у Паллады на данном интервале) или больше, т. е. вызвать эффект более значительный, чем систематические ошибки каталога. Поэтому при определении элементов ориентации малых планет влиянием неточности массы Юпитера пренебречь нельзя, и все определения систематических ошибок каталога по наблюдениям набранной группы малых планет можно считать лишь предварительными, пока не будет получено точное значение массы Юпитера.

ЛИТЕРАТУРА

- Куликов Д. К. 1950. Численные методы небесной механики в применении к изучению движения VIII спутника Юпитера. Бюлл. ИТА, 4, 7 (60).
 Нумеров Б. В. 1935. К вопросу об определении систематических ошибок склонений фундаментальных звезд. Бюлл. Астр. инст., 2, 32.
 Нумеров Б. В. 1935. К вопросу о совместном определении поправок элементов планеты и Земли. Астр. журн., 12, 6.
 Орельская В. И. 1957. Опыт определения постоянных каталога FK3 по наблюдениям Юноны за 1934—1943 гг. Труды 12-й Астрометрической конференции СССР. Изд. ГАО в Пулковск, Л.
 Самойлова-Яхонтова Н. С. 1944. Исправление «эллиптических» орбит. Бюлл. ИТА, 3, 53.
 Самойлова-Яхонтова Н. С. 1950. К вопросу об уточнении элементов эллиптической орбиты. Бюлл. ИТА, 4, 6 (59).
 Субботин М. Ф. 1937. Курс небесной механики, 2. ОНТИ, М.—Л.
 Billimovitch A. 1943. Ueber die Anwendungen der Pfaffschen Methode in der Störungstheorie. A. N., 273.
 Clemence G. M. 1948. The value of minor planets in meridian astronomy. A. J., 54, 1173.
 De Sitter W. 1938. On the system of astronomical constants, B.A.N., 8.
 Herget P. 1950. Rectangular coordinates of Ceres, Pallas, Juno, Vesta, 1920—1950. Astr. Pap., 11, 4.
 Herrick S. 1948. A modification of the „variation-of-constants“ method for special perturbations. Publ. A.S.P., 60.
 Милашников М. 1955. Основы небесной механики. Београд.
 Misen P. 1954. Special perturbations of the vectorial element. A. J., 59.
 Osten H. 1928. 447 Valentine and Jupitermasse. A. N., 232, 225.
 Popović B. 1950. C. R. Belgrade, 198.
 Rabe E. 1950. Derivation of fundamental astronomical constants from the observations of Eros during 1926—1945. A. J., 55.

Поступило в Редакцию
29 июня 1957 г.

Бюллетень Института Теоретической Астрономии

Т. VII

1958

№ 1 (84)

Методы использования Луны для геодезических целей

В. М. Амелин

В статье рассматриваются способы использования для геодезических целей результатов покрытий, затмений и специальных фотографических наблюдений Луны. Даются некоторые числовые примеры.

THE METHODS OF MAKING USE OF THE MOON FOR GEODETIC PURPOSES, by V. M. Amelin. — The methods of making use of results of occultations, eclipses and special photographic observations of the moon for geodetic purposes are discussed. Some numerical examples are given.

Введение

Основная задача геодезии состоит в определении размеров и фигуры Земли, а также пространственных координат точек земной поверхности в единой системе. Знание таких координат необходимо при составлении географических и морских карт и при решении многих других задач.

Главным методом геодезических работ являются сейчас триангуляции, каждая из которых строится на поверхности некоторого референц-эллипсоида (Бесселя, Кларка, Красовского и др.). Положение референц-эллипсоидов по отношению друг к другу и к центру инерции Земли неизвестно и, следовательно, отсюда вытекающие геодезические координаты являются относительными. Методом обычной триангуляции нельзя осуществить геодезическую связь всех материков и островов в единую мировую систему.

Путем совместного изучения общего гравитационного поля Земли и результатов астрономо-геодезических работ на различных материках можно получить единую систему пространственных координат, связанную с центром инерции Земли. Данная задача ставится в работах М. С. Молоденского (1951) и И. Д. Жонголовича (1952, 1956).

Помимо указанного метода, существует еще другой, независимый метод, позволяющий определять пространственные координаты точек земной поверхности по отношению к центру инерции Земли. Этот метод основан на наблюдении Луны. Луна близка к Земле и параллакс ее довольно велик. Это позволяет использовать Луну для решения названной геодезической задачи. Новые возможности в данную проблему вносят искусственные спутники Земли.

Основной принцип использования Луны для геодезических целей состоит в следующем. Эфемериды дают геоцентрическое положение Луны, как бы видимое из центра инерции Земли; из наблюдений мы получаем топоцентрическое положение Луны, которое отличается от геоцентрического вследствие параллактического смещения. Сравнение теоретических (геоцентрических) и наблюдаемых (топоцентрических) координат Луны дает принципиальную возможность определить пространственные координаты наблюдателя, отнесенные к центру инерции Земли. Такие координаты будем называть геоцентрическими, или абсолютными.

Заметим, что в некоторых курсах высшей геодезии (например, Закастов, 1950, стр. 20) геоцентрическими координатами называют вообще систему координат r , Φ и L (или r ,

φ' и λ'), отнесенных к какому-либо референц-эллипсоиду. Такое определение не является удачным, так как центр референц-эллипсоида, с которым связана эта система координат, обычно не совпадает с центром инерции Земли. Систему ρ , φ' и λ' будем называть сферической.

Положение наблюдателя относительно центра инерции Земли можно определять в системе абсолютных прямоугольных или абсолютных сферических координат. В данной работе целесообразным оказалось использовать в основном абсолютные прямоугольные координаты X , Y и Z . Именно в этих координатах проще всего получаются все выводы и формулы. В случае определения расстояния между двумя наблюдателями по хорде, оно легко выражается через разности прямоугольных координат обоих пунктов наблюдения. Прямоугольные координаты связаны простыми соотношениями со сферическими, что всегда позволяет перейти от одних координат к другим.

Зная прямоугольные координаты наблюдателя, можно также легко рассчитать и так называемые геодезические координаты. Определение геодезических координат — широты B , долготы L и высоты H — дано, например, в работе И. Д. Жонголовича (1956, стр. 21), которая содержит также историю введения этого понятия. Геодезическую высоту H наблюдателя можно представить в виде суммы $H = N + h$, где N — превышение геоида над некоторым эллипсоидом и h — высота точки наблюдения над геоидом (т. е. над уровнем моря).

Геодезические координаты называются относительными, если они связаны с произвольным референц-эллипсоидом, и абсолютными, если они связаны с общим земным эллипсоидом. Под общим земным эллипсоидом современная геодезия понимает такой, который наилучшим образом подходит ко всему геоиду в целом, т. е. дает наименьшую сумму квадратов отступлений от геоида при условии, что центр эллипсоида совпадает с центром инерции Земли, а малая ось совпадает с ее осью вращения. В работах И. Д. Жонголовича (1952, 1956) подробно рассмотрен вопрос об определении формы и размеров общего земного эллипсоида и приведены приближенные значения его элементов — $a = 6378077$ м и $a : b = 1 : 296.6$. В дальнейшем в числовых примерах мы будем пользоваться именно этими элементами.

Способ определения абсолютных координат наблюдателя по наблюдениям Луны до последнего времени почти не применялся. Одной из причин была малая точность наблюдений Луны. Сейчас точность наблюдений значительно повысилась благодаря применению фотоэлектрических методов регистрации. Другая причина заключалась в неточности лунных эфемерид. Геоцентрические координаты Луны, вычисляемые на основании таблиц Бруна, содержат систематические ошибки в средней долготе — Δl и Δb , достигающие нескольких секунд дуги. Кроме того, точность ΔT , с которой до последнего времени давались координаты Луны в эфемеридах, является недостаточной.

Поскольку в коэффициентах при координатах наблюдателя в уравнениях ошибок входит множитель $\sin \pi \epsilon = \frac{1}{60}$ ($\pi \epsilon$ — параллакс Луны), то при определении координат наблюдателя всякая ошибка наблюдения и лунных эфемерид возрастает в 60 раз. Поэтому чрезвычайно важно иметь точные геоцентрические координаты Луны. Сейчас поправки координат Луны Δl и Δb находятся специально из систематических наблюдений на большом числе обсерваторий и поэтому в нашей задаче будем считать, что они уже известны. В последнее время выпущены более точные лунные эфемериды — "Improved Lunar Ephemeris" (1954), что открывает новые возможности в проблеме использования Луны для геодезических целей. Если все же считать, что поправки Δl и Δb известны приближенно, то это внесет некоторое усложнение в разрабатываемую методику, что будет подробно рассмотрено дальше.

Вопрос о возможности использования Луны в геодезических целях рассматривался еще Иоганном Альбрехтом Эйлером (Euler, 1768). Эйлер указывал, что из одновременных наблюдений Луны в нескольких пунктах, расположенных на одном меридиане, можно теоретически получить расстояние от Луны до каждого из наблюдателей. Большое число таких наблюдений определит форму земного меридиана, а следовательно, и фигуру Земли.

Предпринимались также попытки получить геодезическую информацию из наблюдений покрытий. Один из таких опытов принадлежит Баттерману (Battermann, 1902), который

из решения системы примерно в 600 уравнений наряду с определением элементов лунной орбиты пытался находить геоцентрическую широту φ' и долготу λ' места наблюдения. Однако точность определения геоцентрических координат φ' и λ' оказалась небольшой, соответственно ± 9 и $\pm 15''$.

В 1929 г. Бялехевич (Bialasiewicz) предложил использовать наблюдения солнечных затмений для измерения расстояний на земной поверхности между двумя пунктами. За последние 20 лет было предпринято несколько попыток выполнить такие измерения. С данной целью наблюдались затмения 19 июня 1936 г., 9 июля 1945 г., 20 мая 1947 г., 8 мая 1948 г., 30 июня 1954 г. Особенно обширная программа геодезических работ была намечена в связи с наблюдением полного солнечного затмения 30 июня 1954 г. Полоса полной фазы проходила через Северную Америку, Гренландию, Исландию, Швецию, СССР и Иран. Ученые Америки, Швеции и ряда других стран организовали 20 экспедиций, задачей которых было наблюдение затмения с целью установления геодезической связи между Америкой и Европой. Однако вследствие неблагоприятных атмосферных условий затмение удалось удовлетворительно наблюдать только на 1 станции.

До сих пор опубликованы лишь результаты наблюдения солнечного затмения 20 мая 1947 г. (Kukkamäki, 1954a, 1954b). Это затмение наблюдалось финскими экспедициями в Южной Америке и Африке.

Вопрос об использовании Луны в геодезических целях в последнее время привлекает к себе все большее внимание. На возможность использования в геодезических целях покрытий и затмений указывают Ламберт (Lambert, 1949) и Беррот (Berroth, 1949). Однако эти авторы говорят лишь о теоретической возможности такого использования, не давая разработанной методики и не приводя численных результатов, которые свидетельствовали бы о практической ценности данного метода.

Недавно Марковиц (Markowitz, 1954) предложил производить фотографические наблюдения Луны. Этот метод в значительной мере отличается от методов покрытий и затмений и открывает новые возможности в проблеме использования Луны для геодезических целей. Фотографические наблюдения Луны включены в программу Международного геофизического года.

Задачей данной работы является практическая разработка и сравнение возможных методов использования Луны для геодезических целей. В работе даны также некоторые числовые примеры, выполненные на основании изложенной теории и имеющегося наблюдательного материала. Ввиду крайне ограниченного выбора последнего эти примеры имеют лишь методическое значение.

§ 1. Общие вопросы теории

Напишем уравнения, которые можно использовать для определения геоцентрических координат наблюдателя по наблюдениям Луны. Наиболее общими являются уравнения, используемые в теории солнечных затмений. Уравнения, используемые при обработке результатов фотографических наблюдений Луны и покрытий, непосредственно получаются из этих общих уравнений при добавлении определенных условий.

Уравнение конуса лунной тени или полу тени, используемое в аналитической теории солнечных затмений, относят к особой подвижной системе координат, называемой бесселевой (Михайлов, 1954, стр. 45). Эта система является прямоугольной и геоцентрической, т. е. ее начало принято в центре инерции Земли. Уравнение конуса пишут обычно в следующей параметрической форме:

$$\begin{aligned} x - \xi &= l \sin L, \\ y - \eta &= l \cos L, \end{aligned} \quad (1)$$

где x и y — координаты центра Луны, а ξ и η — координаты наблюдателя в бесселевой системе. Величина l есть радиус конуса в точке наблюдения, а L — угол положения контакта.

Бесселевы координаты Луны определяются выражениями

$$\begin{aligned} x &= \Delta_{\epsilon} \cos \delta \sin (\alpha - a), \\ y &= \Delta_{\epsilon} [\sin \delta \cos d - \cos \delta \sin d \cos (\alpha - a)], \end{aligned} \quad (2)$$

где Δ_{ϵ} — расстояние между центрами Земли и Луны, α и δ — экваториальные координаты Луны, a и d — экваториальные координаты точки z , т. е. той точки, в которой ось z бесселевой системы пересекает небесную сферу. Ось z во время затмения всегда направлена параллельно оси конуса тени и поэтому координаты a и d точки z отличаются от геоцентрических координат Солнца α_{\odot} и δ_{\odot} не более, чем на $14''$.

Бесселевы координаты наблюдателя определяются выражениями

$$\begin{aligned} \xi &= \rho \cos \varphi' \sin (h_1 + \lambda), \\ \eta &= \rho [\sin \varphi' \cos d - \cos \varphi' \sin d \cos (h_1 + \lambda)], \end{aligned} \quad (3)$$

где h_1 — гринвичский часовой угол точки z , а ρ , φ' и λ — абсолютные сферические координаты наблюдателя. Координаты ρ , φ' и λ являются абсолютными, так как бесселева система координат имеет начало в центре инерции Земли. Подробный вывод формул (2) и (3) дается А. А. Михайловым (1925, 1954).

Несколько преобразуем выражения (2) и (3). Расстояние до Луны Δ_{ϵ} обычно находится из соотношения

$$\Delta_{\epsilon} = \frac{R}{\sin \pi_{\epsilon}}, \quad (4)$$

где π_{ϵ} — параллакс Луны и R — величина, условно называемая „радиусом Земли“. Под „радиусом Земли“ R следует понимать такую величину, которая для данной системы параллаксов Луны π_{ϵ} дает по формуле (4) значения расстояний до Луны Δ_{ϵ} , наиболее приближающиеся к истинным. Как следует из анализа всех выкладок Броуна, им фактически принято значение R , близкое к величине 6378 070 м.¹ Величина R служит для связи принятой системы параллаксов π_{ϵ} (броуновской) и линейных расстояний до Луны Δ_{ϵ} . Если бы расстояние Δ_{ϵ} можно было определить из непосредственных наблюдений (например, радиальным способом), то, сохраняя прежнюю систему параллаксов π_{ϵ} , мы смогли бы уточнить принятое значение R .

Введем в выражения (3) вместо сферических координат ρ , φ' и λ абсолютные прямоугольные координаты наблюдателя X , Y и Z . Если поместим в центре инерции Земли O начало прямоугольной системы координат XYZ и направим ось OX параллельно гринвичскому меридиану, ось OY — на восток и ось OZ — по оси вращения Земли, то сферические и прямоугольные координаты будут связаны так:

$$\begin{aligned} X &= \rho \cos \varphi' \cos \lambda, \\ Y &= \rho \cos \varphi' \sin \lambda, \\ Z &= \rho \sin \varphi'. \end{aligned} \quad (5)$$

Учитывая (4) и (5) и обозначая часовой угол точки z через t_1 , напомним уравнение конуса (1) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \cos \delta \sin (\alpha - a) \operatorname{cosec} \pi_{\epsilon} - X \sin t_1 - Y \cos t_1 &= l \sin L, \\ [\sin \delta \cos d - \cos \delta \sin d \cos (\alpha - a)] \operatorname{cosec} \pi_{\epsilon} + \\ + X \sin d \cos t_1 - Y \sin d \sin t_1 - Z \cos d &= l \cos L. \end{aligned} \quad (6)$$

В уравнениях (6) величины X , Y , Z и l выражены в единицах „радиуса Земли“ R . Если мы изменим „радиус Земли“ R , сохраняя при этом прежнюю систему параллаксов π_{ϵ} , то пропорционально изменятся все линейные величины, получаемые из уравнений (6).

¹ Данные, относящиеся к указанной величине, приведены в статье Ф. Х. Перли (1957).

Уравнения (6) лежат в основе всех дальнейших преобразований. Основными неизвестными в этих уравнениях являются абсолютные прямоугольные координаты наблюдателя X , Y и Z .

О методах применения уравнений (6) для определения абсолютных координат наблюдателя X , Y и Z будет сказано в следующих параграфах. Зная координаты X , Y и Z , выраженные в метрах, можно легко перейти к используемым в геодезии геодезическим координатам. Если при таком переходе применить элементы общего земного эллипсоида a и e , то получим абсолютные геодезические координаты наблюдателя B , L и H , используя соотношения

$$\begin{aligned} X &= (N + H) \cos B \cos L, \\ Y &= (N + H) \cos B \sin L, \\ Z &= [N(1 - e^2) + H] \sin B, \end{aligned} \quad (7)$$

где $N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}$ — радиус кривизны первого вертикала. В дальнейшем необходимо будет использовать соотношения, которые определяют зависимость между поправками ΔX , ΔY , ΔZ и ΔB , ΔL , ΔH . Дифференцируя соотношения (7) и пренебрегая членами, содержащими e^2 , получим после элементарных преобразований

$$\begin{aligned} (N + H) \Delta B &= -\sin B \cos L \Delta X - \sin B \sin L \Delta Y + \cos B \Delta Z, \\ (N + H) \cos B \Delta L &= -\sin L \Delta X + \cos L \Delta Y, \\ \Delta H &= \cos B \cos L \Delta X + \cos B \sin L \Delta Y + \sin B \Delta Z. \end{aligned} \quad (8)$$

В уравнениях (8) ΔB и ΔL выражены в радианах, а ΔX , ΔY , ΔZ и ΔH — в метрах. При современном уровне знаний о форме и размерах Земли ошибки приближенных значений координат X , Y и Z не превосходят 1 км. В этом случае отброшенные члены, содержащие множитель e^2 , будут порядка 10 м.

Как уже отмечалось во введении, в рассматриваемом методе необходимо с большой точностью получать из эфемерид геоцентрические координаты Луны α и δ , так как всякая ошибка в α и δ возрастает при определении координат наблюдателя X , Y и Z приблизительно в 60 раз. Сравнение эфемерид и наблюдений показывает, что средняя долгота и широта Луны, даваемые в эфемериде, нуждаются в поправках Δl и Δb . Значения поправок Δl и Δb за период 1931—1950 гг., взятые из „Astronomical Journal“, приведены А. А. Михайловым (1954, стр. 121).

Поправка средней долготы Δl систематически меняется и объясняется неравномерностью вращения Земли. Для учета поправки Δl в настоящее время предлагается строить астрономические эфемериды по аргументу эфемеридного (равномерного) времени. В данной работе для получения геоцентрических координат Луны были использованы таблицы „Improved Lunar Ephemeris“ (1954), которые содержат координаты на 1952—1959 гг., отнесенные к аргументу эфемеридного времени. Прямое восхождение в них дается до $0'001$, склонение — до $0'01$ и параллакс — до $0'001$.

Эфемеридное время E получается из выражения $E = T_{\text{гр}} + \Delta t$, где $T_{\text{гр}}$ — момент наблюдения по всемирному времени и Δt — поправка, которая определяется из обработки многочисленных наблюдений Луны. Обычно дается среднее значение Δt за год. В данной работе значения Δt взяты из статьи Саллера (Sessler, 1954):

	1950.5	1951.5	1952.5	1953.5	1954.5
Δt ...	-29'3	+29'7	+30'2	+30'8	+31'4

Для 1955.5 экстраполяцией было получено $\Delta t = +31'9$. Здесь эфемеридное время дано до $0'1$, в действительности оно получается сейчас с меньшей точностью. Если точность определения эфемеридного времени (т. е. разности Δt) равна $\pm 0'1$, то ошибка в средней долготе Луны будет не более $\pm 0'05$.

Будем считать, что, используя вышеуказанные таблицы и полагая эфемеридное время известным, мы тем самым учитываем поправку средней долготы Луны Δl .

Поправка широты $\Delta\delta$ считается постоянной и, как например указано у А. А. Михайлова (1954, стр. 57), происходит вследствие небольшой асимметрии между северным и южным полушариями Луны, что вызывает несовпадение центра тяжести и центра фигуры Луны.

Для учета поправки $\Delta\delta$ можно воспользоваться формулами, приведенными А. А. Михайловым (1954, стр. 121). Если $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$ — поправки прямого восхождения и склонения, а $\Delta\lambda$ и $\Delta\beta$ — поправки долготы и широты Луны, то

$$\begin{aligned} \cos \delta \Delta\alpha &= \cos \beta \cos s \Delta\lambda - \sin s \Delta\beta, \\ \Delta\delta &= \cos \beta \sin s \Delta\lambda + \cos s \Delta\beta, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \cos \beta \sin s &= \cos \alpha \sin \epsilon, \\ \cos \beta \cos s &= \cos \delta \cos \epsilon + \sin \delta \sin \epsilon \sin \alpha. \end{aligned}$$

Поправки эклиптических координат $\Delta\lambda$ и $\Delta\beta$ и орбитальных координат Δl и Δb связаны соотношениями, аналогичными (9). Полагая эфемеридное время точно известным ($\Delta l = 0$) и учитывая малую наклонность лунной орбиты к эклиптике ($i = 5^\circ 9'$), можно написать приближенно $\Delta\lambda = 0$ и $\Delta\beta = \Delta b$. Отброшенные члены будут иметь порядок $\sin i \Delta b$ и не превыдают $0'05$.

Таким образом, геоцентрические координаты Луны находим по аргументу эфемеридного времени из таблиц „Improved Lunar Ephemeris“. В найденные координаты α и δ вводим затем поправку за изменение широты Луны по формулам (9).

Если считать, что геоцентрические координаты Луны известны недостаточно точно, то в уравнениях (6) появятся еще две неизвестных — $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$, с наличием которых необходимо считаться при разработке различных вариантов методики.

§ 2. Использование результатов фотографического определения топоцентрических координат Луны

Фотографический метод определения топоцентрических координат Луны является наиболее общим и многообещающим. Этот метод позволяет определять координаты Луны по отношению к опорным звездам с большой точностью. Наблюдения Луны можно производить на значительной орбитальной дуге и выбирать наиболее удобные моменты. Число наблюдений может быть сколь угодно большим.

Основная трудность фотографического метода заключается в том, чтобы получить на одной пластинке достаточно хорошие изображения Луны и звезд. Размеры, значительная яркость и быстрое движение Луны затрудняют совместное фотографирование этих объектов.

В США создана фотографическая камера с двойной скоростью, позволяющая определять положение Луны среди звезд. Описание этой камеры дано в статье Марковица (Markowitz, 1954). По измерениям Марковица, вероятная ошибка по α и δ составляет около $0'15$. При фотографическом методе топоцентрическое положение Луны получается из измерений, сделанных с большим числом точек на ярком краю диска. Поэтому, как отмечает Марковиц в указанной статье, в данном методе эффект неровностей лимба Луны влияет на положение лунного центра гораздо меньше, чем в тех методах, которые используют только одну точку.

Работа по совместному фотографированию Луны и звезд проводится также в Пулково, где испытывается метод, предложенный А. А. Михайловым, а также метод Марковица.

Получение точных топоцентрических координат Луны α' и δ' фотографическим методом является сложной задачей. Мы не будем рассматривать здесь вопрос об определении из наблюдений α' и δ' , так как это не является темой настоящей работы. Полагая, что точные топоцентрические координаты Луны α' и δ' уже известны, рассмотрим, как их можно использовать для геодезических целей.

Применим уравнения (6) к случаю непосредственного определения α' и δ' . Фотографическое наблюдение Луны, которое сводится к определению ее топоцентрических

координат α' и δ' по известным координатам опорных звезд, можно рассматривать как частный случай покрытия, когда покрываемая звезда совпадает с видимым центром фигуры Луны. Наблюдатель в этом случае находится на оси цилиндра лунной тени, который образован звездой с координатами $\alpha_0 = \alpha'$ и $\delta_0 = \delta'$. Координаты точки z будут $\alpha = \alpha'$, $d = \delta'$ и уравнения (6) для случая непосредственного определения топоцентрических координат Луны примут вид

$$\begin{aligned} \cos \delta \sin(t' - t) \operatorname{cosec} \pi_\epsilon - X \sin t' - Y \cos t' &= 0, \\ [\sin \delta \cos \delta' - \cos \delta \sin \delta' \cos(t' - t)] \operatorname{cosec} \pi_\epsilon + \\ + X \sin \delta' \cos t' - Y \sin \delta' \sin t' - Z \cos \delta' &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где $t = S_0 - \alpha$ и $t' = S_0 - \alpha'$. Оставляя первое уравнение (10) неизменным, приведем второе уравнение к более удобному виду, для чего умножим первое уравнение на $\sin \delta' \operatorname{tg} \frac{t-t'}{2}$ и сложим со вторым. После элементарных преобразований получим вместо уравнений (10) такую систему:

$$\begin{aligned} a_1 X + b_1 Y &= \sin(\alpha - \alpha') \cos \delta \operatorname{cosec} \pi_\epsilon, \\ a_2 X + b_2 Y + c_2 Z &= \sin(\delta - \delta') \cos \frac{1}{2}(\alpha - \alpha') \operatorname{cosec} \pi_\epsilon, \end{aligned} \quad (11)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} a_1 &= \sin t', & b_1 &= \cos t', \\ a_2 &= -\sin \delta' \cos \frac{1}{2}(t + t'), & b_2 &= \sin \delta' \sin \frac{1}{2}(t + t'), & c_2 &= \cos \delta' \cos \frac{1}{2}(t - t'). \end{aligned} \quad (12)$$

Напомним, что в уравнениях (11) величины X , Y и Z выражены в единицах принятого Бруном „радиуса Земли“. Уравнения (11) являются основными при использовании результатов фотографических наблюдений Луны. Они удобны тем, что в правых частях стоят непосредственно разности геоцентрических и топоцентрических координат Луны.

Из лунных эфемерид берутся геоцентрические координаты α , δ и параллакс π_ϵ ; из фотографических наблюдений получают топоцентрические координаты Луны α' и δ' . Основными неизвестными в уравнениях (11) являются прямоугольные геоцентрические координаты наблюдателя X , Y и Z . При решении избыточной системы вида (11) геоцентрические координаты Луны вычисляются из эфемерид точно; во втором случае предполагаем, что они содержат неизвестные небольшие ошибки. Кроме того, необходимо разобирать случай, когда наблюдения Луны производятся в нескольких пунктах, связанных единой треугольной сетью.

1. Рассмотрим случай, когда эфемеридное время и поправка широты хорошо известны и, следовательно, геоцентрические координаты Луны можно считать безошибочными. Параллакс Луны π_ϵ также будем считать безошибочным. В этом случае за неизвестные можно действительно принять координаты пункта наблюдения X , Y и Z . Обычно по известным геодезическим или астрономическим координатам наблюдателя предварительно вычисляют приближенные значения прямоугольных координат X_0 , Y_0 и Z_0 , а за искомые неизвестные принимаем небольшие поправки ΔX , ΔY и ΔZ .

Уравнения (11) для данного случая напишем в виде

$$\begin{aligned} a_1 \Delta X + b_1 \Delta Y &= m - m_0, \\ a_2 \Delta X + b_2 \Delta Y + c_2 \Delta Z &= n - n_0, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} m &= \sin(\alpha - \alpha') \cos \delta \operatorname{cosec} \pi_\epsilon, & m_0 &= a_1 X_0 + b_1 Y_0, \\ n &= \sin(\delta - \delta') \cos \frac{1}{2}(\alpha - \alpha') \operatorname{cosec} \pi_\epsilon, & n_0 &= a_2 X_0 + b_2 Y_0 + c_2 Z_0. \end{aligned} \quad (14)$$

Каждое наблюдение Луны дает два уравнения вида (13). Имея достаточное количество удобно расположенных наблюдений, решаем всю систему полученных уравнений по способу наименьших квадратов.

Как можно вывести из уравнений (13), случайная ошибка одного определения топоцентрических координат Луны величиной ± 0.1 вызывает в прямоугольных координатах наблюдателя ошибки приблизительно в ± 200 м. Ошибки искомым координат X_1, Y_1 и Z_1 , зависящие от случайных ошибок наблюдаемых топоцентрических координат Луны, могут быть сведены до известного минимума, если увеличивать число наблюдений и удобно располагать их по времени.

Расположим наблюдения таким образом, чтобы часовые углы и склонения Луны принимали различные, возможные для данного места, значения. В этом случае коэффициенты a_i, b_i и c_i уравнений (13) будут изменяться в максимально возможных пределах, и средние ошибки координат наблюдателя значительно уменьшатся.

2. Рассмотрим теперь случай, когда эфемеридное время или поправка широты известны неточно и, следовательно, геоцентрические координаты Луны, получаемые на эфемерид, нуждаются в поправках. В уравнения (11) введем еще две неизвестных: $\Delta\lambda$ и $\Delta\delta$ — поправки к табличным значениям α и δ . Так как углы $(\alpha - \alpha')$ и $(\delta - \delta')$ малы, то в коэффициентах при этих неизвестных можно положить: $\sin(\alpha - \alpha') = 0, \sin(\delta - \delta') = 0, \cos(\alpha - \alpha') = 1$ и $\cos(\delta - \delta') = 1$. Выражая $\Delta\lambda$ и $\Delta\delta$ в радианах, напишем уравнения (11) в следующем виде:

$$\begin{aligned} a_1 X + b_1 Y - \cos \delta \operatorname{cosec} \pi \epsilon \Delta\lambda &= m, \\ a_2 X + b_2 Y + c_2 Z - \operatorname{cosec} \pi \epsilon \Delta\delta &= n, \end{aligned} \quad (15)$$

где m и n даются формулами (14).

Удобнее, однако, вместо поправок $\Delta\lambda$ и $\Delta\delta$ экваториальных координат Луны, меняющихся для каждого наблюдения, ввести поправки долготы и широты $\Delta\lambda'$ и $\Delta\delta'$, которые в течение продолжительного времени можно считать неизменными. Используя формулы (9), получим

$$\begin{aligned} a_1 X + b_1 Y + d_1 \Delta\lambda' + e_1 \Delta\delta' &= m, \\ a_2 X + b_2 Y + c_2 Z + d_2 \Delta\lambda' + e_2 \Delta\delta' &= n, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} d_1 &= -\operatorname{cosec} \pi \epsilon \cos \beta \cos \sigma, & e_1 &= \operatorname{cosec} \pi \epsilon \sin \sigma, \\ d_2 &= -\operatorname{cosec} \pi \epsilon \cos \beta \sin \sigma, & e_2 &= -\operatorname{cosec} \pi \epsilon \cos \sigma. \end{aligned} \quad (17)$$

Совместное определение координат наблюдателя и координат Луны из уравнений (16) нецелесообразно, так как определитель нормальной системы, составленной из данных уравнений, мал. Как показано в статье Х. И. Пуртова (1958), такой определитель всегда близок к нулю. Выгоднее в этом случае применить уравнения (16) к нескольким пунктам наблюдения и исключить из них общие значения поправок $\Delta\lambda'$ и $\Delta\delta'$.

Возьмем случай близких по времени наблюдений Луны на двух станциях. Пишем уравнения (16) для каждой станции:

$$\begin{aligned} a_1' X_1 + b_1' Y_1 + d_1' \Delta\lambda' + e_1' \Delta\delta' &= m', \\ a_2' X_1 + b_2' Y_1 + c_2' Z_1 + d_2' \Delta\lambda' + e_2' \Delta\delta' &= n', \end{aligned} \quad (18)$$

II станция:

$$\begin{aligned} a_1'' X_2 + b_1'' Y_2 + d_1'' \Delta\lambda' + e_1'' \Delta\delta' &= m'', \\ a_2'' X_2 + b_2'' Y_2 + c_2'' Z_2 + d_2'' \Delta\lambda' + e_2'' \Delta\delta' &= n''. \end{aligned} \quad (18')$$

Если моменты наблюдений на двух станциях различаются на 1—2 часа, то можно считать, что $d_1' \approx d_1'', d_2' \approx d_2'', e_1' \approx e_1''$ и $e_2' \approx e_2''$. Вычтем соответственно из уравнений (18) уравнения (18'):

$$\begin{aligned} a_1' X_1 + b_1' Y_1 - a_1'' X_2 - b_1'' Y_2 &= m' - m'', \\ a_2' X_1 + b_2' Y_1 + c_2' Z_1 - a_2'' X_2 - b_2'' Y_2 - c_2' Z_2 &= n' - n''. \end{aligned} \quad (19)$$

В уравнениях (19) неизвестные $\Delta\lambda$ и $\Delta\delta$ уже исключены. Если геоцентрические координаты X_1, Y_1 и Z_1 одной станции считать точно известными, то из решения избыточной системы вида (19) можно получить координаты X_2, Y_2 и Z_2 другой станции и таким образом осуществить геодезическую связь двух станций.

Если координаты обеих станций считать лишь приблизительно известными, то из решения системы (19) можно определить величину и направление хорды D , соединяющей обеих наблюдателей. Для этого необходимо, очевидно, получить величины $(X_1 - X_2), (Y_1 - Y_2)$ и $(Z_1 - Z_2)$. Введем обозначения

$$\begin{aligned} u &= X_1 - X_2, & v &= Y_1 - Y_2, & w &= Z_1 - Z_2, \\ u' &= X_1 + X_2, & v' &= Y_1 + Y_2, & w' &= Z_1 + Z_2, \end{aligned} \quad (20)$$

после чего уравнения (19) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{a_1' - a_1''}{2} u + \frac{b_1' - b_1''}{2} v &= m' - m'' - \left(\frac{a_1' - a_1''}{2} u' + \frac{b_1' - b_1''}{2} v' \right), \\ \frac{a_2' - a_2''}{2} u + \frac{b_2' - b_2''}{2} v + \frac{c_2' - c_2''}{2} w &= n' - n'' - \left(\frac{a_2' - a_2''}{2} u' + \frac{b_2' - b_2''}{2} v' + \frac{c_2' - c_2''}{2} w' \right), \end{aligned} \quad (21)$$

где u, v и w — искомые неизвестные.

В свободные члены уравнений (21) входят величины u', v' и w' , известные лишь приближенно. Если, например, координаты наблюдателей X_1, Y_1 и Z_1 известны с ошибкой ± 500 м, то ошибки u', v' и w' будут порядка ± 700 м.

Однако в случае небольшого промежутка времени между наблюдениями на двух станциях разности $a_1' - a_1'', b_1' - b_1''$ и $c_2' - c_2''$ невелики и приближенный подсчет u', v' и w' не внесет значительных ошибок в правые части уравнений (21). Положим, что разность моментов наблюдений на двух станциях составляет 30 мин. Тогда даже при указанной выше ошибке величин u', v' и w' в ± 700 м ошибка в принятом значении выражения

$$\left(\frac{a_1' - a_1''}{2} u' + \frac{b_1' - b_1''}{2} v' + \frac{c_1' - c_1''}{2} w' \right) \quad (22)$$

будет всего порядка ± 50 м. Если положим случайную ошибку одного определения топоцентрических координат Луны на каждой станции равной ± 0.1 , то разности $(m' - m'')$ и $(n' - n'')$ определятся с ошибкой ± 300 м. Видно, что ошибка в принятом значении величин (22) лишь незначительно нарушит точность свободных членов уравнений погрешностей.

При строго одновременных наблюдениях можно считать, что $a_1' \approx a_1'', b_1' \approx b_1''$ и $c_2' \approx c_2''$, и, следовательно, в этом случае точность свободных членов не уменьшится. Если на обеих станциях произведен ряд наблюдений Луны при равных часовых углах и склонениях, то средние ошибки величин u, v, w и D уменьшаются.

Не всегда, однако, возможно в разных пунктах производить одновременные или близкие по времени наблюдения и исключать, таким образом, неизвестные поправки координат Луны. Рассмотрим, что можно сделать в случае наблюдений, произвольно расположенных по времени.

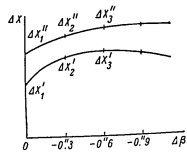
В этом случае тоже можно получить результаты, подобные предыдущим, при условии, что эфемеридное время хорошо известно (т. е. $\Delta\lambda = 0$), а неизвестной является

лишь поправка $\Delta\beta$. Поступаем следующим образом. Величине $\Delta\beta$ придаем значения $0^{\circ}0$, $-0^{\circ}3$, $-0^{\circ}6$ и т. д. Решая нормальную систему уравнений вида (16) для каждой станции при каждом из указанных значений $\Delta\beta$, получим ряд решений:

$\Delta\beta$	I станция	II станция
$0^{\circ}0$	$\Delta X_1', \Delta Y_1', \Delta Z_1'$	$\Delta X_2', \Delta Y_2', \Delta Z_2'$
$-0^{\circ}3$	$\Delta X_1'', \Delta Y_1'', \Delta Z_1''$	$\Delta X_2'', \Delta Y_2'', \Delta Z_2''$
$-0^{\circ}6$	$\Delta X_1''', \Delta Y_1''', \Delta Z_1'''$	$\Delta X_2''', \Delta Y_2''', \Delta Z_2'''$

Строим график, на котором по оси абсцисс откладываем принятые значения $\Delta\beta$, а по оси ординат — полученные значения $\Delta X_i'$ или $\Delta Y_i'$ или $\Delta Z_i'$ для обеих станций. На рисунке изображен примерный график для величины ΔX .

Величины $\Delta X'$ и $\Delta X''$ для обеих станций меняются с изменением $\Delta\beta$. Однако, если на каком-то участке кривые для $\Delta X'$ и $\Delta X''$ достаточно параллельны, то это будет значить, что разность $(\Delta X' - \Delta X'')$ на этом участке мало зависит от $\Delta\beta$. Выделяя на графике диапазон $\Delta\beta$, в котором эта параллельность кривых наиболее сохраняется, тором эта параллельность кривых наиболее сохраняется, тором эта параллельность кривых наиболее сохраняется, тором эта параллельность кривых наиболее сохраняется,



В рассмотренных до сих пор случаях предполагалось, что пункты наблюдения расположены произвольно и не связаны между собой. Однако на практике возможен случай, когда фотографические наблюдения Луны производятся на нескольких станциях, которые относятся к единой триангуляции и для которых известны относительные геодезические координаты. Для каждой станции можно вычислить по формулам, аналогичным (7), относительные прямоугольные координаты x_i , y_i и z_i . Абсолютные прямоугольные координаты связаны с относительными следующим образом:

$$\begin{aligned} X_i &= x_i + p, \\ Y_i &= y_i + q, \\ Z_i &= z_i + r, \end{aligned} \quad (23)$$

где p , q и r — координаты центра O , использованного в вычислениях референц-эллипсоида по отношению к центру инерции Земли. Если все станции относятся к единой триангуляции, то величины p , q и r будут для них постоянны.

Положим, что геоцентрические координаты Луны вычислены из эфемерид точно. Тогда, принимая для каждой станции $X_0 = x_0$, $Y_0 = y_0$ и $Z_0 = z_0$, можно написать уравнения (13) в следующем виде:

$$a_i p + b_i q = m - m_0, \quad (24)$$

где

$$a_i p + b_i q + c_i r = n - n_0, \quad (25)$$

Решая систему уравнений (24) совместно для всех станций, получим величины p , q и r , характеризующие положение данного референц-эллипсоида по отношению к центру инерции Земли.

Положим, что геоцентрические координаты Луны известны с некоторыми ошибками. Если моменты наблюдения на двух станциях, связанных одной триангуляцией, раз-

чаются на несколько часов, то, исключив неизвестные поправки Δl и $\Delta\beta$, получим уравнения (19). Принимая во внимание (23), перепишем полученные уравнения так:

$$\begin{aligned} (a'_1 - a''_1)p + (b'_1 - b''_1)q &= (m' - m'_0) - (m'' - m''_0), \\ (a'_2 - a''_2)p + (b'_2 - b''_2)q + (c'_2 - c''_2)r &= (n' - n'_0) - (n'' - n''_0), \end{aligned} \quad (26)$$

где m'_0 , m''_0 , n'_0 и n''_0 определяются формулами (25). Так как при разности моментов наблюдения на двух станциях в несколько часов коэффициент c_2 почти не меняется, людения на двух станциях в несколько часов коэффициент c_2 почти не меняется, людения на двух станциях в несколько часов коэффициент c_2 почти не меняется,

Изложенная теория позволяет сделать следующий вывод. Возможно непосредственное определение абсолютных прямоугольных координат наблюдателя X , Y и Z , если геоцентрические координаты Луны α и δ точно известны. Если α и δ Луны известны неточно, то, производя по определенной программе наблюдения Луны на двух станциях в близкие моменты времени, можно найти расстояние между этими двумя станциями по хорде. В случае произвольных наблюдений на двух станциях также можно попытаться вывести расстояние между ними, предполагая, что $\Delta l = 0$. Производя фотографические наблюдения Луны на нескольких станциях, относящихся к единой триангуляции, можно определить величины p , q и r , характеризующие положение референц-эллипсоида по отношению к центру инерции Земли.

Пример. Фотографические наблюдения Луны начались у нас недавно, и достаточного наблюдательного материала для применения указанного метода еще нет. Ниже дается лишь небольшой пример, в котором обработаны 5 опытных фотографических наблюдений Луны, выполненных 3—11 марта 1955 г. в Пулковке и предоставленных нам научным сотрудником Пулковской обсерватории Х. И. Поттером. Данный пример, естественно, не претендует на получение каких-либо производственных результатов и является лишь некоторой иллюстрацией к указанной выше методике.

Таблица 1

№ наблюдения	Дата	$T_{гр.}$	α'	δ'	α	δ	π_c
I	1955 Март 3	19 ^h 08 ^m 34 ^s .26	6 ^h 50 ^m 39 ^s .680	21 ^o 32'14".20	6 ^h 51 ^m 14 ^s .005	22 ^o 08'42".73	58 ^h 38'.470
II		3 21 26 11.58	6 55 15.746	21 14 28.96	6 56 51.926	21 54 26.16	58 36.674
III		4 21 42 26.90	7 53 34.061	18 02 32.66	7 54 32.943	18 43 10.37	58 15.686
IV		5 20 34 41.00	8 46 22.689	14 05 46.44	8 46 44.108	14 47 04.77	57 52.576
V		11 0 15 22.40	12 55 54.741	-12 07 39.321	12 56 10.748	-11 15 21.75	55 15.067

Звезды фотографировались на нормальном астрографе с определенной экспозицией, в середине которой производился моментальный снимок Луны. Из наблюдений были получены топоцентрические координаты Луны α' и δ' . Геоцентрические координаты Луны α и δ и π_c вычислялись из „Improved Lunar Ephemeris“ по аргументу эфемеридного времени $E = T_{гр.} + \Delta t$. Для перехода к эфемеридному времени использовалась поправка $\Delta t = +31^{\circ}8$. В табл. 1 приведены дата и момент наблюдения $T_{гр.}$, топоцентрические координаты α' , δ' и геоцентрические координаты Луны α , δ и π_c .

Нормальный астрограф имеет следующие астрономические координаты и высоту над уровнем моря: $\varphi = 59^{\circ}46'17.0$, $\lambda = +2^{\circ}01'18.25$ и $h = +75$ м. При получении предварительных приближенных значений геодезических координат мы использовали абсолютные уклонения отвесной линии и абсолютную высоту геоида для Пулковки, которые были рассчитаны по формулам, указанным в работе И. Д. Жонголовича (1956): $\xi = -0^{\circ}60$, $\eta = +5^{\circ}30$, $N = +23$ м. Вычисляем геодезические координаты нормального астрографа B_0 , L_0 , H_0 и, используя элементы общего земного эллипсоида ($a = 6378.077$ м,

$\delta = 1.296.6$, находим по формулам (7) приближенные прямоугольные геоцентрические координаты (в единицах δ):

$$\begin{aligned} X_0 &= 0.435\ 6759, \\ Y_0 &= 0.254\ 8243, \\ Z_0 &= 0.860\ 3865. \end{aligned} \quad (27)$$

Для каждого наблюдения составляем уравнения вида (16), где коэффициенты a_i, b_i, c_i, d_i, e_i и свободные члены $(m_0 - m)$ и $(n_0 - n)$ находятся по формулам (12), (17) и (14). Поскольку из решения системы (16) неизвестные X, Y и Z получаются в единицах принятого Бруном радиуса Земли $R = 6\ 378\ 070$ м, то необходимо коэффициенты a_i, b_i и c_i умножить на $\frac{\delta}{R}$. Для нашего примера $\frac{\delta}{R} \approx 1$.

В табл. 2 даны коэффициенты и свободные члены уравнений погрешностей (16), причем $d' = \frac{1}{50}d$ и $e' = \frac{1}{50}e$, а свободные члены l выражены в единицах 10^{-3} .

Таблица 2

№ наблюдения	№ уравнения	a	b	c	d'	e'	l
I	1	-0.254	0.967	0	-1.168	-0.103	0.044
	2	-0.355	-0.094	0.930	0.103	-1.169	-0.256
II	3	0.319	0.948	0	-1.167	-0.116	-0.103
	4	-0.344	0.114	0.932	0.116	-1.168	-0.363
III	5	0.158	0.987	0	-1.158	-0.225	-0.109
	6	-0.306	0.048	0.951	0.225	-1.159	-0.338
IV	7	-0.344	0.939	0	-1.144	-0.311	0.027
	8	-0.229	-0.084	0.970	0.311	-1.145	-0.221
V	9	-0.379	0.926	0	-1.142	-0.480	-0.090
	10	0.194	0.080	0.978	0.480	-1.144	-0.294

Составим нормальную систему с 5 неизвестными $-\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, u_1 = 50\Delta\lambda$ и $v_1 = 50\Delta\delta$:

$$\begin{cases} 0.881\Delta X - 0.446\Delta Y - 0.974\Delta Z + 0.445u_1 + 1.454v_1 + 0.278 = 0, \\ 4.585\Delta Y + 0.061\Delta Z - 5.484u_1 - 1.242v_1 - 0.258 = 0, \\ 4.535\Delta Z + 1.189u_1 - 5.507v_1 - 1.390 = 0, \\ 7.082u_1 - 0.002v_1 - 0.083 = 0, \\ 7.096v_1 + 1.760 = 0. \end{cases} \quad (28)$$

Табл. 3 содержит пять частных случаев решения нормальной системы (28), причем в скобках стоят значения неизвестных, которые непосредственно задаются в отдельных частных случаях.

Решение № 1, при котором из системы (28) находятся все пять неизвестных, целесообразно вследствие малости определителя данной системы. Средние ошибки неизвестных в данном решении примерно в 10 раз превосходят ошибки, полученные в других решениях.

Решение № 2 представляет собой решение системы (28) при условии $\Delta X = \Delta Y = \Delta Z = 0$, т. е. предполагается, что предварительно рассчитанные координаты (27) точны. Заметим, что в данном примере было использовано эфемеридное время для исключения поправки средней долготы Луны, но поправка широты не учитывалась.

Таблица 3

№ решения	ΔX	ΔY	ΔZ	$\Delta\lambda$	$\Delta\delta$
1	1040 ± 810 м	-593 ± 1600 м	83 ± 1990 м	-0.3 ± 0.8	-1.2 ± 1.1
2	(0)	(0)	(0)	0.0 ± 0.1	-1.0 ± 0.1
3	440 ± 529	376 ± 204	2047 ± 230	(0)	(0)
4	676 ± 504	159 ± 191	976 ± 217	(0)	(-0.6)
5	836 ± 491	19 ± 185	255 ± 210	(0)	(-1.0)

Полученное решение дало дополнительную поправку $\Delta\lambda = 0$ и весьма вероятное значение для $\Delta\delta$.

Следующие три случая представляют решение системы (28) при условии, что $\Delta\lambda = 0$, а $\Delta\delta$ принимает соответственно значения 0, -0.6 и -1.0 . Анализ решений показывает, что ошибка, происходящая из-за неточного учета поправки широты, сказывается больше всего на определении величины Z .

Для случая $\Delta\delta = -0.6$ получим следующие значения прямоугольных геоцентрических координат нормального астрографа в Пулковке:

$$\begin{aligned} X &= 2779450 \pm 504 \text{ м}, \\ Y &= 1625448 \pm 191 \text{ м}, \\ Z &= 5488587 \pm 217 \text{ м}. \end{aligned} \quad (29)$$

Определяя по формулам (7) или (8) для общего земного эллипсоида абсолютные геодезические координаты B и L и сравнивая их с астрономическими координатами, получим следующие абсолютные уклонения отнесной линии в Пулковке:

$$\begin{aligned} \xi &= +2'' \pm 13'', \\ \eta &= +12' \pm 10''. \end{aligned} \quad (30)$$

Вследствие малого числа наблюдений (всего 5) и их возможных ошибок, неточного знания эфемеридного времени и поправки широты Луны, полученные результаты (29) и (30), конечно, не имеют производственного значения. Однако обращает на себя внимание обстоятельство, что ошибки найденных значений ξ и η того же порядка, как ошибки, полученные Баттерманом из обработок примерно 600 покрытий. Целью данного примера состояла лишь в том, чтобы показать практическое применение изложенной выше методики определения прямоугольных геоцентрических координат пункта наблюдения.

§ 3. Использование покрытий

Покрытия звезд Луной представляют собой паралактические явления, из наблюдения которых можно также получить геоцентрические координаты наблюдателя. Однако метод покрытий является более ограниченным по сравнению с вышеизложенным методом, использующим результаты фотографических наблюдений Луны. Число покрытий для определенной обсерватории невелико. Точность наблюдения покрытий и открытий различна: наиболее точно наблюдаются покрытия у темного края, открытия у светлого края часто наблюдаются с запазданием. Значительную трудность представляет учет неровностей лунного края. Поэтому метод покрытий не является исчерпывающим, хотя и сохраняет свое значение.

Применим уравнения (6) к случаю покрытий. Покрытия являются частным случаем солнечного затмения: когда радиус, паралакс и движение покрываемого светила равны нулю. Конусы лунной тени и полутени превращаются в единственную цилиндрическую

поверхность. Так как параллакс звезды равен нулю, то координаты точки z будут $a = \alpha_*$ и $d = \delta_*$. Уравнения (6) в этом случае можно написать так:

$$\begin{aligned} x - \xi &= k \sin L, \\ y - \eta &= k \cos L, \end{aligned} \quad (31)$$

где k — линейный радиус Луны, а x, y и ξ, η — соответственно бesselевы координаты Луны и наблюдателя, которые определяются выражениями

$$\begin{aligned} x &= \cos \delta \sin (\alpha - \alpha_*) \operatorname{cosec} \pi_c, \\ y &= [\sin \delta \cos \delta_* - \cos \delta \sin \delta_* \cos (\alpha - \alpha_*)] \operatorname{cosec} \pi_c \end{aligned} \quad (32)$$

и

$$\begin{aligned} \xi &= X \sin t_* + Y \cos t_*, \\ \eta &= -X \sin \delta_* \cos t_* + Y \sin \delta_* \sin t_* + Z \cos \delta_*. \end{aligned} \quad (33)$$

В выражениях (33) $t_* = S_0 - \alpha_*$ есть гринвичский часовой угол звезды. Величины x, y, ξ, η и k выражены в единицах радиуса Земли R .

Позиционный угол L при наблюдениях покрытий обычно не измеряется, поэтому исключаем его из уравнений (31) и получаем

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = k^2. \quad (34)$$

Обозначая через x_0, y_0, ξ_0, η_0 и k_0 приближенные значения величин, а через $\Delta x, \Delta y, \Delta \xi, \Delta \eta$ и Δk искомые поправки и пренебрегая квадратами поправок, напишем уравнение погрешностей

$$(x_0 - \xi_0)(\Delta x - \Delta \xi) + (y_0 - \eta_0)(\Delta y - \Delta \eta) - k_0 \Delta k + \frac{1}{2} [(x_0 - \xi_0)^2 + (y_0 - \eta_0)^2 - k_0^2] = 0. \quad (35)$$

Разберем два случая, которые могут представиться при решении системы вида (35) относительно X, Y и Z .

1. Положим, что геоцентрические координаты и параллакс Луны точно известны из эфемерид, т. е. $\Delta x = \Delta y = \Delta \xi = \Delta \eta = 0$. Считая координаты звезды α_* и δ_* безошибочными, получим уравнение погрешностей (35) в следующем виде:

$$a \Delta k + b \Delta X + c \Delta Y + d \Delta Z + n = 0, \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned} a &= k_0, \\ b &= (x_0 - \xi_0) \sin t_* - (y_0 - \eta_0) \sin \delta_* \cos t_*, \\ c &= (x_0 - \xi_0) \cos t_* + (y_0 - \eta_0) \sin \delta_* \sin t_*, \\ d &= (y_0 - \eta_0) \cos \delta_*, \\ n &= \frac{1}{2} [k_0^2 - (x_0 - \xi_0)^2 - (y_0 - \eta_0)^2]. \end{aligned} \quad (37)$$

Система уравнений (36) служит для определения геоцентрических координат наблюдателя X, Y и Z .

Наиболее уверенный результат при решении системы (36) получится в случае максимального изменения величины каждого из коэффициентов (37) внутри всей системы уравнений. Для этого разности $(x_0 - \xi_0)$ и $(y_0 - \eta_0)$ должны принимать различные возможные значения. Разность $(x_0 - \xi_0)$ при покрытиях обычно отрицательна, а при открытиях — положительна. Разность $(y_0 - \eta_0)$ зависит от позиционного угла P покрываемой звезды, отсчитанного от направления на север. При $90^\circ > P > 270^\circ$ разность $(y_0 - \eta_0)$ отрицательна, при $270^\circ > P > 90^\circ$ — положительна. Поэтому при определении абсолютных координат наблюдателя X, Y и Z из уравнений (36) необходимо иметь как покрытия, так и открытия. Эти явления должны наблюдаться в различных частях Луны

ного края и охватывать значительный промежуток времени, в течение которого координаты Луны принимают всевозможные значения.

Уравнение погрешностей можно написать в несколько ином виде. Зная приближенные координаты наблюдателя, легко предвычислить момент покрытия $T_{пр.}$. Однако момент $T_{пр.}$ почти никогда не совпадает с наблюдаемым моментом $T_{наб.}$. Величину $\Delta t_1 = T_{наб.} - T_{пр.}$ можно объяснить неточностью принятых координат пункта наблюдения X, Y и Z , неточностью линейного радиуса Луны k и т. д. Полагая координаты Луны точно известными, уравнение погрешностей в общем виде можно написать так:

$$a_1 \Delta k + b_1 \Delta X + c_1 \Delta Y + d_1 \Delta Z = \Delta t_1, \quad (38)$$

где свободный член $\Delta t_1 = T_{наб.} - T_{пр.}$ обычно выражается в долях среднего часа. Подробный вывод уравнения, аналогичного (38), дан в статье Касаткина (1931). В работе Ламберта (Lambert, 1949), касающейся геодезического применения покрытий и затмений, предлагается использовать именно уравнения вида (38).

Уравнение (38) позволяет просто оценить точность, с которой координаты наблюдателя получаются из покрытий. Ошибка ± 0.1 в моменте покрытия дает при определении прямоугольных координат наблюдателя ошибку приблизительно ± 100 м. 2. Положим теперь, что геоцентрические координаты Луны определены из эфемерид с некоторой ошибкой. В этом случае $\Delta x \neq 0$ и $\Delta y \neq 0$. Пренебрегая произведением малых величин, получим

$$\begin{aligned} \Delta x &= \operatorname{cosec} \pi_c \cos \delta \Delta \alpha, \\ \Delta y &= \operatorname{cosec} \pi_c \Delta \delta. \end{aligned} \quad (39)$$

Подставляя приращения (39) в уравнение погрешностей (35) и применяя формулы (9), будем иметь

$$a \Delta k + b \Delta X + c \Delta Y + d \Delta Z + e \Delta \alpha + f \Delta \beta + n = 0, \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned} e &= -[(x_0 - \xi_0) \cos \beta \cos s + (y_0 - \eta_0) \cos \beta \sin s] \operatorname{cosec} \pi_c, \\ f &= [(x_0 - \xi_0) \sin s - (y_0 - \eta_0) \cos s] \operatorname{cosec} \pi_c. \end{aligned} \quad (41)$$

Из уравнения (40) можно исключить неизвестные $\Delta \alpha$ и $\Delta \beta$, если одно и то же покрытие наблюдать на двух станциях при одинаковых позиционных углах L . В этом случае разности $(x_0 - \xi_0)$ и $(y_0 - \eta_0)$, а следовательно, и коэффициенты e и f будут одинаковы для обеих наблюдателей.

Для одного определенного покрытия можно выбрать две или более станций так, чтобы позиционный угол L для всех наблюдателей был постоянным. Однако все остальные покрытия на этих станциях будут наблюдаться при разных позиционных углах, и коэффициенты e и f получатся различными.

В общем случае нельзя полностью исключить из уравнений (40) неизвестные $\Delta \alpha$ и $\Delta \beta$. Если в течение определенного времени на двух станциях было наблюдено соответственно n_1 и n_2 покрытий, то расстояние между станциями по хорде можно приблизительно определить графическим способом, изложенным в § 2.

При наблюдении покрытий, так же как и при фотографических наблюдениях Луны, может представиться особый случай, когда наблюдатели находятся на нескольких станциях, которые относятся к единой триангуляции и для которых известны относительные геодезические координаты. Для каждой станции можно вычислить относительные прямоугольные координаты x_0, y_0 и z_0 , связанные с абсолютными соотношениями (23).

Положим, что геоцентрические координаты Луны вычисляются из эфемерид точно. Тогда, принимая за приближенные координаты X_0, Y_0 и Z_0 на каждой станции величины x_0, y_0 и z_0 и учитывая (23), напишем уравнение (36) в виде

$$a \Delta k + b p + c q + d r + n = 0. \quad (42)$$

Решая систему уравнений (42) совместно для всех станций, получим координаты p , q и r центра данного референц-эллипсоида по отношению к центру инерции Земли. Положим теперь, что геоцентрические координаты Луны определены из эфемерид с некоторой ошибкой. Тогда, принимая $X_0 = x$, $Y_0 = y$, $Z_0 = z$, и учитывая (23), напишем уравнение (40) так:

$$a\Delta k + bp + cq + dr + e\Delta\lambda + f\Delta\beta + n = 0. \quad (43)$$

Если наблюдать одно и то же покрытие на нескольких станциях при постоянном позиционном угле L , то коэффициенты a , d , e и f будут для всех станций одинаковы и в уравнении (43) можно выдвинуть тогда постоянную часть

$$U = a\Delta k + dr + e\Delta\lambda + f\Delta\beta. \quad (44)$$

Имея достаточное число наблюдений и исключая постоянную часть U из уравнения (43), можно определить величины p и q , которые частично определяют положение референц-эллипсоида в теле Земли.

В работе О'Кифа и Андерсона (O'Keefe and Anderson, 1952) разбирается именно тот случай, когда на нескольких станциях, относящихся к единой триангуляции, покрытия наблюдаются при постоянном позиционном угле L . Авторы получают уравнение вида (40), однако они не раскрывают отчетливо смысла величин ΔX , ΔY и ΔZ . Авторы объясняют появление поправок ΔX , ΔY и ΔZ неточностью большой полуоси эллипсоида Хейфорда (который был использован ими в вычислениях), видимо молчаливо предполагая, что центр данного эллипсоида совпадает с центром инерции Земли.

В действительности положение референц-эллипсоида в теле Земли нам неизвестно. Как следует из сказанного выше, в данном случае величины ΔX , ΔY и ΔZ имеют определенный геометрический смысл и представляют собой координаты центра O выбранного референц-эллипсоида по отношению к центру инерции Земли.

При использовании покрытий всегда необходимо вводить поправки за неровности лунного края. Поправка Δk в уравнении погрешностей (35) — это поправка к принятому при вычислениях среднему линейному радиусу Луны k_0 , выраженному в единицах "радиуса Земли" R . Если считать, что линейный радиус Луны известен точно, то $\Delta k = 0$. Однако край Луны не является гладким и поэтому для каждого покрытия линейный радиус k можно представить

$$k = (k_0 + \Delta k) + \delta k, \quad (45)$$

где δk — превышение данной точки лунного края над средним уровнем.

Карты лунных профилей дают превышения Δr точек лунного края над средним уровнем, выраженные в секундах дуги. Переходя к поправке линейного радиуса δk , напишем

$$\delta k = \frac{\Delta r}{3422.7}, \quad (46)$$

где $\tau_0 = 3422.7$ — средний параллакс Луны. В свободном члене n , определяемом (37), заменим величину k_0^2 величиной $(k_0 + \delta k)^2$. Обозначая новый свободный член через n_1 и пренебрегая квадратами малых величин, получим

$$n_1 = n + k_0 \delta k. \quad (47)$$

В примере, разобранным в конце данного параграфа, мы использовали для учета неровностей лунного края "Атлас лунных профилей" Веймера (Weimer, 1952). Атлас содержит около 140 профилей, которые даются для четных значений либрации по долготе и широте. Величина Δr находится по аргументам I, b и II (видимая либрация по долготу и широте и угла положения звезд, отсчитываемый от северного полюса Луны). В ежегодниках приводятся геоцентрические либрации l_0 и b_0 и позиционный угол C_0

северного полюса Луны. Для перехода к топоцентрическим величинам в предисловии атласа даны формулы, справедливые до 0.1°:

$$\begin{aligned} \Delta l &= l - l_0 = \alpha - \alpha_0, \\ \Delta b &= b - b_0 = -(\delta - \delta_0), \\ \Delta C &= C - C_0 = (\sin b_0 + \sin \delta_0) \Delta l, \end{aligned} \quad (48)$$

где α , δ — видимые, α_0 , δ_0 — геоцентрические координаты Луны. Вычисляем с точностью до 0.1 позиционный угол звезды P , отсчитанный от направления на север:

$$\operatorname{tg} P = \frac{\xi - x}{\eta - y} \quad (49)$$

и находим угол положения звезды, отсчитанный от северного полюса Луны: $\Pi = P - C$. Подробные примеры пользования атласом даны в статье Веймера (Weimer, 1954). Так как графики приведены для четных градусов либраций, то приходится дважды производить линейную интерполяцию. Фактическая точность получения поправок Δr из атласа Веймера не превосходит 0.2—0.3.

Пример. В качестве примера обработаны 54 покрытия и 17 открытий звезд, которые наблюдались на Абастуманской обсерватории в 1952—1955 гг. Результаты наблюдений были взяты из Астрономических циркуляров №№ 128, 130, 135, 147 и 156, а также из письма директора Абастуманской обсерватории Е. Харядзе, которому приносим искреннюю благодарность. Наблюдения производились визуально на 40-см рефракторе.

Координаты звезд на момент наблюдения $T_{\text{гр}}$ вычислялись по каталогу зодиакальных звезд (Robertson, 1940). Геоцентрические координаты Луны вычислялись из "Improved Lunar Ephemeris" по аргументу эфемеридного времени $E = T_{\text{гр}} + \Delta t$. В табл. 4 приведены: номер звезды по указанному каталогу, вид явления (П — покрытие, О — открытие), дата и момент наблюдения по всемирному времени $T_{\text{гр}}$, координаты звезды α_* и δ_* , поправка Δt для перехода к эфемеридному времени и геоцентрические координаты Луны α , δ и τ .

Астрономические координаты и высота над уровнем моря для 40-см рефрактора Абастуманской обсерватории следующие: $\varphi = 41^\circ 45' 18.6''$, $\lambda = 2^\circ 51' 17.99''$, $h = 1550$ м. При вычислении приближенных геодезических координат B_0 , L_0 и H_0 были использованы абсолютные отклонения отвесной линии и абсолютная высота геоида для Абастумана, рассчитанные по формулам, указанным в работе И. Д. Жонгловича (1956): $\xi = +0.20$, $\eta = +9.290$ и $N = -2$ м. Применяя элементы общего земного эллипсоида a и b , найдем затем по формулам (7) приближенные прямоугольные геоцентрические координаты (в единицах d):

$$\begin{aligned} X_0 &= 0.548\ 1244, \\ Y_0 &= 0.507\ 9465, \\ Z_0 &= 0.662\ 6165. \end{aligned} \quad (50)$$

Далее по формулам (32) и (33) вычислялись бесселевы координаты Луны и наблюдателя, а по формулам (37) — коэффициенты уравнения погрешностей. Для среднего линейного радиуса Луны k_0 бралось значение 0.27250.

В табл. 5 приведены для каждого покрытия величины I, b и II, вычисленные по формулам (48) и (49), а также превышения Δr точек лунного края над средним уровнем, найденные из атласа Веймера.

Как видно из табл. 5, поправка Δr лишь в редких случаях достигает ± 1.5 , а в большинстве своем не превосходит ± 1.0 . Превышение в 0.1° вызывает в свободном члене изменения на $8 \cdot 10^{-6}$. Используя выражения (46) и (47), вычисляем исправленный свободный член n_1 .

Затем мы учитываем поправку за широту Луны, для чего вычисляем свободные члены $n_2 = n_1 + k_0 \delta k$, где f дается соотношениями (41). Для $\Delta\beta$ в данном примере было

Таблица 5

№ п. п.	I				II				III				№ п. п.	I				II				III			
	l	b	П	Δr	l	b	П	Δr	л	б	П	Δr		№ п. п.	l	b	П	Δr	л	б	П	Δr			
1	-621	226	22322	-074	18	698	-622	20023	-074	35	524	194	7522	076	52	-054	-324	7028	076						
2	-72	71	3111	06	19	-20	17	942	08	36	39	68	628	-10	53	02	-15	617	-03						
3	-25	-07	1573	09	20	-22	17	690	05	37	-15	65	785	-02	54	18	-02	692	03						
4	-30	-06	2383	03	21	49	-20	819	-02	38	19	-21	2385	-02	55	12	-20	1474	09						
5	24	-49	885	01	22	60	-45	729	-01	39	61	-21	2385	13	56	32	33	1158	-06						
6	11	-39	621	-03	23	80	-33	2612	00	40	68	-05	3427	03	57	29	35	1565	06						
7	11	-17	1261	16	24	83	-23	2118	-04	41	69	26	2344	-14	58	42	30	1233	06						
8	-13	-17	1331	02	25	-58	58	474	04	42	-45	-58	554	00	59	46	57	695	00						
9	-20	-04	803	07	26	-30	-51	472	-03	43	58	-24	3252	-03	60	60	74	1117	00						
10	-46	28	1049	-16	27	36	-53	1018	04	44	76	52	739	01	61	43	64	377	01						
11	-80	73	802	03	28	36	-52	858	00	45	-81	-28	791	00	62	45	59	396	05						
12	-71	76	855	05	29	34	-52	992	-01	46	-84	-31	939	07	63	43	53	358	06						
13	-75	75	259	-02	30	34	-52	1171	08	47	48	-11	2605	10	64	02	13	340	03						
14	-48	45	249	00	31	33	-52	453	-12	48	-75	-57	56	02	65	18	30	387	02						
15	-39	29	275	00	32	34	-60	779	-02	49	-63	-61	962	-02	66	-48	-57	816	03						
16	70	-62	1446	-08	33	47	-09	1523	11	50	-53	-62	1307	08	67	-51	-57	243	00						
17	-62	-62	2022	00	34	59	-02	711	00	51	-17	-45	823	-03											

принято значение $-0,6$. Свободные члены l , полученные в среднем порядка $50 \cdot 10^{-6}$, однако для некоторых наблюдений они достигли величин порядка $200 \cdot 10^{-6}$. Характерно, что большие свободные члены относятся преимущественно к случаю открытий, когда ошибки в моменте наблюдения могут быть весьма значительными.

Дефекты отдельных наблюдений сильно влияют на величину и точность искомого величин, но поскольку данный пример имеет лишь методическое значение, то составим нормальную систему из 66 уравнений, отбрасывая лишь одно наблюдение 21 января 1952 г. ($n_2 = 2170 \cdot 10^{-6}$) как явно ошибочное:

$$\left. \begin{aligned} 1.285 \Delta X - 0.229 \Delta Y - 0.321 \Delta Z + 0.400 = 0, \\ 2.044 \Delta Y + 0.224 \Delta Z - 0.449 = 0, \\ 1.569 \Delta Z - 0.140 = 0. \end{aligned} \right\} (51)$$

Свободные члены в системе (51) выражены в единицах 10^{-3} .

Из решения системы (51) найдем ΔX , ΔY , ΔZ и получим следующие значения абсолютных прямоугольных координат 40-см рефрактора Абстуманской обсерватории:

$$\left. \begin{aligned} X = 3494220 \text{ м} \pm 504 \text{ м}, \\ Y = 3240927 \text{ м} \pm 395 \text{ м}, \\ Z = 4226257 \text{ м} \pm 459 \text{ м}. \end{aligned} \right\} (52)$$

Результат (52) по тем же причинам, что и результат предыдущего примера, не имеет производственного значения. Данный пример имел целью показать лишь практическое применение изложенной выше методики определения абсолютных координат X , Y и Z из наблюдения покрытий.

§ 4. Использование затмений

Солнечные затмения, будучи параллактическими явлениями, также могут быть использованы для определения геоцентрических координат наблюдателя. Однако в данной проблеме метод затмений является наиболее ограниченным по сравнению с вышеизложенными методами. Полные солнечные затмения наблюдаются сравнительно редко. Наблюдения обычно производятся в полосе полной фазы, которая охватывает незначи-

тельную часть земной поверхности и при этом часто проходит через мало населенные районы и океаны. Метод затмений имеет лишь то преимущество, что неровности лунного края учитываются увереннее, чем в методе покрытий. При затмениях неровности проектируются на диск Солнца на большом протяжении, и влияние случайных ошибок уменьшается.

Основные уравнения аналитической теории солнечных затмений приведены в § 1. Уравнение конуса полутени или тени в параметрическом виде записывается в виде (1) (см. стр. 21). Величины x , y и ξ , η — соответственно прямоугольные бesselовы координаты Луны и наблюдателя, определяемые выражениями

$$x = \cos \delta \sin(\alpha - a) \operatorname{cosec} \pi \epsilon, (53)$$

$$y = [\sin \delta \cos d - \cos \delta \sin d \cos(\alpha - a)] \operatorname{cosec} \pi \epsilon;$$

$$\xi = X \sin t_1 + Y \cos t_1, (54)$$

$$\eta = -X \sin d \cos t_1 + Y \sin d \sin t_1 + Z \cos d.$$

Для случая внешнего или внутреннего контактов величина l в уравнениях (1) есть соответственно радиус полутени или тени, а L — позиционный угол точки контакта.

В настоящее время предложено несколько методов для наблюдения затмений: кинематографический (Banachiewicz, 1929), спектрофотометрический (Kristenson, 1951) и др. Наиболее разработанным является сейчас кинематографический метод Ванакевича, применявшийся финскими экспедициями на затмение 20 мая 1947 г. (Kukkamaki, 1954a, 1954b). Из обработки киноплёнки для каждого момента наблюдения T вблизи второго и третьего контактов находились величины l и L .

Для геодезических целей необходимо получать моменты контактов T с точностью до нескольких сотых секунд, что возможно лишь для внутренних контактов. Поскольку разница во времени между вторым и третьим контактами составляет обычно 3—5 мин., то коэффициенты при неизвестных X , Y и Z в уравнениях (1) для обоих моментов практически будут совпадать.

Пусть на определенной станции получены из наблюдений момент T внутреннего контакта, позиционный угол L и радиус тени l . Полагая координаты и параллакс Луны безошибочными, определяем для момента T бesselовы элементы Луны из соотношений (53). Тогда можно написать уравнения (1), где неизвестными будут величины X , Y и Z , которые являются функциями искомого абсолютных координат наблюдателя X , Y и Z . Из наблюдений затмения в одном месте получаются два уравнения с тремя неизвестными и, следовательно, определение всех координат наблюдателя невозможно. Если, используя соотношение (5), выразить бesselовы координаты наблюдателя ξ и η через абсолютные сферические координаты ρ , φ и λ и считать радиус-вектор ρ точно известным, то в уравнениях (1) останется две неизвестных — φ и λ . Такое предложение содержится в статье Ламберта (Lambert, 1949).

Как указано во введении, за последнее время была предпринята ряд попыток использовать наблюдения затмений для геодезической связи двух пунктов. Основной принцип таков. Пусть на двух станциях наблюдаются внутренние контакты. Если считать координаты Луны ошибочными, то величины x и y будут нуждаться в некоторых поправках Δx и Δy , которые для данного затмения можно считать постоянными. Обозначая через ξ и η приближенные бesselовы координаты наблюдателя, а через $\Delta \xi$ и $\Delta \eta$ искомые поправки к ним, напомним уравнения (1) для двух станций

$$\left. \begin{aligned} x_1 + \Delta x - \xi_1 - \Delta \xi_1 = l_1 \sin L_1, & \quad x_2 + \Delta x - \xi_2 - \Delta \xi_2 = l_2 \sin L_2, \\ y_1 + \Delta y - \eta_1 - \Delta \eta_1 = l_1 \cos L_1, & \quad y_2 + \Delta y - \eta_2 - \Delta \eta_2 = l_2 \cos L_2. \end{aligned} \right\} (55)$$

Исключаем неизвестные Δx и Δy , образуя разности уравнений (55) для обеих станций:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \xi_1 - \Delta \xi_2 = F, \\ \Delta \eta_1 - \Delta \eta_2 = G, \end{aligned} \right\} (56)$$

где

$$\begin{aligned} F &= (x_1 - x_2) - (\xi_1 - \xi_2) - (l_1 \sin L_1 - l_2 \sin L_2), \\ G &= (y_1 - y_2) - (\eta_1 - \eta_2) - (l_1 \cos L_1 - l_2 \cos L_2). \end{aligned} \quad (57)$$

Поскольку в системе (56), состоящей из двух уравнений, имеем 6 неизвестных — поправки абсолютных координат обоих наблюдателей $\Delta X_1, \Delta Y_1, \Delta Z_1$ и $\Delta X_2, \Delta Y_2, \Delta Z_2$, то невозможно определить расстояние по хорде D между обоими наблюдателями. Выразим ξ и η через абсолютные сферические координаты ρ, φ и λ , полагая при этом $\Delta \rho = 0$. Тогда уравнения (56) будут

$$\begin{aligned} a_1 \Delta \varphi_1 + b_1 \Delta \lambda_1 - a_2 \Delta \varphi_2 - b_2 \Delta \lambda_2 &= F, \\ c_1 \Delta \varphi_1 + d_1 \Delta \lambda_1 - c_2 \Delta \varphi_2 - d_2 \Delta \lambda_2 &= G, \end{aligned} \quad (58)$$

где

$$\begin{aligned} a &= -\rho \sin \varphi' \sin (l_1 + \lambda), \\ b &= \rho \cos \varphi' \cos (l_1 + \lambda), \\ c &= \rho [\cos \varphi' \cos d + \sin \varphi' \sin d \cos (l_1 + \lambda)], \\ d &= \rho \cos \varphi' \sin d \sin (l_1 + \lambda). \end{aligned} \quad (59)$$

Уравнения (58) могут быть использованы для геодезической связи двух пунктов. Полагая координаты одной станции точно известными, можно получить координаты второй станции, и наоборот.

Таким образом, в задаче установления геодезической связи из наблюдения затмений ставится два ограничительных условия: 1) одна из координат наблюдателя, а именно радиус-вектор ρ , считается безошибочной; 2) геоцентрические координаты одной из станций должны быть хорошо известны. Поэтому данный способ является весьма ограниченным.

Во введении перечислен ряд попыток использовать наблюдения затмений для установления геодезической связи двух пунктов. До сих пор опубликованы лишь результаты, полученные финскими экспедициями, которые наблюдали затмение 20 мая 1947 г. в Бразилии и Африке (Kukkamäki, 1954a, 1954b). В последней работе подробно изложена методика обработки наблюдений и численные результаты. Основные этапы обработки материалов этой экспедиции были следующие. Сначала из микрометрических измерений концов солнечного серпа определялись наблюдаемые позиционные углы $M_{\text{об}}$ и наблюдаемые расстояния $m_{\text{об}}$ на фундаментальной плоскости между концом луно-солнечной оси (x, y) и точкой наблюдения (ξ, η) . Затем из бесселевых элементов и предварительных координат пунктов наблюдения находились предвычисленные значения позиционных углов $M_{\text{пр}}$ и расстояний $m_{\text{пр}}$. Сравнение наблюдаемых и предвычисленных величин M и m позволяет получить поправки $\Delta \varphi$ и $\Delta \lambda$ к предварительным координатам пунктов наблюдения. Эти поправки вычислялись в двух направлениях: вдоль центральной линии затмения и перпендикулярно к ней.

Таким образом, в результате большой наблюдательной и вычислительной работы, проделанной финскими астрономами, были получены поправки геоцентрической широты $\Delta \varphi$ и долготы $\Delta \lambda$ для двух станций. Однако ценность данного метода значительно снижается тем, что, во-первых, из наблюдений затмений нельзя получить все три геоцентрические координаты наблюдателя и, во-вторых, координаты одной из двух станций необходимо считать фиксированными. Поэтому в проблеме использования Луны для геодезических целей метод затмений будет, по-видимому, играть вспомогательную роль.

Заключение

Проблема использования Луны для геодезических целей является весьма сложной и связана со многими вопросами астрономии и геодезии. В данной работе рассматривалась задача определения из наблюдений Луны абсолютных координат наблюдателя.

Во введении изложена общая постановка вопроса и дан обзор предпринятых до сих пор попыток использовать Луну в геодезических целях. В § 1 рассмотрены общие

40

вопрос теории и приведены уравнения, которые используются затем в отдельных частных случаях. Следующие три параграфа посвящены рассмотрению различных методов использования Луны для геодезических целей.

Сравнение рассмотренных методов показывает, что наиболее универсальным и многообещающим является метод специальных фотографических наблюдений Луны. Такие наблюдения включены в программу третьего Международного геофизического года.

Если повышать точность наблюдений, увеличивать их число и располагать наблюдения по времени наиболее выгодным образом, то можно свести к известному минимуму случайные ошибки абсолютных координат наблюдателя. Однако систематические ошибки X, Y и Z могут содержать еще систематические ошибки, которые зависят от систематических ошибок лунных эфемерид. Поэтому в данной проблеме необходимо очень точно знать геоцентрические координаты Луны. Для этого предлагается использовать эфемеридное время и поправку широты Луны $\Delta \beta$, которые считаются известными из многочисленных наблюдений на различных обсерваториях. Непосредственное определение абсолютных координат наблюдателя X, Y и Z целесообразно лишь тогда, когда ошибка эфемеридного времени не превосходит $\pm 0,1$, а ошибка величины $\Delta \beta$ не больше $\pm 0,05$. В этом случае систематические ошибки определения X, Y и Z не будут превосходить ± 100 м. Если же геоцентрические координаты Луны содержат неизвестные систематические ошибки, то, производя по определенной программе наблюдения на нескольких станциях, можно исключить данные ошибки из уравнений погрешностей.

Необходимо подчеркнуть, что результаты, полученные в приведенных примерах, не имеют производственного значения, поскольку число наблюдений в том и другом случае было невелико, а сами наблюдения не отличались высокой точностью. Цель данных примеров состояла в том, чтобы показать на практике применение изложенной методики. Полученные результаты, однако, показывают, что, имея большее число высокоточных наблюдений, можно достаточно уверенно определять абсолютные координаты наблюдателя.

Автор выражает глубокую благодарность проф. И. Д. Жонголовичу, под руководством которого выполнена настоящая работа.

ЛИТЕРАТУРА

- Жонголович И. Д. 1952. Внешнее гравитационное поле Земли и фундаментальные постоянные. Связанные с ним. Труды ИТА, 3, 4, 4.—М.
 Жонголович И. Д. 1956. Об определении размеров общего земного эллипсоида. Труды ИТА, 6, 4, 4.—М.
 Закатов П. С. 1950. Курс высшей геодезии. Геодезиздат, М.
 Касаткин М. А. 1931. Вычисление поправки звезд Луною и солнечных затмений с помощью дифференциальных поправок. Русск. астр. альманах.
 Михайлов А. А. 1925. Теория солнечных затмений. ГИЗ, М.
 Михайлов А. А. 1954. Теория затмений. Гостехиздат, М.
 Моладенский М. С. 1951. Метод совместной обработки тригонометрических и геодезических материалов для изучения гравитационного поля Земли и ее фигуры. Труды ЦНИИГАиК, 86, М.
 Перлин Ф. X. 1957. Постоянная лунного параллакса. Бюлл. ИТА, 6, 8 (81).
 Поттер Х. И. 1958. К вопросу об использовании наблюдений Луны в геодезических целях. Астр. альманах, 35, 4.
 Van der Schueren T. 1929. Die polnische Sonnenfinsternisexpedition 1927. C. R. Comm. Geod. Baltique.
 Battermann H. 1902. Bestimmung der Mondlänge, des Mondhalbmessers und der Sonnenparallaxe. Beobachtungs-Ergebnisse der Sternwarte zu Berlin, 11.
 Bergth A. 1949. Ueber kosmische Triangulationsmethoden zur praktischen Anwendung in der Geodäsie. Ztschr. Vermessungswesen, 2.
 Euler I. A. 1768. Versuch die Figur der Erde durch Beobachtungen des Mondes zu bestimmen. Abh. Churfürstlich-bayerischen Akad. Wiss., 5.
 Improved Lunar Ephemeris 1952—1959. 1954. Washington.
 Kristenson H. 1951. Spectrophotometric determinations of contact at total eclipses of the Sun. Stockholm Observ. Ann., 17, 1.
 Kukkamäki T. 1954a. Results obtained by the Finnish solar eclipse expeditions 1947. Trans. Amer. Geophys. Union, 35, 1.

41

- Kukkamäki T. 1954b. The Finnish solar expeditions May 20, 1947, especially the expedition to the Gold Coast. Veröff. Finn. Geod. Inst., 44.
 Lambert W. D. 1949. Geodetic applications of eclipses and occultations. Bull. geod., 13.
 Markowitz W. 1954. Photographic determination of the moon's position and applications to the measure of time, rotation of the earth, and geodesy. A. J., 59, 1214.
 O'Keefe J. and J. Anderson. 1952. The Earth equatorial radius and the distance of the Moon. A. J., 57, 1200.
 Robertson J. 1940. Catalog of 3539 zodiacal stars. Astron. Pap., X, 2.
 Sadler D. H. 1954. Ephemeris time. Occ. not. Roy. Astron. Soc., 17.
 Weimer T. 1952. Atlas de profils lunaires. Paris.
 Weimer T. 1954. Occultations d'étoiles et profils lunaires. Bull. Geod., 31.

Поступило в Редакцию
 25 мая 1957 г.

Бюллетень Института Теоретической Астрономии

Т. VII

1958

№ 1 (84)

Две практические схемы вычисления возмущений первого порядка элементов орбиты тела малой массы в пространственной ограниченной эллиптической задаче трех тел

Г. М. Баженов

В настоящей работе предлагаются две практические схемы вычисления абсолютных возмущений первого порядка элементов орбиты тела исчезающе малой массы в пространственной ограниченной эллиптической задаче трех тел.

Приводятся основные уравнения, с помощью которых определяются искомые возмущения. Рассматриваются связанные с использованием теории наилучших приближений Чебышева приемы разложения в ряды величин, нужных для решения поставленной задачи, и даются вычислительные схемы для фактического получения коэффициентов и выполнения интеграции этих рядов.

В одной схеме за аргумент интеграции принимается средняя аномалия малого тела, а в другой — его эксцентрическая аномалия.

Обе схемы приблизительно равноценны. Операции умножения тригонометрических рядов с двумя аргументами на тригонометрические ряды с одним аргументом, входящие в состав первой схемы, во второй схеме заменяются более простыми операциями умножения тригонометрических рядов с двумя аргументами на тригонометрические полиномы с одним аргументом. Однако во второй схеме фигурируют трудоемкие операции замены переменного в трех рядах.

К работе приложены вспомогательные таблицы и формулы возмущений элементов орбиты малой планеты Сита (244), найденные по первой схеме.

ZWEI PRAKTISCHE SCHEMAS ZUR BERECHNUNG VON STÖRUNGEN ERSTER ORDNUNG DER BAHNELEMENTE EINES KÖRPERS VON GERINGER MASSE IM RÄUMLICHEN RESTRINGIERTEN ELLIPTISCHEN DREIKÖRPERPROBLEM, von G. M. Bajenow — In der vorliegenden Arbeit werden zwei praktische Schemata zur Berechnung von absoluten Störungen erster Ordnung der Bahnelemente eines Körpers mit verschwindend kleiner Masse im räumlichen restringierten elliptischen Dreikörperproblem geboten.

Zunächst werden die Grundgleichungen abgeleitet, mittelst derer die gesuchten Störungen bestimmt werden. Dann werden die auf der Theorie der besten Annäherungen von Tschebyscheff gegründeten Methoden der Reihenentwicklung von für die Auflösung der gestellten Aufgabe benötigten Größen betrachtet und Rechenschemata für eine effektive Ableitung der Reihenkoeffizienten und für die Integration dieser Reihen angeführt.

In dem einem Schema wird die mittlere Anomalie des kleinen Körpers als Integrationsargument angenommen, in dem anderen — seine exzentrische Anomalie.

Die beiden Schemata sind ungefähr gleichwertig. Die im ersten Schema vorkommenden Multiplikationen trigonometrischer Reihen von zwei Argumenten mit trigonometrischen Reihen von einem Argument werden im zweiten Schema durch einfachere Multiplikationen trigonometrischer Reihen von zwei Argumenten mit trigonometrischen Polynomen von einem Argument ersetzt, jedoch kommen im zweiten Schema mühevollere Operationen vor, bedingt durch die Einführung neuer Variablen in drei Reihen.

Im Anhang werden Hilfstafeln und ein Rechnungsbeispiel nach dem ersten Schema für die Störungen der Bahnelemente des kleinen Planeten Sita (244) angeführt.

1. Основные уравнения

Рассматривается система трех тел (точек), притягивающихся друг к другу по закону Ньютона. Одно из этих тел — P имеет исчезающе малую массу. Другие два тела — P_0 и P_1 имеют конечные массы. Тело P_0 с большей массой принимается за неподвижный

центр системы. Очевидно, тело P_1 с меньшей массой движется по законам невозмущенного кеплеровского движения.

В дальнейшем предполагается, что в нулевом приближении тело P также совершает движение по законам Кеплера. Это движение характеризуется постоянными элементами орбиты этого тела, которые предполагаются известными.

Элементы невозмущенной кеплеровской орбиты тела P_1 будут обозначаться теми же буквами, что и для тела P , с присоединением к ним индекса 1.

Рассматриваться будет лишь тот случай, когда большая полуось a орбиты тела P меньше большой полуоси a_1 орбиты тела P_1 . Таким образом,

$$\alpha = \frac{a}{a_1} < 1.$$

Тело P_1 вызывает возмущения элементов орбиты тела P . Ниже будут указаны уравнения, позволяющие вычислить возмущения элементов орбиты тела P . Дифференциальное уравнение возмущенного движения тела P имеет вид

$$\ddot{\vec{r}}_0 + \frac{k^2 r_0}{r_0^3} = \vec{F}. \quad (1)$$

В этом уравнении \vec{r}_0 — возмущенный радиус-вектор тела P , k — гауссова постоянная, а \vec{F} — возмущающее ускорение, которое в рассматриваемом случае определяется по формуле

$$\vec{F} = k^2 m_1 \left(\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_0}{\Delta^3} - \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} \right), \quad (2)$$

m_1 и \vec{r}_1 — соответственно масса и радиус-вектор тела P_1 , Δ — расстояние тела P_1 от тела P или длина вектора $\vec{r}_1 - \vec{r}_0$.

При отсутствии возмущающего ускорения уравнение (1) переходит в уравнение невозмущенного движения

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{k^2 r}{r^3} = 0, \quad (3)$$

интегралы которого известны; \vec{r} — невозмущенный радиус-вектор тела P . В формулах (1), (2) и (3) величины r_0 , r_1 и r суть длины векторов \vec{r}_0 , \vec{r}_1 и \vec{r} .

Интегралы уравнения (3) могут быть написаны в таком виде

$$\vec{r} = M \vec{\beta}, \quad \dot{\vec{r}} = M \dot{\vec{\beta}}. \quad (4)$$

В формуле (4) буквой M обозначена матрица векторных элементов орбиты тела P , а $\vec{\beta}$ и $\dot{\vec{\beta}}$ — радиус-вектор и скорость тела P в орбитальной системе координат.

В орбитальной системе координат $P_0 \xi \eta \zeta$ оси ξ и η расположены в плоскости орбиты, а ось ζ перпендикулярна к ней, при этом ось ξ направлена к перигелию орбиты тела P . Единичные координатные векторы этой системы обозначаются в дальнейшем \vec{P} , \vec{Q} , \vec{R} . Элементы матрицы

$$M = \begin{pmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{pmatrix} \quad (5)$$

являются проекциями векторов \vec{P} , \vec{Q} , \vec{R} на неподвижные оси координат.

Матрица M^T — транспонированная матрица M . Матрица M , зависящая от четырех аргументов t , Ω , ω и ϵ , вычисляется по формуле (Баженов, 1949)

$$M = Z(\omega) X(t) Z(\Omega) X(\epsilon), \quad (6)$$

в которой

$$X(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad Z(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Все четыре аргумента: i — наклонность орбиты тела P к эклиптике, Ω — долгота ее восходящего узла, ω — угловое расстояние перигелия от узла и ϵ — наклонность экватора к эклиптике — должны соответствовать одной и той же эпохе.

Векторы \vec{P} и $\dot{\vec{P}}$ зависят от трех элементов a , e и M , т. е. большой полуоси, эксцентриситета орбиты и средней аномалии тела P . Эти элементы будут называться внутренними и обозначаться буквой ϵ . Последний элемент M является функцией времени t , определяемой формулой

$$M = M_0 + \int_{t_0}^t \mu dt, \quad (8)$$

в которой M_0 — средняя аномалия тела P , соответствующая моменту времени t_0 , а $\mu = ka^{-3/2}$ — среднее движение тела P , в невозмущенном движении являющееся постоянной величиной.

Векторы $\vec{\beta}$ и $\dot{\vec{\beta}}$ в дальнейшем рассматриваются как матрицы вида

$$\vec{\beta} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{\beta}} = \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

при этом

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \rho \cos \nu = aX = a(\cos E - e), \\ \eta &= \rho \sin \nu = aY = a\sqrt{1-e^2} \sin E, \\ \rho &= \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = a(1 - e \cos E), \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi} &= \frac{k^2}{c} \sin \nu = a\dot{X} = \frac{-a\eta \sin E}{1 - e \cos E}, \\ \dot{\eta} &= \frac{k^2}{c} (\cos \nu + e) = a\dot{Y} = \frac{a\eta \sqrt{1-e^2} \cos E}{1 - e \cos E}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

В формулах (10) и (11) ν — истинная аномалия, а E — эксцентрисическая аномалия, связанная со средней уравнением Кеплера

$$E - e \sin E = M, \quad (12)$$

c — постоянная интеграла площадей

$$\dot{\xi} \eta - \eta \dot{\xi} = \rho^2 \dot{\nu} = c = k\sqrt{a} \sqrt{1-e^2}. \quad (13)$$

Кроме того, элементы матриц (9) связаны еще друг с другом интегралом энергии

$$\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 = \frac{2k^2}{P} - \frac{k^2}{a}. \quad (14)$$

Составляющие ускорения $\ddot{\vec{\beta}}$ определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi} &= a\ddot{X} = -\frac{k^2 \xi}{P}, \\ \ddot{\eta} &= a\ddot{Y} = -\frac{k^2 \eta}{P}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Векторы \vec{r} и $\dot{\vec{r}}$ могут быть представлены еще в виде

$$\left. \begin{aligned} \vec{r} &= P\vec{\xi} + Q\eta, \\ \dot{\vec{r}} &= P\dot{\xi} + Q\dot{\eta}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Движение тела P_1 характеризуется такими же соотношениями, какие имеют место для невозмущенного движения тела P . Соответствующие величины для тел P и P_1 обозначаются одинаковыми буквами, причем для тела P_1 буквы отмечаются индексом 1. Первое соотношение из (4) для тела P_1 будет иметь вид

$$\dot{r}_1 = M_1 \dot{r}_1.$$

Так как в дальнейшем будет использоваться орбитальная система координат тела P , то положение тела P_1 в этой системе определится радиусом-вектором \vec{r}_1 в соответствии с формулой

$$\vec{r}_1 = M \vec{r}_1 = MM_1 \vec{r}_1 = N \vec{r}_1, \quad (17)$$

в которой матрицы M и M_1 должны быть отнесены к одной и той же системе координат. Для получения формулы (17) используется соотношение

$$MM_1 = E, \quad (18)$$

в котором E — единичная матрица. Это последнее соотношение может служить для контроля вычисления матрицы M .

Интегралы дифференциального уравнения возмущенного движения тела P , т. е. уравнения (1), можно определить методом вариации произвольных постоянных, предполагая, что эти интегралы имеют такой же вид, как и интегралы невозмущенного движения, с тем отличием, что матрица M и элементы ϵ являются выбранными подходящим образом функциями времени. Они могут быть написаны в виде

$$\begin{aligned} \vec{r}_0 &= M'(t) \vec{r}_0(t, \epsilon(t)), \\ \dot{r}_0 &= M'(t) \dot{r}_0(t, \epsilon(t)). \end{aligned} \quad (19)$$

Дифференцирование по времени равенств (19) дает соотношения:

$$\begin{cases} \dot{r}_0 = M' \left(\frac{\partial \vec{r}_0}{\partial t} + \sum \frac{\partial \vec{r}_0}{\partial \epsilon} \dot{\epsilon} \right) + M' \dot{r}_0, \\ \dot{r}_0 = M' \left(\frac{\partial \dot{r}_0}{\partial t} + \sum \frac{\partial \dot{r}_0}{\partial \epsilon} \dot{\epsilon} \right) + M' \dot{r}_0. \end{cases} \quad (20)$$

Если учесть равенства

$$\begin{aligned} \vec{r}_0 &= \vec{r}, \quad \dot{r}_0 = \dot{r}, \\ \frac{\partial \vec{r}_0}{\partial t} &= \dot{r}, \quad \frac{\partial \dot{r}_0}{\partial t} = \ddot{r}, \quad \frac{\partial \vec{r}_0}{\partial \epsilon} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \epsilon}, \quad \frac{\partial \dot{r}_0}{\partial \epsilon} = \frac{\partial \dot{r}}{\partial \epsilon}, \end{aligned}$$

понимаемые в том смысле, что аналитические выражения их правых и левых частей одинаковы, затем подставить в уравнение (1) выражения для \vec{r}_0 и \dot{r}_0 , указанные формулами (19) и (20), и принять во внимание уравнение

$$\beta + \frac{k^2 r_0}{r^3} = 0,$$

т. е. уравнение (3), отнесенное к орбитальной системе координат тела P , то получаются уравнения

$$\begin{cases} \sum \frac{\partial \vec{r}}{\partial \epsilon} \dot{\epsilon} + MM' \dot{r}_0 = 0, \\ \sum \frac{\partial \dot{r}}{\partial \epsilon} \dot{\epsilon} + MM' \dot{r}_0 = M \dot{F}. \end{cases} \quad (21)$$

Матрица MM' , обозначаемая в дальнейшем буквой K , в соответствии с формулой (5) может быть написана в виде

$$K = \begin{pmatrix} P\dot{P} & P\dot{Q} & P\dot{R} \\ Q\dot{P} & Q\dot{Q} & Q\dot{R} \\ R\dot{P} & R\dot{Q} & R\dot{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A & B \\ -A & 0 & C \\ -B & -C & 0 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Два матричных уравнения (21), эквивалентные шести следующим скалярным уравнениям:

$$\begin{cases} \sum \frac{\partial \dot{r}}{\partial \epsilon} \dot{\epsilon} + A\eta = 0, \\ \sum \frac{\partial \eta}{\partial \epsilon} \dot{\epsilon} - A\dot{\epsilon} = 0, \\ \sum \frac{\partial \dot{\epsilon}}{\partial \epsilon} \dot{\epsilon} + A\dot{\eta} = F_\xi, \\ \sum \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \epsilon} \dot{\epsilon} - A\dot{\epsilon} = F_\eta, \end{cases} \quad (23) \quad \left. \begin{aligned} -B\dot{\epsilon} - C\dot{\eta} &= 0, \\ -B\dot{\eta} - C\dot{\epsilon} &= F_\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

в которых F_ξ , F_η , F_ζ — проекции возмущающего ускорения на оси орбитальной системы координат тела P , дают возможность получить точные явные выражения для величин A , B , C , $\dot{\epsilon}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\epsilon}$, $\dot{\eta}$. В уравнениях (23) суммы содержат по три слагаемых, каждое из которых соответствует одному из трех внутренних элементов орбиты тела P , т. е. a , e и M_0 .

Если принять во внимание интеграл площадей (13), то из системы (24) легко получаются выражения для B и C :

$$B = \frac{3}{c} F_\zeta, \quad (25)$$

$$C = -\frac{\dot{\epsilon}}{c} F_\zeta. \quad (26)$$

Из уравнений (23) путем несложных преобразований получаются такие выражения для величин A , $\dot{\epsilon}$, $\dot{\eta}$ и $\dot{\epsilon}$:

$$k^2 \dot{\epsilon} = c F_\xi + \frac{1}{2} T, \quad (27)$$

$$k^2 \dot{\eta} = c F_\eta + \eta T, \quad (28)$$

$$M_0 = A \sqrt{1 - e^2} - \frac{2}{\mu a} (x F_\xi + y F_\eta), \quad (29)$$

$$\dot{a} = \frac{2a}{c} T + \frac{2ae}{1 - e^2} \dot{e}, \quad (30)$$

в которых величина

$$T = \dot{\epsilon} F_\eta - \eta F_\xi. \quad (31)$$

Возмущенные внутренние элементы a , e и M_0 находятся с помощью следующих интегральных уравнений

$$\begin{cases} a = a_0 + \int_t^i \dot{a} dt = a_0 + \delta a, \\ e = e_0 + \int_t^i \dot{e} dt = e_0 + \delta e, \\ M = M_0 + v_0(t - t_0) + \int_t^i \dot{M}_0 + \int_t^i \dot{\beta} dt \Big] dt = M_0 + v_0(t - t_0) + \delta M, \end{cases} \quad (32)$$

а возмущенная матрица M' — при помощи матричного интегрального уравнения

$$M' = M'_0 + \int_{t_0}^t M' dt,$$

которое может быть написано еще в такой форме

$$M' = M'_0 + \int_{t_0}^t M' K dt. \quad (33)$$

В уравнениях (32) и (33) через a_0 , e_0 , M_0 и M'_0 обозначены значения элементов a , e , M и матрицы M' для момента времени t_0 , а

$$\dot{a} = -\frac{3n}{2a} a.$$

Уравнения (32) и (33) можно решать методом последовательных приближений. Если в подынтегральные выражения всех интегралов, входящих в уравнения, подставить постоянные значения всех элементов, соответствующие моменту времени t_0 , и затем каким-то образом вычислить эти интегралы, то получится первое приближение решения рассматриваемых уравнений.

Второе приближение получится после подстановки в подынтегральные выражения возмущенных элементов, найденных в первом приближении, и выполнения интегрирования.

В настоящей работе рассматривается только первое приближение.

В случае, когда масса возмущающего тела P_1 мала по сравнению с массой центрального тела P_0 , первое приближение дает удовлетворительный результат.

В конкретном случае трех тел: P_0 — Солнце, P_1 — Юпитер и P — малая планета (масса Юпитера $m_1 = 1:1047 \cdot 355$) — отыскание второго приближения имеет смысл лишь при учете возмущений в движениях Юпитера и малой планеты, вызываемых другими планетами.

Возмущение первого порядка средней аномалии δM может быть написано в виде

$$\delta M = \int_{t_0}^t \left[M'_0 - \frac{3n}{2a} \delta a \right] dt. \quad (34)$$

Вопрос о решении матричного интегрального уравнения (33) методом последовательных приближений рассмотрен в работе автора настоящей статьи (Баженов, 1949).

Вместо матрицы M' можно принять за неизвестную матрицу L , связанную с матрицей M соотношением

$$M' = M'_0 L \quad (35)$$

$$M = L' M_0.$$

Возмущенная матрица M' получается от умножения невозмущенной матрицы M'_0 на эту матрицу L справа. Матрица L удовлетворяет условию

$$L'L = E.$$

Уравнение (33) заменяется таким:

$$L = E + \int_{t_0}^t L K dt. \quad (36)$$

Как было показано в упомянутой работе автора (Баженов, 1949), в конкретном случае вычисления возмущений от Юпитера в движении малой планеты, не подходящей к Юпитеру слишком близко, с точностью до 10^{-6} в качестве первого приближения матрицы L можно взять матрицу

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} A^2 & A & B \\ -A & 1 - \frac{1}{2} A^2 & C \\ -B & -C & 1 \end{pmatrix}, \quad (37)$$

в которой

$$A = \int_{t_0}^t \dot{A} dt, \quad B = \int_{t_0}^t \dot{B} dt, \quad C = \int_{t_0}^t \dot{C} dt. \quad (38)$$

Подынтегральные выражения интегралов (38) вычислены с помощью невозмущенных элементов и координат тел P и P_1 . В матрице (37) принята во внимание величина второго порядка $-\frac{1}{2} A^2$, которой в рассматриваемом случае пренебречь нельзя. Вычисление этой величины не требует дополнительных интегрирований.

Для нахождения возмущенных элементов орбиты тела P необходимо вычислить шесть интегралов, фигурирующих в формулах (32), (36) и (38), для чего сначала их подынтегральные выражения раскладываются в тригонометрические ряды, а затем полученные ряды почленно интегрируются. Почленно интегрировать можно только равномерно сходящиеся ряды. В настоящей работе ниже будут указаны такие способы разложения нужных величин в ряды, которые обеспечивают равномерную сходимость получающихся рядов. Как уже было сказано, в данной работе рассматриваются лишь возмущения первого порядка.

Возмущенные элементы орбиты тела P представляются в виде тригонометрических рядов, в которых сохранены лишь члены с коэффициентами, по абсолютной величине превосходящими допустимую ошибку.

2. Первая схема вычисления возмущений первого порядка элементов орбиты тела P

Как уже было сказано, вычисление интегралов, фигурирующих в формулах (32), (34) и (38), может быть выполнено, если их подынтегральные выражения будут разложены в равномерно сходящиеся тригонометрические ряды с двумя аргументами.

В качестве аргументов можно взять средние аномалии тел P и P_1 , т. е. величины M и M_1 . При этом выборе аргументов интегрирования по времени выполняется особенно просто. За аргументы можно также принять эксцентрические аномалии тел P и P_1 , т. е. величины E и E_1 . В этом случае искомые разложения в ряды получаются проще, но для интегрирования этих рядов в них требуется предварительно заменить величины E_1 и dt их выражениями через аргумент E . Это требует дополнительной работы.

В настоящем разделе будет рассмотрено разложение всех нужных величин в тригонометрические ряды с аргументами M и M_1 .

Ниже приводятся формулы для всех величин, подлежащих разложению в ряды, приведенные к виду, наиболее удобному для осуществления разложения в ряды.

В этих формулах аргумент дифференцирования и интегрирования — время t — заменен новым — средней аномалией M тела P . Операция дифференцирования по средней аномалии M обозначена в дальнейшем знаком $\frac{\partial}{\partial M}$.

Компоненты возмущающего ускорения, умноженные на величину $\frac{a^2}{k^2}$, в формулах обозначены так: f_{t_1} , f_{t_2} и f_{t_3} .

Производные со средней аномалии от искомым величины определяются с помощью следующих формул:

$$\left. \begin{aligned} C' &= -\frac{Xf_c}{\sqrt{1-e^2}}, & B' &= \frac{Yf_c}{\sqrt{1-e^2}}, \\ T^* &= -Yf_i + Xf_j, \\ A' &= \frac{1}{e} X'T^* + \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} f_i, \\ e' &= Y'T^* + \sqrt{1-e^2} e' f_j, \\ a' &= \frac{2a}{\sqrt{1-e^2}} T^* + \frac{2ae}{1-e^2} e', \\ (\partial M)' &= p^0 \sqrt{1-e^2} A' - 2p^0 Xf_i - 2p^0 Yf_j - \frac{3p^0}{2a} \delta a. \end{aligned} \right\} (39)$$

Для величин f_i, f_j и f_c можно написать выражения:

$$\left. \begin{aligned} f_i &= m_1 a^2 P_2 X_2 + m_1 a^2 Q_2 Y_2 - m_1 a^2 X \Delta^{-3}, \\ f_j &= m_1 a^2 P_2 X_2 + m_1 a^2 Q_2 Y_2 - m_1 a^2 Y \Delta^{-3}, \\ f_c &= m_1 a^2 P_2 X_2 + m_1 a^2 Q_2 Y_2 \end{aligned} \right\} (40)$$

в которых

$$\left. \begin{aligned} X_2 &= X_1 \Delta^{-3} + X_1', \\ Y_2 &= Y_1 \Delta^{-3} + Y_1'. \end{aligned} \right\} (41)$$

Величины P_2, Q_2, \dots — элементы матрицы N' , т. е. векторные элементы орбиты тела P_1 в орбитальной системе координат тела P . За единицу длины в вышеприведенных формулах принята длина большой полуоси орбиты тела P_1 .

Квадрат расстояния между телами P и P_1 , взятый со знаком минус, может быть найден по формуле

$$r^2 - \Delta^2 = 2aX_1 + 2aY_1 - a^2(X^2 + Y^2) - (X_1^2 + Y_1^2). \quad (42)$$

Координаты тела P_1 в орбитальной системе координат тела P определяются из соотношений:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= P_2 X_1 + Q_2 Y_1, \\ \eta_1 &= P_2 X_1 + Q_2 Y_1, \\ \zeta_1 &= P_2 X_1 + Q_2 Y_1. \end{aligned} \right\} (43)$$

Получение рядов для величин C', B', A', e', a' и $(\partial M)'$ требует предварительного разложения в ряды с одним аргументом M' величин $X, Y, -(X^2 + Y^2), X'$ и Y' для тела P и величин $X_1, Y_1, -(X_1^2 + Y_1^2), X_1'$ и Y_1' для тела P_1 . Все эти разложения известны. Они могут быть написаны в виде:

$$\left. \begin{aligned} X &= \sum_k a_k(e)(k, 0), \\ Y &= -i \sum_k b_k(e) \sqrt{1-e^2}(k, 0), \\ -(X^2 + Y^2) &= \sum_k c_k(e)(k, 0), \\ X' &= i \sum_k k a_k(e)(k, 0), \\ Y' &= \sum_k k b_k(e) \sqrt{1-e^2}(k, 0). \end{aligned} \right\} (44)$$

В формулах (44) применено условное обозначение

$$\exp(ikM + ik_1 M_1) = (k, k_1), \quad (45)$$

которое будет использоваться по всем дальнейшим формулам.

Величины X_1, Y_1, \dots для тела P_1 раскладываются в ряды по формулам, аналогичным формулам (44).

В предыдущей статье автора (Баженев, 1956) приведены таблицы, в которых по аргументам k и e (эксцентриситет) даны значения коэффициентов $a_k(e), b_k(e) \sqrt{1-e^2}$ и $c_k(e)$. Так как получение коэффициентов $ka_k(e)$ и $kb_k(e) \sqrt{1-e^2}$ с помощью этих таблиц связано с потерей точности, автором приложены к настоящей статье таблицы этих коэффициентов (см. Приложение 1).

Определив с помощью таблиц коэффициенты разложений всех перечисленных выше величин, можно в соответствии с формулой (43) получить разложения величин ξ_1 и η_1 с помощью линейных сочетаний рядов для величин X_1 и Y_1 .

После этого получается разложение величины $-\Delta^2$ в ряд вида

$$-\Delta^2 = \sum_k \sum_{k_1} a_{kk_1}(k, k_1)$$

при помощи двух умножений рядов: $2aX$ на ξ_1 и $2aY$ на η_1 — и последующего сложения четырех рядов в соответствии с формулой (42).

Наиболее трудной частью процесса разложения в ряды всех нужных величин является разложение в ряд величины Δ^{-3} . Обычно эта величина представляется интерполяционным тригонометрическим полиномом. Однако этот способ имеет ряд существенных недостатков. Прежде всего вместо разлагаемой функции берется произвольно выбранная система значений этой функции. Выбор этой системы значений неопределенный и может оказаться неудачным, что приведет к необходимости переычисления коэффициентов полинома для другой системы значений.

Интерполяционный полином представляет выбранную систему значений функции таким образом, что сумма квадратов отклонений этих значений от соответствующих значений интерполяционного полинома будет наименьшей. Оценить максимальную абсолютную величину этих отклонений практически не представляется возможным.

Вопрос о сходимости ряда, замененного интерполяционным полиномом, и тем более о его равномерной сходимости остается не решенным, а следовательно, законность почленного интегрирования этого ряда ставится под сомнение.

В настоящей работе предлагается такой способ разложения величины Δ^{-3} в ряд, который обеспечивает абсолютную и равномерную сходимость получаемого разложения и дает возможность оценить максимальную абсолютную величину остаточного члена этого разложения.

В работах автора (Баженев, 1955, 1956) указано несколько приемов для разложения величин Δ^{-3} , удовлетворяющих сформулированным выше условиям.

Излагаемый ниже способ разложения в ряд величины Δ^{-3} характеризуется использованием теории наилучших приближений Чебышева и является достаточно просто осуществимым на практике. Сущность его заключается в следующем.

Вводится зависящая от двух параметров h и χ величина

$$\Delta_h^3 = 1 + h^2 - 2h \cos \chi, \quad (46)$$

в которой

$$z = M - M_1 - \chi. \quad (47)$$

Значения параметров h и χ должны быть выбраны так, чтобы было возможно меньшим максимальное абсолютное значение величины

$$\delta = \frac{\psi}{\Delta_h^3}, \quad (48)$$

где

$$\psi = \Delta_0^2 - \Delta^2.$$

Опыт показывает, что для этого нужно положить

$$\chi \approx \pi_1 - \pi \text{ и } h < a = \frac{a}{a_1},$$

т. е. за χ можно принять разность долгот перигелиев тел P_1 и P , округленную с точностью до 1° . Величина h берется тем ближе к a , чем меньше эксцентриситеты e_1 и e и взаимная наклонность J орбит тел P_1 и P .

Выбрав определенное h (с точностью до 0.01), нужно оценить верхнюю границу абсолютной величины δ , обозначаемую в дальнейшем буквой k

$$|\delta| < k.$$

Величина Δ^{-3} может быть представлена в виде

$$\Delta^{-3} = \Delta_0^{-3} (1 - \delta)^{-\frac{3}{2}}. \quad (49)$$

Функция $f(\delta) = (1 - \delta)^{-\frac{3}{2}}$ в промежутке изменения аргумента $(-k, +k)$ может быть разложена в биномиальный ряд, в котором сохраняются только несколько первых членов, с таким расчетом, чтобы сумма всех отброшенных членов не превосходила допустимой ошибки.

Однако лучше представить эту функцию полиномом некоторой степени с погрешностью, не превышающей допустимую, пользуясь теорией наилучших приближений Чебышева.

По Чебышеву, полином $P_n(\delta)$ степени n представляет наилучшим образом функцию $f(\delta)$ в интервале $(-k, +k)$ в том случае, когда величина

$$L = \max |f(\delta) - P_n(\delta)|$$

будет наименьшей.

Необходимые и достаточные условия для наилучшего приближения, указанные Чебышевым (Гончаров, 1954), дают возможность определить коэффициенты C_0, C_1, \dots, C_n полинома $P_n(\delta)$ и величину L . К настоящей работе приложены таблицы коэффициентов полиномов степени n , равной 2 и 3, являющихся наилучшими приближениями функции $(1 - \delta)^{-\frac{3}{2}}$, и величин L для различных значений k .

При одной и той же допустимой погрешности полином, представляющий наилучшее приближение функции $f(\delta)$, будет меньшей степени, чем полином, образованный первыми членами биномиального ряда.

Так, например, при $k=0.14$ формула

$$(1 - \delta)^{-\frac{3}{2}} \approx 1 + \frac{3}{2} \delta + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \delta^2 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} \delta^3$$

допускает максимальную погрешность 0.001118. Если учесть еще один член биномиального ряда $\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \delta^4$, то максимальная погрешность снижается до 0.000172. Формуле же

$$(1 - \delta)^{-\frac{3}{2}} \approx C_0 + C_1 \delta + C_2 \delta^2 + C_3 \delta^3 \quad (50)$$

с коэффициентами

$$C_0 = 0.999872, \quad C_1 = 1.49946, \quad C_2 = 1.9243, \quad C_3 = 2.269,$$

взятыми из табл. 4 (см. Приложение I) для аргумента $k=0.14$, соответствует максимальная абсолютная величина погрешности $L=0.000124$, меньшая даже той, которая получается при использовании пяти членов биномиального ряда.

Из изложенного выше следует, что разложение величин осуществляется с помощью следующих операций.

1. По формулам

$$\begin{aligned} \beta_{0,0} &= 1 + h^2 + a_{0,0}, \\ \beta_{1,-1} &= a_{1,-1} - (h \cos \chi - ih \sin \chi) = \overline{\beta_{-1,1}}, \\ \beta_{k,k_1} &= a_{k,k_1} \end{aligned}$$

получаются коэффициенты разложения в ряд величин

$$\psi = \Delta_0^2 - \Delta^2 = \sum_k \sum_{k_1} \beta_{k,k_1} (k, k_1). \quad (51)$$

Коэффициенты a_{k,k_1} ряда для величины $-\Delta^2$, так же как и коэффициенты β_{k,k_1} , связаны соотношениями

$$a_{-k,-k_1} = \overline{a_{k,k_1}} \text{ и } \beta_{-k,-k_1} = \overline{\beta_{k,k_1}}.$$

2. Разлагается в ряд величина Δ_0^{-2} .

$$\Delta_0^{-2} = \sum_j \gamma_j (j, -j), \quad (52)$$

где

$$\gamma_j = a_j \cos j\chi - ia_j \sin j\chi = \overline{\gamma_{-j}},$$

причем величины a_j находятся по аргументам h и j из табл. 5 (см. Приложение I).

3. Умножением ряда (51) на ряд (52) получается ряд для величины

$$\delta = \psi \cdot \Delta_0^{-2} = \sum_k \sum_{k_1} \delta_{k,k_1} (k, k_1), \quad (53)$$

коэффициенты которого определяются по формуле

$$\delta_{k,k_1} = \sum_n \gamma_n \beta_{k-n, k_1+n}$$

4. С помощью ряда (53) получаются ряды

$$\delta^2 = \sum_k \sum_{k_1} \delta_{k,k_1}^{(2)} (k, k_1), \quad (54)$$

$$\delta^3 = \sum_k \sum_{k_1} \delta_{k,k_1}^{(3)} (k, k_1), \quad (55)$$

в которых

$$\delta_{k,k_1}^{(2)} = \sum_m \sum_{m_1} \delta_{m,m_1} \delta_{k-m, k_1-m_1},$$

$$\delta_{k,k_1}^{(3)} = \sum_m \sum_{m_1} \sum_{m_2} \delta_{m,m_1,m_2} \delta_{k-m, k_1-m_1-m_2},$$

5. Линейным сочетанием рядов (53), (54), (55) в соответствии с формулой (50) получается разложение в ряд величины $(1 - \delta)^{-\frac{3}{2}}$.

6. Разлагается в ряд величина Δ_0^{-3}

$$\Delta_0^{-3} = \sum_j \lambda_j(j, -j), \quad (56)$$

где

$$\lambda_j = \beta_j \cos j\chi - i\beta_j \sin j\chi = \overline{\lambda_{-j}},$$

причем величины β_j находятся по аргументам h и j из табл. 6 (см. Приложение 1).
7. Умножением ряда для величины

$$(1-\delta)^{-\frac{3}{2}} = \sum_k \sum_{k_1} \varepsilon_{kk_1}(k, k_1),$$

полученного операцией 5, на ряд (56) получается искомым ряд для величины Δ^{-3}

$$\Delta^{-3} = \sum_k \sum_{k_1} \rho_{kk_1}(k, k_1), \quad (57)$$

где

$$\rho_{kk_1} = \sum_{\lambda=\lambda_1-k, k_1+\lambda}$$

Во всех формулах суммы берутся по всем индексам от $-\infty$ до $+\infty$. Коэффициенты любого ряда, имеющие одинаковые по величине и противоположные по знаку индексы, сопряжены друг с другом.

Вычислительные схемы для фактического перемножения рядов различного вида будут указаны ниже. Во всех рядах сохраняются лишь те члены, коэффициенты которых превышают допустимую погрешность. Остальные члены отбрасываются.

После того как будет получено разложение в ряд величины Δ^{-3} , с помощью двух умножений ряда Δ^{-3} на ряды X_1 и Y_1 с одним аргументом M_1 и двух умножений ряда Δ^{-3} на ряды $-m_1 \alpha^2 X$ и $-m_1 \alpha^2 Y$ с одним аргументом M и нескольких линейных сочетаний рядов по формулам (41) и (40) получают разложения в ряды величин f_e , f_0 и f_c .

По формулам (39) с помощью восьми умножений рядов с двумя аргументами M и M_1 на ряды с одним аргументом M и нескольких линейных сочетаний рядов получают ряды для производных от всех искомым величин.

Эти ряды должны быть проинтегрированы. Любой из них может быть написан в таком виде

$$e^i = a_{00} + \sum_k \sum_{k_1} (a_{kk_1} + i b_{kk_1})(k, k_1) \quad (58)$$

(из двойной суммы выделен действительный свободный член ряда).

Интегрирование ряда (58) дает соотношение

$$\delta e = a_{00}(M - M_0) + \sum_k \sum_{k_1} \frac{b_{kk_1} - i a_{kk_1}}{k + k_1} \frac{e^{i k_1 M_1}}{e^{i k M_1}},$$

которое может быть написано в другом виде

$$\delta e = a_{00} e^{i k_1 (t - t_0)} + C_e + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1} \left[\frac{2b_{kk_1}}{k+k_1} \frac{e^{i k_1 M_1}}{e^{i k M_1}} \cos(kM + k_1 M_1) + \frac{2a_{kk_1}}{k+k_1} \frac{e^{i k_1 M_1}}{e^{i k M_1}} \sin(kM + k_1 M_1) \right] \quad (59)$$

(в двойной сумме нет члена, для которого одновременно $k=0$ и $k_1=0$). Постоянная интегрирования C_e представляет взятое с обратным знаком значение двойной суммы для значений аргументов M_0 и M_{10} , соответствующих моменту времени t_0 .

Первый член ряда (59), пропорциональный промежутку времени $t - t_0$, соответствует вековому возмущению элемента. Для большой полуоси a вековое возмущение первого порядка равно нулю.

Для получения разложения в ряд величины $(\delta \varpi)'$, как видно из формул (39), требуется предварительно найти интегрированием ряд для величины δa .

Возмущения A , B , C и δe получаются выраженными в отнесенных единицах, возмущение δa — в астрономических единицах и возмущение δM — в градусах.

3. Вторая схема вычисления возмущений первого порядка элементов орбиты тела P

В этой схеме за аргумент интегрирования принимается эксцентрическая аномалия E тела P .

Последовательность операций следующая. Сначала разлагаются в ряды с двумя аргументами E и E_1 (эксцентрические аномалии тел P и P_1) три величины f_0 , f_0' и f_c , определяемые формулами (40) и (41). Затем в полученных рядах, взамен переменного E_1 вводятся переменные E и D . Переменное D , линейно зависящее от E , будет определено ниже. После этого разлагаются в ряды с теми же переменными E и D производные по E от всех искомым величин. Интегрирование этих рядов по переменному E дает возмущения элементов орбиты тела P .

В дальнейшем приняты обозначения

$$\langle k, k_1 \rangle = \exp(ikE + ik_1 E_1),$$

$$[k, k_1] = \exp(ikE + ik_1 D).$$

Величины X , Y и $-(X^2 + Y^2)$ представляются в данном случае в виде полиномов

$$X = \frac{1}{2}(-1, 0) - e(0, 0) + \frac{1}{2}(1, 0),$$

$$Y = \frac{i}{2}\sqrt{1-e^2}(-1, 0) - \frac{i}{2}\sqrt{1-e^2}(1, 0),$$

$$-(X^2 + Y^2) = \left(-1 - \frac{e^2}{2}\right)(0, 0) + e(-1, 0) - \frac{e^2}{4}(-2, 0) + e(1, 0) - \frac{e^2}{4}(2, 0).$$

Подобные же формулы имеют место и для величин X_1 , Y_1 и $-(X_1^2 + Y_1^2)$.

Величины X_1' и Y_1' представляются в виде рядов:

$$X_1' = \sum_{k_1} x_{k_1}(e_1)(0, k_1), \quad x_{-k_1}(e_1) = x_{k_1}(e_1),$$

$$Y_1' = \sum_{k_1} y_{k_1}(e_1)(0, k_1), \quad y_{-k_1}(e_1) = -y_{k_1}(e_1).$$

Коэффициенты этих рядов определяются по формулам

$$x_0(e_1) = -\frac{1}{2} e_1 (1 - e_1^2)^{-\frac{3}{2}},$$

$$x_k(e_1) = -\frac{k_1 (k_1 \sqrt{1-e_1^2} + 1) + \frac{e_1^2}{\sqrt{1-e_1^2}}}{2(1-e_1^2)(1+\sqrt{1-e_1^2})} \left(\frac{e_1}{1+\sqrt{1-e_1^2}} \right)^{k-1},$$

$$y_0(e_1) = 0,$$

$$y_k(e_1) = i \frac{k_1 (k_1 \sqrt{1-e_1^2} + 1)}{2(1-e_1^2)(1+\sqrt{1-e_1^2})} \left(\frac{e_1}{1+\sqrt{1-e_1^2}} \right)^{k-1}.$$

Для Юпитера ($e_1 = 0.04842$)

$$\begin{aligned} X_1 \cdot 10^5 &= 50000(0, -1) - 4842(0, 0) + 50000(0, 1), \\ Y_1 \cdot 10^5 &= 49951i(0, -1) - 49951i(0, 1), \\ -(X_1^2 + Y_1^2) \cdot 10^5 &= -100117(0, 0) + 4842(0, -1) - 59(0, -2) + \\ &+ 4842(0, 1) - 59(0, 2), \\ X_1'' \cdot 10^5 &= -7(0, -4) - 176(0, -3) - 3643(0, -2) - 50176(0, -1) - \\ &- 2430(0, 0) - 50176(0, 1) - 3643(0, 2) - 176(0, 3) - 7(0, 4), \\ Y_1'' \cdot 10^5 &= -7i(0, -4) - 176i(0, -3) - 3641i(0, -2) - 50118i(0, -1) + \\ &+ 50118i(0, 1) + 3641i(0, 2) + 176i(0, 3) + 7i(0, 4). \end{aligned}$$

По формулам (43) получаются полиномы для величин ξ_i и η_i . Полном с двумя аргументами E и E_1 для величины $-\Delta^2$ составляется по формуле (42)

$$-\Delta^2 = \sum_{k=-2}^{+2} \sum_{k_1=-2}^{+2} \alpha_{kk_1}(k, k_1).$$

Величина Δ^{-3} раскладывается в ряд с аргументами E и E_1 , таким же точно способом, как и в первой схеме. Во второй схеме максимальное абсолютное значение величины δ всегда меньше, чем соответствующая величина в первой схеме. Это позволяет использовать вместо функции $(1-\delta)^{-\frac{3}{2}}$ аппроксимирующий полином более низкой степени и тем самым сократить трудоемкую работу по получению рядов для величин $\delta^2, \delta^3, \dots$

После того как получен ряд

$$\Delta^{-3} = \sum_k \sum_{k_1} \xi_{kk_1}(k, k_1),$$

находятся в соответствии с формулами (41) и (40) разложения в ряды величин f_i, f_2 и f_3 , для чего требуется выполнить два умножения ряда Δ^{-3} с двумя аргументами E и E_1 на полиномы X_1 и Y_1 с одним аргументом E_1 , два умножения ряда Δ^{-3} на полиномы $-m_1 a^2 X$ и $-m_2 a^2 Y$ с аргументом E и несколько линейных сочетаний рядов.

В трех рядах

$$f_i = \sum_k \sum_{k_1} \xi_{kk_1}(k, k_1)$$

и аналогичных для f_2 и f_3 с коэффициентами η_{kk_1} и ζ_{kk_1} нужно переменное E_1 заменить его выражением через переменное E . Осуществляется это, как известно, следующим путем.

Исходя из равенств

$$\begin{aligned} M_1 &= \mu_1(t-t_0) + M_{10}, \\ E - e \sin E &= \mu(t-t_0) + M_0, \end{aligned}$$

можно получить такое выражение для средней аномалии тела P_1 :

$$M_1 = D - \frac{\mu_1}{\mu} e \sin E, \quad (60)$$

где

$$D = \frac{\mu_1}{\mu} E + D_0 \text{ и } D_0 = M_{10} - \frac{\mu_1}{\mu} M_0. \quad (61)$$

56

Очевидно, имеет место соотношение

$$(0, k_1) = [0, k_1] \exp(-ik_1 \frac{\mu_1}{\mu} e \sin E),$$

откуда, если принять во внимание формулу

$$\exp(ix \sin \varphi) = \sum_n J_n(x) \exp(in\varphi)$$

(Субботин, 1937), получается такое

$$(0, k_1) = \sum_n J_n(k_1 \frac{\mu_1}{\mu} e) [-n, k_1].$$

Так как

$$(0, m_1) = \sum_{k_1} \sum_{k_2} \frac{m_1}{k_1} J_{k_1-m_1}(k_1 e) (0, k_1)$$

(Субботин, 1937), то

$$(0, m_1) = \sum_{k_1} \sum_n \frac{m_1}{k_1} J_{k_1-m_1}(k_1 e) J_n(k_1 \frac{\mu_1}{\mu} e) [-n, k_1]. \quad (62)$$

Формула (62) позволяет преобразовать ряды для величин f_i, f_2 и f_3 с двумя аргументами E и E_1 в ряды с аргументами E и D . Формула для разложения в ряд с аргументами E и D величины f_i будет

$$f_i = \sum_k \sum_{k_1} \lambda_{kk_1}[k, k_1], \quad (63)$$

в которой

$$\lambda_{kk_1} = \sum_{m_1} \sum_{n_1} \xi_{mm_1} p_{k_1 m_1} q_{m-k, k_1}, \quad (64)$$

причем

$$\begin{aligned} p_{k_1 m_1} &= \frac{m_1}{k_1} J_{k_1-m_1}(k_1 e), \quad q_{k_1 m_1} = J_n(k_1 \frac{\mu_1}{\mu} e) \\ (p_{0,0} &= 1, \quad p_{0,\pm 1} = -\frac{e_1}{2}, \quad p_{0,m} = p_{k_1,0} = 0). \end{aligned}$$

Из формулы (64) и из равенств

$$\xi_{-m, -m_1} = \xi_{mm_1}, \quad p_{-k_1, -m_1} = p_{k_1, m_1}, \quad q_{k-m, -k_1} = q_{m-k, k_1}$$

следует, что

$$\lambda_{-k, -k_1} = \lambda_{kk_1}.$$

Вычислительные схемы для осуществления этих преобразований рядов будут указаны в разделе 4 настоящей работы.

Имея в распоряжении ряды для величин f_i, f_2 и f_3 , можно получить разложения в ряды производных по эксцентрической аномалии E от элементов C, B, A, e и a по формулам

$$\frac{d^i}{dE} = X_i f_i + Y_i f_2 + Z_i f_3$$

в которых

$$X_c = Y_c = 0, \quad Z_c = +\frac{3e}{2\sqrt{1-e^2}} - \frac{1+e^2}{\sqrt{1-e^2}} \cos E + \frac{e}{2\sqrt{1-e^2}} \cos 2E,$$

$$X_B = Y_B = 0, \quad Z_B = \sin E - \frac{1}{2} e \sin 2E,$$

57

$$\begin{aligned}
 X_A &= \frac{3\sqrt{1-e^2}}{2e} - \sqrt{1-e^2} \cos E - \frac{\sqrt{1-e^2}}{2e} \cos 2E, \\
 Y_A &= \sin E - \frac{1}{2e} \sin 2E, \quad Z_A = 0, \\
 X_s &= -\frac{1}{2}(1-e^2) \sin 2E, \quad Z_s = 0, \\
 Y_s &= \frac{3}{2}\sqrt{1-e^2} - 2e\sqrt{1-e^2} \cos E + \frac{1}{2}\sqrt{1-e^2} \cos 2E, \quad Z_s = 0, \\
 X_a &= -2a \sin E, \quad Y_a = 2a\sqrt{1-e^2} \cos E, \quad Z_a = 0.
 \end{aligned}$$

Для этого придется выполнить восемь умножений рядов с двумя аргументами E и D на полиномы с одним аргументом E и несколько линейных сочетаний рядов. Интеграция полученных рядов даст искомые возмущения элементов, т. е. $C, B, A, \delta e$ и δa .

Производная по E от возмущения средней аномалии δM определяется по формуле

$$\frac{d(\delta M)}{dE} = X_M f'_E + Y_M f'_E - \frac{3\rho^2 a}{2a} (1 - e \cos E),$$

в которой

$$X_M = \frac{3\rho^2(1+e^2)}{2e} - \rho^2(3-e^2) \cos E - \frac{\rho^2(1-3e^2)}{2e} \cos 2E,$$

$$Y_M = -\rho^2 \sqrt{1-e^2} \sin E - \rho^2 \sqrt{1-e^2} \frac{1-2e^2}{2e} \sin 2E.$$

4. Вычислительные схемы для выполнения различных операций в процессе разложения в ряды величины, нужных для определения возмущений элементов орбиты

Операции, входящие в состав разложения в ряды всех нужных величин, можно разбить следующим образом.

I. Вычисление значений коэффициентов Лапласа и значений различных бесселевых функций для различных значений аргументов.

II. Умножение рядов вида

$$\sum_k \sum_{k_1} \alpha_{kk_1}(k, k_1)$$

на ряды такого же вида (операция II, 1) и на ряды таких трех типов

$$\sum_n \beta_n(n, -n) \quad (\text{операция II, 2}),$$

$$\sum_n \gamma_n(0, n) \quad (\text{операция II, 3}),$$

$$\sum_n \delta_n(n, 0) \quad (\text{операция II, 4}).$$

III. Линейное сочетание рядов, в частности сложение и вычитание рядов.

IV. Преобразование рядов с аргументами E и E_1 в ряды с аргументами E и D .

Операция I. Вычисление значений коэффициентов Лапласа и значений бесселевых функций можно выполнять по схемам, указанным автором в его работе (Баже-

нов, 1955). Однако непрерывную дробь, определяющую $\rho_0^{(2)}$ или ρ_1 , лучше представить в виде

$$\rho_0^{(2)} = \frac{\gamma_0}{1 - \frac{\gamma_1}{1 - \frac{\gamma_2}{1 - \dots}}}$$

Тогда числители и знаменатели подходящих дробей находятся по формулам

$$P_0 = 0, \quad Q_0 = 1, \quad P_1 = \gamma_0, \quad Q_1 = 1,$$

$$P_{k+1} = P_k - \gamma_k P_{k-1},$$

$$Q_{k+1} = Q_k - \gamma_k Q_{k-1}.$$

Для коэффициентов Лапласа $b_k^{(2)}(h)$

Для функций Бесселя

$$\gamma_0 = \frac{2i+1}{2i} h$$

$$\gamma_0 = \frac{x}{2i}$$

$$\gamma_1 = \frac{-3}{2i(2i+2)} h^2$$

$$\gamma_1 = \frac{x^2}{2i(2i+2)}$$

$$\gamma_2 = \frac{(2i-1)(2i+3)}{(2i+2)(2i+4)} h^2$$

$$\gamma_2 = \frac{x^2}{(2i+2)(2i+4)}$$

$$\gamma_3 = \frac{5}{(2i+4)(2i+6)} h^2$$

$$\gamma_3 = \frac{x^2}{(2i+4)(2i+6)}$$

$$\gamma_4 = \frac{(2i+1)(2i+5)}{(2i+6)(2i+8)} h^2$$

$$\gamma_4 = \frac{x^2}{(2i+6)(2i+8)}$$

Новая схема 2, заменяющая старую (Баженев, 1955), будет такова

K	Знаменатель γ_k	Коэффициент	Числитель γ_k	γ_k	P_k	Q_k	P_k/Q_k
0							
1							
2							
3							
4							

Операция II, 1. Вычислительная схема для нахождения коэффициентов произведения двух рядов

$$\sum_k \sum_{k_1} \alpha_{kk_1}(k, k_1) \quad \text{и} \quad \sum_k \sum_{k_1} \beta_{kk_1}(k, k_1)$$

друг на друга была описана автором в его работе (Баженев, 1956).

Операция II, 2. Умножение ряда вида $\sum_k \sum_{k_1} \alpha_{kk_1}(k, k_1)$ на ряд вида $\sum_n \beta_n(n, -n)$

осуществляется по схеме, указанной автором в той же его работе.

Операция II, 3 — умножение ряда вида $\sum_k \sum_{k_1} \alpha_{kk_1}(k, k_1)$ на ряд вида $\sum_n \gamma_n(0, n)$.

Коэффициенты ряда

$$\sum_k \sum_{k_1} \delta_{kk_1}(k, k_1),$$

полученного от умножения данных рядов, определяются по формуле

$$\delta_{kk_1} = \sum_n \alpha_{k, k_1-n} \gamma_n$$

Матрица коэффициентов a_{k_1} может быть написана в двух формах:

1) строки расположены в порядке возрастания индекса k , а столбцы — в порядке возрастания сумм индексов $k+k_1$;

2) строки расположены в порядке возрастания индекса k , а столбцы — в порядке возрастания индекса k_1 .

Коэффициенты γ_n пишутся на бумажной ленте в одну строку в порядке убывания индекса n .

Для получения коэффициента δ_{k_1} нужно ленту с коэффициентами γ_n приложить под k_1 -й строкой матрицы коэффициентов таким образом, чтобы коэффициент γ_0 был расположен непосредственно под коэффициентом a_{k_1} . После этого перемножаются друг на друга коэффициенты, расположенные один над другим, и произведения складываются. В результате и получается искомым коэффициент δ_{k_1} . Вещественная и мнимая части этого коэффициента вычисляются отдельно друг от друга.

Вычисляется только половина искомым коэффициентов, так как другая половина может быть найдена по формуле

$$\delta_{-k_1, -k_1} = \overline{\delta_{k_1, k_1}}$$

Для контроля вычислений к матрице коэффициентов a_{k_1} приписывается еще одна строка, элементами которой служат суммы элементов соответствующего столбца этой матрицы. Над этой строкой проделываются такие же операции, какие проделываются над всеми остальными. В матрице коэффициентов δ_{k_1} получится дополнительная строка, элементы которой должны равняться суммам элементов соответствующих столбцов этой матрицы.

Операция II, 4 — умножение ряда вида $\sum_k a_{k_1}(k, k_1)$ на ряд вида $\sum_n \delta_n(n, 0)$. Коэффициенты ряда

$$\sum_k \sum_{k_1} \varepsilon_{k_1 k}(k, k_1),$$

полученного от умножения данных рядов, определяются по формуле

$$\varepsilon_{k_1 k} = \sum_n \varepsilon_{k-n, k_1} \delta_n$$

При выполнении этой операции матрица коэффициентов a_{k_1} должна быть написана так, чтобы строки ее были расположены в порядке возрастания индекса k , а столбцы — в порядке возрастания индекса k_1 . Коэффициенты δ_n должны быть написаны в один столбец в порядке убывания индекса n на бумажной ленте (вертикально). Расстояния между строками на этой ленте должны быть такими же, как и у матрицы коэффициентов a_{k_1} .

Для получения коэффициента $\varepsilon_{k_1 k}$ нужно ленту с коэффициентами δ_n приложить справа или слева к k_1 -му столбцу матрицы коэффициентов a_{k_1} таким образом, чтобы коэффициент δ_0 находился рядом с коэффициентом a_{k_1} . Коэффициенты, стоящие рядом, перемножаются друг на друга и полученные произведения складываются. Результатом и будет искомым коэффициент $\varepsilon_{k_1 k}$. Его вещественная и мнимая части находятся отдельно.

Учитывая формулу $\varepsilon_{-k_1, -k_1} = \overline{\varepsilon_{k_1, k_1}}$, можно ограничиться вычислением только половины коэффициентов $\varepsilon_{k_1 k}$.

Контроль вычислений можно осуществить с помощью дополнительных столбцов в матрицах коэффициентов a_{k_1} и $\varepsilon_{k_1 k}$, элементы которых (столбцов) равны суммам элементов соответствующих строк.

Операция III — линейное сочетание рядов вида $\sum_k a_{k_1}^i(k, k_1)$.

Пусть нужно найти ряд

$$a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 + \dots$$

где a_1, a_2, a_3, \dots — постоянные действительные множители, а a_1, a_2, a_3, \dots — ряды с двумя аргументами вида, указанного выше.

Заготавливается лист бумаги с нужным числом горизонтальных и вертикальных рядов клеток, каждая из которых содержит столько строк, сколько слагаемых в формуле, определяющей искомым ряд. Все коэффициенты ряда a_1 умножаются на число a_1 и полученные произведения пишутся на первой строке в клетках с соответствующими номерами. Произведения коэффициентов ряда a_2 на число a_2 пишутся на второй строке в соответствующих клетках и т. д. Числа, вписанные в одну клетку, складываются. Результаты сложения выписываются на новом листе бумаги для матрицы коэффициентов искомого ряда.

Операция IV — преобразование ряда вида $\sum_{m, m_1} \xi_{m, m_1}(m, m_1)$ с аргументами E и E_1 в ряд вида $\sum_k \lambda_{k_1}(k, k_1)$ с аргументами E и D .

После того как вычислены все величины P_{k, m_1} и q_{k, m_1} , операция нахождения коэффициентов λ_{k_1} в соответствии с формулой (64) выполняется в два приема. Сначала вычисляются коэффициенты

$$\tau_{m_1 k} = \sum_n \xi_{m, m_1} P_{k, m_1}$$

а затем коэффициенты

$$\lambda_{k_1} = \sum_n \tau_{m_1 k} q_{m-k, k_1}$$

В матрице коэффициентов ξ_{m, m_1} строки располагаются в порядке возрастания индекса m , а столбцы — в порядке возрастания индекса m_1 .

Матрица величин P_{k, m_1} в которой строки написаны в порядке возрастания индекса k_1 , а столбцы — в порядке возрастания индекса m_1 , разрезается на ленты со строками (горизонтальные).

Для получения коэффициента $\tau_{m_1 k}$ нужно ленту с k_1 -й строкой матрицы величин P_{k, m_1} приложить снизу к m_1 -й строке матрицы коэффициентов ξ_{m, m_1} таким образом, чтобы вторые индексы элементов двух матриц, расположенных друг над другом, были одинаковы. Сумма произведений этих расположенных друг над другом элементов и дает коэффициент $\tau_{m_1 k}$, который вписывается на соответствующее место на новом листе бумаги для матрицы коэффициентов $\tau_{m_1 k}$. Так как $\tau_{-m, -k} = \overline{\tau_{m, k}}$, то вышеуказанным способом вычисляется только половина искомым коэффициентов. Вещественная и мнимая части коэффициентов $\tau_{m_1 k}$ вычисляются отдельно. Строки и столбцы матрицы коэффициентов $\tau_{m_1 k}$ расположены соответственно в порядке возрастания индексов m и k_1 .

Матрица величин q_{k, m_1} со строками и столбцами, расположенными в порядке возрастания их номеров, разрезается на ленты по столбцам (вертикальные). Лента с величинами q_{k, m_1} прикладывается к k_1 -му столбцу матрицы коэффициентов $\tau_{m_1 k}$ так, чтобы величина q_{k, k_1} находилась рядом с коэффициентом τ_{k_1, k_1} . Сумма произведений стоящих рядом комплексных чисел и дает искомым коэффициент λ_{k_1} , вещественная и мнимая части которого вычисляются отдельно. Здесь также учитываются равенства $\lambda_{-k, -k_1} = \overline{\lambda_{k, k_1}}$. В тех случаях, когда возмущающим телом P_1 является Юпитер, можно использовать матрицу величин P_{k, m_1} , вычисленную для значения аргумента $e_1 = 0.04842$, т. е. для значения среднего эксцентриситета орбиты Юпитера эпохи 1950.0. Эта матрица дана в Приложении I к данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

Баженов Г. М. 1949. О некоторых применениях матриц в небесной механике. Бюлл. ИТА, 4, 4.
 Баженов Г. М. 1955. Исследование разложений в тригонометрические ряды выражений вида $(1 - 2k \cos \alpha + k^2)^{-1}$, в которых k — нечетное число. Бюлл. ИТА, 6, 1.
 Баженов Г. М. 1956. Возмущения первого порядка среднего движения тела с нулевой массой в задаче трех тел. Бюлл. ИТА, 6, 6.
 Гончаров В. А. 1954. Теория интерполирования и приближения функций. ГИТТЛ, М.—Л.
 Субботин М. Ф. 1937. Курс небесной механики, 2. ОНТИ, Л.—М.

Поступило в Редакцию
 29 июня 1957 г.

Приложение I

Таблица 1
 Величины $\kappa_k(\epsilon) \cdot 10^6$

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0.00	0	0	0								
01	500	500	6	0							
02	1000	499	22	1							
03	1499	499	51	39							
04	1998	498	90	50	4	2					
05	2496	497	140	62	8	6					
06	2993	496	202	72	14	9					
07	3489	494	274	84	23	11					
08	3983	493	358	94	34	14					
09	4476	491	452	105	48	18					
0.10	4967	489	557	116	66	21					
11	5456	487	673	126	87	26					
12	5943	484	799	137	113	31					
13	6427	482	936	146	144	35					
14	6909	479	1082	157	179	40					
0.15	7388	476	1239	167	219	46					
16	7864	473	1406	176	265	51					
17	8337	470	1582	186	316	58					
18	8807	466	1768	195	374	64					
19	9273	462	1963	204	438	70					
0.20	9735	459	2167	212	508	77					
21	10194	454	2379	222	585	85					
22	10648	450	2600	229	670	91					
23	11098	446	2830	238	761	99					
24	11544	441	3068	246	860	106					
0.25	11985	437	3314	253	966	113					
26	12422	431	3567	260	1079	122					
27	12853	426	3827	267	1201	129					
28	13279	421	4094	273	1330	138					
29	13700	415	4367	280	1468	145					
0.30	14115	410	4647	286	1613	154					
31	14525	404	4932	292	1767	161					
32	14929	397	5222	296	1928	169					
33	15326	392	5521	302	2097	178					
34	15718	385	5823	306	2275	185					
0.35	16103	379	6129	311	2460	194					
36	16482	372	6440	314	2654	200					
37	16854	366	6754	318	2854	210					
38	17220	358	7072	321	3064	216					
39	17578	352	7393	323	3280	224					
0.40	17930		7716		3504		1640				

Таблица 2

Величины $k_{2k}(e)\sqrt{1-e^2} \cdot 10^8$

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0.00											
01	0	4	0	0							
02	500	500	6	16	1	1					
03	1000	499	22	29	1	1					
04	1499	498	51	39	2	2					
	1997	498	90	50	4	4					
05	2495	496	140	62	8	6	1	0			
06	2991	495	202	72	14	9	1	1			
07	3486	493	274	84	23	11	2	1			
08	3979	491	358	94	34	14	3	2	0	1	
09	4470	488	452	105	48	18	5	3	1	0	
10	4958	487	557	115	66	21	8	4	1	1	
11	5445	483	672	126	87	26	12	5	2	0	
12	5928	481	798	136	113	30	17	6	3	1	0
13	6409	477	934	146	143	35	23	7	4	1	
14	6886	474	1080	156	178	40	30	10	5	2	1
15	7360	470	1236	165	218	46	40	11	7	3	1
16	7830	466	1401	175	264	51	51	14	9	4	2
17	8296	462	1576	184	315	58	65	16	14	4	3
18	8758	457	1760	193	373	63	81	19	18	5	4
19	9215	453	1953	202	436	70	100	22	23	7	6
20	9668	448	2155	211	506	77	122	26	30	8	2
21	10116	442	2366	218	583	83	148	29	38	10	3
22	10558	438	2582	227	666	89	177	33	48	13	4
23	10996	431	2811	234	759	97	210	37	59	17	5
24	11427	426	3045	241	854	105	247	41	73	22	7
25	11853	419	3286	248	959	113	288	47	88	27	9
26	12272	414	3534	255	1072	120	335	51	106	34	11
27	12686	406	3789	261	1192	127	386	56	127	43	14
28	13092	400	4050	267	1319	135	442	62	151	52	18
29	13492	393	4317	273	1454	143	504	69	178	64	23
30	13885	385	4590	277	1597	151	572	74	209	77	29
31	14270	378	4867	283	1748	158	646	80	243	89	36
32	14648	370	5150	287	1906	166	726	87	282	101	44
33	15018	362	5437	291	2072	173	813	93	325	114	52
34	15380	354	5728	294	2245	181	906	100	372	129	61
35	15734	345	6022	298	2426	188	1006	107	425	142	71
36	16079	337	6320	300	2614	195	1113	114	483	157	81
37	16416	328	6620	302	2809	202	1227	120	546	172	91
38	16744	319	6922	303	3011	209	1348	127	615	189	101
39	17063	309	7227	305	3220	216	1477	135	690	207	111
0.40	17372	7532	3456	1613	771	374	183	90	45	22	11

Коэффициенты многочленов, являющихся наилучшими приближениями функции $(1-x)^{-2}$ в промежутке $(-k, +k)$ и соответствующие максимальные абсолютные величины погрешностей

Таблица 3

Многочлены второй степени

k	c_0	c_1	c_2	L
0.00	1.000000	1.500000	1.8750	0.000000
0.01	1.000000	1.50017	1.8756	0.000001
0.02	1.000000	1.50067	1.8766	0.000005
0.03	0.999999	1.50149	1.8782	0.000016
0.04	0.999998	1.50263	1.8804	0.000035
0.05	0.999995	1.50411	1.8831	0.000069
0.06	0.999991	1.50592	1.8864	0.000119
0.07	0.999986	1.50807	1.8904	0.000189
0.08	0.999976	1.51056	1.8950	0.000283
0.09	0.999960	1.51340	1.9002	0.000405
0.10	0.999938	1.51657	1.9061	0.000558
0.11	0.999907	1.52010	1.9127	0.000746
0.12	0.999867	1.52398	1.9201	0.000973
0.13	0.999817	1.52822	1.9281	0.001242
0.14	0.999754	1.53282	1.9369	0.001557

Таблица 4

Многочлены третьей степени

k	c_0	c_1	c_2	c_3	L
0.06	0.999995	1.49998	1.8842	2.203	0.000004
0.07	0.999993	1.49996	1.8874	2.208	0.000006
0.08	0.999989	1.49994	1.8910	2.213	0.000010
0.09	0.999982	1.49990	1.8952	2.220	0.000017
0.10	0.999971	1.49985	1.8999	2.228	0.000028
0.11	0.999956	1.49978	1.9052	2.237	0.000043
0.12	0.999936	1.49970	1.9110	2.247	0.000064
0.13	0.999910	1.49960	1.9174	2.258	0.000091
0.14	0.999877	1.49947	1.9244	2.270	0.000124
0.15	0.999839	1.49930	1.9318	2.282	0.000162
0.16	0.000790	1.49908	1.9399	2.295	0.000211
0.17	0.000731	1.49881	1.9485	2.310	0.000272
0.18	0.000659	1.49848	1.9578	2.326	0.000346
0.19	0.000574	1.49810	1.9676	2.342	0.000435
0.20	0.000474	1.49764	1.9781	2.360	0.000539
0.21	0.999358	1.49712	1.9891	2.378	0.000660
0.22	0.999226	1.49652	2.0009	2.398	0.000800
0.23	0.999078	1.49586	2.0138	2.419	0.000961

Таблица 5

Коэффициенты ряда для значений Δ_0^{-1} , умноженные на 10^6
 при $\Delta_0^{-1} = (1 + \mu^2 - 2\mu \cos \alpha)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \exp(i n \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(i n \alpha)$

μ	0.38	0.39	0.40	0.41	0.42	0.43	0.44	0.45	0.46	0.47	0.48	0.49	0.50	0.51	0.52
0	116770	117934	119076	120206	121418	122693	124022	1255018	1268392	1285352	1299376	1315903	1333333	1351534	1370644
1	165731	170924	176130	181340	186555	191776	196993	202206	207416	212623	217828	223031	228232	233432	238631
2	214570	220832	227100	233375	239657	245945	252238	258536	264839	271147	277460	283778	290092	296411	302735
3	26371	27294	28176	29059	29942	30825	31708	32591	33474	34357	35240	36123	37006	37889	38772
4	3171	3279	3376	3474	3572	3670	3768	3866	3964	4062	4160	4258	4356	4454	4552
5	3519	4150	4876	5710	6665	7755	8998	10412	12077	13952	16087	18522	21307	24492	28107
6	1337	1618	1950	2341	2799	3335	3959	4685	5528	6502	7628	8925	10417	12129	14091
7	198	241	294	358	437	534	656	806	988	1207	1468	1775	2132	2544	3016
8	73	96	122	151	182	227	287	362	455	569	707	874	1074	1312	1584
9	28	37	50	66	87	114	148	192	247	317	405	514	651	821	1030
10	11	14	19	26	35	47	62	81	105	136	175	224	285	361	456
11	4	5	8	11	16	21	29	39	52	70	93	123	163	214	279
12	1	1	2	3	5	8	12	18	27	38	52	70	93	123	163
13															
14															
15															
16															
17															
18															
19															
20															
21															
22															

Таблица 6

Коэффициенты ряда для значений Δ_0^{-1} , умноженные на 10^6
 при $\Delta_0^{-1} = (1 + \mu^2 - 2\mu \cos \alpha)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \exp(i n \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(i n \alpha)$

μ	0.38	0.39	0.40	0.41	0.42	0.43	0.44	0.45	0.46	0.47	0.48	0.49	0.50	0.51	0.52
0	141580	144965	147654	150683	154002	157565	161374	165372	169514	173719	178119	182769	187645	192743	198064
1	16531	170924	176130	181340	186555	191776	196993	202206	207416	212623	217828	223031	228232	233432	238631
2	214570	220832	227100	233375	239657	245945	252238	258536	264839	271147	277460	283778	290092	296411	302735
3	26371	27294	28176	29059	29942	30825	31708	32591	33474	34357	35240	36123	37006	37889	38772
4	3171	3279	3376	3474	3572	3670	3768	3866	3964	4062	4160	4258	4356	4454	4552
5	3519	4150	4876	5710	6665	7755	8998	10412	12077	13952	16087	18522	21307	24492	28107
6	1337	1618	1950	2341	2799	3335	3959	4685	5528	6502	7628	8925	10417	12129	14091
7	198	241	294	358	437	534	656	806	988	1207	1468	1775	2132	2544	3016
8	73	96	122	151	182	227	287	362	455	569	707	874	1074	1312	1584
9	28	37	50	66	87	114	148	192	247	317	405	514	651	821	1030
10	11	14	19	26	35	47	62	81	105	136	175	224	285	361	456
11	4	5	8	11	16	21	29	39	52	70	93	123	163	214	279
12	1	1	2	3	5	8	12	18	27	38	52	70	93	123	163
13															
14															
15															
16															
17															
18															
19															
20															
21															
22															
23															
24															
25															

Таблица 7
 Величины $P_{k_1 m_1} \cdot 10^5$ для аргумента $e_1 = 0,04842$
 $-2421 \quad 100000 \quad -2421$
 $-1 \quad 0 \quad 1$

$k_1 = 0$									
$k_1 = 1$		-29	0	99941	-4840	88	-1		
		-1	0	1	2	3	4		
$k_1 = 2$		-1	0	2418	99766	-7254	234	-5	
		-1	0	1	2	3	4	5	
$k_1 = 3$			88	4829	99473	-9658	439	-13	
			1	2	3	4	5	6	
$k_1 = 4$			4	234	7229	99064	-12048	701	-26
			1	2	3	4	5	6	7
$k_1 = 5$			12	437	9613	98540	-14420	1021	-47
			2	3	4	5	6	7	8
$k_1 = 6$			1	25	698	11978	97901	-16769	1397
			2	3	4	5	6	7	8
$k_1 = 7$			1	46	1016	14318	97149	-19091	1829
			3	4	5	6	7	8	9
$k_1 = 8$			3	75	1389	16631	96284	-21383	2315
			4	5	6	7	8	9	10
$k_1 = 9$			5	114	1817	18912	95308	-23640	2856
			5	6	7	8	9	10	11
$k_1 = 10$			9	163	2299	21157	94224	-25858	3449
			6	7	8	9	10	11	12
$k_1 = 11$			1	13	225	2833	23362	93033	-28034
			6	7	8	9	10	11	12
$k_1 = 12$			1	19	300	3419	25523	91736	-30163
			7	8	9	10	11	12	13
$k_1 = 13$			2	28	390	4054	27637	90337	-32243
			8	9	10	11	12	13	14
$k_1 = 14$			2	38	495	4738	29699	88838	-34269
			9	10	11	12	13	14	15
$k_1 = 15$			3	52	618	5468	31708	87241	-36237
			10	11	12	13	14	15	16
$k_1 = 16$			5	68	758	6242	33658	85549	-38145
			11	12	13	14	15	16	17
$k_1 = 17$			7	88	917	7059	35547	83765	-39990
			12	13	14	15	16	17	18
$k_1 = 18$			1	9	113	1096	37371	81892	-41767
			12	13	14	15	16	17	18
$k_1 = 19$			1	12	141	1295	39127	79934	-43475
			13	14	15	16	17	18	19
$k_1 = 20$			1	16	175	1516	40813	77894	-45110
			14	15	16	17	18	19	20
$k_1 = 21$			2	21	214	1759	42426	75775	-46669
			15	16	17	18	19	20	21

Примечание. Числа, стоящие под чертой, — значения индекса m_1 .

Приложение II

Возмущения элементов орбиты малой планеты Sita (244)

В прилагаемых таблицах даны коэффициенты разложений в тригонометрические ряды с двумя аргументами $M - M_1$ и M_1 возмущений элементов орбиты малой планеты Sita (244), вычисленные по первой схеме, описанной в настоящей работе.
 В клетках, соответствующих $k=0$ и $k+k_1=0$, помещены вековые возмущения вида αt , где

$$\alpha = \frac{t-t_0}{365.25}$$

т. е. промежутков времени, протекающих с момента оскуляции t_0 , выраженный в юлианских годах.

В остальных клетках на первом месте даны коэффициенты при

$$\cos[k(M - M_1) + (k + k_1)M_1],$$

а на втором — коэффициенты при

$$\sin[k(M - M_1) + (k + k_1)M_1].$$

Величины $C_a, C_b, C_M, C_{M_1}, C_B$ и C_C представляют собой постоянные интегрирования. Они получаются подстановкой в ряды значений аргументов, соответствующих моменту оскуляции, т. е.

$$M - M_1 = 93^\circ 298 \text{ и } M_1 = 227^\circ 173,$$

с последующим изменением знака на противоположный.

Возмущения $\delta a, \delta e$ и δM прибавляются к невозмущенным значениям элементов a_0, e_0 и M_0 .

Возмущенная матрица векторных элементов M' получается от умножения невозмущенной матрицы M_0 на матрицу L_1 :

$$M'_0 = \begin{pmatrix} 0,971979 & -0,233821 & -0,024196 \\ 0,209950 & 0,909795 & -0,358042 \\ 0,105731 & 0,342930 & 0,933392 \end{pmatrix}, \quad L_1 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} A^2 & A & B \\ -A & 1 - \frac{1}{2} A^2 & C \\ -B & -C & 1 \end{pmatrix}.$$

Возмущенные координаты планеты вычисляются по формулам невозмущенного движения с возмущенными элементами.

k	$k+k_1$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0												
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												

k	$k+k_1$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0												
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												

k	$k+k_1$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0												
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												

k	$k+k_1$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0												
1												
2												
3												
4												
5												

k	$k+k_1$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0												
1												
2												
3												
4												
5												

k	$k+k_1$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0												
1												
2												
3												
4												
5												

Приближенное определение круговой орбиты астероида

М. Я. Шамакова и А. С. Социлина

Предлагается способ определения радиуса круговой орбиты, основанный на том, что условие круговой орбиты $v_2 - v_1 = ka^{-n}(t_2 - t_1)$ заменяется приближенным равенством $v_2 - v_1 = ka^{-n}(t_2 - t_1)$, где γ — известный угол между геоцентрическими направлениями. Найденное из этого условия значение радиуса является либо хорошим первым приближением, либо (в большинстве случаев) его окончательным значением.

AN APPROXIMATE METHOD OF DETERMINING OF A CIRCULAR ORBIT OF AN ASTEROID, by M. J. Shamakova and A. S. Sotichina. — A simple method of determining the radius of a circular orbit, can be obtained if we replace the condition of a circular orbit $v_2 - v_1 = ka^{-n}(t_2 - t_1)$ by an approximate equality $v_2 - v_1 = ka^{-n}(t_2 - t_1)$, where γ is the known angle between the geocentric directions. The value of the radius thus obtained is a fair first approximation or in most cases its final value.

Круговую орбиту определяют в случае, когда для вновь открытой планеты получены только два наблюдения и, следовательно, получить элементы эллиптической орбиты не представляется возможным.

Круговая орбита может быть использована, во-первых, для вычисления приближенной эфемериды, которая позволит наблюдателю продолжить наблюдения новой планеты, и, повторяясь, при отождествлении малых планет (Pargy, 1946, 1952). Безусловно, орбита, полученная по двум наблюдениям, может значительно отклоняться от действительной. Ошибка в суточном движении иногда достигает 100", что соответствует ошибке в большой полуоси 0.2—0.3 в. е., и несколько градусов в остальных элементах u, i, Ω (Орлов, 1939). Поэтому большой точности при определении элементов круговой орбиты не требуется.

Задача определения элементов круговой орбиты сводится к нахождению радиуса орбиты a . Зная a , нетрудно найти элементы u, i, Ω .

Величина a находится путем последовательных приближений из условия, что для

$$n(t_2 - t_1) = v_2 - v_1, \quad (1)$$

где $n = ka^{-n}$ — суточное движение планеты, $v_2 - v_1$ — угол между геоцентрическими радиусами-векторами планеты r_1 и r_2 в моменты наблюдений t_1, t_2 .

Если через x_i, y_i, z_i обозначить геоцентрические координаты планеты, то

$$\cos(v_2 - v_1) = \frac{1}{a^2}(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2), \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} x_i &= r_i \lambda'_i - X_i, \\ y_i &= r_i \mu'_i - Y_i, \quad (i=1, 2), \\ z_i &= r_i \nu'_i - Z_i, \end{aligned} \quad (3)$$

λ_i, μ_i, ν_i — направляющие косинусы геоцентрических радиусов-векторов планеты P_i :

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \cos \delta_i \cos \alpha_i, \\ \mu_i &= \cos \delta_i \sin \alpha_i, \\ \nu_i &= \sin \delta_i, \end{aligned} \quad (4)$$

геоцентрические расстояния P_i выражаются через радиус орбиты a и координаты Солнца X, Y, Z следующим образом:

$$\begin{aligned} P_i &= \sqrt{a^2 - S_i^2} - C_i, \\ C_i &= -(P_i X_i + \mu_i Y_i + \nu_i Z_i), \\ S_i^2 &= X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2 - C_i^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Значение a , удовлетворяющее условию (1), находят путем последовательного подбора, придавая a различные значения и повторяя каждый раз все вычисления по формулам (2)–(5).

Процесс вычисления величины a можно значительно упростить, если заменить точное равенство (1) приближенным

$$n(t_2 - t_1) = \gamma, \quad (6)$$

где γ — угол между геоцентрическими направлениями P_1, P_2 .

Угол γ зависит только от наблюдаемых координат планеты и легко находится из сферического треугольника NP_1P_2 (рис. 1).

$$\cos \gamma = \sin \delta_1 \sin \delta_2 + \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1). \quad (7)$$

Принимая во внимание, что λ_i, μ_i, ν_i являются направляющими косинусами P_1, P_2 , можем написать

$$\cos \gamma = \lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + \nu_1 \nu_2. \quad (8)$$

По вычисленному таким образом углу γ находим значение a по формуле (6) или из табл. 1.

Таблица 1

$\gamma/t_2 - t_1$	a	$\gamma/t_2 - t_1$	a	$\gamma/t_2 - t_1$	a
0°10	4.60 29	0°20	2.90 10	0°30	2.21 4
0.11	4.31 24	0.21	2.80 8	0.31	2.16 4
0.12	4.07 24	0.22	2.72 8	0.32	2.12 4
0.13	3.86 19	0.23	2.64 8	0.33	2.07 4
0.14	3.67 16	0.24	2.56 8	0.34	2.03 4
0.15	3.51 13	0.25	2.50 7	0.35	1.99 4
0.16	3.36 13	0.26	2.43 6		
0.17	3.22 12	0.27	2.37 6		
0.18	3.11 11	0.28	2.31 5		
0.19	3.00 10	0.29	2.26 5		
0.20	2.90 10	0.30	2.21 5		

После того как найдено значение a , необходимо провести все вычисления по формулам (5), (3), (2) и проверить выполнение условия (1).
Чтобы судить о том, каков порядок ошибки при таком определении a , обратимся к рис. 2. Предположим, что планета и Земля движутся в одной плоскости по круговым орбитам и что положения планеты P_1, P_2 и Земли T_1, T_2 в моменты наблюдений t_1, t_2 симметричны относительно оппозиции. Пусть n — суточное движение планеты,

$k = 0^{\circ}9856$ — суточное движение Земли, γ — угловое смещение планеты, видимое с Земли, $t_2 - t_1 = t$. Тогда

$$P_2SP = \frac{at}{2}, \quad T_2ST = \frac{kt}{2}.$$

Из ΔMP_2T_2 находим

$$\text{tg } MP_2T_2 = \frac{MT_2}{MP_2} = \frac{TT_2 - TM}{SP - ST}$$

или, принимая во внимание обозначения,

$$\text{tg } \frac{\gamma}{2} = \frac{\sin \frac{kt}{2} - a \sin \frac{nt}{2}}{a \cos \frac{kt}{2} - \cos \frac{nt}{2}} \quad (9)$$

Так как все эти углы малы, формулу (9) перепишем в виде

$$\gamma = \frac{k - an}{a - 1} t. \quad (10)$$

Исключая γ из выражений (6) и (10), приходим к кубическому уравнению

$$a^3 - 4a^2 + 4a - 1 = 0,$$

корни которого $a_1 = 1$, $a_2 = 2.625$, $a_3 = 0.375$. Орбите планеты соответствует корень a_2 , следовательно при $a = 2.625$ углы γ и nt равны. Отклонения γ от nt для различных значений a и ошибка a , которая при этом возможна, даны в табл. 2.

Таблица 2

a	n	γ/nt	a_1	$n - \gamma/t$	$a - a_1$
2.0	0.2348	0.290	2.26	+0.0559	-0.26
2.2	0.302	0.268	2.38	+0.034	-0.18
2.4	0.265	0.250	2.50	+0.015	-0.10
2.6	0.235	0.234	2.61	+0.001	-0.01
2.8	0.210	0.221	2.71	-0.011	+0.09
3.0	0.190	0.208	2.82	-0.018	+0.16
3.2	0.172	0.198	2.91	-0.026	+0.29

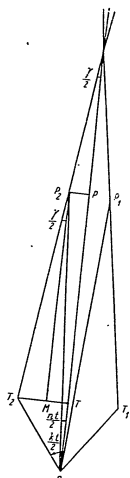


Рис. 2.

Из таблицы видно, что для основной массы астероидов ошибка незначительна. Для значений $a < 2.6$ величина радиуса a получается несколько завышенной и для $a > 2.6$ — заниженной.

Как показал опыт вычисления круговых орбит, в большинстве случаев, особенно при малых промежутках времени между наблюдениями, условие (1) в виде

$$v_2 - v_1 = nt$$

удовлетворяется с точностью до $0^{\circ}02 - 0^{\circ}05$, и полученная в первом приближении величина a может быть принята за окончательную. Если условие (1) удовлетворяется с меньшей точностью (что возможно в отдельных случаях), то для определения a следует сделать второе приближение по формулам (2) — (5), причем при отрицательной разности $v_2 - v_1$ — значение a нужно уменьшить, при положительной — увеличить.

Вычисление других элементов проводится по общепринятым формулам (Субботин, 1941):

$$\begin{aligned} a \sin i \sin u_0 &= aP_x \cos \varepsilon - aP_y \sin \varepsilon, \\ a \sin i \cos u_0 &= aQ_x \cos \varepsilon - aQ_y \sin \varepsilon, \\ a \sin \Omega &= (aP_y \cos u_0 - aQ_y \sin u_0) \sec \varepsilon, \\ a \cos \Omega &= aP_x \cos u_0 - aQ_x \sin u_0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} aP_x &= \frac{1}{2} \sec \frac{nt}{2} (x_2 + x_1), & aQ_x &= \frac{1}{2} \operatorname{cosec} \frac{nt}{2} (x_2 - x_1), \\ aP_y &= \frac{1}{2} \sec \frac{nt}{2} (y_2 + y_1), & aQ_y &= \frac{1}{2} \operatorname{cosec} \frac{nt}{2} (y_2 - y_1), \\ aP_z &= \frac{1}{2} \sec \frac{nt}{2} (z_2 + z_1), & aQ_z &= \frac{1}{2} \operatorname{cosec} \frac{nt}{2} (z_2 - z_1). \end{aligned}$$

Ниже дан пример вычисления радиуса круговой орбиты новой планеты $\sigma_{60} = 1949 \text{ MV}$, открытой в Симеизе П. Ф. Шайн.

$\sigma_{60} = 1949 \text{ MV}$

T	1949 VI 18.885	VI 26.860	T	1949 VI 18.885	VI 26.860
a	17 25.5	17 18.9	Y_{\odot}	0.93123	0.92931
b	12 $^{\circ}55'$	12 $^{\circ}18'$	Z_{\odot}	0.40387	0.40304
$\sin a$	-0.98869	-0.98396	R_{\odot}^2	1.03263	1.03556
$\cos a$	-0.14937	-0.17837	$\sqrt{a^2 - b^2}$	2.85245	2.84292
$\sin \delta$	-0.22353	-0.23005	S^2	0.99474	0.96756
$\cos \delta$	0.97470	0.97518	C	0.04312	0.09739
λ	-0.14618	-0.11359	ρ	1.85771	1.87536
μ	-0.22353	-0.23005	x	-0.31981	-0.23893
ν	0.99959	—	y	-0.81912	-0.83447
$\cos \gamma$	—	—	z	-2.72147	-2.72510
γ	2.86	—	$\cos(v_2 - v_1)$	0.99959	—
a^2	1564	—	$v_2 - v_1$	1764	—
a^3	8.17960	-0.08661	τ	1.64	—
X_{\odot}	0.04825	—			

ЛИТЕРАТУРА

Субботин М. Ф. 1941. Курс небесной механики, т. I. ОГИЗ, Л.—М.
 Орлов Б. А. 1939. Determination of the preliminary orbit of a minor planet by two observations. Цирк. ГАО в Пулковске, 26—27, 55—63.
 Patry A. 1946. Essai d'identification systematique des asteroïdes. J. O., 29, 5—6, 33—41.
 Patry A. 1952. Catalogue d'orbites circulaires de certains asteroïdes non numerotes. J. O., 35, 153—170.

Поступило в Редакцию 12 января 1957 г.

Бюллетень Института Теоретической Астрономии

T. VII 1958 № 1(84)

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

О числе затмений в саросе и в саросной серии

В. С. Лазаревский

В статье Н. Г. Полозовой «О предвычислении полутеневых лунных затмений» [Бюллетень Института теоретической астрономии, т. VI, № 3 (76), 1955, стр. 202—218] на стр. 207 сказано, что в течение сароса происходит около 70 затмений: 41 солнечное и 29 лунных (теневого), и что эти числа могут изменяться на единицу в ту или другую сторону. В действительности эти числа могут изменяться и значительно больше, чем на единицу.

На стр. 208 той же статьи указывается, что в саросной серии бывает от 42 до 50 теневого лунных затмений.

Эти границы также следует расширить.

1. О числе затмений в саросе

В течение сароса — 18,03 г. — прохождения Солнца и Луны через 38 узлов (из них 19 восходящих и 19 нисходящих) сопровождаются затмениями. Прохождение их через 39-й узел является повторением прохождения через первый узел, т. е. происходит затмение, относящееся к той же серии.

Согласно данным Канона затмений Опольцера, охватывающим период более 3 тыс. лет, в среднем за сарос происходит около 43 солнечных и около 28 лунных затмений. Эти цифры приводит А. А. Михайлов в «Теории затмений» (изд. 2, 1954, стр. 23). Отсюда видно, что при прохождении Солнца и Луны через 5 (в среднем) узлов из 38 около одного и того же узла происходит два солнечных затмения — прежней и новой серии, и что в 10 узлах из 38 не происходит теневого лунных затмений.

Исходя из данных Канона Опольцера, общее число затмений в саросе (солнечных и лунных теневого) заключается в пределах от 65 до 76 затмений, т. е. отличается от среднего числа (71) на 5—6 затмений.

В табл. 1 показана изменчивость числа затмений после начала нашей эры. Так, например, в течение сароса, оканчивающегося 1777—1778 гг., происходило 76 затмений (47 солнечных и 29 лунных), а в течение саросов, оканчивающихся на протяжении 22-летнего интервала между 1989—2011 гг., будет 65 затмений (39 солнечных и 26 лунных).

Эпохи наибольшего и наименьшего числа затмений в саросе чередуются в среднем через 290 лет, причем сами максимумы и минимумы не являются резко выраженными.

1 Вопрос, затронутый в статье Н. Г. Полозовой и в письме в редакцию В. С. Лазаревского, подробно изложен в монографии Ван ден Берга «Периодичность и изменения солнечных и лунных затмений» (Пиж. ред.).

Таблица 1

Число затмений в саросе (солнечных и лунных вместе)

Год			Год			Год		
возникло	не повторилось	Число	возникло	не повторилось	Число	возникло	не повторилось	Число
+ 1 А		75	+428 А		69		+ 899 А	69
	+ 3 С	74	435 А		70		906 А	68
18 С		75		+448 С	69		917 А	67
30 А	20 А	74	456 С		70	+ 933 С		68
47 С		75	463 С		71	938 А		69
	61 С	76	470 С		72	944 С		70
	68 С	75	475 А		73		946 А	69
	68 С	74	475 А		74		947 С	68
	85 А	73	499 С		75		957 А	67
94 С		72	528 С	501 А	74		963 А	68
95 А		73		530 А	73		975 А	67
	96 А	74		531 С	72		976 С	66
123 С		73	539 С		73		984 С	67
	126 С	72	550 С		74		985 А	68
	133 С	73	557 С		75		991 С	67
		72	558 А	559 А	74		992 А	69
142 А		73		560 С	75		999 С	68
153 А	154 А	74	569 А		75		1014 А	70
	155 С	72	586 С		76			71
	161 А	71		589 С	75		1049 С	72
	162 С	70		600 С	74		1060 А	73
	173 С	69	616 А		75		1068 А	72
	184 С	68		642 А	74			73
188 С		69		651 С	75		1069 А	71
	215 А	68		653 А	74		1070 С	72
	219 А	67		672 С	73	1074 С		73
	226 А	66		680 С	72	1096 С		72
235 С		67		682 А	73		1103 С	74
236 А		68		683 С	72		1115 А	73
	238 С	67		694 С	71			74
	248 А	66	699 А		72		1117 С	75
254 А		67	710 А		73			76
261 С		68		711 А	72		1128 С	75
265 А		69		723 С	71			76
	267 С	68	727 С		72		1155 А	77
276 А		69		730 С	71		1179 С	76
	277 А	68		755 С	70			77
	278 С	67	757 А		71	1208 С		74
283 А		68		783 А	70		1210 А	75
	284 А	67		788 С	69		1211 С	73
	291 А	66	792 С		70			74
305 А		67		794 А	69		1219 С	73
	307 С	66		795 С	68		1238 А	74
329 С		67	803 С		69		1248 С	75
	349 А	66		805 А	68			76
352 А		67		806 С	67		1251 С	73
359 А		68		816 А	66		1258 С	74
	360 А	67	822 А		67	1267 А		75
	366 А	68	833 А		68		1276 С	73
378 С		69		835 С	67		1280 С	72
387 С		70		840 А	66			73
	389 А	69		850 С	65		1305 С	72
	406 А	68		851 А	64		1322 А	71
	408 С	69		864 С	63		1322 А	70
	418 А	68	880 А		67	1331 С		71
	419 С	69	880 А		68		1344 А	70
		70	891 А		69		1345 С	69
		68			70		1351 А	68

Таблица 1 (продолжение)

Год			Год			Год		
возникло	не повторилось	Число	возникло	не повторилось	Число	возникло	не повторилось	Число
+1360 С		68	+1625 А		73	+1928 С		70
+1363 С		67		+1626 А	72	1947 А		70
1373 А		66	1636 А		73	+1948 А		70
1379 А		67		1637 А	72	1949 С		69
1389 С		68	1639 С		73	1953 С		68
1390 А		69	1653 С		74	1958 А		69
	1392 С	68	1664 С		75	1959 А		68
	1403 С	67		1674 С	74	1960 С		67
1419 А		68	1683 А		75	1966 А		66
1430 А		69	1694 А		74	1987 А		67
	1434 А	68	1718 С		75			66
	1438 А	67	1702 А		76	1988 А		65
	1445 А	66	1729 С		75	1989 С		65
	1468 С	65		1732 С	74	2011 С		66
1470 А		67	1776 С		75	2031 А		66
1472 С		67	1777 А		76	2034 А		66
1473 А		67		1779 С	74	2041 А		67
	1474 А	66	1778 А		75	2042 А		66
	1496 А	67	1779 С		74	2045 А		67
1501 С		66	1787 С		75	2058 С		66
	1503 А	66	1797 С		76	2069 С		67
1512 С		68	1808 С		74	2072 С		68
1513 А		69		1837 С	74	2082 А		67
1513 А		69	1824 А		75	2100 А		67
1520 А		68	1835 А		74	2101 С		66
	1532 А	67		1843 А	73	2110 А		66
	1533 С	69		1855 С	72	2117 А		67
1541 С		68		1866 С	71	2130 С		67
1544 С		69	1870 С		71			68
1560 А		69	1877 С		70	2134 С		69
1571 А		70	1890 А		71	2145 С		70
1599 С		70	1900 А		70	2146 А		71
1613 С		70	1908 А		69	2156 С		72
1624 С		71	1917 С		70	2157 А		73
1624 С		72	1920 С		69	2157 А		73

Наибольшее возможное число солнечных затмений в саросе оказывается 48, когда 10 узлов сопровождаются двумя солнечными затмениями. В Каноне Опольдера имеется одна такая группа затмений, именно с номерами от 1467—1472 до 1514—1519 (затмения, начиная с 1 ноября—593—7 марта—590 г. и конца 17 июня—575—22 октября—573 г.).

47 солнечных затмений в саросе встречаются в Каноне Опольдера несколько раз, например начиная с 16 V 1779 (№ 7111) до 29 XII 1796 (№ 7157).

Наименьшим возможным числом солнечных затмений в саросе является 39; в этом случае только один узел сопровождается двумя затмениями. Такие саросы прослежены в Каноне Опольдера несколько раз; ближайшим к нашему времени примером являются затмения с № 7571 до № 7609 (с 20 VIII 1971 до 7 III 1989), когда около одного и того же узла произойдут только затмения 21 VI и 20 VII 1982.

Табл. 2 показывает изменчивость числа солнечных затмений в саросе на протяжении всего Канона Опольдера.

Возможное число теневых лунных затмений в саросе колеблется между 25 и 30. Оба эти предельных случая встречаются довольно часто. Так, ближайшими к нашему времени примерами являются лунные затмения: с 11 VII 1824 (№ 4689) до 26 I 1842 (№ 4718)—30 затмений, с 15 IV 2014 (№ 4979) до 15 VI 2030 (№ 5003)—25 затмений.

Таблица 2

Число солнечных затмений в саросе

Год			Год			Год			Год		
возникло	не повторилось	Число	возникло	не повторилось	Число	возникло	не повторилось	Число	возникло	не повторилось	Число
-1172		46	-351		40	539	531	44	1334	42	41
-1161		47	-322		41	550		45	1345	41	41
	-1151	46	-293		42	557		46	1360	42	42
	-1140	45	-290		41			47	1363	41	41
	-1129	44	-279		40		560	46	1389	42	42
	-1118	43	-246		41	586	672	45	1403	41	41
-1114		44	-214		40			46		40	40
	-1093	43	-210		41	600	600	45	1472	39	39
	-1035	42	-181		42	651	672	46	1501	41	41
-1031		43	-170		43			45	1512	42	42
	-1028	42	-159		44	680		46	1533	41	41
-1020		43	-149		43		683	45	1541	42	42
	-988	41	-138		42		694	44	1544	41	41
	-977	40	-76		44	727		43	1599	42	42
	-970	41	-76		45		730	43	1609	41	41
-973		40	-73		44		755	42	1613	42	42
	-941	40	-69		45	788		41	1624	43	43
	-894	40	-44		44		792	42	1624	44	44
	-879	41	-29		45	803		41	1639	45	45
	-839	41	-18		46		806	41	1653	46	46
	-836	40	+ 18		45		835	40	1664	47	47
	-832	41	47		46	850		41	1674	46	46
	-796	42			45		864	40	1685	45	45
	-756	43	61		46		884	41	1718	47	47
	-753	42	68		44	944		42	1729	46	46
	-749	43	94		46		933	41	1732	47	47
	-727	44	123		44		944	40	1776	46	46
	-716	45			45	984		41	1787	47	47
	-702	46	126		45		987	40	1797	46	46
	-695	45	133		44		991	41	1808	45	45
	-615	46	155		43		991	42	1837	44	44
	-612	47	188		42		1049	43	1855	43	43
	-604	48	238		41		1060	44	1866	42	42
-575		47	264		42	1070		43	1870	43	43
	-572	47			42			44	1877	42	42
	-565	46	267		41	1117		45	1917	43	43
	-543	45	278		40		1128	46	1920	42	42
	-492	45	307		39		1179	45	1928	41	41
	-485	45	329		40		1191	46	1949	42	42
	-478	44	376		41		1208	45	1953	41	41
	-474	43	387		42		1219	46	1960	40	40
	-463	43	408		40		1228	45	1969	39	39
	-442	43	416		41		1248	46	2011	41	41
	-442	43			42			47	2058	42	42
	-420	44	456		41			48	2069	41	41
	-413	42	463		40			49	2072	42	42
	-366	41	470		43			50	2098	43	43
	-355	40	499		44			51	2101	44	44
	-355	39	528		45	1331		52	2134	45	45
								53	2156	44	44

Табл. 3 показывает изменчивость числа лунных затмений в саросе после начала нашей эры.
Среднее число полных лунных затмений в саросе — 13, частных — 15; эти числа тоже значительно варьируются. Так, например, в саросе между затмениями 11 VII 1824 и 22 VII 1842 было 11 полных и 19 частных лунных затмений, а между 16 IX 1997 и 28 IX 2015 будет 17 полных и 9 частных лунных затмений.

Таблица 3
Число лунных затмений в саросе

Годы			Годы			Годы			Годы		
возникло	не повторилось	Число	возникло	не повторилось	Число	возникло	не повторилось	Число	возникло	не повторилось	Число
+ 1		29	558		29	1098		27	1636		29
30	+ 20	28		539	28	1115		28		1637	28
95	85	28	569	29	1126		29	1683			29
	96	28	616	30	1155		30	1694			30
142		29		642	29	1181		29	1702		29
153		28		653	28	1210		28	1767		28
		29		682	27	1221		27	1777		29
		30	699	28	1238		28	1824		1778	28
	154	29	710	27	1267		29	1801			29
	161	28		711	28	1296		30	1835		30
	215	27			1322		29		1843		29
	219	26	757	28	1322		28	1900		1890	28
	226	25		783	27	1344		27	1900		28
		26		794	26	1351		26	1908		28
236	245	25		816	25	1373		25	1917		28
254		26	822	26	1379		26	1947			28
265		27	833	27	1390		27	1948			28
276		28	840	28	1419		28	1958			28
	277	27		841	1430		29	1959			27
283		28	880	28		1434	28	1966			26
	284	27	880	27		1438	27	1987			27
	291	26	891	26		1445	26	1988			25
305		27		899	29	1470	28	2034			26
352	319	26		906	28	1473	28	2041			26
359		28	938	27		1474	27	2042			27
366		27		917	28		28	2045		2042	26
406	359	28	963	26	1513	1503	25	2045		2053	25
	418	28		975	26	1513	27	2088		2052	26
428		27	985	27		1532	27	2100		2100	25
435		28	992	28	1560		28	2110			26
475		29	1014	29		1561	27	2117			27
		30		1040	28	1571	28	2146			28
		29	1068	29		1625	29	2157			29
	501	28		1069	28		28	2157			30

2. 0 числе затмений в саросной серии

Всего в Каноне Опшольдера имеется 80 полных саросных серий лунных затмений, имеющих различную продолжительность. Так, например, в саросной серии, возникшей 31 мая 1379 г. и заканчивающейся 28 июля 2064 г., насчитывается только 39 теневых лунных затмений за 685 лет, а в саросной серии, возникшей 29 июля — 838 г. и закончившейся 18 апреля 208 г. — 59 теневых лунных затмений за 1046 лет.

Таблица 4
Серии солнечных и лунных затмений

№№ серий	Первое затмение в серии	Современные затмения
1	1296 V 18 A	1945 VI 25 — частное
2	1639 I 4 C	1945 VII 9 — полное в северном полушарии
	1513 III 21 A	1945 XII 19 — полное
	1729 VIII 24 C	1946 I 3 — частное в южном полушарии
3	792 VI 24 C	1946 V 30 — частное в южном полушарии
	1513 IX 15 A	1946 VI 15 — полное
	1928 VI 17 C	1946 VI 29 — частное в северном полушарии
4	991 IV 17 C	1946 XI 23 — частное в северном полушарии
	1694 VII 7 A	1946 XII 8 — полное
5	991 X 10 C	1947 V 20 — полное экваториальное
	1947 VI 3 A	1947 VI 3 — частное вновь возникшее
6	1208 VIII 13 C	1947 XI 12 — кольцеобразное экваториальное
	2146 III 28 A	—
7	992 IX 14 A	1948 IV 23 — частное, последнее в серии
	1389 V 25 C	1948 V 9 — кольцеобразное, полное в северном полушарии
	2110 VIII 29 A	—
8	1624 IV 17 C	1948 XI 1 — полное в южном полушарии не повторилось после 1930 г.
	1155 VI 16 A	—
9	1390 VI 29 A	1949 IV 13 — полное
	1634 X 12 C	1949 IV 28 — частное в северном полушарии
10	1625 III 24 A	1949 X 7 — полное
	1787 VII 14 C	1949 X 21 — частное в южном полушарии
11	850 V 15 C	1950 III 18 — кольцеобразное в южном полушарии
	1571 VIII 5 A	1950 IV 2 — полное
12	1049 III 6 C	1950 IX 12 — полное в северном полушарии
	1824 VII 11 A	1950 IX 26 — полное
	1103 IX 3 C	1951 III 7 — кольцеобразное экваториальное
	2041 V 16 A	—
13	1248 VI 22 C	1951 IX 1 — кольцеобразное экваториальное
	1987 X 7 A	—
15	1014 VII 14 A	1952 II 11 — частное (предпоследнее в серии)
	1501 V 17 C	1952 II 26 — полное в северном полушарии
16	1267 VI 8 A	1952 VIII 5 — частное
	1718 IV 1 C	1952 VIII 20 — кольцеобразное в южном полушарии
17	1430 IX 2 A	1953 V 29 — полное
	1664 VIII 21 C	1953 II 14 — частное в северном полушарии
18	727 VI 23 C	1953 VII 11 — частное в северном полушарии (предпоследнее в серии)
	1430 IX 2 A	1953 VII 26 — полное с максимальной фазой
	1917 VII 19 C	1953 VIII 9 — частное в южном полушарии
19	944 IV 25 C	1954 I 5 — кольцеобразное в южном полушарии
	1683 VIII 7 A	1954 I 19 — полное
20	1179 III 10 C	1954 VI 30 — полное в северном полушарии
	1900 VI 13 A	1954 VII 16 — частное
	1125 VIII 1 C	1954 XII 25 — кольцеобразное в южном полушарии
21	2045 III 3 A	—
	1360 VI 14 C	1955 VI 20 — полное экваториальное
22	2117 X 10 A	—
	1126 VII 6 A	1955 XI 29 — частное
23	1613 V 19 C	1955 XII 14 — кольцеобразное в северном полушарии
	1979 V 31 A	1956 V 24 — частное
24	1541 IX 19 C	1956 VI 8 — полное в южном полушарии
	1470 I 17 A	1956 XI 18 — полное
25	1776 VIII 14 C	1956 XII 2 — частное в северном полушарии
	803 V 24 C	1957 IV 30 — кольцеобразное в северном полушарии
	1560 IX 4 A	1957 V 14 — полное
26	2011 VII 3 C	—
	1074 IV 19 C	1957 X 23 — полное касательное в южном полушарии
27	1777 VII 20 A	1957 XI 7 — полное

Таблица 4 (продолжение)

№№ серий	Первое затмение в серии	Современные затмения	
		Первое затмение в серии	Последнее затмение в серии
28	984 VIII 29 C	1958 IV 19 — кольцеобразное в северном полушарии	
	1958 V 3 A	1958 V 3 — частное, начало серии	
29	1219 VIII 13 C	1958 X 12 — полное в южном полушарии	
	2157 II 24 A		
30	985 VIII 3 A	1959 III 24 — частное	
	1472 VI 6 C	1959 IV 8 — кольцеобразное в южном полушарии	
	2157 VIII 20 A		
31	1238 VI 29 A	— не повторилось после 1941 г.	
	1599 II 25 C	1959 X 2 — полное в северном полушарии	
32	1419 IV 10 A	1960 III 13 — полное	
	1707 X 25 C	1960 III 27 — частное в южном полушарии	
33	680 VII 1 C	— не повторилось после 1942 г.	
	1473 XI 4 A	1960 IX 5 — полное	
	1870 VII 28 C	1960 IX 20 — частное в северном полушарии	
34	933 V 27 C	1961 II 15 — полное в северном полушарии	
	1626 VIII 15 A	1961 III 9 — частное	
35	1060 II 4 C	1961 VIII 11 — кольцеобразное в южном полушарии	
	1835 VI 10 A	1961 VIII 26 — полное	
36	1096 VIII 20 C	1962 II 5 — полное экваториальное	
	2088 V 5 A		
37	1331 VII 5 C	1962 VII 31 — кольцеобразное в северном полушарии	
	2034 IX 28 A		
38	1512 IV 16 C	1963 I 25 — кольцеобразное в южном полушарии	
	После 2163 г. A		

Таблица 5

Саросные серии солнечных затмений

№№ серий	Первое затмение в серии	Последнее затмение в серии	Продолжительность серии		Число затмений в серии
			лет	саросов	
6	—1172 VII 17	144 IX 15	1316	73	74
29	—1161 VI 16	137 VIII 4	1298	72	73
14	—1114 VI 7	166 VII 14	1280	71	72
37	—1031 VI 19	249 VII 27	1280	71	72
22	—1020 V 18	260 VI 26	1280	71	72
7	—973 X 10	289 VI 5	1262	70	71
30	—890 V 22	390 VI 29	1280	71	72
15	—879 IV 20	401 V 29	1280	71	72
98	—832 IV 11	430 V 8	1262	70	71
23	—727 VII 15	513 V 20	1262	70	71
8	—756 III 12	542 V 1	1298	72	73
31	—727 II 20	571 IV 10	1298	72	73
16	—626 III 15	654 IV 22	1280	71	72
1	—796 X 26	665 III 22	1460	81	82
24	—839 VIII 24	676 II 19	1514	84	85
9	—702 X 8	777 III 14	1478	82	83
32	—727 VII 15	770 I 31	1496	83	84
17	—716 VII 15	582 IX 2	1298	72	73
2	—615 VIII 8	737 X 28	1352	75	76
25	—604 VII 7	712 IX 5	1316	73	74
10	—575 VI 17	705 VII 23	1280	71	72
33	—492 VI 30	788 VIII 6	1280	71	72
18	—463 VI 9	817 VII 18	1280	71	72
3	—434 V 20	846 VI 27	1280	71	72

Таблица 5 (продолжение)

№№ серий	Первое затмение в серии	Последнее затмение в серии	Продолжительность серии		Число затмений в серии
			лет	саросов	
26	—351 VI 2	929 VII 9	1280	71	72
	—322 V 12	956 VI 19	1280	71	72
11	—293 IV 22	969 V 19	1262	70	71
34	—210 V 4	1052 V 30	1262	70	71
19	—181 IV 14	1099 V 22	1280	71	72
4	—170 III 14	1110 IV 30	1280	71	72
12	—69 IV 6	1193 V 2	1262	70	71
27	—76 II 23	1240 V 23	1316	73	74
35	—246 X 6	1233 III 12	1476	82	83
	+ 18 II 4	1316 III 24	1394	74	75
20	—134 IX 28	1345 III 4	1478	82	83
28	—159 VIII 6	1175 X 16	1334	74	75
36	—76 VIII 19	1258 X 28	1334	74	75
21	—29 VIII 9	1287 X 8	1316	73	74
3	—18 VII 9	1262 VIII 16	1280	71	72
29	+ 47 VII 11	1327 VIII 17	1280	71	72
14	94 VII 1	1374 VIII 8	1280	71	72
37	123 VI 11	1385 VII 8	1262	70	71
22	188 VI 12	1450 VII 9	1262	70	71
7	235 VI 3	1515 VII 11	1280	71	72
30	264 V 13	1526 VI 10	1262	70	71
27	329 V 15	1591 VI 21	1262	70	71
15	376 V 5	1656 VI 22	1280	71	72
33	387 IV 4	1667 V 22	1280	71	72
8	470 IV 17	1714 V 13	1244	69	70
23	499 III 27	1779 V 16	1280	71	72
16	456 I 23	1790 IV 14	1334	74	75
1	557 II 15	1857 IV 5	1280	71	72
24	550 I 3	1902 IV 8	1352	75	76
9	416 IX 7	1859 II 3	1442	80	81
32	463 VIII 30	1761 X 27	1298	72	73
17	528 III 30	1935 I 5	1406	78	79
2	539 VII 31	1819 IX 19	1280	71	72
25	586 VII 22	1848 VIII 28	1262	70	71
10	651 VII 23	1931 IX 12	1280	71	72
33	680 VII 1	1942 VIII 12	1262	70	71
18	727 VI 23	1971 VII 22	1244	69	70
3	792 VI 24	2054 VII 3	1262	70	71
26	803 V 24	2083 VII 14	1280	71	72
11	850 V 15	2112 VI 24	2262	70	71

Таблица 6

Саросные серии лунных затмений

№№ серий	Первое затмение в серии	Последнее затмение в серии	Продолжительность серии		Число затмений в серии
			лет	саросов	
1	—1084 IV 22	—327 VII 20	757	42	43
24	—1001 V 5	—280 VII 10	721	40	41
9	—990 IV 4	—197 VII 23	793	44	45
32	—943 III 25	—204 VI 11	739	41	42
17	—860 IV 6	—139 VI 12	721	40	41
2	—867 II 22	—74 VI 14	793	44	45
25	—856 I 24	—63 V 14	793	44	45

Таблица 6 (продолжение)

№№ серий	Первое затмение в серии	Последнее затмение в серии	Продолжительность серии		Число затмений в серии
			лет	саросов	
10	-737 II 26	+ 2 V 15	739	41	42
33	-925 IX 28	67 V 17	932	55	56
18	-932 VIII 17	78 IV 16	1010	56	57
8	-831 IX 10	143 IV 18	974	54	55
26	-838 VII 29	208 IV 18	1046	58	59
11	-805 VII 10	201 III 7	1010	56	57
34	-725 VII 22	266 III 8	992	55	56
.19	-697 VII 1	331 III 10	1028	57	58
4	-668 VI 10	197 XI 12	865	48	49
27	-585 VI 24	136 VIII 29	721	40	41
12	-556 VI 2	273 X 13	829	46	47
35	-527 V 13	230 VIII 11	757	42	43
20	-444 V 26	259 VII 21	703	39	40
5	-415 V 5	342 VIII 3	757	42	43
28	-386 IV 15	371 VII 14	757	39	40
13	-303 IV 28	400 VI 22	703	43	44
36	-292 III 26	483 VII 6	775	44	45
21	-281 III 25	512 VI 15	793	44	45
6	-180 III 19	624 VI 6	721	40	41
29	-187 II 5	635 V 7	811	45	46
14	-357 IX 19	664 IV 16	938	52	53
37	-274 X 1	664 IV 16	938	52	53
22	-245 IX 11	765 V 9	1010	56	57
30	-232 VIII 30	776 IV 8	1028	57	58
15	-187 VIII 1	787 III 8	974	54	55
38	-140 VII 22	888 III 31	1028	57	58
23	-129 VI 22	881 II 18	1010	56	57
8	-46 VII 4	693 IX 20	739	41	42
31	+ 1 VI 24	957 I 18	956	53	54
16	95 VI 6	823 IX 24	793	44	45
24	142 V 27	798 VIII 1	703	39	40
9	153 IV 26	899 VIII 24	757	42	43
32	236 V 8	928 VIII 14	775	43	44
17	283 IV 29	939 VII 4	703	39	40
2	359 III 31	1022 VII 16	739	41	42
25	406 III 20	1051 VI 26	775	43	44
10	254 XI 12	1080 VI 5	721	40	41
18	265 X 12	1163 VI 18	757	42	43
39	366 XI 4	1192 V 28	938	52	53
26	305 VIII 21	1203 IV 27	938	52	53
11	435 VIII 24	1333 IV 30	1028	57	58
34	428 VII 12	1326 III 19	974	54	55
13	475 VI 20	1427 II 11	992	55	56
3	558 VII 16	1456 III 22	1028	57	58
27	569 VI 14	1304 XI 13	829	46	47
12	616 VI 5	1514 II 9	956	53	54
35	699 VI 18	1416 XI 5	847	47	48
20	710 V 17	1355 VIII 23	739	41	42
5	757 V 8	1420 VIII 23	721	40	41
28	840 V 20	1485 VIII 25	775	43	44
36	880 III 30	1478 VII 15	721	40	41
21	963 IV 11	1619 VI 27	721	40	41
6	938 II 17	1684 VI 27	721	40	41
29	822 XI 2	1749 VI 30	811	45	46
14	1068 II 21	1760 V 29	938	52	53
		1825 VI 1	757	42	43

Таблица 6 (продолжение)

№№ серий	Первое затмение в серии	Последнее затмение в серии	Продолжительность серии		Число затмений в серии
			лет	саросов	
37	880 IX 22	1890 VI 3	1010	56	57
22	891 VIII 23	1883 IV 22	992	55	56
7	992 IX 14	1948 IV 23	956	53	54
30	985 VIII 3	2013 IV 25	1028	57	58
15	1014 VII 14	1970 II 21	956	53	54
38	1115 VIII 7	1890 XI 26	775	43	44
23	1126 VII 6	2082 II 13	956	53	54
8	1155 VI 16	1930 X 7	775	43	44
31	1238 VI 29	1941 IX 5	703	39	40
16	1267 VI 8	2024 IX 18	757	42	43
1	1236 V 18	2035 VIII 19	739	41	42
24	1379 V 31	2064 VII 28	685	38	39
9	1390 IV 29	2147 VIII 11	757	42	43

Числа 39 и 59 лунных затмений в саросной серии в Каноне Опольцера являются предельными. Но, например, 40 затмений в саросной серии встречается у Опольцера 6 раз, 41 затмение — 8 раз, 58 затмений — 6 раз, 57 затмений — 5 раз и т. д. Примером 40 затмений в саросной серии является серия с 29 VI 1238 по 5 IX 1941, примером 58 затмений — серия с 3 VIII 985 по 25 IV 2013.

Для полноты картины приведем данные о числе солнечных затмений в саросной серии. А. А. Михайлов указывает, что повторение определенного затмения наблюдается в течение около 70 саросов или около 1300 лет („Теория затмений“, стр. 22).

Число 70 затмений в серии (69 саросов), или 1244 г., является наименьшим среди 64 полных саросных серий, имеющих у Опольцера, и повторилось только два раза: с 17 IV 470 по 13 V 1714 и с 23 VI 727 по 22 VII 1971.

Наиболее продолжительной была саросная серия, начавшаяся 24 VIII 839 г. и окончившаяся 19 II 676 г. За 1514 лет в ней было 85 солнечных затмений. Короткие саросные серии солнечных затмений повторяются значительно чаще, чем продолжительные. Так, из 64 серий 71 затмение в серии имело место 13 раз и 72 затмения — 25 раз, тогда как 81, 82 и 84 затмения в серии имели место по одному разу и 83 затмения — три раза. Причем после начала нашей эры была только одна продолжительная серия с 81 затмением за 1442 года: она началась 7 IX 416 и закончилась 3 II 1859 г.

Табл. 4, 5 и 6 показывают список солнечных и лунных затмений текущего сароса (1945—1963) и саросные серии солнечных и лунных затмений. Каждой серии солнечных и лунных затмений дан условный номер, причем нечетные номера относятся к затмениям у восходящего, а четные — к затмениям у нисходящего узла.

Поступило в Редакцию
23 марта 1957 г.

Бюллетень Института теоретической астрономии
том VII, № 1 (84)

Утверждено к печати
Институтом теоретической астрономии
Академии наук СССР

Технический редактор М. Е. Зендель
Корректор Р. Г. Гершинская

Сдано в набор 4/VIII 1988 г. Подписано к печати
18/XI 1988 г. РИСО АН СССР № 43-148. Формат
бумаги 84x108/16. Бум. л. 27. Печ. л. 57,5=9,02 усл.
сет. л. У-овид. л. 10,13. Изд. № 702. Тип. зак. № 757.
М. 1989. Тираж 1000. Цена 7 р. 19 к.

Ленинградское отделение Издательства АН СССР
Ленинград, В-164, Менделеевская линия, д. 1

1-й тип. Издательства АН СССР.
Ленинград, В-34, 9 линия, д. 12

ИСПРАВЛЕНИЯ И ОПЕЧАТКИ

Страницы	Строки	Нископано	Должно быть
47	Формула (29)	$x F_2$	$x F_1$
63	Табл. 1, стлб. 7, 18 снизу	27	17
65	2 сверху	$(1-x)^{-3}$	$(1-x)^{-\frac{3}{2}}$
65	Табл. 3	$ c_0 c_1 c_2 $	$ C_0 C_1 C_2 $
65	Табл. 4	$ c_0 c_1 c_2 c_3 $	$ C_0 C_1 C_2 C_3 $
70	Стлб. 8, 13 снизу	1 0	
73	4 сверху	$\chi_1 = \sin \alpha_1$	$\chi_1 = \sin \delta_1$
85	Табл. 5, стлб. 4, 1 снизу	2262	1262

Бюллетень ИТА, т. VII, № 1 (84).

Стр.
19
43
72
76
78

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Е. Н. Макарова. О совместном определении систематических ошибок звездных каталогов масс планет по наблюдениям астероидов	10
В. М. Амелин. Методы использования Луны для геодезических целей	19
Г. М. Вальцов. Две практические схемы вычисления возмущений первого порядка элементов орбиты тела малой массы в пространственной ограниченной эллиптической задаче трех тел	43
М. Я. Шмакова и А. С. Софьянина. Приближенное определение круговой орбиты астероида	72
М. Я. Шмакова и А. С. Софьянина. Элементы эллиптических и круговых орбит ненулевых малых планет	76
Письмо в редакцию. В. С. Лазаревский. О числе затмений в саросе и в саросной серии	78

7 p. 10 k.

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ
РЕСПУБЛИК

БЮЛЛЕТЕНЬ ИНСТИТУТА
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ АСТРОНОМИИ

Том VII, № 2 (85)



ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА 1958 ЛЕНИНГРАД

Директор Института теоретической астрономии чл.-корр. АН СССР М. Ф. Субботин
 Ответственный редактор проф. Г. А. Чеботарев

Бюллетень Института Теоретической Астрономии

Т. VII

1958

№ 2 (85)

Орбита кометы Отерма 3, 1942 VII по наблюдениям 1943—1950 гг.

А. В. Фокин

Приведены результаты улучшения элементов орбиты кометы Отерма 3, 1942 VII на базе 127 наблюдений, охватывающих период 1943—1950 гг. Все наблюдения удалось представить с сравнительно большой степенью точности $\sigma_n = \pm 1,51$. Применен особый прием составления нормальных мест, позволяющий при объединении в одно нормальное место большого числа наблюдений, расположенных на больших (до шести месяцев) промежутках времени. Приводится оценка средних квадратических ошибок начальных прямоугольных координат и скоростей при повторном интегрировании, зависящих от ошибок элементов.

L'ORBITE DE LA COMÈTE OTERMA 3, 1942 VII DÉTERMINÉE D'APRÈS LES OBSERVATIONS PENDANT LES ANNÉES 1943—1950, par A. V. Fokine. On donne les éléments de l'orbite de la comète déterminés d'après 127 observations pendant les années 1943—1950. On a réussi à représenter toutes les observations avec un assez haut degré de précision $\sigma_n = \pm 1,51$. On a fait usage d'une méthode spéciale pour former les lieux normaux; cette méthode est surtout avantageuse quand il est question de réunir en un lieu normal un grand nombre d'observations séparées par de longs intervalles (jusqu'à six mois). On donne enfin les erreurs moyennes quadratiques des coordonnées rectangulaires et des vitesses initiales après l'amélioration des éléments.

Одной из наиболее замечательных комет, открытых в текущем столетии, является периодическая комета Отерма 3, 1942 VII.

Элементы кометы весьма необычны: очень малый эксцентриситет ($e = 0,14$) и малый наклон орбиты к плоскости эклиптики ($i = 4^\circ$). В отношении необычности элементов с кометой Отерма 3 может соперничать только одна комета Швассмана—Вахмана 1. Благодаря малому эксцентриситету и значительной величине большой полуоси ($a = 4$ а. е.) орбита кометы полностью расположена между орбитами Марса и Юпитера. Комета доступна для наблюдений даже в афелийной части орбиты, что указывает на ее значительную абсолютную яркость.

Движение кометы обладает еще одной особенностью, которую в известном смысле можно назвать определяющей, а именно, острой соизмеримостью средних суточных движений кометы и Юпитера в отношении 3:2. Соизмеримость средних суточных движений кометы и Юпитера, а также планетный характер орбиты кометы делают весьма вероятной возможность отождествления кометы Отерма 3 с какой-либо известной малой планетой группы Гильды. Это предположение становится еще более естественным, если вспомнить, что некоторые наблюдатели отмечали наличие туманных оболочек у нескольких астероидов. Впервые подобные соображения о комете Отерма опубликовал А. Карштедт (Kahrstedt, 1943), который поставил вопрос о тождественности кометы Отерма 3 с малой планетой 334 Чикаго. Несколько позднее Хербиг и Мак-Муллин (Herbig, McMullin, 1943) детально исследовали этот вопрос и показали с помощью критерия Тиссерана, что комета Отерма 3 не может быть отождествлена ни с астероидом 334 Чикаго, ни с другими известными астероидами, обладающими сходными с кометой Отерма 3 элементами (1038 Тукия, 1202 Марина и др.).

В пользу того, что объект, открытый Л. Отерма, является кометой, говорит еще наличие у кометы Отерма 3 тесных сближений с Юпитером, на возможность которых впервые указал Расмуссен (Rasmussen, 1943). Им же было указано, что непосред-

ственно перед открытием кометы Отерма 3 была очень близка к Юпитеру на протяжении длительного промежутка времени (1937—1940 гг.). Сближение периодических комет с планетами (в большинстве случаев с Юпитером) является, по-видимому, достаточно строгой закономерностью (кометы Лекселя, Фая—Меллера, Вольфа 1, Брука и др.). Дальнейшие наблюдения кометы Отерма 3 показали, что иногда у нее можно заметить небольших размеров хвост; это окончательно подтверждает кометную природу этого объекта.

Наиболее обстоятельное, но выполненное приближенными методами, исследование движения кометы Отерма 3 принадлежит Хергету (Herget, 1947).

В настоящей работе проводится построение системы элементов кометы Отерма 3, 1942 VII на базе наблюдений за период с 1943 по 1950 г.

§ 1. Наблюдения кометы Отерма 3 в появлениях¹ 1943—1950 гг.

В первом появлении комета Отерма 3 была открыта фотографическим путем 3 апреля 1943 г. Л. Отерма (Oterma) в Турку (Финляндия) и получила предварительное обозначение 1943a. В момент открытия комета была 15-й звездной величины. Комета имела вид круглого диффузного объекта без малейших признаков хвоста. Об этом открытии 8 апреля 1943 г. Центральное бюро астрономических сообщений были разосланы соответствующие телеграммы. Однако полная Луна и близость новооткрытого объекта к эклиптике сделали его недоступным для наблюдений даже крупнейшими инструментами. Только 1 мая 1943 г. Холл (Hall) с помощью 24-дюймового рефлектора Иерксской обсерватории получил первое точное наблюдение этой кометы. Как было выяснено позднее, на пластинках, снятых 27 апреля 1943 г. на обсерватории Лоуэлла (США), также были найдены изображения кометы. Благодаря малому суточному движению комета не была утеряна несмотря на отсутствие эфемериды. Всего в 1943 г. было получено 27 точных наблюдений (с 27 апреля по 5 июля).

В январе 1944 г. комета Отерма 3 была обнаружена ван-Бисбреком (van Biebroeck) 24-дюймовым рефлектором Иерксской обсерватории очень близко к эфемеридному положению. Средняя яркость кометы в этом появлении была 16,5 звездной величины. Наблюдалась комета по июль месяц, и за этот промежуток времени было получено 20 точных наблюдений.

В апреле 1945 г. комета Отерма 3 вновь стала доступной для наблюдений. Первое наблюдение было произведено ван-Бисбреком на 82-дюймовом рефлекторе обсерватории Макдональда (McDonald). Комета имела вид круглой туманности 6^в в диаметре, 17-звездной величины. Предварительного обозначения в этом появлении комета не получила. Наблюдения продолжались до конца сентября 1945 г.

В 1946 г. комета была открыта ван-Бисбреком на пластинках, полученных на 82-дюймовом рефлекторе обсерватории Макдональда, и получила предварительное обозначение 1946 f. Комета была очень слаба — 18,5 звездной величины.

Поскольку в 1946 г. комета находилась вблизи афелия и наблюдалась, стало ясно, что она будет наблюдаться ежегодно — в каждой оппозиции. Вследствие этого было решено предварительных обозначений ей не давать, а называть кометой Отерма 3 (Oterma 3).

Для настоящей работы нами собраны все наблюдения кометы Отерма 3 за период 1943—1950 гг., имеющиеся в литературных указателях „Astronomischer Jahresbericht“. Всего собрано 127 наблюдений кометы, произведенных всею обсерваториями. Во внимание принимались только точные и полуточные наблюдения. Наблюдения 1951 г. ввиду того, что они малочисленны и охватывают небольшой промежуток времени, решено было не принимать во внимание при улучшении орбиты.

Необходимые сведения о наблюдениях приводятся в табл. 1—4. Все собранные наблюдения подверглись тщательной переработке и контролю. Параллактические мно-

¹ Мы употребляем привычный термин „появление“, хотя точнее было бы говорить об „опозиции“ кометы.

Таблица 1

№ п. п.	Название обсерватории	Число наблюдений	Инструмент	-L	tg φ	$\rho \cos \varphi$
1	Иеркс . . .	43	24" рефлект- тор	18°05'8"	0.912	0.738
2	Лик . . .	34	36" рефлект- тор	15 53,4	0.758	0.796
3	Будапешт . .	3		1 15,9	1.084	0.677
4	Флагстафф .	10	13" рефрак- тор	16 33,3	0.701	0.818
5	Макдональд .	30	82" рефлект- тор	17 03,9	0.589	0.861
6	Алжир . . .	7	Нормальный астрограф	0 12,1	0.743	0.802

Таблица 2

Промежуток времени		Число наблюдений	№ нормального места
1943 г. Апрель 27 — июль 5	27	1	
1944 г. Январь 23 — июль 21	21	2	
1945 г. Апрель 14 — сентябрь 29	16	3	
1946 г. Июнь 29 — сентябрь 26	16	4	
1947 г. Июнь 23 — декабрь 12	14	5	
1948 г. Сентябрь 3 — ноябрь 27	13	6	
1949 г. Январь 18 — февраль 18	9		
1950 г. Февраль 8 — апрель 17	11	7	

жители были перевычислены вновь, причем в необходимых случаях исправлены значения, приведенные наблюдателями. Наблюдения при помощи таблиц Петерса (Peters) редуцированы к эпохе 1950.0.

§ 2. Элементы кометы Отерма 3

Первая система элементов орбиты кометы Отерма 3 была определена Л. Отерма. Первоначальные элементы орбиты определяли еще Кеннингем (Cunningham) и Томас (Thomas), а также Хербиг (Herbig) и Мулли (Muller). Наиболее тщательное исследование элементов кометы Отерма 3 принадлежит Хергету (Herget). Работа Хергета выполнена в 1947 г., т. е. через 4 года после открытия, и, следовательно, не могла основываться на значительном наблюдательном материале. Поэтому Хергет выполняет часть работы приближенными методами, вследствие чего его результаты носят в основном качественный характер.

В основу своих вычислений Хергет полагает элементы, полученные Хербигом и Мулли, которые он улучшает по методу вариации геоцентрических расстояний. Пользуясь исправленной системой элементов, Хергет вычисляет по методу Энке с 40-дневным интервалом возмущения прямоугольных координат, принимая во внимание действия Юпитера и Сатурна. После сравнения с наблюдениями были образованы 7 нормальных мест, основанных на 56 наблюдениях 1943 и 1944 гг. После трех последовательных улучшений были получены уклонения, показанные в табл. 5, и система элементов, приведенная ниже.

Система элементов по Хергету

1943 Окт. 3.0 вс. пр. = 2431000.5 юд. дн.

$$\begin{aligned}
 M_0 &= 50^{\circ}89373 \\
 \omega &= 354.80579 \\
 \Omega &= 155.17075 \\
 i &= 3.98994 \\
 e &= 0.1444216 \\
 n &= 0^{\circ}12498716 \\
 \sigma &= 3.9618609^*
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} M_0 \\ \omega \\ \Omega \\ i \\ e \\ n \\ \sigma \end{aligned}} \right\} 1950.0$$

На базе этих элементов Хергет определяет эффект тесного сближения кометы Отерма 3 с Юпитером в 1937 г., на существование которого указал Расмуссен.

* Как выяснилось при вычислениях автора, значение большой полуоси, приведенное здесь, не согласуется со средним суточным движением. Значение большой полуоси, употребленное в нашей работе: $a = 3.9617991$ — вычислено по значению l .

Таб

№ п. п.	Дата (вс. ср.)	Аберрационное время	α	Поправка за параллакс	Прецессия на 1950.0	δ	Поправка за параллакс
1943 г.							
1	Апрель 27.22101	0.01514	12 ^h 10 ^m 22 ^s .9	0.00	+21.51	+ 2°16'18"	+1.78
2	Май 1.11264	1535	12 09 05.8	-0.03	-21.51	+ 2 25 10	+2.1
3	1.22402	1536	12 09 03.4	-0.02	-21.51	+ 2 25 14	+1.8
4	3.11500	1546	12 08 31.3	-0.02	-21.51	+ 2 28 57	+2.1
5	8.31674	1578	12 07 20.8	+0.10	+21.51	+ 2 33 38	+1.8
6	22.12618	1674	12 06 27.48	-0.04	-21.51	+ 2 40 40.8	+2.0
7	23.22056	1681	12 06 31.5	+0.07	+21.51	+ 2 40 02	+1.6
8	25.14382	1697	12 06 41.68	+0.06	+21.51	+ 2 38 31.8	+2.0
9	26.17004	1705	12 06 48.5	+0.03	+21.51	+ 2 37 34	+1.6
10	28.13160	1720	12 07 04.47	+0.05	+21.51	+ 2 35 21.3	+1.9
11	29.15793	1728	12 07 14.71	+0.08	+21.51	+ 2 34 02.8	+1.9
12	29.22423	1728	12 07 15.3	+0.02	-21.51	+ 2 33 56	+1.6
13	30.89236	1752	12 07 33.83	+0.10	+21.51	+ 2 31 29.5	+2.1
14	30.93056	1752	12 07 34.12	+0.11	+21.51	+ 2 31 27.0	+2.1
15	Июнь 1.84306	1758	12 07 59.26	+0.12	+21.51	+ 2 28 14.2	+1.6
16	4.19800	1777	12 08 33.6	+0.11	+21.51	+ 2 23 54	+1.8
17	5.13716	1785	12 08 49.40	+0.07	+21.51	+ 2 21 57.4	+1.9
18	8.22952	1811	12 09 46.0	+0.13	+21.51	+ 2 14 56	+1.8
19	9.14035	1818	12 10 04.39	+0.08	+21.51	+ 2 12 41.4	+1.8
20	20.17860	1896	12 14 43.4	+0.09	+21.51	+ 1 39 12	+1.5
21	22.19774	1930	12 15 45.0	+0.10	+21.51	+ 1 31 56	+1.5
22	26.20551	1956	12 17 56.8	+0.11	+21.51	+ 1 16 32	+1.4
23	29.14340	1991	12 19 40.77	+0.10	+21.51	+ 1 04 26.5	+1.7
24	29.15941	1991	12 19 41.53	+0.11	+21.51	+ 1 04 22.7	+1.7
25	Июнь 30.15417	2000	12 20 17.92	+0.11	+21.51	+ 1 00 07.3	+1.7
26	Июль 2.14278	2017	12 21 33.55	+0.10	+21.51	+ 0 51 24.2	+1.7
27	5.19244	2043	12 23 33.9	+0.11	+21.51	+ 0 37 33	+1.4
1944 г.							
28	Январь 23.46071	0.02420	16 09 20.91	-0.07	+20.65	-17 28 01.9	+1.7
29	23.48015	2420	16 09 21.97	-0.06	+20.65	-17 28 02.8	+1.7
30	30.46462	2360	16 16 07.07	-0.07	+20.75	-17 40 02.6	+1.7
31	Февраль 4.46506	2325	16 20 40.10	-0.06	+20.77	-17 46 58.5	+1.8
32	Март 22.44398	1950	16 47 48.00	-0.04	+20.89	-17 54 05.3	+1.9
33	23.47176	1945	16 48 00.29	-0.01	+20.90	-17 53 16.7	+1.9
34	24.42111	1940	16 48 10.79	-0.06	+20.90	-17 52 23.5	+1.9
35	Май 1.46929	1745	16 42 11.92	+0.05	0.00	-17 00 48.7	+2.3
36	1.48151	1745	16 42 11.57	+0.06	0.00	-17 00 47.5	+2.3
37	29.30185	1700	16 24 53.18	+0.04	+20.57	-16 13 00.6	+2.2
38	Июль 14.16182	1740	16 14 40.66	-0.04	+20.48	-15 52 52.8	+2.5
39	14.17640	1740	16 14 40.09	-0.02	+20.48	-15 52 52.7	+2.5
40	15.16077	1746	16 14 04.93	-0.03	+20.46	-15 51 56.2	+2.4
41	20.16191	1761	16 11 17.30	-0.01	+20.45	-15 47 51.7	+2.4
42	21.17170	1762	16 10 45.38	+0.04	+20.45	-15 47 10.7	+2.4
43	28.35391	1770	16 07 41.00	+0.10	0.00	-15 44 47.6	+2.1
44	30.22900	1781	16 06 54.60	-0.01	0.00	-15 44 23.2	+2.2
45	30.28040	1781	16 06 53.28	+0.04	0.00	-15 44 22.3	+2.2

1 α и δ отнесены к осям начала года наблюдения, за исключением наблюдений №№ 35, 36, 43, 44, 45, отнесенных к 1950.0.

Лист 3

Прецессия на 1950.0	№ обсерватории по табл. 1	Звезды сравнения	Литературный источник
-220.2	4	Alg. ph. + 2 ^h 12 ^m 8 ^s , 19, 23, 24, 27, 30, 37	A. J., 51, 63
-220.2	1	—	Pop. Astr., 51, 6
-220.2	4	Alg. ph. + 2, 12 8, 16, 18, 19, 20, 21, 24	A. J., 51, 63
-220.2	1	—	Pop. Astr., 51, 6
-220.2	2	—	—
-220.2	1	Alg. ph. + 3, 12 4, 134, 49, 140	A. J., 50, 167
-220.2	4	Alg. ph. + 3, 12 4, 49, 59, 128, 134, 145, 150	A. J., 51, 63
-220.2	1	Alg. ph. + 3, 12 4, 49, 140, 149	A. J., 50, 167
-220.2	4	Alg. ph. + 3, 12 4, 137, 139, 141, 145, 149, 150	A. J., 51, 63
-220.2	1	—	—
-220.2	1	Alg. ph. + 3, 12 4, 140, 147, 149	A. J., 50, 167
-220.2	4	Alg. ph. + 3, 12 4, 139, 145, 148, 150, 152, 153	A. J., 51, 63
-220.2	3	Alg. ph. + 3, 12 8, 6, 10, 14, 16, 18	B. Z., 25, 91
-220.2	3	Alg. ph. + 3, 12 8, 10, 14, 16, 18, 19	—
-220.2	4	Alg. ph. + 3, 12 8, 147, 152, 162, 163, 164, 167	A. J., 51, 63
-220.2	1	Alg. ph. + 3, 12 4, 155, 162, 169	A. J., 50, 167
-220.2	1	Alg. ph. + 3, 12 4, 162, 167, 172, 173, 174, 178	A. J., 51, 63
-220.2	1	Alg. ph. + 3, 12 8, 23, 24, 28	A. J., 50, 167
-220.0	4	Alg. ph. + 2, 12 16, 8, 44, 47, 49, 51, 52	A. J., 51, 63
-219.9	4	Alg. ph. + 2, 12 16, 49, 52, 55, 58, 61, 62	То же
-219.9	4	Alg. ph. + 2, 12 16, 19, 60, 65, 68, 69, 172	То же
-219.8	1	Alg. ph. + 1, 12 20, 6, 16, 17	A. J., 50, 167
-219.8	1	—	—
-219.7	1	Alg. ph. + 1, 12 20, 12, 17, 22	A. J., 50, 167
-219.7	1	Alg. ph. + 1, 12 20, 22, 42, 123	То же
-219.7	4	Alg. ph. + 1, 12 20, 49, 62, 123, 130, 142, 145	A. J., 51, 63
-55.8	1	Hyd. ph. - 17°, 44695, 44714, 44662	A. J., 51, 114
-55.8	1	—	—
-52.7	1	Hyd. ph. - 17°, 45173, 45166, 45193	То же
-50.5	1	Hyd. ph. - 17°, 45526, 45494, 45511	"
-37.4	5	Hyd. ph. - 18°, 44887, 44873, 44884	A. J., 51, 111
-37.2	5	—	—
-37.1	5	Hyd. ph. - 18°, 44887, 44884, 44888	То же
0.0	2	Hyd. ph. - 17°, 46072, 46079, 46086, 46087	L. O. B., 517
0.0	2	—	—
48.5	1	Tac. ph. - 16°, 16 ^h 24 ^m , 14, 15, 29	A. J., 51, 114
53.4	1	Tac. ph. - 16, 16 16, 4, 12, 27	То же
53.4	1	—	—
53.6	1	Tac. ph. - 16, 16 08, 292, 302, 303	"
54.9	1	Tac. ph. - 16, 16 08, 160, 176, 193	"
55.2	1	Tac. ph. - 16, 16 08, 131, 154, 162	"
0.0	2	Tac. ph. - 15, 16 04, 105, 112, 117, 127	L. O. B., 517
0.0	2	—	—
0.0	2	Tac. ph. - 15, 16 00, 193, 196, 204, 81, 85, 91	То же

Таблица 3 (продолжение)

№ п. п.	Дата (вс. пр.)	Абберрацион-ное время	α	Поправка за параллакс	Прецессия на 1950.0	δ	Поправка за параллакс	Прецессия на 1950.0	№ observa-тории по табл. 1	Звезды сравнения	Литературный источник
46	Июль 14.14062	0.01830	16 ^h 02 ^m 28 ^s .19	+0.03	+20.40	-15 ^o 46'25.9"	+2.2	-59.0	1	Тас. ph. - 16 ^h 16 ^m 00 ^s . 85, 97, 102	A. J., 51, 114
47	16.13962	1853	16 02 09.31	+0.04	+20.40	-15 47 42.1	+2.2	-59.2	1	Тас. ph. - 16, 16 00, 84, 85, 102	То же
48	21.15127	1901	16 01 36.88	+0.06	+20.42	-15 51 56.2	+2.2	-59.3	1	Тас. ph. - 16, 16 00, 57, 70, 84	"
1945 г.											
49	Апрель 14.45035	0.02390	19 54 16.94	-0.08	+17.26	-17 37 27.4	+1.4	+47.9	5	Hyd. ph. - 18 ^o , 59323, 42, 43	A. J., 52, 202
50	14.46389	2390	19 54 17.31	-0.07	+17.26	-17 37 26.4	+1.6	+47.9			
51	Май 11.45584	2210	20 01 56.81	-0.08	+17.12	-17 03 46.2	+1.7	+50.8	5	Hyd. ph. - 17, 60474, 87, 70	То же
52	12.41401	2205	20 03 01.09	-0.06	+17.12	-17 03 08.7	+1.6	+50.9			
53	13.42782	2200	20 02 04.74	-0.05	+17.12	-17 02 31.1	+1.7	+50.9	5	Hyd. ph. - 17, 60462, 74, 70	"
54	Июль 4.27745	1953	19 45 14.40	-0.01	+17.27	-17 39 28.9	+2.1	+49.4	2	Hyd. ph. - 17, 40463, 70, 57	L. O. B., 519
55	4.29968	1953	19 45 12.54	+0.01	+17.27	-17 39 34.1	+2.1	+49.4			
56	4.34451	1953	19 45 16.74	-0.03	+17.27	-17 39 13.7	+2.2	+49.4	5	Hyd. ph. - 18, 59039, 61, 40	A. J., 52, 202
57	4.38826	1953	19 45 15.88	+0.01	+17.27	-17 39 27.0	+2.2	+49.4			
58	31.25347	1973	19 28 20.06	-0.04	+17.42	-18 31 37.7	+2.2	+37.7	2	Hyd. ph. - 19, 54121, 07, 22	L. O. B., 519
59	31.30972	1973	19 28 18.08	+0.02	+17.42	-18 31 44.9	+2.1	+37.7			
60	Август 3.16401	2000	19 26 39.67	-0.02	+17.46	-18 37 18.7	+2.2	+37.0	5	Hyd. ph. - 19, 54121, 07, 22	A. J., 52, 202
61	3.17685	2000	19 26 39.33	-0.01	+17.46	-18 37 19.1	+2.2	+37.0			
62	4.15465	2010	19 26 07.27	-0.03	+17.46	-18 39 07.3	+2.2	+36.8	5	Hyd. ph. - 19, 54147, 05, 21	То же
63	Сентябрь 29.216163	2360	19 16 23.72	+0.03	+17.65	-19 49 48.6	+1.8	+32.8	2	Hyd. ph. - 19, 54147, 05, 21	L. O. B., 519
64	29.21788	2360	19 16 24.62	+0.07	+17.65	-19 49 50.1	+1.7	+32.8			
1946 г.											
65	Июнь 29.42203	0.02287	22 38 24.97	-0.03	+12.55	-7 53 17.8	+1.4	+115.1	5	S. Fer. ph. - 9 ^h 22 ^m 36 ^s , 72, 89, 106	A. J., 52, 202
66	30.38157	2278	22 38 22.37	-0.06	+12.55	-7 53 52.8	+1.4	+115.1			
67	Июль 1.38521	2269	22 38 18.85	-0.06	+12.55	-7 54 35.1	+1.3	+115.1	5	S. Fer. ph. - 9, 22 38, 121, 123, 127	То же
68	4.40542	2246	22 38 03.24	-0.04	+12.55	-7 57 10.7	+1.4	+115.1			
69	24.30656	2121	22 33 17.81	-0.07	+12.59	-8 33 13.1	+1.5	+114.5	5	S. Fer. ph. - 9, 22 28, 109, 110, 121	L. O. B., 519
70	25.37219	2116	22 32 54.23	-0.01	+12.59	-8 36 01.1	+1.5	+114.4			
71	26.38314	2111	22 32 31.12	0.00	+12.59	-8 38 45.0	+1.5	+14.4	5	S. Fer. ph. - 9, 22 28, 103, 109, 110	"
72	27.37466	2106	22 32 07.85	-0.01	+12.60	-8 41 29.5	+1.5	+14.4			
73	28.31887	2102	22 31 46.64	-0.08	+12.60	-8 44 09.0	+1.7	+14.3	5	S. Fer. ph. - 9, 22 28, 79, 91, 103	L. O. B., 519
74	28.32060	2102	22 31 45.35	-0.05	+12.60	-8 44 07.2	+1.5	+14.3			
75	28.36192	2102	22 31 45.57	-0.05	+12.60	-8 44 16.4	+1.7	+11.3	5	S. Fer. ph. - 9, 22 28, 61, 71, 85	L. O. B., 519
76	31.30583	2089	22 30 29.19	-0.06	+12.61	-8 52 59.9	+1.5	+11.1			
77	Август 22.28850	2036	22 19 03.19	-0.05	+12.70	-10 10 15.7	+1.8	+11.5	2	S. Fer. ph. - 9, 22 28, 103, 109, 110	L. O. B., 519
78	22.34336	2036	22 19 01.84	-0.01	+12.70	-10 10 29.5	+1.8	+11.5			
79	Сентябрь 25.24392	2119	22 00 55.00	0.00	+12.86	-12 09 55.0	+1.8	+1.06	2	S. Fer. ph. - 9, 22 28, 61, 71, 85	L. O. B., 519
80	26.30156	2120	22 00 53.60	+0.05	+12.86	-12 10 05.0	+1.8	+1.06			
1947 г.											
81	Июль 23.35613	0.02354	1 06 31.44	-0.06	+ 9.32	+ 4 48 36.0	+1.3	+ 57.7	1	Alg. ph. + 4 ^h 1 ^m , 58, 59, 73	A. J., 54 1175
82	24.41038	2346	1 06 45.26	-0.07	+ 9.32	+ 4 48 50.7	+1.2	+ 57.1			
83	24.45760	2344	1 06 45.84	-0.06	+ 9.32	+ 4 48 52.5	+1.2	+ 57.4	2	Alg. ph. + 4.1 4, 58, 69, 81	L. O. B., 520
84	25.36806	2336	1 06 57.13	-0.06	+ 9.32	+ 4 49 07.9	+1.4	+ 57.6			
85	Август 23.39412	2104	1 06 57.49	-0.06	+ 9.31	+ 4 21 02.5	+1.3	+ 57.6	2	Alg. ph. + 4.1 4, 58, 69, 81	A. J., 54, 1175
86	23.44759	2103	1 05 55.88	-0.01	+ 9.31	+ 4 20 55.9	+1.3	+ 57.6			
87	Сентябрь 24.42569	1952	0 54 16.35	+0.08	+ 9.26	+ 2 34 14.1	+1.5	+ 58.4	2	Alg. ph. + 4.1 4, 58, 69, 81	То же
88	24.48194	1951	0 54 14.38	+0.09	+ 9.26	+ 2 34 01.1	+1.5	+ 58.4			

Таблица 3 (продолжение)

№ п. л.	Дата (ис. вр.)	Абerrационное время	α	Поправка за параллакс	Прецессия на 1950.0	δ	Поправка за параллакс	Прецессия на 1950.0	№ наблюдений по табл. 1	Звезд сравнения	Литературный источник
89	Октябрь 10.11412	0.01937	0°45'17.74	-0.08	+9.24	+ 1°28'59.0	+1.7	+59.0	} 1		
90	10.13146	1937	0 45 17.58	-0.07	+9.24	+ 1 28 57.9	+1.7	+59.0			
91	Ноябрь 7.24373	2017	0 31 12.39	+0.01	+9.22	- 0 05 02.4	+1.5	+59.6	} 2		A. J., 54, 1175
92	7.30350	2017	0 31 10.97	+0.06	+9.22	- 0 05 09.4	+1.5	+59.6			
93	Декабрь 12.02422	2254	0 26 45.21	-0.01	+9.22	- 0 24 10.5	+1.5	+59.7	} 1		L. O. B., 520
94	12.07561	2255	0 26 45.03	+0.02	+9.22	- 0 24 07.1	+1.5	+59.7			
1948 г.											
95	Сентябрь 3.41465	0.02161	4 08 06.67	-0.08	+6.86	+16 47 33.5	+0.7	+18.8	} 5		
96	5.39792	2142	4 08 51.73	-0.09	+6.86	+16 47 19.0	+0.7	+18.6			
97	6.41606	2133	4 09 03.51	-0.07	+6.86	+16 47 09.0	+0.6	+18.7	} 5	Bord. ph. +17, 4 4, 100, 106, 107	A. J., 55, 1182
98	Октябрь 1.35885	1919	4 12 52.80	-0.08	+6.85	+16 26 54.0	+0.7	+18.1			Bord. ph. +17, 4 4, 106, 107, 112
99	2.29292	1912	4 12 48.57	-0.12	+6.85	+16 25 35.6	-0.9	+18.1	} 5		"
100	9.44347	1859	4 11 44.77	-0.02	+6.84	+16 14 22.0	-1.0	+18.2			Bord. ph. +16, 4 8, 16, 20, 21
101	9.49486	1859	4 11 44.04	+0.03	+6.84	+16 14 16.9	-1.0	+18.2	} 2		
102	Ноябрь 6.98308	1711	3 59 17.30	-0.05	+6.78	+15 13 12.9	-1.1	+20.2			
103	7.02603	1711	3 59 15.54	0.00	+6.78	+15 13 07.3	-1.1	+20.2	} 6	Bord. ph. +15, 3 56, 21, 43, 56, 83, 113	Observ., 39, 8
104	24.91094	1685	3 47 16.44	-0.06	+6.76	+14 30 58.3	-1.2	+21.9			
105	24.95802	1685	3 47 14.49	-0.01	+6.76	+14 30 52.5	+1.1	+21.9	} 6	Bord. ph. +14, 3 44, 35, 113, 140, 212, 344	То же
106	27.12468	1686	3 45 45.33	-0.09	+6.73	+14 26 11.2	+1.5	+22.2			
107	27.13683	1686	3 45 44.86	-0.08	+6.73	+14 26 09.4	+1.5	+22.2	} 1	Bord. ph. +14, 3 44, 61, 62, 67	A. J., 55, 1182
1949 г.											
108	Январь 18.06809	0.01913	3 25 40.09	0.00	+3.33	+13 58 01.8	+2.2	+12.5	} 1		
109	18.07955	1913	3 25 40.13	-0.01	+3.33	+13 58 02.1	+2.2	+12.5			Bord. ph. +14, 3 20, 42, 84, 90
110	22.09292	1942	3 26 00.96	-0.03	+3.33	+14 03 58.4	+2.2	+12.5	} 1		То же
111	28.19229	1991	3 27 02.58	+0.05	+3.34	+14 14 58.3	+1.0	+12.4			
112	28.23694	1991	3 27 03.18	+0.09	+3.34	+14 15 04.4	+1.1	+12.4	} 2	Bord. ph. +14, 3 20, 42, 51, 90	То же
113	29.11109	1996	3 27 15.17	-0.07	+3.34	+14 16 49.8	+2.1	+12.4			
114	30.06149	2003	3 27 29.50	-0.02	+3.34	+14 18 48.0	+2.1	+12.4	} 1	Bord. ph. +15, 3 24, 117, 121, 109	То же
115	Февраль 17.09054	2146	3 34 45.76	-0.07	+3.36	+15 05 26.5	+1.9	+11.9			Bord. ph. +15, 3 24, 117, 121, 128
116	18.07779	2154	3 35 18.31	-0.06	+3.36	+15 08 22.8	+1.9	+11.8	} 1	Bord. ph. +15, 3 32, 40, 122 129	A. J., 55, 1182
1950 г.											
117	Февраль 8.27799	0.01450	7 56 54.98	-0.01	0.00	+17 48 46.8	+1.2	0.0	} 2		
118	8.30924	1450	7 56 53.86	+0.03	0.00	+17 48 52.0	+1.2	0.0			
119	11.69280	1461	7 54 48.74	-0.04	0.00	+17 58 58.1	+1.1	0.0	} 6	Par. ph. +18, 7 52, 81, 83, 100, 198, 250	Observ., 39, 8
120	11.93672	1461	7 54 47.26	+0.01	0.00	+17 59 05.3	+1.1	0.0			
121	16.04236	1479	7 52 11.19	+0.04	0.00	+18 12 28.8	+1.1	0.0	} 6		То же
122	9.17326	1584	7 46 21.22	+0.03	0.00	+18 54 49.0	+1.0	0.0			
123	9.20104	1585	7 46 21.07	0.00	0.00	+18 54 51.8	+1.0	0.0	} 2	Par. ph. +19, 7 48, 232, 236, 251, 291, 299	То же
124	14.10639	1617	7 46 11.61	+0.02	0.00	+19 01 49.8	+1.7	0.0			
125	15.10538	1624	7 46 13.44	+0.01	0.00	+19 03 04.6	+1.2	0.0	} 1	Par. ph. +20, 7 44, 174, 180, 184	То же
126	15.16682	1859	7 56 49.73	+0.10	0.00	+19 12 18.1	+0.7	0.0			Par. ph. +20, 7 44, 174, 180, 191
127	17.14473	1879	7 58 06.59	+0.09	0.00	+19 10 53.7	+0.7	0.0	} 5	Par. ph. +20, 7 52, 276, 279, 287	"
								0.0			Par. ph. +20, 7 52, 295, 298, 305

Таблица 4

№ п. п.	Дата	m	d"	№ п. п.	Дата	m	d"	
1	1943 Апрель	27	15	—	35	1946 Июль	27	17.2
2	Май	1	15	—	36	28	17.5	
3	8	15	—	37	31	17.5		
4	8	15	—	38	Август	22	17.5	
5	22	16	10	39	1946 Сентябрь	26	17.5	
6	23	15	—	40	1947 Июль	23	17.5	
7	29	16	12	41	24	18.5		
8	Июнь	4	16	—	42	25	18	
9	1943 Июль	2	16	15	43	Август	23	18.3
10	1944 Январь	23	16.5	—	44	Сентябрь	24	17.8
11	30	16.5	—	45	Октябрь	10	18	
12	Май	1	16.1	—	46	Ноябрь	7	18.0
13	29	16	—	47	1947 Декабрь	12	18	
14	Июнь	14	16.5	—	48	1948 Сентябрь	3	18
15	15	16.5	—	49	6	17.5		
16	20	16.5	—	50	Октябрь	1	17.5	
17	21	16.5	—	51	2	17		
18	1944 Июль	28	16.1	—	52	9	17.3	
19	1945 Апрель	14	18	8	53	6	16	
20	Май	11	17.5	12	54	24	15.5	
21	12	17.5	12	55	1948 Ноябрь	27	16.5	
22	13	17.5	12	56	18	17.0		
23	Июль	4	17.5	8	57	22	16.5	
24	Август	31	17.6	8	58	29	16.5	
25	3	17	—	59	Февраль	17	17	
26	4	17	—	60	1949 Февраль	18	17	
27	1945 Сентябрь	29	18.5	—	61	1950 Февраль	8	15
28	1946 Июнь	29	18.2	3-4	62	11	14.5	
29	30	18.0	3-4	63	16	14.3		
30	Июль	1	18.1	3-4	64	9	15.3	
31	4	18.0	3-4	65	1951 Апрель	11	15.5	
32	24	17.5	3-4	66	12	16.0		
33	25	17.6	3-4	67	13	16.0		
34	26	17.2	3-4	68	1951 Июнь	3	16.5	

Таблица 5
Уклонения для нормальных мест Н—В

№ нормального места	Дата (вс. вр.)	$\Delta x \cos \delta$	$\Delta \delta$	№ нормального места	Дата (вс. вр.)	$\Delta x \cos \delta$	$\Delta \delta$		
1	1943 Май	3.10	+0'2	+0'1	5	Март	23.45	+0'2	-0'6
2	Июнь	29.21	0.0	+0'3	6	Июнь	15.15	-0.6	+0.1
3	Июль	29.12	-0.3	-0.8	7	Июль	16.12	+0.5	-0.1
4	1944 Январь	23.45	+0.3	+1.1					

Для этого по приближенному методу Штраке были вычислены частные возмущения до момента, когда комета приближалась к Юпитеру на расстоянии 0.6 а. е. Вычисления были продолжены в прямоугольных координатах с 20-дневным интервалом, по методу квадратур. Из этих весьма приближенных вычислений следует, что комета приближалась к Юпитеру на расстояние, приблизительно равное 0.1 а. е.; сближение было необычайно длительным — свыше двух лет. Для некоторых дат Хергстом были определены

нонцентрические элементы орбиты кометы, которые неожиданно оказались эллиптическими (см. табл. 6).

Как правильно указывает Хергет, особенности планетоцентрического движения кометы объясняются совокупным действием трех причин:

- 1) соизмеримости средних суточных движений

$$\Omega_0 - 2n = -2'6;$$

- 2) глубоким проникновением в сферу действия Юпитера

$$\rho = 0.1 \text{ а. е.};$$

- 3) в период сближения комета была в окрестности афелия, а Юпитер — в окрестности перигелия, что привело к очень малой нонцентрической линейной скорости кометы.

Таким образом, эллиптичность нонцентрических элементов не более как кинематический эффект.

Хергет отмечает, что факт огромных возмущений элементов орбиты кометы Отерма 3 не может быть подвергнут сомнению, тем не менее он подчеркивает качественный характер полученных результатов и необходимость накопления наблюдений, равномерно распределенных вдоль всей орбиты. Известно, что такое распределение наблюдений дает возможность точно определить поправки элементов и особенно поправку среднего суточного движения. Значение точной величины среднего суточного движения, как это показали Мертон (Merton, 1927) и Е. И. Казимирчак-Полонская (1950), имеет решающее значение при исследовании тесных сближений комет с планетами, так как величина среднего суточного движения определяет конфигурацию в момент встречи и, следовательно, характер возмущений.

§ 3. Выбор метода интегрирования

Рассмотрим уравнения возмущенного движения кометы в гелиоцентрической системе координат. Пусть

x, y, z — гелиоцентрические координаты кометы,
 x_i, y_i, z_i и m_i — соответственно гелиоцентрические координаты и массы возмущающих тел. Тогда дифференциальные уравнения движения кометы в гелиоцентрической системе координат будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + k^2 \frac{x}{r^3} &= k^2 \sum m_i \left(\frac{x_i - x}{\Delta_i^3} - \frac{x_i}{r_i^3} \right), \\ \frac{d^2y}{dt^2} + k^2 \frac{y}{r^3} &= k^2 \sum m_i \left(\frac{y_i - y}{\Delta_i^3} - \frac{y_i}{r_i^3} \right), \\ \frac{d^2z}{dt^2} + k^2 \frac{z}{r^3} &= k^2 \sum m_i \left(\frac{z_i - z}{\Delta_i^3} - \frac{z_i}{r_i^3} \right), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ — расстояние от кометы до Солнца,
 $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$ — расстояния возмущающих тел от Солнца,
 $\Delta_i = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2}$ — расстояния возмущающих тел от кометы,
 k — постоянная Гаусса.

В правую часть уравнений (1) входит величина $1:r_i^3$. Для возмущающих планет, близких к Солнцу, r_i мало, поэтому $1:r_i^3$ будет сравнительно большое. Так как период

обращения возмущающих тел, близких к Солнцу, невелик (Меркурий—88^д, Венера—225^д и т. п.), то учитывать возмущения от этих планет можно только с малым интервалом интегрирования. Для Меркурия, например, необходим интервал не более, чем пятидневный; в случае более широкого интервала возмущения от Меркурия становятся неинтерполируемыми. Если комета достаточно удалена от возмущающих планет, близких к Солнцу (в дальнейшем будем называть их „внутренними“), то непосредственное действие последних на комету весьма невелико. Но тем не менее при точных исследованиях движения комет необходимо учитывать действия внутренних планет из-за значительной величины действия их на Солнце. Поэтому, естественно, возникает мысль преобразовать уравнения движения кометы таким образом, чтобы правые части не содержали членов вида $k^2 m_i x_i r_i^{-3}$.

Это достигается переносом начала отсчета из центра Солнца в центр тяжести Солнца и внутренних планет—переходом к барикентрической системе координат.

Наиболее простой вывод уравнений барикентрического движения комет дан С. Г. Маковым (1955).

Эти уравнения имеют вид

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 \left(1 + \sum_1 m_i \right) \frac{x}{r^3} = k^2 \sum_1 m_i \left(\frac{x_i - x}{\Delta_i^3} - \frac{x_i - x}{r^3} + 3x \frac{x_i x + y_i y + z_i z}{r^5} \right) + k^2 \sum_2 \left(\frac{x_i - x}{\Delta_i^3} - \frac{x_i}{r_i^3} \right)$$

и аналогичные уравнения для осей y и z , причем знак \sum_1 означает суммирование по внутренним планетам, а \sum_2 —по внешним.

Так как орбита кометы Отерма 3 полностью расположена между орбитами Марса и Юпитера, то оказалось возможным пренебречь барикентрическими возмущающими ускорениями от внутренних планет. Таким образом, в работе использовались уравнения

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 \left(1 + \sum_1 m_i \right) \frac{x}{r^3} = k^2 \sum_2 m_i \left(\frac{x_i - x}{\Delta_i^3} - \frac{x_i}{r_i^3} \right),$$

причем из внешних планет принимаются во внимание только возмущения от Юпитера и Сатурна.

§ 4. Результаты интегрирования и сравнение с наблюдениями

Для связи отдельных появлений кометы был применен метод численного интегрирования дифференциальных уравнений барикентрического движения кометы

$$\omega^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 \omega^2 \left(1 + \sum_1 m_i \right) \frac{x}{r^3} = k^2 \omega^2 \sum_2 m_i \left(\frac{x_i - x}{\Delta_i^3} - \frac{x_i}{r_i^3} \right).$$

Применялся второй метод Коуэлла, как наиболее простой и эффективный по точности получаемых результатов.

Положим

$$f_x = \omega^2 \frac{d^2 x}{dt^2} = -k^2 \omega^2 \left(1 + \sum_1 m_i \right) \frac{x}{r^3} + k^2 \omega^2 \sum_2 m_i \left(\frac{x_i - x}{\Delta_i^3} - \frac{x_i}{r_i^3} \right).$$

Тогда основная формула второго метода Коуэлла имеет вид

$$x_n = f_n^{-2} + \frac{1}{12} f_n - \frac{1}{240} f_n^2 + \frac{31}{60480} f_n^3 - \dots,$$

где f_n^{-2} —вторая сумма функции f_n ; f_n^2 и f_n^3 —ее разности второго и четвертого порядка.

Начальные члены ряда первых сумм для контроля вычислялись по двум независимым формулам:

$$f_{-1/4}^{-1} = \Delta'_{-1/4} - \frac{1}{12} f'_{-1/4} + \frac{1}{240} f''_{-1/4} - \frac{31}{60480} f'''_{-1/4} + \dots,$$

$$f_{-1/4}^{-1} = x' + \frac{1}{2} f_0 + \frac{1}{12} f'_0 - \frac{11}{720} f''_0 + \frac{191}{60480} f'''_0 + \dots,$$

причем скорости x' , y' , z' вычислялись как численным дифференцированием, так и по формулам эллиптического движения.

Начальные значения ряда вторых сумм были получены по формуле

$$f_0^{-2} = x_0 - \frac{1}{12} f_0 + \frac{1}{240} f_0^2 - \frac{31}{60480} f_0^3 + \dots$$

Для перехода от геоцентрических координат к барикентрическим (и обратно) использовались весьма удобные таблицы Расмуссена (Rasmussen, Hesselberg, 1954), дающие величины:

$$\bar{x}_0 = \frac{\sum_1 m_i x_i}{1 + \sum_1 m_i},$$

$$\bar{y}_0 = \frac{\sum_1 m_i y_i}{1 + \sum_1 m_i},$$

$$\bar{z}_0 = \frac{\sum_1 m_i z_i}{1 + \sum_1 m_i}$$

Таблица 7

Планета	m	$1:m$
Меркурий	0.00000014	7000000
Венера	0.00000246	406500
Земля	0.00000303	330000
Марс	0.00000333	3093500
Юпитер	0.00095479	1047.35
Сатурн	0.00028571	3500

с десятидневным интервалом с 1920 по 1960 г. Принятые значения планетных масс приведены в табл. 7.

Функция f вычислялась с 9 знаками после запятой, но при составлении таблицы сумм и разностей принималось во внимание только 8 знаков; возмущенные барикентрические координаты кометы получались с 7 знаками после запятой.

Интервал интегрирования был следующий: с 5 II 1943 по 18 VIII 1944 $\omega = 20$ дней (окрестность перигелия), с 18 VIII 1944 по 25 XII 1950 $\omega = 40$ дней.

Полученные в результате интегрирования возмущенные барикентрические координаты кометы и суммарные возмущающие ускорения от Юпитера и Сатурна приведены в табл. 8. Результаты сравнения с наблюдениями приведены в табл. 9.

§ 5. Составление нормальных мест

Полученные в предыдущем параграфе сравнения индивидуальных наблюдений кометы должны быть использованы для составления нормальных мест.

При выполнении настоящей работы возникла необходимость объединять в одно нормальное место большое число наблюдений, охватывающих значительный промежуток времени.

Таблица 8

Table with columns: № п.п., Дата (ис. пр.), x, y, z, X · 10^7, Y · 10^7, Z · 10^7. Rows include months from 1943 to 1946.

Таблица 8 (продолжение)

Table with columns: № п.п., Дата (ис. пр.), x, y, z, X · 10^7, Y · 10^7, Z · 10^7. Rows include months from 1947 to 1950.

Таблица 9

Table with columns: № нормального места, № п.п., Дата (ис. пр.), x_1000.0, y_1000.0, H-B (Δx, Δδ). Rows include months from 1943 to 1946.

Таблица 9 (продолжение)

№ пор-мального места	№ п.п.	Дата (с. вр.)	а _{1950.0}	b _{1950.0}	Н-В		
					Δz	Δδ	
1	7	Май 23.22056	12 ^h 06 ^m 53 ^s 01	+ 2 ^h 37 ^m 41 ^s 78	+0.17	- 0.5	
	8	25.14382	12 07 03.19	+ 2 36 11.6	+0.12	- 0.1	
	9	26.17004	12 07 10.01	+ 2 35 13.8	-0.01	+ 0.3	
	10	28.13160	12 07 25.98	+ 2 33 01.1	-0.15	+ 0.4	
	11	29.15793	12 07 36.22	+ 2 31 42.6	+0.30	+ 4.3	
	12	29.22423	12 07 36.81	+ 2 31 35.8	+0.02	- 0.5	
	13	30.89236	12 07 55.34	+ 2 29 09.3	+0.16	- 3.4	
	14	30.93056	12 07 55.65	+ 2 29 06.8	0.00	- 1.0	
	15	1.84306	12 08 20.77	+ 2 25 54.0	+0.42	- 6.6	
	16	4.19800	12 08 55.11	+ 2 21 33.8	-0.20	+ 1.7	
	17	5.13716	12 09 10.91	+ 2 19 37.2	+0.10	+ 0.9	
	18	8.22952	12 10 07.51	+ 2 12 35.8	+0.10	- 0.4	
	19	9.14035	12 10 25.90	+ 2 10 21.2	+0.10	+ 1.8	
	20	20.17860	12 15 04.91	+ 1 36 52.0	+0.04	- 2.2	
	21	22.19774	12 16 06.51	+ 1 29 36.0	-0.19	- 1.3	
	22	26.20551	12 18 18.31	+ 1 14 12.1	0.00	- 0.6	
	23	29.14240	12 20 02.28	+ 1 02 06.7	-0.05	0.0	
	24	29.15941	12 20 03.04	+ 1 02 02.9	+0.10	+ 0.4	
	25	30.15917	12 20 39.43	+ 0 57 47.6	-0.15	- 0.2	
	26	2.14278	12 21 55.06	+ 0 49 04.5	+0.17	- 1.4	
	27	5.19244	12 23 55.41	+ 0 35 13.3	-0.14	- 0.6	
	1944 г.						
	2	28	Январь 23.46071	16 09 41.56	-17 28 57.7	+0.04	+ 1.1
		29	23.48015	16 09 42.62	-17 28 58.6	-0.03	+ 3.8
		30	30.46462	16 10 27.82	-17 40 55.3	-0.05	- 0.9
		31	4.46506	16 21 00.87	-17 47 49.0	+0.04	+ 0.9
		32	22.44398	16 48 08.89	-17 54 42.7	+0.02	- 0.3
33		23.47176	16 48 21.19	-17 53 53.9	-0.05	- 2.7	
34		24.42111	16 48 31.69	-17 53 00.6	-0.04	+ 1.4	
35		1.46929	16 42 11.92	-17 00 48.7	-0.09	+ 0.3	
36		1.48131	16 42 11.57	-17 00 47.5	-0.10	+ 0.3	
37		29.30185	16 25 13.75	-16 13 49.1	0.00	+ 0.3	
38		14.16182	16 15 01.14	-15 53 46.2	-0.05	+ 0.5	
39		14.17640	16 15 00.57	-15 53 46.1	-0.08	- 0.9	
40		15.16977	16 15 25.39	-15 52 49.8	-0.15	- 0.4	
41		20.16191	16 11 37.75	-15 48 46.6	-0.15	0.0	
42		21.17170	16 11 05.83	-15 48 05.9	-0.12	+ 0.2	
43		28.35391	16 07 41.00	-15 44 47.6	-0.18	+ 1.0	
44		30.22900	16 06 54.60	-15 44 23.2	-0.10	+ 0.9	
45		30.28040	16 06 53.28	-15 44 22.3	-0.14	+ 1.3	
46		14.14062	16 02 48.59	-15 47 24.9	(-1.15)	(+ 6.2)	
47		16.13962	16 02 29.71	-15 48 41.3	(-0.11)	(+ 14.8)	
48	21.15127	16 01 57.30	-15 42 55.5	-0.04	- 0.2		
1945 г.							
3	49	Апрель 14.45035	19 54 34.20	-17 36 30.5	-0.44	- 1.3	
	50	14.46389	19 54 34.57	-17 36 38.5	-0.44	- 2.6	
	51	11.45584	20 02 13.93	-17 02 55.4	-0.48	- 1.0	
	52	12.41401	20 02 18.21	-17 02 17.8	-0.59	- 0.9	
	53	13.42782	20 02 21.86	-17 01 40.2	-0.49	+ 0.2	
	54	Июль 4.27745	19 45 34.01	-17 38 24.3	(-0.51)	(+ 5.1)	
	55	4.29968	19 45 33.15	-17 38 27.7	(-0.71)	(+ 4.6)	
	56	4.34451	19 45 31.67	-17 38 39.5	(-0.61)	(+ 5.0)	
	57	4.38806	19 45 29.81	-17 38 44.7	(-0.63)	(+ 2.2)	
	58	31.25347	19 28 37.48	-18 31 00.0	-0.63	+ 0.9	
	59	31.30972	19 28 35.50	-18 31 07.2	-0.57	+ 0.2	
	60	3.16401	19 26 57.13	-18 36 41.7	(-0.81)	(- 2.3)	
	61	3.17685	19 26 56.79	-18 36 42.1	(-0.81)	(+ 0.2)	

Таблица 9 (продолжение)

№ пор-мального места	№ п.п.	Дата (с. вр.)	а _{1950.0}	b _{1950.0}	Н-В	
					Δz	Δδ
3	62	Август 4.15465	19 ^h 26 ^m 24 ^s 73	-18 ^h 38 ^m 30 ^s 75	(-0.14)	(+ 3.0)
	63	Сентябрь 29.16163	19 16 41.37	-19 49 15.8	+ 0.53	+ 1.0
	64	29.21788	19 16 42.27	-19 49 17.3	-0.45	- 0.1
1946 г.						
4	65	Июнь 29.42203	22 38 37.52	- 7 52 02.7	-0.31	- 1.3
	66	30.38157	22 38 34.92	- 7 52 26.0	-0.37	- 0.4
	67	Июль 1.38521	22 38 31.40	- 7 53 20.0	-0.38	- 2.1
	68	4.40542	22 38 15.79	- 7 55 55.6	-0.42	+ 0.9
	69	24.30686	22 33 30.40	- 8 31 58.6	(-1.99)	(- 0.9)
	70	25.37219	22 33 06.82	- 8 34 46.7	(-1.94)	(- 1.5)
	71	26.38314	22 32 43.71	- 8 37 30.6	(-1.94)	(- 2.0)
	72	27.37466	22 32 20.45	- 8 40 15.2	(-1.88)	(- 2.2)
	73	28.31887	22 31 59.24	- 8 42 52.9	-0.37	- 1.5
	74	28.32060	22 31 57.96	- 8 42 54.7	(-1.57)	(+ 0.5)
	75	28.36192	22 31 58.17	- 8 43 02.1	-0.35	- 1.4
	76	31.30383	22 30 41.80	- 8 51 45.8	(-1.56)	(- 4.3)
	77	Август 22.28850	22 19 16.49	-10 09 03.2	(-0.40)	(+ 2.3)
78	22.34336	22 19 14.54	-10 09 17.0	(-0.43)	(+ 1.0)	
79	26.24392	22 01 07.86	-12 08 45.4	-0.59	- 2.2	
80	26.30156	22 01 06.46	-12 08 55.4	-0.62	- 3.3	
1947 г.						
5	81	Июль 23.35613	1 06 40.76	+ 4 49 33.6	(+0.36)	(+ 14.0)
	82	24.41038	1 06 54.58	+ 4 49 48.3	+0.42	+ 2.2
	83	24.45760	1 06 55.16	+ 4 49 50.1	+0.40	- 1.3
	84	24.36806	1 07 06.45	+ 4 50 05.5	(+0.54)	(+ 0.4)
	85	Август 23.94112	1 07 06.80	+ 4 22 00.1	+0.47	+ 2.5
	86	23.44759	1 07 06.19	+ 4 21 53.0	+0.56	+ 2.7
	87	24.42569	0 54 25.61	+ 2 35 12.5	+0.64	+ 2.2
	88	24.48194	0 54 23.64	+ 2 34 55.9	+0.52	+ 0.3
	89	10.26588	0 45 25.98	+ 1 29 58.0	(+0.14)	(+ 4.5)
	90	10.15146	0 45 26.82	+ 1 29 56.9	(+0.71)	(+ 5.8)
	91	Ноябрь 7.24373	0 31 21.61	- 0 04 02.8	+0.41	+ 2.9
	92	7.20350	0 31 20.19	- 0 04 09.8	+0.44	+ 4.1
	93	Дектябрь 12.02422	0 26 54.43	- 0 23 10.3	(+0.71)	(+ 1.3)
	94	12.07561	0 26 54.25	- 0 23 07.4	(+0.15)	(+ 1.0)
1948 г.						
6	95	Сентябрь 3.41465	4 08 13.53	+16 47 52.3	+2.45	+ 6.9
	96	5.39792	4 08 58.59	+16 47 37.6	+2.41	+ 6.1
	97	6.41606	4 09 10.37	+16 47 27.7	+2.58	+ 8.3
	98	1.39385	4 12 55.65	+16 27 12.1	(+2.81)	(+ 14.0)
	99	2.29292	4 12 55.42	+16 25 53.7	+2.83	+ 8.5
	100	9.44347	4 11 51.61	+16 14 40.2	+2.95	+ 9.3
	101	9.49486	4 11 50.88	+16 14 35.1	+2.85	+ 9.2
	102	6.98508	3 59 24.08	+15 13 53.1	+3.14	+ 10.4
	103	7.02603	3 59 22.32	+15 13 27.5	+3.03	+ 10.8
	104	24.91094	3 47 23.20	+14 31 20.2	+3.18	+ 10.0
105	24.95802	3 47 21.25	+14 31 14.4	+3.22	+ 10.3	
106	27.12468	3 45 52.06	+14 26 33.4	+3.09	+ 10.1	
107	27.13683	3 45 51.59	+14 26 31.6	+3.14	+ 9.8	
1949 г.						
108	Январь 18.06809	3 25 43.42	+13 58 14.3	(+0.07)	(+ 10.8)	
109	18.07955	3 25 43.46	+13 58 14.6	(+0.07)	(+ 10.5)	
110	22.09292	3 26 04.29	+14 04 10.9	(+2.35)	(+ 11.7)	

Таблица 9 (продолжение)

№ нормального места	№ п.п.	Дата (ис. пр.)	$\alpha_{1950.0}$	$\delta_{1950.0}$	Н—В	
					$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
6	111	Январь 28.19229	$3^{\text{h}}27^{\text{m}}05^{\text{s}}.92$	$-14^{\circ}15'10.7''$	+2.57	+ 8.0
	112	28.23694	$3^{\text{h}}27^{\text{m}}06.52$	$-14^{\circ}15'16.8''$	+2.62	+11.8
	113	29.11109	$3^{\text{h}}27^{\text{m}}18.51$	$-14^{\circ}17'02.2''$	(+2.39)	(+ 8.6)
	114	30.06149	$3^{\text{h}}27^{\text{m}}32.84$	$-14^{\circ}19'00.4''$	+2.67	+ 7.9
	115	Февраль 17.09054	$3^{\text{h}}34^{\text{m}}49.12$	$-15^{\circ}05'38.4''$	+2.42	+13.3
	116	18.07779	$3^{\text{h}}35^{\text{m}}21.67$	$-15^{\circ}08'34.6''$	(+2.78)	(+12.1)
7	1950 г.					
	117	Февраль 8.27799	$7^{\text{h}}56^{\text{m}}54.98$	$+17^{\circ}48'46.8''$	+7.80	-15.2
	118	8.30924	$7^{\text{h}}56^{\text{m}}53.86$	$+17^{\circ}48'52.0''$	+7.86	-15.4
	119	11.89380	$7^{\text{h}}54^{\text{m}}48.74$	$+17^{\circ}58'58.1''$	(+7.57)	(-15.3)
	120	11.93672	$7^{\text{h}}54^{\text{m}}47.26$	$+17^{\circ}59'05.3''$	+7.80	-15.8
	121	16.94236	$7^{\text{h}}52^{\text{m}}11.19$	$+18^{\circ}12'28.8''$	+7.77	-15.0
	122	9.17326	$7^{\text{h}}46^{\text{m}}21.22$	$+18^{\circ}54'49.0''$	+7.20	-12.7
	123	9.20104	$7^{\text{h}}46^{\text{m}}21.07$	$+18^{\circ}54'51.8''$	+7.20	-12.6
	124	14.10639	$7^{\text{h}}46^{\text{m}}11.61$	$+19^{\circ}01'49.8''$	+6.97	-11.4
	125	15.10538	$7^{\text{h}}46^{\text{m}}13.44$	$+19^{\circ}03'04.5''$	+6.98	-12.1
	126	15.16682	$7^{\text{h}}56^{\text{m}}49.73$	$+19^{\circ}12'18.1''$	(-8.54)	(- 9.9)
	127	17.14473	$7^{\text{h}}58^{\text{m}}06.59$	$+19^{\circ}10'53.7''$	(-2.39)	(-11.0)

Примечание. Взято в скобки величины Н—В при образовании нормальных мест по внимание не принимались.

Основная идея излагаемого ниже метода сообщена нам старшим научным сотрудником ИТА АН СССР С. Г. Маковером.

Рассмотрим, каким образом возникает разность Н—В для сферических координат, причем рассмотрим только одну из этих координат, заметив, что все сказанное ниже одинаково применимо к обеим:

Будем считать, что $\Delta\alpha$ весьма малая величина. Тогда можно записать

$$\Delta\alpha = k \frac{f(\Delta x, \Delta y, \Delta z)}{r}$$

где k — коэффициент пропорциональности, $f(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ — некоторая линейная функция от разностей действительных прямоугольных координат кометы и прямоугольных координат, вычисленных по исправляемым элементам. Очевидно, что для больших значительных промежутков времени функция $f(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ будет величиной постоянной или, по крайней мере, будет расти пропорционально времени.

Величина r изменяется сравнительно быстро даже для малых промежутков времени. Следовательно, если $f(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ меняется незначительно, $\Delta\alpha$ будет все же изменяться, так как изменяется r . Легко видеть, что целесообразно при составлении нормальных мест освободить величины $\Delta\alpha$ от влияния быстро изменяющегося расстояния кометы от наблюдателя. В конечном счете это приведет к линейному ходу поправок Н—В для сферических координат.

Допустим, что мы имеем ряд невязок, данных в функции от времени

$$\begin{matrix} \Delta\alpha_1, \Delta\alpha_2, \dots, \Delta\alpha_n \\ \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n \\ t_1, t_2, \dots, t_n \end{matrix}$$

Обозначим через A целое число, ближайшее к

$$\rho = \max(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$$

и введем в рассмотрение величины

$$v_i = \frac{\rho_i}{A} < 1.$$

Очевидно, что указанной ранее линейной зависимостью от времени будут обладать величины

$$\Delta\alpha_i \cdot v_i.$$

Нормировка величин ρ_i введена с тем, чтобы не увеличивать дисперсии остатков $\Delta\alpha_i$. В качестве примера рассмотрим составление нормального места № 6 по наблюдениям 1948 и 1949 гг. (табл. 10). Поскольку величины $\Delta\alpha_i \cdot v_i$ и $\Delta\delta_i \cdot v_i$ практически постоянны, для поправки нормального места можно принять их среднее значение. Вычисляя затем значение v для момента нормального места, получим окончательно

$$1948 \text{ Ноябрь } 25.0 \Delta\alpha = -47^{\text{m}}22 \pm 1^{\text{m}}00 \\ \Delta\delta = + 9^{\text{m}}34 \pm 0^{\text{m}}81$$

Таблица 10

Невязки наблюдений нормального места № 6

Дата	ρ_i	$\Delta\alpha_i$	$\Delta\delta_i$	v_i	$\Delta\alpha_i v_i$	$\Delta\delta_i v_i$	
1948 Сентябрь	3	3.743	+2.945	+ 6.9	0.935	+2.129	
	5	3.712	2.41	6.1	0.927	2.24	
	6	3.696	2.58	8.3	0.923	2.38	
	Октябрь 2	3.313	2.83	7.5	0.827	2.34	
	9	3.221	2.95	9.3	0.905	2.29	
	9	3.221	2.85	9.2	0.905	2.29	
1948 Ноябрь	6	2.966	3.14	10.4	0.742	2.33	
	7	2.965	3.03	10.8	0.742	2.23	
	24	2.919	3.18	10.0	0.730	2.32	
	24	2.919	3.22	10.3	0.730	2.34	
	27	2.920	3.09	10.1	0.730	2.26	
	27	2.920	3.14	9.8	0.730	2.29	
	1949 Январь	28	3.345	—	8.0	0.862	—
	28	3.345	2.62	—	0.862	2.26	
	29	3.458	—	8.6	0.866	—	
	30	3.470	2.67	+ 7.9	0.867	2.31	
	Февраль 17	3.719	+2.42	—	0.930	+2.25	

Применение этого способа при составлении нормальных мест кометы Отерга 3 позволило все наблюдения одной оппозиции объединить в одно нормальное место. Сведения о нормальных местах и принятых уклонениях приведены в табл. 11 и 12.

Таблица 11

Нормальные места кометы Отерга 3

№ п.п.	Дата	$\alpha_{1950.0}$	$\delta_{1950.0}$	n
1	1943 Июнь 5.0	$12^{\text{h}}09^{\text{m}}11^{\text{s}}.58$	$+ 2^{\circ}19'42.75''$	27
2	1944 Апрель 20.0	$16^{\text{h}}46^{\text{m}}45.11''$	$-17^{\circ}19'40.9''$	19
3	1945 Июль 4.0	$19^{\text{h}}45^{\text{m}}44.84''$	$-17^{\circ}38'05.0''$	12
4	1946 Сентябрь 17.0	$22^{\text{h}}05^{\text{m}}09.44''$	$-11^{\circ}42'01.3''$	10
5	1947 Сентябрь 12.0	$1^{\text{h}}00^{\text{m}}39.23''$	$+ 3^{\circ}23'47.6''$	8
6	1948 Ноябрь 25.0	$3^{\text{h}}47^{\text{m}}21.13''$	$+14^{\circ}31'11.6''$	16
7	1950 Февраль 8.0	$7^{\text{h}}57^{\text{m}}05.93''$	$+17^{\circ}47'47.9''$	8

Таблица 12

Уклонения Н—В для нормальных мест

№ п.п.	$\Delta\alpha$	ϵ_α	$\Delta\delta$	ϵ_δ
1	+ 0.09	$\pm 1^{\text{m}}80$	- 0.51	$\pm 1^{\text{m}}40$
2	- 0.86	$\pm 1^{\text{m}}04$	+ 0.40	$\pm 1^{\text{m}}27$
3	- 8.96	$\pm 1^{\text{m}}52$	- 0.61	$\pm 1^{\text{m}}16$
4	- 8.65	$\pm 0^{\text{m}}58$	- 2.58	$\pm 0^{\text{m}}62$
5	+ 7.20	$\pm 0^{\text{m}}28$	+ 2.04	$\pm 1^{\text{m}}34$
6	+ 47.22	$\pm 1^{\text{m}}00$	+ 9.84	$\pm 0^{\text{m}}81$
7	+117.72	$\pm 0^{\text{m}}72$	-15.61	$\pm 1^{\text{m}}03$

§ 6. Улучшение элементов орбиты

Для улучшения элементов орбиты был избран метод Эккерта—Брауэра (Самойлова-Яхонтова, 1945). Как известно, условные уравнения можно записать в форме произведения двух краковиванов

$$\begin{pmatrix} \Delta \alpha \cos \delta \\ \Delta \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sin \alpha}{p} & -\frac{\cos \alpha \sin \delta}{p} \\ \frac{\cos \alpha}{p} & -\frac{\sin \alpha \sin \delta}{p} \\ 0 & \frac{\cos \delta}{p} \end{pmatrix},$$

причем краковиван вариаций координат имеет вид

$$\begin{matrix} \delta M_0 & \delta \psi_x & \delta \psi_y & \delta \psi_z & \delta a/a & \delta e \\ \delta x = \frac{x'}{n} & 0 & z & -y & x - \frac{3}{2} x't & Hx + K_1 \frac{x'}{n}, \\ \delta y = \frac{y'}{n} & -z & 0 & x & y - \frac{3}{2} y't & Hy + K_1 \frac{y'}{n}, \\ \delta z = \frac{z'}{n} & y & -x & 0 & z - \frac{3}{2} z't & Hz + K_1 \frac{z'}{n}. \end{matrix}$$

Несколько удобнее от поправок элементов $\delta a/a$ и δe перейти к поправкам элементов δl и $\delta \varphi$. Пользуясь основными соотношениями, связывающими указанные элементы:

$$n = ka^{-3/2}, \quad e = \sin \varphi,$$

легко получить вид краковивана вариаций координат для этих элементов:

$$\begin{matrix} \delta M_0 & \delta \psi_x & \delta \psi_y & \delta \psi_z & \delta n & \delta \varphi \\ \delta x = \frac{x'}{n} & 0 & z & -y & \frac{x'}{n} t - \frac{2}{3} \frac{x}{n} & H_1 x + K_1 \frac{x'}{n}, \\ \delta y = \frac{y'}{n} & -z & 0 & x & \frac{y'}{n} t - \frac{2}{3} \frac{y}{n} & H_1 y + K_1 \frac{y'}{n}, \\ \delta z = \frac{z'}{n} & y & -x & 0 & \frac{z'}{n} t - \frac{2}{3} \frac{z}{n} & H_1 z + K_1 \frac{z'}{n}, \end{matrix}$$

причем

$$H_1 = \left(1 - \frac{r}{p}\right) \operatorname{ctg} \varphi - \frac{4}{\sin 2\varphi},$$

$$K_1 = \left(1 - \frac{r}{p}\right) \operatorname{ctg} \varphi \frac{xx' + yy' + zz'}{a^2 n}.$$

При составлении условных уравнений оказалось, что величины δM_0 и $\delta \psi_z$ разделяются плохо, поэтому были введены новые неизвестные $\delta M_0 + \delta \psi_z$ и $\delta \psi_x$ по формуле

$$a \delta M_0 + b \delta \psi_z = a(\delta M_0 + \delta \psi_z) + (b - a) \delta \psi_x.$$

Все полученные условные уравнения были приведены к однородности. Коэффициенты условных уравнений даны в табл. 13.

При составлении системы нормальных уравнений все условные уравнения считались равновесными. Нормальная система (см. табл. 14) была решена с помощью матрицы по формулам, предложенным С. Г. Маковером (1956). Система решалась дважды: первый раз при произвольном расположении неизвестных в нормальных уравнениях, вто-

Таблица 13

Коэффициенты условных уравнений (приведенные к однородности)

№ п. п.	$\delta M_0 + \delta \psi_z$	$\delta \psi_x$	$\delta \psi_y$	$\frac{1}{3} \delta \psi_z$	$2000 \delta n$	$2\delta \varphi$	$100L$
A	1	+1.3250	-0.0846	-0.0034	-0.6627	-0.1230	+0.6996
	2	+1.2172	-0.1137	-0.3436	-0.1023	+0.1553	+1.2136
	3	+1.0359	+0.1870	-0.3761	+0.5640	+0.3409	+0.7324
	4	+0.9084	+0.1888	-0.1034	+0.9840	+0.4740	-0.0323
	5	+0.9740	-0.0347	-0.0094	+0.8535	+0.7207	-0.7499
	6	+1.3325	-0.2025	-0.3099	-0.1464	+1.2494	-1.7051
	7	+1.7576	+0.2000	-0.3567	-1.3611	+2.0174	-0.7092
B	1	-0.4728	-0.3285	+1.0875	+1.4532	+0.0481	-0.2371
	2	-0.1726	-1.1684	+0.5379	-0.7140	-0.0184	-0.1690
	3	+0.1273	-1.1844	-0.5192	-0.3223	+0.0954	+0.0336
	4	+0.2677	-0.5098	-1.1509	-0.3688	+0.1385	-0.0006
	5	+0.3465	+0.2076	-1.2490	-1.0620	+0.2554	-0.2649
	6	+0.2808	+1.1288	-0.7140	-0.8271	+0.2584	+0.3634
	7	-0.2312	+1.1267	+0.7848	-0.8823	-0.2900	+0.0956

Примечание. Буквой А отмечены уравнения по прямому восхождению, буквой Б — по склонению. Свободные члены выносятся в правые части уравнений.

Таблица 14

Коэффициенты нормальных уравнений

$\delta M_0 + \delta \psi_z$	$\delta \psi_x$	$\delta \psi_y$	$\frac{1}{3} \delta \psi_z$	$2000 \delta n$	$2\delta \varphi$	$100L$
+11.5486	+0.3276	-3.7748	-3.2066	+6.9804	-1.5087	+2.5427
—	+5.7588	-0.0469	-0.5172	+0.1695	-1.3382	+0.0351
—	—	+6.3017	+6.0390	-2.2164	+1.1912	-0.6371
—	—	—	-10.4133	-2.4111	+1.4848	-1.8833
—	—	—	—	+6.7706	-4.2571	+2.8853
—	—	—	—	—	+8.9668	-1.8607

рой раз — при расположении неизвестных в порядке убывания весовых коэффициентов, как это рекомендовано Д. К. Куликовым (Сакк и Куликов, 1951). В результате решения нормальной системы были получены следующие значения неизвестных и их квадратических ошибок:

$$\begin{aligned} \delta M_0 + \delta \psi_z &= -6.97 \pm 0.93, \\ \delta \psi_x &= -1.34 \pm 0.67, \\ \delta \psi_y &= +25.17 \pm 0.79, \\ \frac{1}{3} \delta \psi_z &= -22.87 \pm 0.55, \\ 2000 \delta n &= +51.75 \pm 1.40, \\ 2\delta \varphi &= +2.89 \pm 0.75. \end{aligned}$$

Поправки элементов ориентации были вычислены по известным формулам, дающим связь этих поправок с компонентами элементарного поворота.

$$\begin{aligned} \delta i &= \cos \Omega \delta \psi_x + \sin \Omega (\delta \psi_y \cos \varepsilon + \delta \psi_z \sin \varepsilon), \\ \sin i \delta \omega &= \sin \Omega \delta \psi_x - \cos \Omega (\delta \psi_y \cos \varepsilon + \delta \psi_z \sin \varepsilon), \\ \delta \Omega &= -\cos i \delta \omega - \sin i \delta \psi_y + \delta \psi_z \cos \varepsilon. \end{aligned}$$

Ниже приводятся поправки элементов с их средними квадратическими ошибками:

$$\begin{aligned} \delta M_0 &= +61.64 \pm 2.43, \\ \delta \omega &= -62.95 \pm 9.42, \\ \delta \Omega &= -10.16 \pm 9.12, \\ \delta i &= -0.55 \pm 0.68, \\ \delta \varphi &= -1.45 \pm 0.38, \\ \delta n &= -0.025785 \pm 0.000696. \end{aligned}$$

Обращают на себя внимание большие по величине средние квадратические ошибки элементов Ω и ω . Однако это легко объяснить, обратив внимание на малый наклон плоскости орбиты к эклиптике. Принимая эти поправки, получаем окончательную систему элементов:

Эпоха и оскуляция 1943 Окт. 3.0. в.р.

$$\begin{aligned} T &= 1942, \text{ Авг. } 22.19473 \pm 67 \\ M_0 &= 50^\circ 54' 39.07 \pm 2.43. \\ \omega &= 354^\circ 47' 17.89 \pm 9.42 \\ \Omega &= 155^\circ 10' 04.54 \pm 9.12 \\ i &= 3^\circ 59' 23.23 \pm 0.68 \\ \varphi &= 8^\circ 18' 15.67 \pm 0.38. \\ n &= 449.979561 \pm 0.000696 \\ a &= 3.9616474 \pm 409. \end{aligned} \quad 1950.0$$

В качестве заключительного контроля было проведено сравнение координат, полученных повторным интегрированием с нормальными

Таблица 15
Остаточные поправки, нормальных мест

№ нормального места	Пр. усложним. уравнениям		Поправки повторного интегрирования	
	$\Delta \alpha \cos \delta$	$\Delta \delta$	$\Delta \alpha \cos \delta$	$\Delta \delta$
1	-1.6	-0.2	-1.6	-0.2
2	+2.3	+0.7	+2.5	+0.6
3	+1.6	+1.8	+1.7	+1.6
4	-1.1	+0.6	-1.0	+0.8
5	-1.3	-0.5	-1.4	-0.7
6	-0.3	+0.1	-0.3	+0.2
7	-0.5	-0.7	-0.2	-1.0
[σ]	18.39	—	—	—
σ_n	± 1.51	—	—	—

темы Дубяго—Уиппла (Дубяго, 1942; Whipple, 1950), объясняющей аномалии в движении короткопериодических комет.

В самом деле, согласно указанной гипотезе физические процессы в кометах, приводящие к возникновению аномалий в их движении, наиболее интенсивно протекают при прохождении кометы через перигелий. Если сравнить перигелийные расстояния комет, для которых твердо установлено наличие аномалий: Энке ($q_0 = 0.340$), Брука ($q_0 = 0.484$), Вольфа ($q_0 = 0.405$), Дарре ($q_0 = 0.611$) и др. — с перигелийным расстоянием кометы Отерма ($q_0 = 3.39$), то становится ясным, что все физические процессы, вызывающие аномалии в движении комет, для кометы Отерма 3 по меньшей мере на один-

два порядка менее интенсивны, что и объясняет отсутствие заметных аномалий в движении кометы Отерма 3.

Полученная нами система элементов кометы Отерма 3 будет использована для исследования тесного сближения кометы с Юпитером перед открытием. В этой связи интересно вычислить средние ошибки исходных прямоугольных координат и скоростей, полагаемых в основу нового интегрирования (табл. 16).

Таблица 16
Поправки исходных прямоугольных координат (для повторного интегрирования)

Дата	10^{8x}	10^{8y}	10^{8z}
1943 Август 24	+1920	-2036	-848
Сентябрь 13	+1348	-1954	-892
Октябрь 3	+771 ± 902	-1867 ± 1677	-931 ± 1231
Ноябрь 23	+194	-1779	-965
Декабрь 12	-388	-1687	-994

Как известно, вопрос о нахождении средних ошибок сводится к вопросу о нахождении весовых коэффициентов неизвестных. Наиболее простой способ определения весовых коэффициентов дан Н. И. Идельсоном. Этот же прием им был обобщен для нахождения весовых коэффициентов линейных функций от неизвестных. Однако существовавшая путаница в этом вопросе привела к тому, что формулы, данные Н. И. Идельсоном (1943, 1947), не нашли того широкого применения, которого они заслуживают. Полную ясность в рассматриваемый вопрос внесла работа С. Г. Маковского (1956), в которой им дан новый, более простой вывод формул для определения весовых коэффициентов неизвестных и линейных функций от неизвестных.

Воспользовавшись формулами, приведенными в работе С. Г. Маковского, мы получили средние ошибки элементов, приведенные выше, а также средние ошибки исходных прямоугольных координат (для момента оскуляции), представляя последние как линейные функции поправок. Средние ошибки исходных координат приводятся ниже.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \pm 902 \cdot 10^{-8}, \\ \sigma_y &= \pm 1677 \cdot 10^{-8}, \\ \sigma_z &= \pm 1231 \cdot 10^{-8}. \end{aligned}$$

Весьма интересно оценить средние ошибки начальных членов рядов первых и вторых сумм.

Поскольку в формуле для определения начального ряда первых сумм основным является член Δ_{10} , для определения порядка средней ошибки f_{10} достаточно определить ошибку Δ_{10} или, что то же самое, определить ошибку величины $\delta x_{10} = \delta x_1 - \delta x_0$. Представляя последнюю величину как линейную функцию неизвестных и применяя описанный выше способ определения весовых коэффициентов, мы получили

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta x} &= \pm 53 \cdot 10^{-8}, \\ \sigma_{\Delta y} &= \pm 87 \cdot 10^{-8}, \\ \sigma_{\Delta z} &= \pm 112 \cdot 10^{-8}. \end{aligned}$$

Эти ошибки в среднем в 16 раз меньше соответствующих ошибок исходных координат. Начальные члены ряда вторых сумм, очевидно, имеют средние ошибки, равные средним ошибкам начальных координат.

ЛИТЕРАТУРА

- Дубяго А. Д. 1942. О некоторых вопросах движения, структуры и распада комет. Астр. ж., 19, 1, 2-3.
- Идельсон Н. И. 1943. О вычислении искомых неизвестных в способе наименьших квадратов. Астр. ж., 20, 3.
- Идельсон Н. И. 1947. Способ наименьших квадратов и теория математической обработки наблюдений. Геодезиздат, М.
- Казимирчак-Полонская Е. И. 1950. Тесные сближения комет с планетами и планетоцентрическое движение комет. Дисс.
- Маковер С. Г. 1955. Комета Энке—Бакунда. Труды ИТА, 4.
- Маковер С. Г. 1956. Решение системы нормальных уравнений при помощи матриц. Астр. ж., 33, 3.
- Сакк В. В. и Д. К. Куажов. 1951. Определение окончательной орбиты кометы 1925 VII (Шайн—Комас-Солов). Бюлл. ИТА, 4, 9(62).
- Самойлова-Яхонтова Н. С. 1945. Исправление эллиптических орбит. Бюлл. Астр. Инст., 3, 53.
- Herbig G. H., D. F. McMullin. 1943. Comet Oterma 1943g: a minor planet? Publ. Astr. Soc. Pac., 55, 326.
- Hergat P. 1947. The orbit of comet 1943g (Oterma). A. J., 53, 1165.
- Kahfstedt A. 1943. Bemerkung über 334 Chicago. B. Z., 23, 18.
- Merton G. 1927. The periodic comet Grigg-Skiellerup. Mem. Roy. Astr. Soc., 64 3.
- Rasmussen H. Q. 1943. Circ. U. A. I., 356.
- Rasmussen H. Q., O. K. Hesselberg. 1954. An appropriate method for integration of the motion of periodic comets. Publ. Kobenhavn Obs., 163.
- Whipple F. I. 1950. A comet model I. Ap. J., 111, 375.

Поступило в Редакцию
23 августа 1957 г.

Бюллетень Института Теоретической Астрономии

Т. VII

1958

№ 2 (85)

Исследование тесного сближения кометы Отерма 3 с Юпитером

А. В. Фокин

В работе исследуется тесное сближение кометы Отерма 3 с Юпитером в 1936—1937 гг. Доказано, что до сближения орбита кометы была расположена между орбитами Юпитера и Сатурна ($q_n = 5.4$ а. е., $q_A = 10.6$ а. е.) и потому комета не могла наблюдаться. После огромных возмущений от Юпитера во время тесного сближения кометная орбита расположилась между орбитами Марса и Юпитера, и комета была открыта в 1943 г.

ÉTUDE D'UN RAPPROCHEMENT ÉTROIT DE LA COMÈTE OTERMA 3 À JUPITER, par A. V. Fokine — L'article concerne les recherches sur le passage de la comète Oterma 3 par la sphère d'activité de Jupiter ayant eu lieu en 1936—1937. Il est démontré qu'avant ce rapprochement l'orbite cométaire était disposée entre l'orbite de Jupiter et celle de Saturne ($q_p = 5.4$ u. a., $q_A = 10.60$ u. a.); c'est pourquoi la comète ne pouvait être observée. Les perturbations immenses de Jupiter ont transformé l'orbite cométaire de telle façon qu'elle se trouva entre les orbites de Mars et de Jupiter, ce qui permit de découvrir la comète en 1943.

1. Иногда в своем гелиоцентрическом движении кометы значительно приближаются к большим планетам. В таких случаях, как впервые указал Даламбер, выгодно рассматривать комету как спутник планеты, а Солнце считать возмущающим телом.

Более конкретно развила эту идею Лаплас, который установил понятие сферы действия, т. е. той области пространства, в которой имеет смысл предложенное Даламбером рассмотрение. Полагая, что искомая область действительно сфера, и помещая комету между Солнцем и планетой (на одной прямой с ними), будем иметь:

$$F = \frac{k^2 M}{r^2}, \quad (1)$$

$$R = k^2 m \left[\frac{1}{p^2} - \frac{1}{(r-p)^2} \right], \quad (2)$$

$$F' = \frac{k^2 m}{p^2}, \quad (3)$$

$$R' = k^2 M \left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+p)^2} \right], \quad (4)$$

где F — сила притяжения Солнца на единицу массы,
 R — возмущающая сила от планеты на единицу массы,
 F' — сила притяжения планетой единицы массы,
 R' — возмущающая сила от Солнца на единицу массы,
 M — масса Солнца,
 m — масса планеты.

Тогда понятие сферы действия планеты математически можно определить следующим образом:

$$\frac{F}{R} = \frac{F'}{R'}, \quad (5)$$

113

откуда легко получить выражение для радиуса сферы действия

$$\rho = r \sqrt{\frac{5}{2} \left(\frac{m}{M} \right)^2} \quad (6)$$

Более точное рассмотрение вопроса о сфере действия планеты приводит к следующему выражению:

$$\rho = r \left(\frac{m^2}{\sqrt{1-\beta} \cos^2 \varphi} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (7)$$

где φ — угол при планете между направлениями на Солнце и комету. Это уравнение поверхности вращения, очень близкой к сфере. В самом деле,

$$\rho_{\max} = \frac{a}{m^{\frac{2}{3}}}, \quad \rho_{\min} = 2^{-\frac{1}{3}} m^{\frac{2}{3}} r,$$

откуда

$$\frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}} = 1.15.$$

Таким образом, радиус сферы действия планеты может быть вычислен и по другой формуле

$$\rho = r \sqrt{m^2}. \quad (8)$$

Для радиуса сферы действия Юпитера формулы (6) и (8) дают соответственно 0.280 и 0.322 а. е. Следует отметить, что радиус сферы действия планеты практически может приниматься значительно большим, чем дают соответствующие формулы. Большой ошибки от этого не произойдет.

Рассмотрим теперь, как преобразуются уравнения движения кометы при переходе от гелиоцентрической системы координат к планетоцентрической.

Пусть x, y, z — прямоугольные гелиоцентрические координаты кометы,

x_1, y_1, z_1 — гелиоцентрические координаты планеты,

ξ, η, ζ — планетоцентрические координаты кометы.

Уравнения гелиоцентрического движения кометы имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 \frac{x}{r^3} &= k^2 m_1 \left(\frac{x_1 - x}{r^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right), \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + k^2 \frac{y}{r^3} &= k^2 m_1 \left(\frac{y_1 - y}{r^3} - \frac{y_1}{r_1^3} \right), \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + k^2 \frac{z}{r^3} &= k^2 m_1 \left(\frac{z_1 - z}{r^3} - \frac{z_1}{r_1^3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Масса кометы считается равной нулю. Уравнения движения планеты будут:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + k^2 (1 + m_1) \frac{x_1}{r_1^3} &= 0, \\ \frac{d^2 y_1}{dt^2} + k^2 (1 + m_1) \frac{y_1}{r_1^3} &= 0, \\ \frac{d^2 z_1}{dt^2} + k^2 (1 + m_1) \frac{z_1}{r_1^3} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Согласно принятым обозначениям:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x - x_1, \\ \eta &= y - y_1, \\ \zeta &= z - z_1. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Принимая во внимание (10) и (11), получим из (9) дифференциальные уравнения планетоцентрического движения кометы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{dt^2} + k^2 m_1 \frac{\xi}{r^3} &= k^2 M \left(\frac{x_1}{r_1^3} - \frac{x}{r^3} \right), \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} + k^2 m_1 \frac{\eta}{r^3} &= k^2 M \left(\frac{y_1}{r_1^3} - \frac{y}{r^3} \right), \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + k^2 m_1 \frac{\zeta}{r^3} &= k^2 M \left(\frac{z_1}{r_1^3} - \frac{z}{r^3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Для того чтобы учесть возмущения от внутренних планет, достаточно перейти к барицентрической системе координат. Учитывая, кроме того, возмущения от внешних планет, получим окончательную форму дифференциальных уравнений планетоцентрического движения кометы при учете действия всех планет:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{dt^2} + k^2 m_1 \frac{\xi}{r^3} &= k^2 (1 + \sum_1 m_i) \left(\frac{x_1}{r_1^3} - \frac{x}{r^3} \right) + k^2 \sum_2 m_i \left(\frac{\xi_i - \xi}{\rho_i^3} - \frac{\xi_i}{r_i^3} \right), \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} + k^2 m_1 \frac{\eta}{r^3} &= k^2 (1 + \sum_1 m_i) \left(\frac{y_1}{r_1^3} - \frac{y}{r^3} \right) + k^2 \sum_2 m_i \left(\frac{\eta_i - \eta}{\rho_i^3} - \frac{\eta_i}{r_i^3} \right), \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + k^2 m_1 \frac{\zeta}{r^3} &= k^2 (1 + \sum_1 m_i) \left(\frac{z_1}{r_1^3} - \frac{z}{r^3} \right) + k^2 \sum_2 m_i \left(\frac{\zeta_i - \zeta}{\rho_i^3} - \frac{\zeta_i}{r_i^3} \right), \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где знак \sum_1 означает суммирование по внутренним планетам, а знак \sum_2 — суммирование по внешним планетам, кроме той, с которой сблизилась комета, ξ_i, η_i, ζ_i — планетоцентрические координаты внешней планеты,

$$\begin{aligned} \delta_i &= \sqrt{(\xi_i - \xi)^2 + (\eta_i - \eta)^2 + (\zeta_i - \zeta)^2}, \\ \rho_i &= \sqrt{\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2}. \end{aligned}$$

2. Полученная в нашей работе (Фокин, 1958) система элементов кометы будет использоваться для исследования обстоятельств тесного сближения ее с Юпитером.

От эпохи оскуляции 1943 Окт. 3.0 в. вр. дифференциальные уравнения барицентрического движения интегрировались с 20-дневным интервалом по второму методу Коуэла назад до 1939 Дек. 3.0 в. вр., когда расстояние кометы до Юпитера стало примерно 0.6 а. е. При этом учитывались возмущающие действия от Юпитера и Сатурна. Начиная с 1939 Дек. 3.0 в. вр., изучение движения кометы проводилось в планетоцентрической системе координат. Для контроля вычислений при переходе от одного метода к другому интегрирование на участке траектории было проведено в двух системах координат — барицентрической (начало координат в центре тяжести Солнца и четырех внутренних планет) и планетоцентрической (с началом в центре Юпитера).

Наибольшая разность координат кометы, полученных двумя указанными методами, не превышает $12 \cdot 10^{-8}$, что легко можно объяснить тем, что одновременно с переходом от гелиоцентрического метода к планетоцентрическому вместо таблиц Компе (Compe, 1933) стали пользоваться более точными таблицами движения Юпитера (Eckert a. others, 1951), полученными численным интегрированием на электронных машинах.

Одновременно с переходом к планетоцентрическому методу был совершен переход от 20-дневного интервала интегрирования к 10-дневному.

Возмущающими ускорениями от Сатурна при изучении планетоцентрического движения кометы оказалось возможным пренебречь, так как последние не превышали

8. 10°. Таким образом, интегрировались следующие уравнения планетоцентрического движения кометы:

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= -\omega^2 k^2 m_1 \xi r^{-3} + \omega^2 k^2 (1 + \sum_i m_i) x_1 r_1^{-3} - k^2 \omega^2 (1 + \sum_i m_i) x r^{-3}, \\ \omega^2 \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= -\omega^2 k^2 m_1 \eta r^{-3} + \omega^2 k^2 (1 + \sum_i m_i) y_1 r_1^{-3} - k^2 \omega^2 (1 + \sum_i m_i) y r^{-3}, \\ \omega^2 \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= -\omega^2 k^2 m_1 \zeta r^{-3} + \omega^2 k^2 (1 + \sum_i m_i) z_1 r_1^{-3} - k^2 \omega^2 (1 + \sum_i m_i) z r^{-3}, \end{aligned} \right\} (14)$$

где ξ, η, ζ — планетоцентрические координаты Юпитера, x_1, y_1, z_1 — барицентрические координаты Юпитера, x, y, z — барицентрические координаты кометы, m_1 — масса Юпитера ($m_1 = 1:1047.355$), $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ — расстояние от кометы до Юпитера, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ — расстояние от барицентра до кометы, $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ — расстояние от барицентра до Юпитера.

Все величины, стоящие в правых частях уравнений (14), вычислялись с девятью десятичными знаками. Член $\omega^2 k^2 (1 + \sum_i m_i) x_1 r_1^{-3}$, учитывающий действие барицентра на Юпитер, был вычислен заранее с 10-дневным интервалом на весь промежуток интегрирования.

В табл. 1 приводятся планетоцентрические координаты кометы Отерма 3 за весь период нахождения кометы в сфере действия Юпитера.

В заключение отметим, что применение планетоцентрического метода при исследовании тесного сближения кометы Отерма 3 с Юпитером позволило избежать последовательных приближений, которые неизбежны при изучении тесных сближений комет с планетами любыми гелиоцентрическими методами.

Таблица 1
Планетоцентрические координаты кометы Отерма 3

№ п.п.	Юл. ан.	ξ	η	ζ
1	242 8520.5	-0.0827588	-0.1699932	-0.2687010
2	8560.5	-0.0462967	-0.1645570	-0.2493681
3	8600.5	-0.0086401	-0.1579554	-0.2260952
4	8640.5	+0.0296229	-0.1493850	-0.1981158
5	8680.5	+0.0674027	-0.1378271	-0.1645985
6	8720.5	+0.1028236	-0.1220646	-0.1248324
7	8760.5	+0.1329187	-0.1008791	-0.0786913
8	8800.5	+0.1537257	-0.0736023	-0.0274259
9	8840.5	+0.1613961	-0.0409200	+0.0256906
10	8880.5	+0.1541491	-0.0051666	+0.0759547
11	8920.5	+0.1332586	+0.0305787	+0.1191402
12	8960.5	+0.1019899	+0.0537944	+0.1529460
13	9000.5	+0.0639033	+0.0930675	+0.1769566
14	9040.5	+0.0218860	+0.1179128	+0.1918889
15	9080.5	-0.0220121	+0.1384067	+0.1988885
16	9120.5	-0.0664875	+0.1549067	+0.1992669
17	9160.5	-0.1107913	+0.1678847	+0.1942391
18	9200.5	-0.1545894	+0.1778355	+0.1849080
19	9240.5	-0.1978422	+0.1852251	+0.1722315
20	9280.5	-0.2407324	+0.1904604	+0.1570169

В качестве примера можно привести работу М. А. Мерзляковой (1958) по изучению движения кометы 1948 IX Ашбрук—Джексона, в которой при исследовании гелиоцентрическим методом тесного сближения кометы с Юпитером понадобилось производить по 3—4 последовательных приближения при каждом шаге. Тесное сближение кометы Отерма 3 с Юпитером произошло при очень интересных обстоятельствах: Юпитер в момент встречи был вблизи своего перигелия, а комета — в окрестности афелия. Это привело к малой относительной скорости сближающихся тел, благодаря чему оскулирующие планетоцентрические элементы кометы оказались эллиптическими.

На основании проведенного интегрирования планетоцентрических уравнений движения нетрудно установить характер изменения оскулирующих планетоцентрических элементов. Наиболее интересными являются два элемента: большая полуось (a) и эксцентриситет (e). Для этих элементов из уравнений невозмущенного планетоцентрического движения легко получить следующие формулы

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{v^2}{m_1}, \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} e \sin E &= \frac{p p'}{\sqrt{a}}, \\ e \cos E &= \frac{v^2}{m_1} \rho - 1, \end{aligned} \right\} \text{(эллипс)} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} e \operatorname{sh} H &= \frac{p p'}{\sqrt{|a|}}, \\ e \operatorname{ch} H &= \frac{v^2}{m_1} \rho - 1, \end{aligned} \right\} \text{(гипербола)} \quad (17)$$

где e — расстояние от кометы до Юпитера, $v = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ — полная скорость кометы относительно Юпитера, $p p' = \xi \xi' + \eta \eta' + \zeta \zeta'$,

m_1 — масса Юпитера, E и H — эксцентриситетные аномалии соответственно в эллиптическом и гиперболическом движении.

При выводе формул (15)—(17) за единицу времени принято $\frac{1}{k}$ суток, где k — постоянная Гаусса. Результаты вычислений приводятся в табл. 2.

Из табл. 2 следует, что оскулирующие планетоцентрические элементы кометы становятся эллиптическими задолго до проникновения кометы в сферу действия и остаются эллиптическими некоторое время после выхода из сферы действия. Эксцентриситет и большая полуось достигают наименьших значений вблизи перигелия:

$$\text{Юл. ан. } 2\ 429\ 000.5, \quad a = 0.289, \quad e = 0.227.$$

Таким образом, комета Отерма 3 во время сближения движется в области внешних спутников Юпитера и имеет оскулирующие элементы, весьма близкие к соответствующим элементам внешних спутников.

Таблица 2

Юл. ан.	Планетоцентрические оскулирующие элементы кометы Отерма 3			
	a	e	q	p
2428600.5	0.406	0.319	0.283	0.276
8700.5	0.392	0.453	0.215	0.213
8800.5	0.346	0.503	0.172	0.173
8900.5	0.292	0.399	0.175	0.176
9000.5	0.289	0.227	0.223	0.210
9100.5	0.338	0.252	0.253	0.252
9200.5	0.536	0.369	0.339	0.296
9300.5	1.153	0.690	0.355	0.357

Таблица 3

Эпоха и оскуляция	Система		
	1936 Дек. 27.0	1938 Дек. 15.0	1943 Окт. 3.0
M_0	350°07'05".6	250°47'04".8	50°54'39".1
Ω	352 24 35.4	154 20 27.6	155 10 04.5
i	322 07 11.0	309 01 34.4	354 47 17.9
a	2 05 00.5	1 45 43.4	3 59 23.2
e	8.0528000	4.4211379	3.9616477
φ	19°11'47".6	8°41'33".0	8°13'15".7
n	155.26953	381.65420	449.97956
P (в годах)	22.85180	9.296866	7.896758

4. Одной из задач настоящей работы является установление влияния больших возмущений кометы при прохождении ее через сферу действия Юпитера на открытие

кометы в 1943 г. и выяснение причин, по которым комета не наблюдалась ранее 1943 г.

Ответ на поставленные вопросы дают приводимые ниже три системы элементов k_1 , k_2 и k_3 . Система k_1 вычислена для момента проникновения кометы в сферу действия Юпитера, система k_2 — для момента выхода из сферы действия и, наконец, система k_3 — для даты вблизи эпохи открытия кометы в 1943 г.

В результате интегрирования установлено, что комета вошла в сферу действия Юпитера 27 декабря 1936 г. и, приблизившись к нему на расстояние $\rho_{\text{min}} = 0.168$ а. е. (1937 Окт. 25.0), вышла из сферы действия 15 декабря 1938 г. Таким образом, комета Отерма 3 находилась внутри сферы действия Юпитера 718 дней, поставив тем самым своеобразный рекорд длительности пребывания в сфере действия.

Сводная таблица систем элементов кометы Отерма 3, отнесенная к 1950.0, дается в табл. 3.

До сближения с Юпитером орбита кометы Отерма 3 была полностью расположена между орбитами Юпитера и Сатурна ($q_{\text{J}} = 5.4$, $q_{\text{S}} = 10.6$) и поэтому, естественно, не могла наблюдаться. В результате огромных возмущений от Юпитера во время тесного сближения орбита кометы Отерма 3 была изменена до неузнаваемости. Большая полуось сократилась на 3.6 а. е., угол эксцентриситета уменьшился на 10° , линия узлов повернулась почти на 180° , огромные изменения претерпели и другие элементы. После этих преобразований новая орбита кометы Отерма 3 полностью расположилась между орбитами Марса и Юпитера, попав, таким образом, в ту область пространства, в которой достаточно яркие кометы могут наблюдаться, и была открыта в 1943 г.

Если бы наблюдались две кометы с элементами, какие имела комета Отерма 3 в моменты входа и выхода из сферы действия, то их можно было бы отождествить только с помощью критерия Тиссерана.

Как известно, критерий Тиссерана тождественности комет состоит в постоянстве выражения

$$a^{-1} + 2n'k^{-1}\sqrt{a(1-e^2)}\cos i = C_0,$$

где a — большая полуось орбиты кометы,
 e — эксцентриситет орбиты,
 i — наклон плоскости орбиты к эклиптике,
 n' — среднее суточное движение Юпитера,
 k — постоянная Гаусса.

Для системы элементов k_1 и k_2 получается соответственно:

$$C_0 = 0.57575 \quad \text{и} \quad C_0 = 0.57647,$$

что следует считать весьма хорошим согласием, если учесть, что при выводе критерия Тиссерана орбита Юпитера предполагалась круговой.

Применение критерия Тиссерана в нашем случае полезно еще и потому, что его выполнение гарантирует отсутствие в проведенных вычислениях по крайней мере грубых ошибок. Заметим еще, что элементы кометы Отерма 3 до сближения с Юпитером (система k_1) таковы, что, возможно, еще ранее комета Отерма 3 сближалась с Сатурном, во всяком случае такое сближение весьма вероятно. Однако вряд ли имеет смысл детально исследовать этот вопрос на базе полученных в настоящей работе элементов.

Предварительные вычисления, проведенные приближенными методами, показывают, что следующее сближение кометы Отерма 3 с Юпитером произойдет около 1961 г. Таким образом, ее настоящая орбита является только временной.

Исследование кометы Отерма 3 показывает, что ее движение служит яркой иллюстрацией правильности выводов Е. И. Казимирчак-Половской (1950), сделанных на основе изучения большого Кометного материала, о влиянии больших возмущений от Юпитера на открытие и утрату комет.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить сердечную благодарность доц. Е. И. Казимирчак-Половской за предложенную тему работы, проф. Н. С. Самойловой-Тихоновой и старшему научному сотруднику ИТА АН СССР С. Г. Маковеру за многочисленные ценные советы и постоянное внимание.

ЛИТЕРАТУРА

- Казимирчак-Половская Е. И. 1950. Тесные сближения комет с планетами и планетоцентрические движения комет. Дисс.
 Мерлякова М. А. 1958. Комета 1948 IX Ашбруна—Джексона. Булл. ИТА, 7, 2(85).
 Фокин А. В. 1958. Орбита кометы Отерма 3, 1942 VII по наблюдениям 1942—1950 гг. Булл. ИТА, 7, 2(85).
 Smart L. 1933. Planetary Coordinates, London.
 Eckert W. J., D. Brouwer, G. M. Clemence. 1951. Coordinates of the Five Outer Planets 1653—2060. Astr. Pap., 12.
 Поступило в Редакцию
 23 августа 1957 г.

Бюллетень Института Теоретической Астрономии

Т. VII

1958

№ 2 (85)

Комета 1948 IX Ашбрука—Джексона

М. А. Мерзлякова

Определены элементы кометы 1948 IX по наблюдениям 1948—1949 гг. и исследовано движение в период, предшествующий открытию. В 1945 г. комета имела тесное сближение с Юпитером (до 0.178 а. е.). В результате опрокинутых положений ее элементы значительно изменились. Комета, (до 0.178 а. е.), в результате опрокинутых положений ее элементы значительно изменились. Комета, принадлежащая к кометам группы Сатурна ($P=10.7$ лет), превратилась в типичную короткопериодическую комету семейства Юпитера ($P=7.5$ лет). Ее перигельное расстояние уменьшилось от 3.9 до 2.3 а. е., что и сделало возможным ее открытие в 1948 г.

PERIODIC COMET 1948 IX ASHBROOK—JACKSON, by M. A. Merzlyakova. — The elements of the comet based on the observations during 1948—1949 are determined and the prediscovery motion of the comet is investigated. In 1945 occurred a close approach of the comet to Jupiter (0.178 a. u.). The episodic perturbations changed the elements of the comet, shortened its period from 10.7 to 7.5 years and its perihelion distance from 3.9 to 2.3 a. u., so that the comet could be discovered in 1948.

Введение

Точные исследования движения периодических комет принадлежат к важным задачам небесной механики, имеющим значительный космогонический интерес, так как позволяют изучить основные закономерности движения комет. Эти исследования дают возможность установить в движении комет аномальные отклонения от закона тяготения Ньютона в форме векового ускорения или замедления среднего суточного движения и связанного с этим векового изменения эксцентриситета. Объяснение аномальных отклонений в движении периодических комет возможно только в результате тщательного изучения движения большого числа короткопериодических комет.

Исследование движения короткопериодических комет семейства Юпитера в периоды, предшествующие их открытию, позволяют выявить влияние больших возмущений элементов орбит комет во время тесных сближений с Юпитером на открытие и утерю комет.

Короткопериодическая комета Ашбрука—Джексона (1948 IX) принадлежит к классу тех комет, орбиты которых имеют небольшой эксцентриситет, малый наклон, короткий период и заключены между орбитами Марса и Юпитера. Эта комета интересна тем, что перед своим открытием она неоднократно подходила близко к Юпитеру, а в середине 1945 г. имела с ним тесное сближение. В это время ее орбита претерпела значительное изменение, что создало благоприятные условия для открытия кометы в 1948 г.

Первоначальные элементы орбиты кометы обнаружили сходство с элементами орбит утерянных комет Барнарда (1884 II) и Холмса (1892 III), поэтому было высказано предположение, что комета Ашбрука—Джексона может оказаться тождественной одной из указанных комет.

Предварительное исследование движения кометы, проведенное Л. Кенингемом вскоре после ее открытия, основано на весьма неточной системе элементов. Только получив окончательную орбиту кометы, можно произвести более точное исследование ее движения за время, предшествующее открытию, и попытаться отождествить ее с какой-либо ранее известной кометой.

120

Цель настоящей работы — определение орбиты кометы на основании всех наблюдений 1948—1949 гг. и исследование обстоятельств тесного сближения кометы с Юпитером в 1945 г.

Комета наблюдалась во втором появлении в 1955 г. В дальнейшем предполагается провести объединение двух появлений — 1948 и 1955 гг.

§ 1. Определение орбиты кометы 1948 IX по наблюдениям 1948—1949 гг.

Общие сведения о комете. 26 августа 1948 г. Джозефом Ашбруком на Лоуэллской обсерватории в Флагстаффе была открыта новая комета (Therpbø, 1948). Комета обнаружена на фотографических пластинках со снимками малой планеты 1327, полученными 26 и 27 августа с помощью 13-дюймового рефрактора (Ashbrook, 1949). Четырнадцать часов позже совершенно независимо эта же комета была открыта С. Джексоном на Иэль-Колумбийской станции в Иоганнесбурге (Therpbø, 1948). Она была названа «кометой Ашбрука—Джексона» и получила предварительное обозначение 1948 i. Окончательное обозначение 1948 IX ей было дано значительно позже.

Комета Ашбрука—Джексона принадлежит к слабым объектам, так как в течение всего периода наблюдений она не была ярче 11-й звездной величины. В момент открытия комета была 12-й звездной величины.¹ В это время видимый диаметр у нее был около $\frac{3}{4}$, она имела рассеянную кому с ядром и короткий бледный хвост (Merlon, 1950).

Наблюдалась комета довольно интенсивно на 19 различных обсерваториях в течение пяти месяцев с момента открытия по 27 января 1949 г. На Лиллской обсерватории удалось получить еще два наблюдения 28 октября 1949 г., когда яркость кометы достигла около 19^m.

В момент открытия комета находилась в северной части созвездия Водолея и двигалась медленным попятным движением, которое с 20 октября сменилось прямым.

Всего опубликовано 10 первоначальных орбит, из которых две параболические получили А. Д. Максвелл и Ж. Бобоне, три эллиптические — С. Джексоном, одну эллиптическую — Ж. Бобоне, две эллиптические — Л. Кенингем.

Л. Кенингем вычислил ряд пробных параболических и эллиптических орбит, основываясь на наблюдениях, охватывавших все большие промежутки времени (5, 7 и 10 дней). В результате им установлено, что орбита кометы эллиптическая с периодом 7.5 г., эксцентриситетом 0.396, перигельным расстоянием 2.32 а. е. и сравнительно малым наклоном ($i=12^{\circ}56'$ (Vinter Hansen, 1948a)).

На основании элементов, полученных с 10-дневным интервалом времени, Л. Кенингем провел предварительное исследование движения кометы за период, предшествующий ее открытию. Было проведено интегрирование дифференциальных уравнений движения в прямоугольных координатах с 20-дневным интервалом до апреля 1944 г., когда расстояние кометы от Юпитера достигло 1.0 а. е., и вычислены элементы перед тесным сближением для эпохи оскуляции 1944 Апр. 20.0. Согласно полученным результатам, комета в начале 1941 г. находилась от Юпитера на расстоянии 1.1 а. е., после чего взаимное расстояние медленно возрастало, достигнув максимума около 1.8 а. е. с началом 1942 г., а затем снова начало медленно уменьшаться. Тесное сближение кометы с Юпитером произошло около 4 июля 1945 г., когда комета подошла к Юпитеру на расстояние 0.29 а. е. (Vinter Hansen, 1948b).

В дальнейшем Л. Кенингем определил элементы орбиты кометы на основании трех наблюдений: 1948 Авг. 28, 1948 Нояб. 5 и 1949 Янв. 27, т. е. охватывавших 152 дня, с учетом приближенных возмущений больших планет от Венеры до Сатурна (Therpbø, 1949). Однако эти элементы самим Л. Кенингемом не были использованы. В 1955 г. М. Кэнди и В. Берт получили различными методами две системы оскулирующих элементов на 1956 г., исходя из этих последних элементов Л. Кенингема (Vinter Hansen, 1955a).

По эфемериде Кэнди 24 апреля 1956 г. ван-Бисбек обнаружил комету на обсерватории Макдональда как объект 17-й звездной величины (Vinter Hansen, 1955b).

¹ Согласно Джексоному, комета была 10^m.

3 Бюллетень ИТА, № 2 (85)

121

рений вычислены в девятом десятичном знаке с интервалом 10 дней для Венеры и Земли и 20 дней — для остальных планет. Интегрирование велось в девятом десятичном знаке с интервалом 10 и 20 дней. Затем возмущения интерполировались на каждый день для промежутка времени от 22 августа по 15 ноября, а также на моменты отдельных 12 наблюдений. К невозмущенным координатам прибавлены возмущения, и вычислена эфемерида на каждый день.

В табл. 1 приведены координаты α и δ кометы на каждый день, абберация неподвижных звезд, расстояние кометы от Земли в астрономических единицах и абберационное время в долях суток на весь период наблюдений.

Представление наблюдений. Собраны все наблюдения кометы, отмеченные в библиографическом сборнике „Astronomischer Jahresbericht“. Всего удалось собрать 109 наблюдений кометы, из которых 92 точных подверглись обработке, а остальные, приближенные, отброшены. Из всех наблюдений — только 8 визуальных, в четырех случаях способ наблюдения неизвестен. Распределение наблюдений по времени дает табл. 2.

Из таблицы видно, что больше всего наблюдений произведено за период с 26 августа по 6 ноября 1948 г. В декабре 1948 г. сделано три наблюдения, в январе 1949 г. — четыре, а в октябре 1949 г. — два. Наблюдения образуют группировки, заключенные между полугодиями. Два последних наблюдения, полученные на Ликской обсерватории, увеличивают период, охваченный наблюдениями, до 14 месяцев.

Благоприятным обстоятельством является то, что наблюдения охватывают значительный интервал времени и расположены по обе стороны от перигелия на дуге орбиты, составляющей около 111° (от $\nu = -14^\circ 4'$ до $\nu = +96^\circ 6'$).

Не было необходимости приводить наблюдения к какой-нибудь системе звездных положений, так как почти все наблюдения, для которых в литературе указаны названия каталогов звезд сравнения, отнесены к системе A_{200} . Все паралактические множители перевычислены и все наблюдения приведены к координатной системе 1950.0.

Таблица 2

Интервал времени	Число наблюдений	№ нормального места
1948 г. Август 26—сентябрь 13	44	1
Сентябрь 23—октябрь 10	26	2
Октябрь 22—ноябрь 6	10	3
Ноябрь 22—декабрь 19	6	4
1949 г. Январь 18—январь 27	4	
Октябрь 28	2	5

Известно, что для лучшего согласия теории с наблюдениями при сравнении вычислений с наблюдениями необходимо учесть разность между моментами ньютоновского (эфемеридного) времени, употребляемого в вычислениях, и всемирным временем, к которому отнесены наблюдения. Предвычисленные эфемеридные положения кометы будут отличаться от наблюдаемых на величину, равные изменению координат этих тел за интервал времени, соответствующий разности Δt между эфемеридным и всемирным временем,

$$\Delta t = \text{эф. вр.} - \text{вс. вр.}$$

Величина поправки Δt была принята $28^{\text{с}}$, что соответствует $0^{\text{с}}00033$ (Загребин, 1955). Все моменты наблюдений, выраженные во всемирном времени, переведены в эфемеридное время прибавлением поправки $\Delta t = 0^{\text{с}}00033$. Вычисленные значения α и δ интегрировались на моменты наблюдений, выраженные в эфемеридном времени, с учетом абберационного времени $\Delta t = \Delta r$.

Сравнение полученных вычисленных α и δ с наблюдаемыми произведено по формулам:

$$H - B = \Delta \alpha = \alpha_{\text{набл.}}(t) - \text{параллакс} - \text{звездная абберация} - \alpha_{\text{эф.}}(t - \Delta t),$$

$$H - B = \Delta \delta = \delta_{\text{набл.}}(t) - \text{параллакс} + \text{звездная абберация} - \delta_{\text{эф.}}(t - \Delta t),$$

где $\alpha_{\text{набл.}}$, $\delta_{\text{набл.}}$ — наблюдаемые топоцентрические координаты кометы, отнесенные к 1950.0,

$\alpha_{\text{эф.}}$, $\delta_{\text{эф.}}$ — вычисленные координаты кометы,

t — момент наблюдения в эфемеридном времени,

Δt — абберационное время.

Все наблюдения после редукций и результаты сравнения наблюдаемых координат с вычисленными представлены в табл. 3.

Список обсерваторий, на которых производились наблюдения кометы, дан в табл. 4¹. Исправление элементов орбиты. Все собранные наблюдения, представленные в табл. 3, были объединены в нормальные места. При составлении нормальных мест произведен тщательный контроль наблюдений. Все наблюдения, дававшие большие расхождения при сравнении с вычислениями, после проверки последних были отброшены (отброшенные наблюдения в табл. 3 заключены в скобки). Всего пришлось исключить 6 наблюдений целиком, 8 только по α и 12 только по δ . Все наблюдения хорошо укладывались в пять групп, поэтому решено было образовать пять нормальных мест. Для всех нормальных мест были приняты моменты середины суток, ближайших к среднему арифметическому из моментов наблюдений.

Улучшение элементов производилось видоизмененным методом Эккерта—Брауера (Кондратьева, 1956).

В качестве неизвестных принимались $\mu \delta T$, $\delta \psi_x$, $\delta \psi_y$, $\delta \psi_z$, $\frac{\delta a}{\mu}$, $\frac{\delta q}{q}$, т. е. основные уравнения имели вид:

$$\begin{pmatrix} \cos \delta \Delta \alpha \\ \Delta \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sin \alpha}{\rho} & -\frac{\cos \alpha \sin \delta}{\rho} \\ \frac{\cos \alpha}{\rho} & -\frac{\sin \alpha \sin \delta}{\rho} \\ 0 & \frac{\cos \delta}{\rho} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где

$$\mu \delta T \quad \delta \psi_x \quad \delta \psi_y \quad \delta \psi_z \quad \frac{\delta a}{\mu} \quad \frac{\delta q}{q}$$

$$\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x}{\mu} & 0 & x & -y & -\frac{2}{3}x + z(\tau - T) - \frac{2}{3}(1-e)(Hx + K\frac{x}{\mu}) & -(1-e)(Hx + K\frac{x}{\mu}) \\ -\frac{y}{\mu} & -x & 0 & x & -\frac{2}{3}y + y(\tau - T) - \frac{2}{3}(1-e)(Hy + K\frac{y}{\mu}) & -(1-e)(Hy + K\frac{y}{\mu}) \\ -\frac{z}{\mu} & y & x & 0 & -\frac{2}{3}z + z(\tau - T) - \frac{2}{3}(1-e)(Hz + K\frac{z}{\mu}) & -(1-e)(Hz + K\frac{z}{\mu}) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

Коэффициенты основных уравнений вычислялись с точностью до пяти десятичных знаков в две руки.

Проекция скорости вычислялась на моменты нормальных мест по формулам:

$$\frac{\dot{x}}{\mu} = \frac{a^2}{r} (-P_x \sin E - \sqrt{1-e^2} Q_x \cos E) \quad (3)$$

(аналогично для \dot{y} , \dot{z}), где P_x , P_y , P_z и Q_x , Q_y , Q_z — известные направляющие косинусы орбитальных осей.

Коэффициенты основных уравнений и свободные члены, выраженные в секундах дуги, были приведены к численной однородности. Полученная система основных уравнений представлена в табл. 5.

¹ Наблюдения Иерской обсерватории (А. J., 55, 1182) были при обработке случайно упущены. Они будут приняты во внимание при объединении появлений 1948—1955 гг.

Таблица 3 (продолжение)

№ п.п.	Время съемки	а ₁₂₀₀	Пара-лакс	Δ	Н-В		№ обсерваторий по табл. 4	Литературный источник
					Δ	Δβ		
81	1949 г.	22490037	+5.71	-3.81	-2.84	1	Circ. U. A. I., 1195	
82	Ноябрь	225450116	-0.04	-0.07	-2.0	10	A. J. 54, 1178	
83	2282184	+0.07	-2.0	-3.71	-2.0	1	Circ. U. A. I., 1196	
84	2282184	-0.00	-2.8	-3.77	-2.0	1		
85	Девябрь	3109206	+0.00	-2.8	-3.75	1		
86	23 05 04.86	+0.03	-2.8	-3.75	-4.83	1		
87	1949 г.	0 04 30.13	+0.11	-3.67	-2.8	11	Lick. Obs. Bull., 522	
88	Январь	18 77 500	+0.14	-3.70	-2.3	11	Lick. Obs. Bull., 523	
89	18 80 577	+0.15	-3.70	-2.0	-2.0	11		
90	0 17 17.18	+0.15	-3.70	-2.0	-2.0	11		
91	27 18 957	+0.15	-3.70	-2.0	-2.0	11		
92	Октябрь	28 44 186	-0.03	-5.07	-12.8	11		
	28 50 785	-0.03	-5.07	-12.8	-15.6	11		

Таблица 4

№ п.п.	Обсерватория	Долгота	Широта	Способ наблюдения, инструмент	Число наблюдений	
					то-рых	прибли-женных
1	Алжир	-01270845	+36 48'	Фот., нормальный астрограф	17	1
2	Барселона (обс. Фабра), Испания	-0 08 30.2	+43 25'	Фот., лондон рефрактор	3	2
3	Вашингтон (Мерзеве обс.), США	-1 05 21.4	+38 14'	Фот., 30-см рефрактор Кларка	2	4
4	Вильгельмсбад (Иррессае обс.), США	+1 54 13.2	+42 34'	Фот., рефрактор 24" Гамма-Алекс	4	1
5	Йогенсбург, Южная Африка	-2 52 15.7	+35 50'	Фот., 80-см телескоп Шмидта	1	1
6	Каньон (обс. им. Энгельсберга)	-2 02 00.7	+50 27'	Фот., большой астрограф КАО (D=250 мм)	1	5
7	Каньон (обс. Каньон)	-9 03 10.3	+35 00'	Фот., 30-см рефрактор	14	6
8	Кордоба, Аргентина	-6 46 26.0	+33 05'	Фот., рефрактор Крески	3	2
9	Лагуна (обс. Калифорния, США)	-116 37.2	+31 20'	Фот., рефрактор Крески	3	2
10	Мадрид (обс. Калифорния, США)	-4 46 26.0	+48 09'	Фот., рефрактор Крески	3	2
11	Мадрид (обс. Калифорния, США)	-1 05 50.0	+44 24'	Фот., астрограф Цейса	4	4
12	Мадрид (обс. Калифорния, США)	-1 05 50.0	+44 24'	Фот., астрограф с 2 камерами (120 мм)	5	5
13	Мадрид (обс. Калифорния, США)	-1 05 50.0	+44 24'	Фот., телескоп	5	5
14	Мадрид (обс. Калифорния, США)	-1 05 50.0	+44 24'	Фот., телескоп	5	5
15	Польша (Университет)	-9 17 10.1	+35 40'	Фот., телескоп	16	7
16	Токио, Япония	-136 48'	+35 40'	Фот., рефрактор	16	7
17	Флагстафф (обс. Аурала), Аляска, США	+6 56 09.4	+30 40'	Фот., 82" рефрактор	1	1
18	Флаг Дэйвис (обс. Макдональд), Теннесси, США	-0 17 26.0	+50 48'	Фот., лондон рефрактор (D=40 см)	1	1
19	Уман (Пинесвал), Румыния					

Номера условных уравнений соответствуют номерам нормальных мест. Уравнения по скопленно отмечены звездочками. Система нормальных уравнений, соответствующая приведенной системе условных уравнений, представлена в табл. 6.

Таблица 5

№ п.п.	1/4 μδ T	5 δμ / μ	δφ _x	δφ _y	δφ _z	δφ _z	-1/100 l"
1	+0.90393	+0.17960	+1.72625	-0.08289	+0.39423	+0.33505	+0.95741
2	+0.83441	+0.00690	+1.59283	-0.05459	+0.35756	+0.15707	+0.88446
3	+0.68660	-0.12175	+1.32968	-0.00483	+0.19684	+0.01350	+0.71865
4	+0.47106	-0.26285	+0.93911	+0.02425	-0.20508	-0.16581	+0.56130
5	+0.28440	+1.14180	+0.88463	-0.65051	-1.50483	+0.20182	+0.60330
1*	+0.61998	+0.12125	+0.00932	-1.69759	+0.39366	-0.45705	+0.40830
2*	+0.55810	+0.00460	-0.07346	-1.61808	+0.19504	-0.21164	+0.34860
3*	+0.47886	-0.08335	-0.07606	-1.39693	+0.00239	+0.00889	+0.33070
4*	+0.35696	-0.18630	-0.00073	-0.98477	-0.27470	+0.24608	+0.23980
5*	-0.05693	-0.13530	-0.19362	+0.08659	+0.27393	+1.14205	-0.13200

Таблица 6

№ п.п.	1/4 μδ T	5 δμ / μ	δφ _x	δφ _y	δφ _z	δφ _z	L
1	+3.34335	+0.26445	+4.44137	-3.27828	+0.50418	+0.04425	+3.21764
2		+1.49461	+0.95587	-0.68890	-1.55247	+0.07681	+0.63110
3			+9.02070	-0.59629	-0.07606	+0.66035	+5.06482
4				+8.86230	+0.22792	+0.80193	-2.43478
5					+2.97081	-0.05503	-0.06301
6						+1.82386	+0.14623

Решение нормальных уравнений и определение весовых коэффициентов производилось способом матриц, предложенным С. Г. Маковером (Маковер, 1956).
 Решение нормальной системы производилось два раза. При первом решении неизвестные располагались в случайном порядке, а при втором — в порядке возрастания их весов. На преимущество такого расположения неизвестных указывал Д. К. Куликов (Сак и Куликов, 1951). Оба решения оказались близкими между собой. Второе решение было принято как окончательное.
 Определитель нормальной системы D=0.09016 обеспечивает точность результатов в 4 значащих цифрах. Средняя ошибка одной нормальной координаты ε=±1.72.
 Получены следующие значения неизвестных:

$$\begin{aligned} \mu\delta T &= +14^{\circ}898 \pm 42^{\circ}806 \\ \frac{\delta\mu}{\mu} &= -20^{\circ}436 \pm 34^{\circ}741 \\ \delta\phi_x &= +2^{\circ}102 \pm 1^{\circ}840 \\ \delta\phi_y &= +29^{\circ}218 \pm 30^{\circ}426 \\ \delta\phi_z &= -26^{\circ}256 \pm 41^{\circ}755 \\ \frac{\delta\phi}{\phi} &= +9^{\circ}208 \pm 10^{\circ}086 \end{aligned}$$

и окончательная система элементов:

Эпоха оскуляции 1948 Сент. 6.0 вф. вр.
 $T = 1948 \text{ Окт. } 4.779325$ $e = 0.39553684$
 $\omega = 348^\circ 904194$ $\mu = 0^\circ 131842106$
 $\Omega = 2^\circ 341201$ 1950.0 $a = 3.82325526$
 $i = 12^\circ 513175$

Таблица 7

№ и.п.	Эфемеридное время	До улучшения		После улучшения	
		$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
1	1948 Сент. 4.5	-6.59	-4.08	+0.01	-0.09
2	Окт. 3.5	-6.04	-34.9	+0.00	-0.1
3	Окт. 30.5	-4.83	-30.1	+0.09	+0.2
4	Дек. 22.5	-3.74	-24.0	+0.04	+1.4
5	1949 Окт. 28.5	-5.04	+13.2	-0.30	-1.2

На основании этой системы элементов получены x, y, z для двух дат — 1948 IX 6 и IX 16, произведено интегрирование дифференциальных уравнений движения с интервалом 10 дней на протяжении 15 месяцев (от сент. 6.0 1948 по нояб. 20.0 1949)¹ и сделано сравнение нормальных мест с вычислениями.
 Представление нормальных мест после улучшения элементов приведено в табл. 7.

§ 2. Исследование обстоятельств сближения кометы с Юпитером в 1945 г.

Метод интегрирования. Для выяснения характера больших возмущений в движении кометы вследствие ее тесного сближения с Юпитером в 1945 г. было проведено на основании новых элементов численное интегрирование дифференциальных уравнений движения кометы в обратном направлении — от 1948 до 1943 г. Интегрирование велось с учетом возмущений от 6 больших планет — Меркурия, Венеры, Земли, Марса, Юпитера и Сатурна.

Когда комета движется вдали от Земли, а следовательно, далеко и от всех внутренних планет, то возмущения от этих планет малы, но меняются они очень быстро, и для учета этих небольших быстро меняющихся величин приходится интегрирование вести с небольшим интервалом. Для избежания этого неудобства целесообразно перейти к системе координат с началом в центре тяжести системы Солнце + Меркурий, Венера, Земля и Марс. В такой координатной системе возмущающие ускорения от внутренних планет меняются медленно и так малы, что часто ими можно пренебречь. Координаты, отнесенные к центру тяжести системы Солнце + внутренние планеты, условимся называть барицентрическими.

Сущность преобразования к новой системе координат состоит в следующем.

Пусть x, y, z, r и x_i, y_i, z_i, r_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) — гелиоцентрические координаты и радиусы-векторы кометы и возмущающей планеты, x_b, y_b, z_b, r_b и $x_{ib}, y_{ib}, z_{ib}, r_{ib}$ — их барицентрические координаты и радиусы-векторы, x_0, y_0, z_0 — барицентрические координаты Солнца.

Тогда

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= -\frac{\sum_1^6 m_i x_i}{1 + \sum_1^6 m_i} = -\sum_1^6 m_i x_{ib}, \\ x &= x_b - x_0 = x_b + \sum_1^6 m_i x_{ib}, \\ x_i &= x_{ib} - x_0 = x_{ib} + \sum_1^6 m_i x_{ib} \end{aligned} \right\} (4)$$

и аналогично для y и z .

¹ Подробности выполнения интегрирования изложены в § 2.

Уравнение движения в гелиоцентрической системе координат

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 \frac{x}{r^3} = \sum X_i,$$

где

$$\sum X_i = k^2 \sum_1^6 m_i \left(\frac{x_i - x}{\Delta_i^3} - \frac{x_i}{r_i^3} \right),$$

с помощью соотношений (4) может быть преобразовано к виду:

$$\frac{d^2 x_b}{dt^2} + \frac{k^2 x_b}{r_b^3} = - \left[\sum_1^6 m_i \left(\frac{d^2 x_{ib}}{dt^2} + k^2 \frac{x_{ib} - x_b}{\Delta_i^3} \right) \right] + k^2 \sum_1^6 m_i \frac{x_{ib} - x_b}{\Delta_i^3} + \sum_1^6 X_i, \quad (5)$$

Считая, что движение внутренних планет вокруг их центра тяжести происходит по эллиптическим орбитам, и пренебрегая членами второго порядка относительно m_i , можно принять член в квадратных скобках равным нулю. В таком случае

$$\frac{d^2 x_b}{dt^2} + k^2 \frac{x_b}{r_b^3} = k^2 \sum_1^6 m_i \frac{x_{ib} - x_b}{\Delta_i^3} + \sum_1^6 X_i. \quad (6)$$

Прибавляя к обеим частям равенства член

$$k^2 \left(1 + \sum_1^6 m_i \right) \frac{x_b}{r_b^3},$$

получим окончательно

$$\frac{d^2 x_b}{dt^2} + k^2 \left(1 + \sum_1^6 m_i \right) \frac{x_b}{r_b^3} = k^2 \left(1 + \sum_1^6 m_i \right) \frac{x_b}{r_b^3} - k^2 \frac{x_b}{r_b^3} + k^2 \sum_1^6 m_i \frac{x_{ib} - x_b}{\Delta_i^3} + \sum_1^6 X_i, \quad (7)$$

Левая часть уравнения (7) представляет эллиптическое движение кометы вокруг центра тяжести системы Солнце + внутренние планеты. Когда комета движется вдали от Солнца, на расстоянии ≥ 4 а. е., то сумма трех членов в правой части

$$k^2 \left(1 + \sum_1^6 m_i \right) \frac{x_b}{r_b^3} - k^2 \frac{x_b}{r_b^3} + k^2 \sum_1^6 m_i \frac{x_{ib} - x_b}{\Delta_i^3}$$

очень мала и может быть отброшена, т. е. достаточно интегрировать уравнение

$$\frac{d^2 x_b}{dt^2} + k^2 \frac{x_b}{r_b^3} = \sum_1^6 X_i, \quad (8)$$

где

$$k^2 = k^2 \left(1 + \sum_1^6 m_i \right).$$

Когда комета подходит к Солнцу, отброшенные члены делаютя ощутимыми, хотя и остаются малыми и меняются медленно. Поэтому вблизи Солнца интегрирование сле-

дует вести либо по формуле (6), переходя на каждом шаге к гелиоцентрическим координатам для вычисления члена $k^2 \frac{x}{r^3}$ (Rasmussen a. Hesselberg, 1954), либо пользоваться уравнением (7), несколько преобразовав его правую часть.

Умножим обе части уравнения (7) на ω^2 — квадрат интервала интегрирования:

$$\omega^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 \omega^2 \frac{x}{r^3} = R_x,$$

где

$$R_x = \lambda_b x_b - \lambda x + k^2 \omega^2 \sum_1^4 m_i \frac{x_{i3} - x_{i2}}{\Delta_i^3} + k^2 \omega^2 \sum_5^9 m_i \left(\frac{x_i - x}{\Delta_i^3} - \frac{x_i}{r_i^3} \right), \quad (9)$$

$$\lambda_b = \frac{k^2 \omega^2}{r_b^3}, \quad \lambda = \frac{k^2 \omega^2}{r^3}.$$

Первые два члена в выражении R_x очень близки между собой. Преобразуем их следующим образом.

Пусть

$$x = x_b + \Delta x, \\ \lambda = \lambda_b + \Delta \lambda.$$

Тогда

$$\lambda_b x_b - \lambda x = -\lambda_b \Delta x - x_b \Delta \lambda,$$

где

$$\Delta x = -x_0 = \frac{\sum_1^4 m_i x_i}{1 + \sum_1^4 m_i}, \quad \Delta y = -y_0 = \frac{\sum_1^4 m_i y_i}{1 + \sum_1^4 m_i}, \quad \Delta z = -z_0 = \frac{\sum_1^4 m_i z_i}{1 + \sum_1^4 m_i},$$

$$\Delta \lambda = \lambda_b \left(3\epsilon + \sum_1^4 m_i \right), \quad \epsilon = \frac{x_b \Delta x + y_b \Delta y + z_b \Delta z}{r_b^3}.$$

Поправки

$$\Delta x = -x_0, \\ \Delta y = -y_0, \\ \Delta z = -z_0$$

могут быть взяты из таблиц Расмуссена и Хессельберга (Rasmussen a. Hesselberg, 1954).

Таким образом, уравнение (7) может быть представлено в виде

$$\omega^2 \frac{d^2 x}{dt^2} = -k^2 \omega^2 \frac{x}{r^3} + X_1 + X_2 + X_3, \quad (10)$$

где

$$X_1 = -\lambda_b \Delta x - x_b \Delta \lambda, \\ X_2 = k^2 \omega^2 \sum_1^4 m_i \frac{x_i - x}{\Delta_i^3}, \\ X_3 = k^2 \omega^2 \sum_5^9 m_i \left(\frac{x_i - x}{\Delta_i^3} - \frac{x_i}{r_i^3} \right).$$

Аналогичны уравнения для y и z .

В настоящей работе уравнения движения кометы были приняты в форме (10). Интегрирование велось методом квадратур в „особых координатах“ (Самойлова-Яхонтова, Маковер, 1952).

Уравнения возмущенного движения кометы или планеты имеют вид

$$\omega^2 \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k^2 \omega^2}{r^3} x + X. \quad (11)$$

Аналогично для координат y и z .

Если положить $f = \omega^2 \frac{d^2 x}{dt^2}$, то основная формула метода квадратур имеет вид

$$x_n = f_n^{-2} + \frac{1}{12} f_n^{-1} - \frac{1}{240} f_n^2 + \frac{31}{60480} f_n^4 - \dots, \quad (12)$$

где f_n^{-2} — вторая сумма функции f ,

f^2, f^4 — ее разности второго и четвертого порядков,

n — номер шага.

Интегрирование производится последовательными приближениями, так как значения всех членов ряда, начиная с члена $\frac{1}{12} f_n$, неизвестны для n -го шага.

В выражении

$$f = -\frac{k^2 \omega^2}{r^3} x + X$$

наибольшим членом является первый член, и незнание его представляет основное затруднение. Члены X и остальные члены ряда малы и могут быть легко предсказаны.

Поэтому удобно вести интегрирование в „особых координатах“, перенеся главную часть функции $\frac{1}{12} f_n$ в левую часть выражения (12) (Самойлова-Яхонтова, Маковер, 1952).

Тогда, полагая

$$\bar{x} = x \left(1 + \frac{1}{12} \frac{k^2 \omega^2}{r^3} \right),$$

будем иметь

$$\bar{x}_n = f_n^{-2} + \text{red.}, \quad (13)$$

где

$$\text{red.} = \frac{1}{12} X_n - \frac{1}{240} f_n^2 + \frac{31}{60480} f_n^4 - \dots \quad (14)$$

Теперь редукция мала, легко может быть предсказана, и интегрирование почти не требует последовательных приближений.

Чтобы не переходить к обычным координатам при вычислении функции f , вводится „особый“ радиус

$$\bar{r} = r \left(1 + \frac{1}{12} \frac{k^2 \omega^2}{r^3} \right), \quad \bar{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

и вспомогательная функция σ , зависящая от особого радиуса \bar{r} , так что

$$\frac{k^2 \omega^2}{r^3} x = \sigma \bar{x}$$

и

$$f = -\sigma \bar{x} + X.$$

Функция σ определяется из уравнения

$$\sigma \left(1 - \frac{\sigma^2}{12} \right) = \frac{k^2 \omega^2}{r^3} = \lambda$$

и может быть вычислена на основании разложения

$$\sigma = \lambda + \frac{1}{6}\lambda^2 + \frac{7}{144}\lambda^3 + \dots$$

и табулирована по аргументу σ^2 .

Для обратного перехода от „особых“ к „обычным“ координатам имеем

$$x = \bar{x} \left(1 - \frac{\sigma}{12}\right).$$

Обращаясь к уравнениям (7)–(9), полагаем

$$\bar{x}_b = x_b \left(1 + \frac{1}{12} \frac{k^2 \omega^2}{\sigma}\right),$$

$$f = -\sigma_b \bar{x}_b + X_1 + X_2 + X_3,$$

$$\sigma_b = \lambda_b + \frac{1}{6}\lambda_b^2 + \frac{7}{144}\lambda_b^3 + \dots,$$

$$\bar{x}_b = f^{-2} + \text{red.},$$

$$\text{red.} = \frac{1}{12}(X_1 + X_2 + X_3) - \frac{1}{240}f^2 + \frac{31}{60480}f^4 - \dots,$$

причем

$$X_1 = \lambda_b x_b - \lambda x = \sigma_b \bar{x}_b - \sigma \bar{x} = -\sigma_b \Delta \bar{x}_b - \bar{x}_b \Delta \sigma.$$

Ввиду малости входящих сюда величин

$$\Delta \bar{x}_b = \Delta x_b = \frac{\sum m_i x_i}{1 + \sum m_i},$$

$$\Delta \sigma = \Delta \lambda = -\lambda \left(3\epsilon + \frac{4}{3} m_i\right).$$

Величина σ бралась из специальных таблиц, имеющихся в Институте теоретической астрономии.

Тесное сближение кометы 1948 IX с Юпитером. На основании улучшенной системы элементов для трех моментов — 1948 IX 26, IX 16, IX 6 — получены в восьмом десятичном знаке невозмущенные прямоугольные гелиоцентрические координаты x, y, z , к которым прибавлены возмущения, вычисленные по методу Энке в девятом десятичном знаке.

Возмущенные прямоугольные гелиоцентрические координаты переведены в особые барцентрические координаты и начат процесс интегрирования.

Интегрирование проводилось на протяжении 6 лет; с 6 сентября 1948 г. по 20 ноября 1949 г. вперед и по 12 ноября 1943 г. в обратном направлении. Интегрирование назад было проведено дважды: первый раз приближенно в седьмом десятичном знаке с учетом возмущений только от Юпитера и Сатурна с интервалом 20 дней. Такое приближенное интегрирование дало общее представление о движении кометы на этом интервале времени, о характере изменения возмущений, а также времени входа в сферу действия Юпитера и выхода из нее.

Полученные координаты для движения вдали от Юпитера оказались достаточно точными для вычисления возмущающих сил X_1, X_2 и X_3 вне сферы действия Юпитера.

134

Они были вычислены с точностью до 10^{-9} заранее для окончательного интегрирования. Кроме того, результаты этого интегрирования позволили приближенно предсказывать редукцию (14) даже вблизи Юпитера.

Второй раз интегрирование велось более точно: функция f и red. вычислялись в 10^{-9} , а f^{-2} и x_b — в восьмом десятичном знаке, причем учитывались возмущения от больших планет, начиная от Меркурия и кончая Сатурном.

Значения масс возмущающих планет взяты из таблиц Расмуссена (Rasmussen a. Hesselberg, 1954).

Когда τ_b достигло 5 а. е. (31 XII 1945), сумма членов

$$X_1 + X_2 = \sigma_b x_b - \sigma \bar{x} + k^2 \omega^2 \sum_{i=1}^4 m_i \frac{x_i - x}{\Delta_i^3}$$

оказалась, в пределах точности вычислений, равной нулю и оставалась нечувствительной в процессе дальнейшего интегрирования.

Компоненты возмущающего ускорения от Юпитера вычислялись отдельно на каждом шаге интегрирования, причем до 26 XII 1946 координаты Юпитера брались с пятью десятичными знаками из таблиц „Planetary coordinates 1940–1960“, а затем с семью десятичными знаками до конца интегрирования из таблиц „Coordinates of the five outer Planets 1653–2060“ (Astr. Pap., 12, 1952) и интерполировались на соответствующую дату по формуле Эверетта.

Интегрирование проводилось с переменным интервалом: интервал 10 дней с 6 IX 1948 до 20 XI 1949 и в обратном направлении до 31 XII 1947, после чего был принят интервал 20 дней, который и сохранился до конца интегрирования, несмотря на резкие изменения хода равностей функции.

После окончания интегрирования для промежутка времени с 20 января 1946 г. по 6 декабря 1944 г., когда возмущения от Юпитера были особенно велики из-за того, что комета проходила через сферу действия Юпитера и имела с ним 22 июня 1945 г. тесное сближение ($q_{\text{min}} = 0.178$ а. е.), было проведено повторное интегрирование с интервалом 10 дней.

Сравнение прямоугольных гелиоцентрических координат, полученных в результате интегрирования с интервалом десять и двадцать дней для соответствующих дат, показало, что они различаются на несколько единиц седьмого десятичного знака, достигая в конце интегрирования $25 \cdot 10^{-7}$.

Такое расхождение могло быть вызвано увеличением вдвое числа шагов интегрирования. Поэтому интегрирование с интервалом 20 дней в критический период было принято за основное.

Возмущающие ускорения от Юпитера в период прохождения кометы через сферу его действия чрезвычайно велики. Интегрирование приходилось вести в нескольких приближениях (трех и даже четырех) и всякий раз перевычислять возмущающие ускорения.

Численные значения компонентов возмущающих ускорений (R_x, R_y, R_z) на критический период движения представлены в табл. 8.

Получена система экваториальных элементов кометы до сближения с Юпитером, причем за момент оскуляции выбран момент 1944 Апр. 20.0, принятый ранее Л. Кенинхемом при определении им элементов орбиты кометы до ее сближения с Юпитером (Vinter Hansen, 1948 b). Обе системы элементов приведены для сравнения в табл. 9 (элементы ориентации отнесены к 1950.0).

Из сопоставления обеих систем видно, что полученные элементы значительно отличаются от элементов Кенинхема, что, по-видимому, можно объяснить следующим. Л. Кенинхем провел исследование, пользуясь элементами своей предварительной орбиты, вычисленной на основании наблюдений, охватывающих 10-дневную дугу. Эти элементы не давали достаточно надежного периода обращения. Кроме того, он, по-видимому, не учитывал возмущений от всех планет при интегрировании в обратном направлении.

Комета на протяжении более двух лет (с 11 марта 1944 г. по 2 июля 1946 г.) оставалась на расстоянии менее 1 а. е. от Юпитера, вошла в сферу его действия

135

Таблица 8

№ п.п.	Дата	$R_2 \cdot 10^7$	$R_3 \cdot 10^7$	$R_4 \cdot 10^7$	№ п.п.	Дата	$R_2 \cdot 10^7$	$R_3 \cdot 10^7$	$R_4 \cdot 10^7$
1944 г.									
1	Январь 11	+ 591.7	+ 449.2	- 399.3	28	Июль 4	-19056.4	+19396.9	+21842.3
2	Февраль 31	+ 625.5	+ 493.5	- 423.0	29	Июль 24	-19824.5	+ 9129.3	+20600.5
3	Февраль 20	+ 669.9	+ 543.4	- 449.1	30	Август 13	-16968.2	+ 1838.0	+16462.3
4	Март 11	+ 704.4	+ 599.7	- 478.0	31	Сентябрь 2	-13270.9	- 1849.3	+12212.9
5	Март 31	+ 750.4	+ 663.7	- 510.2	32	Сентябрь 22	-10092.5	- 3284.9	+ 8894.9
6	Апрель 20	+ 802.0	+ 737.0	- 545.9	33	Октябрь 12	- 7689.5	- 3625.7	+ 6530.6
7	Май 10	+ 860.0	+ 821.1	- 585.8	34	Октябрь 21	- 5941.6	- 3501.2	+ 4883.0
8	Май 30	+ 925.2	+ 918.8	- 630.5	35	Ноябрь 1	- 4674.4	- 3208.1	+ 3728.3
9	Июнь 19	+ 999.1	+ 1032.7	- 680.6	36	Декабрь 11	- 3745.3	- 2874.1	+ 2905.0
10	Июль 9	+ 1085.3	+ 1166.8	- 736.9	37	Декабрь 31	- 3052.8	- 2551.3	+ 2306.1
11	Июль 29	+ 1179.7	+ 1266.1	- 800.3	1946 г.				
12	Август 18	+ 1290.1	+ 1516.9	- 871.9	38	Январь 20	- 2527.7	- 2259.1	+ 1861.0
13	Сентябрь 7	+ 1417.9	+ 1748.3	- 952.5	39	Февраль 9	- 2122.1	- 2001.3	+ 1523.8
14	Сентябрь 27	+ 1566.2	+ 2032.1	- 1043.3	40	Март 1	- 1803.8	- 1776.9	+ 1263.3
15	Октябрь 18	+ 1739.9	+ 2394.8	- 1144.9	41	Март 21	- 1550.1	- 1582.9	+ 1058.9
16	Октябрь 6	+ 1940.3	+ 2829.5	- 1257.3	42	Апрель 10	- 1345.0	- 1413.4	+ 895.9
17	Ноябрь 26	+ 2175.2	+ 3399.1	- 1378.8	43	Апрель 30	- 1177.0	- 1266.6	+ 764.1
18	Декабрь 16	+ 2447.3	+ 4141.2	- 1503.9	44	Май 20	- 1037.8	- 1158.5	+ 656.2
1945 г.									
19	Январь 5	+ 2756.5	+ 5126.2	- 1619.7	45	Июнь 9	- 921.3	- 1026.3	+ 566.6
20	Февраль 25	+ 3033.4	+ 6458.2	- 1697.1	46	Июль 29	- 822.7	- 927.6	+ 492.2
21	Февраль 14	+ 3423.2	+ 8291.0	- 1674.3	47	Июль 19	- 738.5	- 840.3	+ 429.1
22	Март 6	+ 3652.5	+ 10842.9	- 1420.2	48	Август 8	- 666.0	- 762.8	+ 375.3
23	Март 26	+ 3553.6	+ 14384.0	- 665.8	49	Август 28	- 603.0	- 693.6	+ 329.2
24	Апрель 15	+ 2623.9	+ 19101.5	+ 1106.2	50	Сентябрь 17	- 548.0	- 631.7	+ 289.3
25	Май 5	- 68.0	+ 24591.3	+ 4711.3	51	Октябрь 7	- 499.4	- 576.0	+ 254.6
26	Май 25	- 5566.9	+ 28756.4	+ 10751.3	52	Октябрь 27	- 456.4	- 525.7	+ 224.2
27	Июнь 14	- 19222.1	+ 27556.6	+ 17892.7	53	Ноябрь 16	- 418.0	- 480.2	+ 197.5
					54	Декабрь 6	- 383.5	- 438.8	+ 174.0
					55	Декабрь 26	- 352.4	- 401.1	+ 153.1

Таблица 9

	Элементы Л. Кеинкема		Элементы М. Мерзляковой	
	эпоха оскуляции 1944 Апр. 20.0 вф. вр.	эпоха оскуляции 1944 Апр. 20.0 вф. вр.	эпоха оскуляции 1944 Апр. 20.0 вф. вр.	эпоха оскуляции 1948 Сент. 6.0 вф. вр.
T	1939 Сент. 21.9 вф. вр.	1938 Март 3.8 вф. вр.	1948 Окт. 4.8 вф. вр.	
a	3375915	3072232	3485904	
Q	37971	89471	2341	
i	13°53'	12°72'	12°51'	
ω	4.44597	4.86317	3.82226	
e	0.25064	0.19989	0.39554	
P (лет)	9.3745	10.7246	7.4759	

1 марта 1945 г. и вышла 11 октября 1945 г., т. е. двигалась в области сферы действия 224 дня, достигнув максимального приближения к Юпитеру 0,178 а. е. 22 июня 1945 г. Примерно до середины августа 1945 г. комета двигалась вперед Юпитера (см. рис. 1).

В результате глубокого проникновения кометы в сферу действия Юпитера произошли большие изменения всех элементов ее орбиты.

Для иллюстрации размеров возмущений в табл. 9 (графа 3) приведена система элементов кометы после тесного сближения с Юпитером.

Наибольшие возмущения претерпел аргумент перигелия (ω), затем среднее суточное движение и большая полуось, отчего значительно уменьшился период обращения и

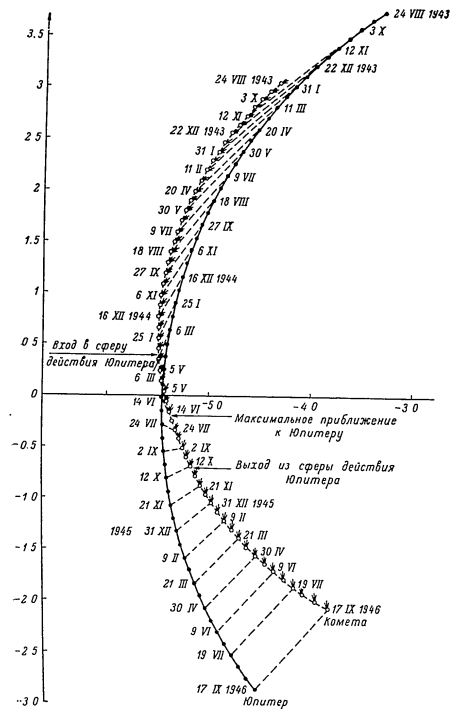


Рис. 1.

сократилось перигельное расстояние. Сильное увеличение долготы перигелия ($\pi = \omega + \Omega$) произошло с одновременным уменьшением долготы узла, а наклон орбиты остался почти без изменения.

До сближения с Юпитером орбита кометы была почти круговой, а после ее эллиптность значительно усилилась. Возмущающее действие Юпитера уменьшило период кометы на 3,2 и преобразовало орбиту кометы так, что если до сближения комета принадлежала к группе Сатурна ($P=10$ лет), то после она оказалась типичной короткопериодической кометой семейства Юпитера, причем по-прежнему ее афелий лежит между орбитами Юпитера и Сатурна [$a(1+e)=5.34$].

На рис. 2 представлены проекция на экваториальную плоскость орбиты кометы до и после больших возмущений и орбиты Юпитера на протяжении почти всего его периода обращения. Часть орбиты кометы с 1938 до 1943 г. построена на основании полученных элементов, и положения кометы на ней приближенные, остальная часть построена по эллиптическим координатам на основании проведенного интегрирования.

Из рис. 2 видно, что в момент прохождения через перигелий (3 III 1938) комета находилась вблизи Юпитера и весь промежуток времени от перигелия до 1945 г. она шла почти рядом с Юпитером, несколько опережая его до момента сближения; вскоре после этого комета начала отставать от Юпитера, двигаясь дальше по совершенно новой орбите, более вытянутой, с меньшей полуосью, линия апсида которой повернута на угол 35° . Большой интерес представляет исследование движения кометы от 1943 до 1938 г. и дальше, но это выходит за рамки настоящей работы.

Интересно отметить, что характер изменения элементов орбиты кометы Уиппла и Швассмана—Вахмана 2. У всех комет вначале орбиты были почти круговые, а затем они преобразованы в эллиптические с близкими значениями эксцентриситетов и почти одинаково уменьшенными значениями больших полуосей. Наклон орбит изменился незначительно. Среднее суточное движение комет увеличилось почти в одинаковом отношении. У всех трех комет произошел большой сдвиг перигелия и сокращение перигельного расстояния, сделавшее возможным их открытие после критического сближения с Юпитером.

Факт открытия кометы Ашбрук—Джексона вскоре после ее тесного сближения с Юпитером еще раз подтверждает вывод, сделанный Е. И. Казимирчак—Полонской (1950) на основании изучения обстоятельств открытия 35 короткопериодических комет группы Юпитера, что подавляющее большинство короткопериодических комет группы Юпитера было открыто после больших возмущений от Юпитера, изменивших положение, форму и размеры кометных орбит и приблизивших их к орбите Земли, вследствие чего существенно и благоприятно изменились условия их наблюдаемости.

Несмотря на значительное изменение перигельного расстояния, афелий кометы незначительно изменил свое положение относительно Юпитера. Это предвещает в будущем новые большие возмущения, в результате которых комета может быть переброшена на новую орбиту.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить глубокую благодарность моему научному руководителю профессору Н. С. Самойловой-Яхонтовой за постоянный интерес, помощь и ценные советы во время выполнения этой работы.

138

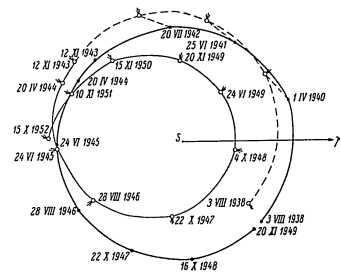


Рис. 2.

ЛИТЕРАТУРА

- Всехветский С. К. 1948. Комета 1948f Ашбрук—Джексона. Астр. цирк. АН СССР, 79.
 Загребин Д. В., Э. А. Митрофанова, Г. М. Позник. 1955. Определение разности между афериальным временем и истинным по наблюдениям покрытой звезд Луною. Бюлл. ИТА, 6, 1 (74).
 Казимирчак—Полонская Е. И. 1950. Тесные сближения комет с планетами и планетоцентрическое движение комет. Дисс.
 Кондратьева (Кадни) Д. А. 1956. Определение окончательной орбиты кометы Швассман—Вахман 3, 1930 VI. Труды Астр. сект. АН Латв. ССР.
 Конолдеева В. П. 1950. Наблюдения комет на Киевской астрономической обсерватории. Публ. Киевск. астр. обсерв., 4.
 Маковер С. Г. 1956. Решение систем нормальных уравнений при помощи матриц. Астр. журн., 33, 3.
 Сак В. В. и Д. К. Куликов. 1951. Определение окончательной орбиты кометы 1925 VII (Шай—Коме—Солл). Бюлл. ИТА, 4, 9 (62).
 Самойлова—Яхонтова Н. С. 1945. Исправление эллиптических орбит. Бюлл. Астр. инст., 3, 53.
 Самойлова—Яхонтова Н. С., С. Г. Маковер. 1952. Вычисление частных возмущений малых планет на счетно-аналитических машинах. Бюлл. ИТА, 5, 3 (66).
 Ashbrook J. 1949. Photographic observations of comet 1948f (Ashbrook—Jackson). A. J., 54, 1178.
 Merton G. 1950. Comet Section. Report for 1948. Journ. Brit. Astron. Assoc., 69, 7, 190.
 Rasmussen H. A. and O. K. Hesselberg. 1954. An appropriate method for integration of the motion of periodic comets. Publ. Kobenhavns Obs., 163.
 Roemer E. 1956. Observations of comets. A. J., 61, 1243.
 Thernöe K. A. 1948. Comet Ashbrook—Jackson (1948f). Circ. U. A. I., 1171.
 Thernöe K. A. 1949. Periodic comet Ashbrook—Jackson (1948f). Circ. U. A. I., 1232.
 Vinter Hansen J. M. 1948a. Periodic comet Ashbrook—Jackson (1948f). Circ. U. A. I., 1178.
 Vinter Hansen J. M. 1948b. Periodic comet Ashbrook—Jackson (1948f). Circ. U. A. I., 1185.
 Vinter Hansen J. M. 1955a. Periodic comet Ashbrook—Jackson (1948 IX). Circ. U. A. I., 1487.
 Vinter Hansen J. M. 1955b. Periodic comet Ashbrook—Jackson (1948 IX, 1955e). Circ. U. A. I., 1498.
 Vinter Hansen J. M. 1955c. Periodic comet Ashbrook—Jackson (1948 IX, 1955e). Circ. U. A. I., 1512.

Поступило в Редакцию
23 августа 1957 г.

Бюллетень Института Теоретической Астрономии

Т. VII

1958

№ 2 (85)

Исследование движения кометы Энке—Баклунда за 1931—1937 гг.

С. И. Лучих

Исследуется движение кометы Энке—Баклунда за период 1931—1937 гг. в предположении существования векового ускорения и вековых изменений угла эксцентриситета и элементов ориентации. Объединяется три появления (8 нормальных мест) одной системой элементов со средней ошибкой единицы веса $\sigma_p = \pm 31$. Коэффициент векового ускорения оказался равным 1574. Найденное значение векового ускорения подтверждает положение о неравномерном уменьшении ω . Кроме того, сделана попытка объединения пяти появлений: 1931—1947 гг.

THE MOTION OF COMET ENCKE—BACKLUND IN 1931—1937, by S. I. Luchikh. — The motion of comet Encke—Backlund over the period 1931—1937 has been investigated, the existence of secular acceleration and secular change of eccentricity being supposed. A set of elements based on 8 normal places with the mean error of unity weight 31 has been found. The value of secular acceleration, places with the mean error of unity weight 31 has been found. The value of secular acceleration, places with the mean error of unity weight 31 has been found. The attempt of calculation of a set of elements based on observations 1931—1947 has been done.

Почти на протяжении 150 лет движение кометы Энке—Баклунда привлекает к себе внимание исследователей. Как известно, это была первая комета, движение которой не удалось объяснить только на основании одного закона всемирного тяготения.

Вскоре после открытия кометы (1818 г.) Энке установил, что период обращения, освобожденный от планетных возмущений, систематически укорачивается, т. е. среднее суточное движение под действием каких-то неизвестных причин возрастает.

Исследованиями последнего времени было установлено, что эти аномалии в движении периодических комет являются не исключением, а скорее правилом. Тем не менее комета Энке выделяется как большой величиной аномалий, так и их переменностью. Изменение коэффициента векового ускорения от одной группы появлений до другой было впервые установлено Баклуном. Для объяснения аномалий в движении кометы Энке—Баклунда был выдвинут целый ряд гипотез, однако все эти гипотезы оказывались недостаточными, так как они не объясняли многие явления, открытые в дальнейшем.

Благодаря прогрессу физических исследований комет твердо установлено, что кометы представляют собой весьма неустойчивые образования, постоянно теряющие массу. На этой основе А. Д. Дубляго была возрождена гипотеза Бесселя—Бредихина, согласно которой аномалии в движении комет вызываются реактивными силами, возникающими при истечении вещества из комет. Успех в 1950 г. построена физическая модель ядра кометы, с помощью которой он сумел качественно объяснить аномалии в движении комет.

В связи с этим становится ясным, какое большое значение имеют точные исследования движений периодических комет вообще и кометы Энке—Баклунда в особенности. Классические работы Баклуна охватывают промежуток времени от открытия кометы до 1914 г. С 1937 по 1954 г. движение кометы было тщательно исследовано С. Г. Маковером. В промежутке между периодами, изученными Баклуном и Маковером, исследование движения кометы Энке—Баклунда нельзя считать достаточно тщательным. Таким образом, возникла задача о связи новейших появлений с появлениями, исследованными Баклуном. Настоящая работа является первой в этом направлении.

140

Она имеет своей целью объединение трех появлений кометы Энке—Баклунда в 1931, 1934 и 1937 гг.

При объединении появлений 1937—1954 гг. С. Г. Маковер разработал оригинальную методику исследования движения комет. Эта методика и была избрана для исследования движения кометы Энке—Баклунда за период с 1931 по 1937 г.

Основные положения принятой методики следующие:

1) строго единообразное определение возмущений методом численного интегрирования в элементах, в то время как Баклуном и его последователями на различных частях орбиты кометы наряду с численными использовались также и аналитические методы учета возмущений (такое чередование методов увеличивает накопление ошибок и ухудшает контроль вычислений);

2) первычисление возмущений после каждого улучшения орбиты;

3) введение предположения о мгновенном изменении среднего суточного движения и эксцентриситета в момент прохождения через перигелий, так как, основываясь на новых воззрениях на строение комет, можно считать, что на большей части орбиты комета движется в строгом соответствии с законом тяготения и лишь на малом участке, вблизи перигелия, на комету действуют силы, вызывающие явление векового ускорения;

4) введение гипотезы о вековом изменении элементов ориентации, происходящем скачкообразно в момент прохождения через перигелий.

Предлучше исследователи принимали, что вековые аномалии возникают на протяжении всего оборота кометы вокруг Солнца. Однако, каковы бы ни были причины, вызывающие вековое ускорение, несомненно, что они действуют более интенсивно при приближении кометы к Солнцу, на сравнительно малом участке орбиты, вблизи перигелия.

Поэтому можно считать, что математический закон, предусматривающий мгновенное изменение элементов при прохождении через перигелий, более близок к действительности, чем закон, принимавшийся предыдущими исследователями.

§ 1. Вычисление возмущений

В основу определения возмущений была положена система элементов, полученная из системы С. Г. Маковера (1955, стр. 178) для 1937 нояб. 3.0 путем приближенного учета возмущений только от Юпитера за промежуток от 1934 июль 22 до 1937 нояб. 3 и априорного изменения средней аномалии. Эта система элементов была названа системой А:

Эпоха и оскуляция 1934 июль 22.0 вс. ср.

$M_0 = 343340559$	
$\omega = 167.90631$	
$\Omega = 35.70336$	Экватор 1950.0
$i = 35.20326$	
$\varphi = 58.19003$	
$\mu = 0.30009366$	

Для коэффициента векового ускорения κ было принято значение $0^{\circ}00323 = 11^{\circ}6$. В дальнейшем возмущения за исследуемый период вычислялись от шести планет: Меркурия, Венеры, Земли, Марса, Юпитера, Сатурна. В пределах принятой точности вычислений возмущениями от других планет оказалось возможным пренебречь.

Возмущения определялись методом вариации произвольных постоянных, так как при исследовании движения кометы Энке необходимо принимать во внимание вековое ускорение, учет влияния которого на элементы намного проще, чем учет влияния на координаты. Кроме того, орбита кометы Энке имеет большой эксцентриситет (0.85), комета в перигелии подходит близко к Солнцу и движется с большой скоростью, так что применение метода интегрирования в элементах позволяло сократить число шагов интегрирования по сравнению с интегрированием в координатах.

Благодаря особенностям расположения орбиты кометы по отношению к орбитам возмущающих тел оказалось возможным разделить все возмущающие тела на четыре

141

группы в зависимости от степени их влияния на движение кометы и от скорости изменения возмущающих ускорений:

1) Возмущения от Меркурия вычислялись отдельно при помощи барцентрического метода, так как в барцентрической системе координат эти возмущения достаточно велики только в ближайшей окрестности перигелия кометы. В качестве интервала интегрирования в первом приближении был взят промежуток в 5 дней, во втором — промежуток в 4 дня.

2) Вторую группу возмущающих планет составили Венера и Земля. Обе планеты движутся достаточно быстро и несмотря на то, что возмущающие действия этих планет невелики, пришлось интервал интегрирования в афелии принять равным 10 дням, чтобы можно было проводить контроль вычислений по разностям. В перигелии при вычислениях в первом приближении интервал был принят равным 5 дням, а во втором приближении — 4 дням.

3) Марс и Сатурн составляют третью группу возмущающих планет. Марс вызывает незначительные возмущения в движении кометы, а Сатурн движется очень медленно, и правые части уравнений Лагранжа меняются плавно. Поэтому оказалось возможным на большей части орбиты брать интервал интегрирования равным 20 дням, а в перигелии — 10 дням в первом приближении и 8 дням — во втором.

4) Возмущения от Юпитера вычислялись отдельно, так как они наиболее значительны. На изучаемом участке движения комета не сближалась с Юпитером, поэтому в афелии за промежуток интегрирования был взят интервал в 20 дней, при приближении к перигелию он был уменьшен до 10 дней, а в перигелии до 5 дней. Во втором приближении интервал вблизи перигелия был 8 дней, а в перигелии — 4 дня.

Компоненты возмущающих ускорений S , T , W вычислялись для каждой планеты отдельно, а затем суммировались по группам; правые части уравнений Лагранжа вычислялись для планет, входящих в одну группу, совместно.

В качестве независимого переменного принималось время, так как координаты возмущающих планет выбирались из таблиц „Planetary coordinates 1920—1940“ или „Astronomical Papers“ гг. 14 и 15 в зависимости от выбранного интервала. Вычисления производились в системе координат, связанной с плоскостью экватора эпохи 1950.0, так как в таблицах даются координаты возмущающих планет в этой системе. Массы возмущающих планет были взяты из „Planetary coordinates“.

Интегрирование уравнений Лагранжа в первом приближении производилось по формулам механических квадратур с переменной системы оскулирующих элементов каждые 120 дней.

Для производных всех элементов вычислялись столбцы первых сумм, а для $\frac{da}{dt}$, кроме того, столбцы вторых сумм. Значения интегралов вычислялись на моменты $t \rightarrow K_{00}$.

В результате вычислений были получены в первом приближении следующие возмущения за промежуток времени от 1931 г. до 1934 г. (табл. 1):

Таблица 1

Возмущения от 1931 июнь 28 до 1934 июль 22

Название планеты	ΔM	Δa	Δp	$\Delta \omega$	$\Delta \Omega$	Δi
Юпитер	-0.019826	-0.000003929	-0.000402	+0.001761	-0.000183	-0.000596
Венера и Земля	-0.01235	-0.0002143	+0.00018	+0.00127	-0.00090	+0.00001
Марс и Сатурн	-0.00422	+0.00000901	+0.000604	+0.00194	-0.00103	+0.00175

На данном отрезке времени возмущения от Меркурия не вычислялись, так как между появлениями 1931 и 1934 гг. комета через перигелий не проходила. Возмущения за промежуток от 1934 до 1937 г. (второй оборот кометы) в первом приближении были вычислены С. Г. Маковером со следующими результатами (табл. 2):

Таблица 2

Возмущения от 1934 июль 22 до 1937 нояб. 3

Название планеты	ΔM	Δa	Δp	$\Delta \omega$	$\Delta \Omega$	Δi
Юпитер	+0.0210557	-0.000007494	-0.002106	-0.001374	+0.000434	-0.000842
Венера и Земля	-0.01793	-0.00004110	+0.00118	-0.00169	-0.00064	-0.00035
Марс и Сатурн	-0.03610	-0.00000324	-0.00178	+0.00438	+0.00055	-0.00277
Меркурий	-0.00080	-0.00000070	+0.00002	+0.00001	-0.00001	0.00000

Для появлений 1931 и 1937 гг. были получены следующие оскулирующие элементы в системе А (табл. 3):

Таблица 3

Оскулирующие элементы. (Система А).
Экватор 1950.0

	1931 июль 28	1937 нояб. 3
M_0	7945761	343557488
e	167.88549	167.89527
Ω	350.79211	350.79260
i	35.20745	35.19172
φ	58.18783	58.16839
μ	0.30014537	0.29997906

§ 2. Наблюдения. Предварительные нормальные места

В настоящей работе были собраны наблюдения 1931 г. и вычислены предварительные нормальные места, так как эфемериды давали слишком большие расхождения с наблюдениями. Наблюдения 1934 г. были объединены в нормальные места, которые можно считать окончательными. Нормальные места 1937 г. были взяты из работы С. Г. Маковера (1935, стр. 183).

Для образования предварительных нормальных мест 1931 г. было использовано 21 наблюдение, произведенное в Йоганнесбурге (Wood, 1931). Из этих наблюдений четыре были отброшены, так как плохо согласовывались с другими и, согласно замечаниям наблюдателя, были произведены в неблагоприятных условиях.

Параллактические множители перевычислялись. В табл. 4 приводятся наблюдения и сравнения их с невозмущенной эфемеридой, вычисленной по оскулирующим элементам эпохи 1931 июль 28. Сравнение проводилось в системе координат 1931.0. Нормальные уклонения получены были графически.

В появлении 1934 г. было собрано четыре фотографических наблюдения Ликской обсерватории и 52 визуальных наблюдения Йеркской, Афинской и казанских обсерваторий. Сравнение проводилось в системе экватора 1934.0, вводились поправки за эфемеридное время и за собственное движение звезд. Возмущения от эпохи оскуляции 1934 июль 22 до момента наблюдений не учитывались.

В табл. 5 приведены результаты сравнений наблюдений с эфемеридой. На основании первых семи наблюдений (с 8 по 21 июля) было получено одно нормальное место, на основании остальных 49 (с 9 по 20 августа) — второе.

Нормальные отклонения были получены как средние арифметические из всех отклонений. После учета прецессии были получены нормальные места, приведенные в табл. 6. Нужно отметить, что наблюдения 1931 г. были произведены после перигелия.

Таблица 6
Предварительные нормальные места

Дата	$\alpha_{1950.0}$	$\delta_{1950.0}$	Число наблюдений	Сравнение с системой А		Сравнение с системой В ₁		
				$\Delta\alpha_{O-C} \cos \delta$	$\Delta\delta_{O-C}$	$\Delta\alpha_{O-C} \cos \delta$	$\Delta\delta_{O-C}$	
1931 г. июль	20.0	7°27' 8.65"	+10°24'26".8	8	-67.6	-126.7	+2.1	-8.1
июль	3.0	8 46 39.99	-8 28 06.5	5	-23.9	-25.4	-17.7	-14.5
июль	15.0	11 16 31.04	-34 42 07.7	4	+283.7	-354.7	-15.0	-24.4
1934 г. июль	17.0	4 15 44.82	+29 10 11.7	7	+28.6	+4.5	-2.4	+0.3
август	18.0	7 27 32.93	-29 17 52.1	49	+62.0	-18.5	+2.8	+5.6
1937 г. август	5.0	2 20 01.85	+27 34 56.5	3	+0.1	-2.3	+4.0	-12.3
сентябрь	9.0	1 46 48.42	+37 24 49.3	4	-2.8	-1.9	+1.3	-8.3
октябрь	3.0	22 48 04.61	+43 02 33.0	17	-7.2	-6.5	-7.4	-0.4
ноябрь	26.0	18 37 34.04	-11 28 56.3	19	-13.2	-16.1	-12.0	-10.0

Коэффициенты условных уравнений при поправках эллиптических элементов вычислялись по известным формулам Эккерта—Брауэра. Коэффициенты при поправке векового ускорения вычислялись по формуле, выведенной в предположении о мгновенном изменении среднесуточного движения при прохождении через перигелий (Маковер, 1955, стр. 168). Решение системы нормальных уравнений было проведено с помощью матриц и получены следующие значения для искоемых поправок:

$$\begin{aligned} \delta M &= +0.00531, \\ \delta a &= +0.00798, \\ \delta e &= -0.00777, \\ \delta i &= -0.00543, \\ \delta \varpi &= +0.00138, \\ 1000 \delta \Omega &= -0.00516, \\ \delta \omega &= +0.00895. \end{aligned}$$

Коэффициент векового ускорения κ оказался равным $0.00406 = 14''$. После предварительного улучшения орбиты все нормальные места были вновь сравнены с положениями, вычисленными на основании системы В₁, полученной в результате предварительного улучшения исходной системы, причем возмущения от эпохи оскуляции до эпохи нормального места не учитывались. Получены были уклонения, приведенные в табл. 6 в седьмой и восьмой графах.

§ 4. Вычисление возмущений во втором приближении

После улучшения орбиты возмущения были перевычислены; оскулирующие элементы вычислялись через каждый шаг интегрирования, для чего использовались возмущения, полученные в первом приближении.

Как уже указывалось ранее, интервал интегрирования вблизи перигелия во втором приближении для всех планет был уменьшен. Это оказалось необходимым для соблюдения правила формальной точности: вторые разности функции $\omega \frac{d\omega}{dt}$ не должны превышать 100 единиц восьмого десятичного знака (в градусах). Принят интервал, равный 8 и 4 дням, оказалось удобным потому, что в таблицах „Astronomical Papers“, тт. 14 и 15 даны координаты Венеры и Земли с интервалом 4 дня.

Возмущения от Юпитера при переходе от системы А к системе В изменились незначительно благодаря удаленности кометы от Юпитера на изучаемом участке движения. Возмущения от Венеры и Земли также изменились незначительно, несмотря на то, что комета довольно близко подходила к Земле ($\rho_{min} = 0.3$ а.е.). Возмущения от Марса и Сатурна не перевычислялись.

В результате перевычисления в промежутке от 1931 до 1934 г. возмущения приняли следующие значения (табл. 7):

Таблица 7
Возмущения от 1931 июль до 1934 июль 22. (Система В)

Название планеты	ΔM	$\Delta \kappa$	$\Delta \varphi$	$\Delta \omega$	$\Delta \Omega$	Δi
Венера и Земля	-0.01236	-0.00002145	+0.00018	+0.00127	-0.00090	+0.00001
Марс и Сатурн	-0.00422	+0.00000901	+0.00604	+0.00194	-0.00103	+0.00175

Возмущения за второй оборот кометы — от 1934 до 1937 г. — также были перевычислены. Результаты вычислений оказались следующими (табл. 8):

Таблица 8
Возмущения от 1934 июль 22 до 1937 ноябрь 3. (Система В)

Название планеты	ΔM	$\Delta \kappa$	$\Delta \varphi$	$\Delta \omega$	$\Delta \Omega$	Δi
Венера и Земля	-0.01781	-0.00004103	+0.00118	-0.00169	-0.00064	-0.00035
Марс и Сатурн	-0.03641	-0.00000351	-0.00177	+0.00438	+0.00055	-0.00277
Меркурий	-0.00099	-0.00000086	+0.00003	+0.00001	-0.00001	0.00000

После учета новых возмущений была получена система элементов В₂.

§ 5. Окончательные нормальные места и окончательное улучшение орбиты кометы

Для получения правых частей в уравнениях Эккерта—Брауэра необходимо было произвести сравнение нормальных мест с системой В₂, для чего были вычислены оскулирующие элементы на эпоху каждого нормального места в этой системе (табл. 9).

Таблица 9
Оскулирующие элементы на эпоху каждого нормального места в системе В₂. Экватор 1950.0

	1931		1934		1937		
	июль 20.0	июль 15.0	июль 17.0	август 18.0	сентябрь 5.0	октябрь 9.0	ноябрь 3.0
M ₀	5206769	12957519	34191036	331751360	32587282	336707431	343957553
ω	167.89326	167.89465	167.91427	167.91421	167.90334	167.90323	167.90239
Ω	350.78440	350.78391	350.78062	350.78032	350.78515	350.78517	350.78483
i	35.20204	35.20206	35.19785	35.19771	35.18652	35.18652	35.18629
φ	58.18901	58.18972	58.19139	58.19169	58.16830	58.16909	58.16979
ρ	0.30014629	0.30012098	0.30008882	0.30007956	0.30000550	0.29999125	0.29997493
							350.947676
							167.90239
							350.78483
							35.18577
							58.17033
							0.29995181

Нормальные места 1931 г. были перевычислены, так как после улучшения элементов орбиты получена более точная эфемерида и, кроме того, дополнительно найдены

5 наблюдений Кормобской обсерватории. Наблюдения 1931 г. были тщательно пересмотрены. В результате пришлось отбросить все наблюдения, входящие в нормальное место, составленное на 3 июля, потому что они плохо согласовывались между собой, а также почти все были снабжены замечаниями наблюдателя, свидетельствующими о неблагоприятных условиях наблюдения (см. табл. 4).

Все наблюдения и сравнение их с системой В₂ приведены в табл. 4. Отброшенные наблюдения выделены скобками. Нормальные уклонения были найдены по способу наименьших квадратов, причем уклонения наблюдений от эфемериды представлены линейной функцией.

В табл. 10 приведены окончательные нормальные места, в табл. 11 — сравнение их с системой В₂.

Таблица 10
Окончательные нормальные места

№ п.п.	Дата (эфемеридное время)	$\alpha_{1930.0}$	$\delta_{1930.0}$	ϵ_a	ϵ_b	Число наблюдений
1	1931 г. июнь 20.0	7 ^h 27 ^m 08 ^s .91	+10°24'23".7	±0.04	±1.7	12
2	июль 15.0	11 16 32.25	-34 42 10.4	±0.02	±0.1	5
3	1934 г. июль 17.0	4 15 44.82	+29 10 11.7	±0.13	±1.1	7
4	август 18.0	7 27 32.93	+29 17 52.1	±0.04	±0.5	49
5	1937 г. сентябрь 5.0	2 20 04.85	+27 34 56.5	±0.01	±0.4	3
6	сентябрь 9.0	1 46 48.42	+37 24 49.3	±0.04	±1.3	4
7	ноябрь 3.0	22 48 04.61	+43 02 33.0	±0.09	±1.0	17
8	26.0	18 37 34.04	+11 28 56.3	±0.05	±0.6	19
9	1941 г. февраль 5.0	23 45 37.25	+ 6 17 10.2	±0.16	±1.2	5
10	1947 г. август 15.0	5 07 07.94	+28 00 03.7	±0.05	±0.3	4
11	сентябрь 22.0	5 00 02.78	+41 21 49.4	±0.03	±1.7	2
12	октябрь 21.0	10 34 10.35	+37 19 03.6	±0.15	±0.8	21
13	ноябрь 10.0	13 22 34.58	+ 1 56 01.9	±0.05	±0.5	4

Таблица 11
Сравнение нормальных мест с системами В₂ и С₂

Дата (эфемеридное время)	Сравнение с системой В ₂		Сравнение с системой С ₂		Невязки условных уравнений	
	$\Delta\alpha_{O-C} \cos \delta$	$\Delta\delta_{O-C}$	$\Delta\alpha_{O-C} \cos \delta$	$\Delta\delta_{O-C}$	$\Delta\alpha_{O-C} \cos \delta$	$\Delta\delta_{O-C}$
1931 г. июнь 20.0	+6.0	-11.7	-1.9	+0.9	-1.9	+0.6
июль 15.0	+1.2	-2.1	+1.2	+1.0	+1.3	+0.8
1934 г. июль 17.0	-1.7	+ 0.4	-0.7	+1.7	-0.8	+1.8
август 18.0	+2.2	+ 6.8	+2.3	+4.0	+1.5	+4.0
1937 г. сентябрь 5.0	+5.3	-11.2	+3.6	-2.8	+3.6	-2.8
сентябрь 9.0	+6.4	- 5.1	+3.4	+2.0	+3.2	+1.9
ноябрь 3.0	+1.5	- 0.1	-3.0	+2.0	-2.7	+ 1.1
26.0	-0.7	+16.6	+0.6	+1.3	+0.4	+1.5

Затем были составлены 16 условных уравнений с семью неизвестными: шестью поправками к эллиптическим элементам, поправкой к коэффициенту векового ускорения $\delta\epsilon$ и вековым изменением угла эксцентриситета $\delta\epsilon'$. Коэффициенты условных уравнений для данного улучшения приведены в табл. 12 (первые 8 нормальных мест; об остальных уравнениях см. стр. 155); правые части приведены в графе с обозначением 100*i*, (*i* выражение в градусах).

Таблица 12
Условные уравнения

№ нормального места	50 <i>M</i> ₀	$\delta\epsilon'$	$\delta\epsilon$	$\delta\epsilon_2$	6000 <i>Q</i>	4 <i>Q</i>	30 <i>Q</i>	4 <i>Q</i> '	$\delta\epsilon_2'$	$\delta\epsilon_2''$	$\delta\epsilon_2'''$	100 <i>i</i> '	100 <i>i</i> ₂
1	-0.2131	-0.1820	-0.4552	-0.4318	+0.1869	-0.6418	0	0	0	0	0	+0.1660	+0.1306
2	+1.1888	-1.7254	+0.3343	-0.8733	-1.1450	-0.1848	0	0	0	0	0	+0.0942	+0.1472
3	-0.3723	-0.1206	-0.2464	+0.5205	-0.0076	-0.3374	0	0	0	0	0	+0.0613	+0.0506
4	+0.3012	-0.2993	-0.2077	+1.3822	-0.3034	-0.5430	+0.0963	0.5430	0.2993	0	0	+0.1477	+0.0806
5	-0.5199	-0.6957	-0.3499	+2.3614	+0.5752	-1.0662	+0.1831	-1.0662	-0.6957	-0.2097	+1.3822	+2.3614	+0.0694
6	-0.5589	-1.4202	+0.6009	+3.8866	-0.5544	-1.6662	+0.1741	-1.6662	-0.5589	-0.3499	-0.6957	+0.1786	+0.0506
7	-0.0078	-0.0834	+0.0052	+0.2051	-0.0134	-1.6740	-0.794	1.6740	-0.0078	-1.3254	-1.3888	-0.0078	-0.0326
8	+0.2968	-0.3117	+0.2254	+1.1956	+0.0134	-0.0740	+0.0061	-0.1480	+0.0104	+0.0104	+0.0104	+0.0104	+0.0104
9	+0.4399	-0.0853	-0.1381	-0.3025	+1.1956	-0.4485	+0.0750	1.7940	-0.9016	-0.9016	-0.9016	+3.3348	+0.0772
10	+0.2468	-0.0853	-0.1381	-0.3025	+1.1956	-0.4485	+0.0750	1.7940	-0.9016	-0.9016	-0.9016	+3.3348	+0.0772
11	-0.0035	+0.4482	-0.1689	-0.3466	-0.0016	-0.1042	+1.4819	+0.4166	+1.9192	-0.7544	-1.2638	+0.2030	+0.2030
12	-0.6551	-0.7059	+0.3847	+0.1142	+0.5962	-0.0789	0	0	0	0	0	-0.3093	-0.0750
13	-1.0993	-1.0990	+0.6000	-1.3998	+1.8383	-1.8383	0	0	0	0	0	+0.0112	+0.0228
14	-0.2010	+0.4807	-0.2108	-0.0991	-0.0091	-0.0922	0	0	0	0	0	+0.1889	+0.1278
15	+0.1429	+0.3484	-1.4584	-0.8881	+0.1426	-0.2442	+0.0454	-0.2442	-1.4584	-0.2381	-0.3111	-0.3111	-0.1778
16	+0.4802	+0.8054	-2.2219	+0.1106	-0.4802	-0.4802	-0.4802	-0.4802	-2.2219	-0.4802	-0.4802	-0.4802	-0.1778
17	+0.4802	+0.8054	-2.2219	+0.1106	-0.4802	-0.4802	-0.4802	-0.4802	-2.2219	-0.4802	-0.4802	-0.4802	-0.1778
18	+0.4802	+0.8054	-2.2219	+0.1106	-0.4802	-0.4802	-0.4802	-0.4802	-2.2219	-0.4802	-0.4802	-0.4802	-0.1778
19	+0.4802	+0.8054	-2.2219	+0.1106	-0.4802	-0.4802	-0.4802	-0.4802	-2.2219	-0.4802	-0.4802	-0.4802	-0.1778
20	+0.4802	+0.8054	-2.2219	+0.1106	-0.4802	-0.4802	-0.4802	-0.4802	-2.2219	-0.4802	-0.4802	-0.4802	-0.1778
21	+0.4802	+0.8054	-2.2219	+0.1106	-0.4802	-0.4802	-0.4802	-0.4802	-2.2219	-0.4802	-0.4802	-0.4802	-0.1778
22	+0.4802	+0.8054	-2.2219	+0.1106	-0.4802	-0.4802	-0.4802	-0.4802	-2.2219	-0.4802	-0.4802	-0.4802	-0.1778
23	+0.4802	+0.8054	-2.2219	+0.1106	-0.4802	-0.4802	-0.4802	-0.4802	-2.2219	-0.4802	-0.4802	-0.4802	-0.1778

Примечание. В первом столбце приведены номера нормальных мест по табл. 10, причем под номером без знака указаны уравнения по ϵ , а под знаком — уравнения по ϵ' .

Решение системы нормальных уравнений проводилось с помощью матриц, причем система решалась дважды: сначала с произвольным распределением неизвестных, а затем неизвестные были расположены в порядке убывания весовых коэффициентов, как предложил Д. К. Куликов. Матрицы второго варианта решения приведены в табл. 13.

Таблица 13

Нормальные уравнения для объединения трех появлений и их решение

10% λ	4 δ_{μ}	6000 δ_{μ}	5 δM	4 δ_{μ}	δ_{μ}^2	δ_{μ}^2	δ_{μ}^2	100 I
+11.60593	-7.77682 +9.40770	+12.13908 - 8.13923 -17.72515	-11.78846 8.02655 7.02449 -18.29233	- 7.77682 + 9.40770 -10.78647 + 5.08015 - 8.49680 + 8.74993 - 6.22096 + 1.11954 -11.50727 - 8.99164 +23.67489	+ 6.33433 -11.38180 + 5.08015 -10.98879 + 1.11954 - 8.48803 -10.52424 +13.75329	- 9.19651 + 1.93174 - 1.63634 -11.38180 + 5.08015 -10.98879 + 1.11954 - 8.48803 -10.52424 +13.75329	+ 1.93174 - 1.63634 -11.38180 + 5.08015 -10.98879 + 1.11954 - 8.48803 -10.52424 +13.75329	-0.17296 -0.49203 -1.64359 +0.23559 +1.82677 -0.60841 -1.77141
+11.60593	-7.77682 +4.19669	+12.13908 - 0.00520 + 5.02839	-11.78846 + 0.12746 - 5.28769 + 0.75419	- 7.77682 + 4.19669 - 2.07902 + 0.48889 + 1.04792	+ 6.33433 - 6.54203 - 1.55329 + 0.48889 - 0.60888 + 1.92520 + 2.75280	- 9.19651 + 0.34194 - 2.01857 + 0.00776 + 1.92520 - 4.21877 + 3.57678	+ 0.34194 - 2.01857 + 0.00776 + 1.92520 - 4.21877 + 3.57678	-0.17296 -0.60793 -1.46344 -0.00430 +0.12038 +0.36466 +0.01851 -1.23191
+1.0000	-0.67007 +1.00000	+ 1.04594 - 0.00124 + 1.00000	+ 1.01573 + 0.03037 - 1.05157 + 1.00000	- 0.67007 + 1.00000 - 0.41346 + 0.50465 + 1.00000	+ 0.54578 - 1.55885 + 0.30890 - 0.64160 + 1.32529 + 1.00000	- 0.79240 + 1.24372 + 0.22446 - 0.40073 + 1.83716 - 0.74812 + 0.91929 - 1.00000	+ 0.16644 - 0.08148 + 0.40143 + 0.01029 + 1.83716 - 0.74812 + 0.91929 - 1.00000	-0.01490 -0.14486 -0.29104 -0.30570 +0.11488 +0.06462 -0.00672 +0.34442

В результате вычислений была получена следующая система поправок:

$$\begin{aligned} \delta M_0 &= -0^{\circ}00003 \pm 0^{\circ}00032, \\ \delta \omega &= -0^{\circ}00649 \pm 0^{\circ}00044, \\ \delta \Omega &= +0^{\circ}00508 \pm 0^{\circ}00029, \\ \delta i &= +0^{\circ}00208 \pm 0^{\circ}00039, \\ \delta \mu &= -0^{\circ}00075 \pm 0^{\circ}00037, \\ 1000 \delta \mu &= -0^{\circ}00062 \pm 0^{\circ}00033, \\ \delta \lambda &= +0^{\circ}00023 \pm 0^{\circ}00039, \\ \delta \mu^2 &= -0^{\circ}00064 \pm 0^{\circ}00072. \end{aligned}$$

Коэффициент векового ускорения принял значение, равное $0^{\circ}00429 = 15'' \pm 1''$. Средняя ошибка единицы веса, вычисленная по формуле $\sigma = \sqrt{\frac{[e^2]}{n-m}}$, оказалась равной 31.

В табл. 14 приведены три системы оскулирующих элементов для 1931, 1934 и 1937 гг.

С помощью новой системы S_2 были получены оскулирующие элементы на эпоху каждого нормального места и сделаны сравнения вычисленных положений с нормальными местами. Разности вычисленных и наблюдаемых координат приведены в табл. 11 в четвертой и пятой графах. Также были определены невязки условий уравнений, приведенные в этой же таблице в шестой и седьмой графах.

Согласование невязок условий уравнений с уклонениями нормальных мест от вычисленных положений в пределах точности является наиболее полным контролем всех вычислений по улучшению орбиты.

§ 6. Объединение пяти появлений кометы Энке—Бакунда в 1931—1947 гг.

При объединении трех появлений 1931—1937 гг. была сделана попытка определить вековые аномалии элементов ориентации. Они налицо были с ошибками, превышающими эти аномалии. Получилось так потому, что на изучаемом участке движения комета прошла через перигелий всего лишь один раз — вскоре после появления 1934 г., что,

Таблица 14

Элементы S_2

	1931 июнь 28	1934 июль 22	1937 нояб. 3
M_0	746936	343°41088	343°57520
ω	167.88699	167.90780	167.89676
Ω	350.78942	350.78567	350.78991
i	35.20491	35.20071	35.18917
μ	58.18846	58.19066	58.16840
μ^2	0.30013956	0.30008788	0.29997469

$$\kappa = 0^{\circ}00429, \quad \varphi = -0^{\circ}00064.$$

конечно, недостаточно для определения вековых изменений элементов ориентации. Поэтому было решено использовать нормальные места, полученные С. Г. Маковером для появлений 1941—1947 гг. (Маковер, 1955, табл. 10), и объединить одной системой элементов пять появлений. Причем веса для нормальных мест были заимствованы из той же работы. Возмущения для появлений 1941—1947 гг. были взяты из оригинальных вычислений С. Г. Маковера по системе К.

Таблица 15

Системы оскулирующих элементов на даты нормальных мест по системе S_1

	1931 июль 20.0	1931 июль 15.0	1934 июль 17.0	1934 август 18.0	1937 сентябрь 5.0	1937 октябрь 9.0	1937 ноябрь 3.0
M_0	5906813	122°57071	341°91054	351°951377	325°87254	336°907401	343°57523
ω	167.88827	167.88966	167.90928	167.90922	167.89835	167.89824	167.89826
Ω	350.78845	350.78467	350.78467	350.78437	350.78920	350.78922	350.78888
i	35.20429	35.20431	35.19560	35.19996	35.18877	35.18877	35.18854
μ	58.18895	58.18956	58.19133	58.19163	58.16722	58.16801	58.16871
μ^2	0.30014606	0.30012070	0.30008859	0.30007933	0.30000509	0.29999084	0.29997452

	1937 ноябрь 26.0	1941 февраль 5.0	1947 август 15.0	1947 сентябрь 22.0	1947 октябрь 21.0	1947 ноябрь 10.0
M_0	350°47545	338°78627	329°17610	340°50876	349°15748	355°21216
ω	167.89800	167.95647	167.97184	167.97169	167.97128	167.97277
Ω	350.78779	350.84759	350.84040	350.84013	350.83976	350.83968
i	35.18802	34.99084	34.99047	34.99021	34.99003	34.98998
μ	58.16925	57.79778	57.80899	57.80864	57.80845	57.80802
μ^2	0.29995140	0.29812739	0.29823618	0.29823758	0.29823418	0.29825768

$$\kappa = 0^{\circ}00395, \quad \varphi = -0^{\circ}00102.$$

В основу объединения была положена одна из промежуточных систем C_1 :

Эпоха 1934 июль 22.0
 $M_0 = 343241109$,
 $e = 167.90930$,
 $\Omega = 550.78464$,
 $i = 35.20008$,
 $\varphi = 58.19135$,
 $\mu = 0.30008827$,
 $\lambda = 0.00395$,
 $\varphi' = -0.00102$.

Для сравнения вычислений с нормальными местами были найдены системы оскулирующих элементов на дату каждого нормального места. Эти системы приведены в табл. 15.

Сравнение всех 13 нормальных мест с системой C_1 дано в табл. 16, причем все нормальные места приведены к одному весу.

Таблица 16
 Сравнение нормальных мест с системами C_1 , D_1 и D_2

Дата (фемеридиальное время)	\sqrt{p}	Сравнение с системой C_1		Сравнение с системой D_1		Невязки условных уравнений		Сравнение с системой D_2	
		$\Delta z \cos i \sqrt{p}$	$\Delta b \sqrt{p}$	$\Delta z \cos i \sqrt{p}$	$\Delta b \sqrt{p}$	$\Delta z \cos i \sqrt{p}$	$\Delta b \sqrt{p}$	$\Delta z \cos i \sqrt{p}$	$\Delta b \sqrt{p}$
1931 г. июль 20.0	1	+ 4.7	- 2.7	-1.3	+0.3	-1.4	+0.4	-3.8	+2.0
июль 15.0	1	+ 5.3	+ 1.9	+0.4	+1.2	+0.6	+0.7	+2.5	+1.5
1934 г. июль 17.0	1	+ 0.1	+ 1.9	-0.9	+1.7	-1.1	+1.7	-1.5	+1.3
август 18.0	1	+ 1.8	+ 4.6	+4.0	+3.8	+3.8	+3.5	+3.2	+2.9
1937 г. сентябрь 5.0	1	+ 2.9	- 4.6	+3.2	-2.2	+2.8	-2.4	+3.2	-2.7
сентябрь 9.0	1	+ 2.2	+ 0.5	+2.6	+1.9	+3.0	+2.0	+3.5	+1.7
октябрь 3.0	1	- 4.5	- 2.2	- 2.1	- 1.9	- 1.9	- 2.1	- 1.9	- 2.0
" 26.0	1	- 1.1	+ 3.7	+0.3	+0.4	+0.7	+0.6	+0.5	+0.9
1941 г. февраль 5.0	1/2	- 2.6	+ 0.1	-1.8	+0.5	-1.8	+0.6	-1.8	+0.6
1947 г. август 15.0	1	+28.7	+ 6.6	-0.4	-0.4	-0.2	+0.5	+1.6	+0.7
сентябрь 22.0	1/2	+51.4	+ 6.2	-0.1	-0.1	-0.2	-0.1	+2.3	+1.0
октябрь 21.0	1/2	+75.3	-89.3	+0.6	+0.3	+0.6	+0.3	+5.0	+0.8
ноябрь 10.0	1	+19.8	-22.5	-0.9	-0.3	-1.1	-0.2	+1.6	+4.3

Затем, используя данные из работы С. Г. Макарова (1956, табл. 8), мы составили условные уравнения, приведенные в табл. 12. Нормальные уравнения, а также их решение приведены в табл. 17.

В результате решения системы нормальных уравнений были получены следующие поправки к системе C_1 с ошибкой единицы веса, равной $\sigma_p = \pm 2.2$:

$\delta M_0 = -0.00041 \pm 0.00004$,
 $\delta e = -0.00063 \pm 0.00061$,
 $\delta \Omega = +0.00069 \pm 0.00072$,
 $\delta i = +0.00039 \pm 0.00031$,
 $\delta \varphi = -0.00075 \pm 0.00014$,
 $10000 \delta \mu = -0.00058 \pm 0.00006$,
 $\delta \lambda = +0.00058 \pm 0.00001$,
 $\delta \varphi' = +0.00067 \pm 0.00013$,
 $\delta \lambda' = +0.00084 \pm 0.00022$,
 $\delta \omega = -0.00001 \pm 0.00036$,
 $\delta \sigma' = +0.00095 \pm 0.00047$.

После введения этих поправок в систему C_1 была получена система элементов D_1 , приведенная в табл. 18 для различных эпох оскуляции. Коэффициент векового ускорения

Таблица 17
 Нормальные уравнения для объединения лент помалей и их решение

	δM_0	δe	$\delta \Omega$	δi	$\delta \varphi$	$10000 \delta \mu$	$\delta \lambda$	$\delta \varphi'$	$\delta \lambda'$	$\delta \omega$	$\delta \sigma'$	100 l
30 л	+16.92413	-	-16.92413	-	-	-	-	-	-	-	-	+1.00000
4 л	-0.02200	+21.46331	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0.53308
6000 л	+23.12888	-16.02630	+41.00425	-	-	-	-	-	-	-	-	0.22214
5 л	+8.63370	+9.98817	+17.70797	-	-	-	-	-	-	-	-	0.10000
δM_0	8.84181	9.74400	+32.46186	-	-	-	-	-	-	-	-	0.10000
δe	-5.23543	+17.52050	-21.34728	-	-	-	-	-	-	-	-	0.10000
$\delta \Omega$	+10.83321	-26.54926	-23.13170	-	-	-	-	-	-	-	-	0.10000
δi	-12.8012	7.75600	8.39500	-	-	-	-	-	-	-	-	0.10000
$\delta \varphi$	-4.29957	+14.74294	-7.75600	-	-	-	-	-	-	-	-	0.10000
$10000 \delta \mu$	-12.8012	7.75600	8.39500	-	-	-	-	-	-	-	-	0.10000
$\delta \lambda$	-12.8012	7.75600	8.39500	-	-	-	-	-	-	-	-	0.10000
$\delta \varphi'$	-12.8012	7.75600	8.39500	-	-	-	-	-	-	-	-	0.10000
$\delta \lambda'$	-12.8012	7.75600	8.39500	-	-	-	-	-	-	-	-	0.10000
$\delta \omega$	-12.8012	7.75600	8.39500	-	-	-	-	-	-	-	-	0.10000
$\delta \sigma'$	-12.8012	7.75600	8.39500	-	-	-	-	-	-	-	-	0.10000

ния оказалась равным $\kappa = 0^{\circ}00453 = 16''3 \pm 0^{\circ}05$, а для векового изменения угла эксцентриситета получилось следующее значение: $\dot{\varphi} = -0^{\circ}00035 = -1^{\circ}3 \pm 0^{\circ}5$.

Таблица 18
Элементы D₁

	1931 июнь 28.0	1934 июль 22.0	1937 ноябрь 3.0	1941 февраль 15.0	1944 июнь 9.0	1947 октябрь 22.0
M ₀	7946938	343941068	343977522	341976883	342962537	349946401
ω	167.88766	167.90867	167.89662	167.95374	167.96187	167.96761
Ω	350.78908	350.78533	350.79052	350.84996	350.84063	350.84425
i	35.20464	35.20044	35.18974	34.99271	35.00823	34.99374
τ	58.18840	58.19060	58.18663	58.79803	58.84262	57.81037
μ	0.30013937	0.30008769	0.29997491	0.29813214	0.29836914	0.29824802

С. Г. Маковером при объединении пяти появлений 1937—1954 гг. были получены для вековых изменений элементов ориентации значения, приведенные в табл. 19. По обстоятельству, что средние квадратические ошибки полученных нами величин \dot{r} , $\dot{\omega}$, $\dot{\Omega}$ оказались большими, чем ошибки этих же величин по исследованиям С. Г. Маковера, натолкнуло нас на мысль провести объединение пяти появлений без учета вековых изменений элементов ориентации. Условные и нормальные уравнения этого улучшения орбиты можно получить из тех же таблиц, что и для предыдущего улучшения, отбрасывая лишь столбцы для коэффициентов при $\dot{\delta}r$, $\dot{\delta}\omega$, $\dot{\delta}\Omega$.

В результате последнего улучшения были получены следующие поправки элементов системы С₁:

$$\begin{aligned} \delta M_0 &= -0^{\circ}00039, \\ \delta \omega &= -0.00154, \\ \delta \Omega &= +0.00130, \\ \delta i &= +0.00098, \\ \delta \tau &= -0.00097, \\ 1000\delta \mu &= -0.00060, \\ \delta \dot{r} &= +0.00058, \\ \delta \dot{\omega} &= +0.00080, \\ \delta \dot{\Omega} &= +0.00453 = +16^{\circ}3, \\ \delta \dot{\varphi} &= -0.00022 = -0^{\circ}8. \end{aligned}$$

Интересно отметить, что представление нормальных мест ухудшилось незначительно (см. табл. 16, сравнение с системой D₂), так как ошибка единицы веса стала 2.9 вместо 2.2.

Таблица 19

	Автор	
	С. Г. Маковер	С. И. Лучин
\dot{r}	$\pm 0^{\circ}00004 \pm 0^{\circ}00015$	$\pm 0^{\circ}00101 \pm 0^{\circ}00036$
$\dot{\omega}$	$\pm 0.00057 \pm 0.00015$	$\pm 0.00095 \pm 0.00047$
$\dot{\Omega}$	$\pm 0.00033 \pm 0.00013$	$\pm 0.00084 \pm 0.00022$

Последний результат говорит о малой реальности полученных значений вековых изменений элементов ориентации, однако нужно заметить, что средние ошибки \dot{r} , $\dot{\omega}$, $\dot{\Omega}$ получились меньше определяемых величин.

Заключение

Задачей настоящего исследования было объединение трех появлений кометы Энке—Бакула в 1931—1937 гг. и нахождение коэффициента векового ускорения для этого периода.

В результате вычислений была найдена такая система элементов, которая дала отклонения вычисленных положений от нормальных мест без систематического хода. Ошибка единицы веса получалась 3.1, в то время как максимальная ошибка одной нормальной координаты достигала 2.5, можно считать, что точность вычислений оказалась не ниже точности наблюдений. Нужно отметить, что удавались последовательные и достоверные нормальные места.

Найденные нами значения κ хорошо укладываются в ряд коэффициентов векового ускорения, полученных предыдущими исследователями (табл. 20).

Таблица 20

Период	κ	Автор	Период	κ	Автор
1819—1858 гг.	60	Баклаунд	1924—1931 гг.	23	Идемарсон
1858—1860 гг.	50	"	1931—1937 гг.	12	Лучин
1868—1894 гг.	49	"	1931—1937 гг.	12	Маковер
1894—1901 гг.	29	"	1941—1951 гг.	6	"
1901—1914 гг.	22.5	"			

Из таблицы видно, что результаты нашего исследования подтверждают положение о неравномерном уменьшении коэффициента векового ускорения. При объединении пяти появлений усредненное κ приняло значение 16.3. Однако это значение вышло в значении, найденному для периода 1931—1937 гг. ($\kappa = 15.4 \pm 1.3$). Поэтому можно считать, что на участке движения с 1931 по 1947 г. κ было практически постоянным.

Если считать, что вековые аномалии образуются в результате действия неслучайных сил, возникающих при выбросе кометы из ядра кометы, то можно предположить, что этот выброс происходит периодически, следовательно, неслучайно, как и объясняется периодичность вековых аномалий \dot{r} , $\dot{\omega}$, $\dot{\Omega}$ (см. табл. 19). Кроме того, в движении 1954 г. наблюдались вековые аномалии \dot{r} , $\dot{\omega}$, $\dot{\Omega}$ (см. табл. 19). Эти аномалии были в доверительные и достоверные наблюдения. Для их учета и были введены в рассмотрение вековые изменения элементов ориентации. На изученном нами участке движения нет такого доверия, в котором были бы последние вековые наблюдения. Поэтому наши результаты получились с большим числом средних ошибок, т. е. менее реальными, чем по исследованиям С. Г. Маковера.

Для выяснения вопроса о существовании и о закономерностях изменения величин \dot{r} , $\dot{\omega}$, $\dot{\Omega}$ необходимо в дальнейшем определить эти величины для других участков движения кометы Энке—Бакула.

ЛИТЕРАТУРА

Баклаунд Э. А. 1925. Отчет об исследовании кометы Энке 1801—1914. Изв. Акад. наук, сер. б, 9, 13, 1889.
 Маковер С. Г. 1955. Комета Энке—Бакула. Сообщение первое. Движение до 1937—1951 гг. Труды ИТА, 6.
 Маковер С. Г. 1956. Комета Энке—Бакула. Сообщение второе. Определение места Меркурия по наблюдению кометы до 1937—1954 гг. Труды ИТА, 6.
 Вольфен В. 1932. Observaciones de cometas y de Plutón tomadas en el observatorio Nacional Argentino. A. J. 32, 49.
 Идемарсон 1933. Solar Constants 1800—2000. Astr. Pap., 14.
 Флорет Р. 1955. Coordinates of Venus 1800—2000. Astr. Pap., 15, 3.
 Pineda J. G. 1933. Coordinates for the years 1800—1940. 1933.
 Вольфен В. 1931. Plutón y otros cuerpos del Sistema Solar. 1931. A.-N., 243, 5819, 178.

Получено в Редакцию
28 августа 1957 г.

Бюллетень Института Теоретической Астрономии

Т. VII

1958

№ 2 (85)

К вопросу о наличии систематических ошибок в наблюдениях кометы Энcke—Бакунда

С. И. Лучич

Д. О. Мокначем было высказано предположение о том, что вековые аномалии комет не реальны, а являются полностью или частично следствием систематических ошибок наблюдений. Показано, что движение кометы Энcke—Бакунда за 1931—1937 гг. не может быть объяснено без предположения о вековом ускорении, в влияние систематических ошибок исчезающе мало.

ON THE PRESENCE OF SYSTEMATIC ERRORS IN THE OBSERVATIONS OF COMET ENCKE—BACKLUND, by S. I. Luchich. — The supposition that secular accelerations of comets can be completely or partly explained as a consequence of systematic errors of observations was expressed by D. O. Moknach. In this article it is shown that the motion of comet Encke—Backlund in 1931—1937 can't be explained without the supposition of the secular acceleration and that the influence of systematic errors is extremely small.

У многих короткопериодических комет известны вековые аномалии в их движении. Так, у комет Энcke—Бакунда, Биелли, Брука открыто вековое ускорение, у комет Дарре, Понса—Виннегь, Вальфа 1 — вековое замедление. Отсутствие вековых аномалий у других комет, может быть, объясняется недостаточностью исследованного материала. Комета Энcke—Бакунда исследовалась за период более чем 150 лет, и у нее были обнаружены наибольшее вековые аномалии. Для объяснения этих аномалий был выдвинут целый ряд гипотез.

Первой была выдвинута гипотеза о сопротивляющейся среде. В настоящее время она является несостоятельной, так как не объясняет векового замедления некоторых комет.

Позже была высказана гипотеза о прохождении кометы через метеорный поток, столкновения с частицами которого и дают эффект векового ускорения. Эта гипотеза тоже не объясняет векового замедления. Более того, комета Брука в результате сближения с Юпитером получила значительные изменения в элементах своей орбиты, следовательно, условия встречи с метеорным потоком стали иными, но вековое ускорение при этом изменилось совершенно незначительно. Это является существенным возражением против данной гипотезы.

Еще позднее была предложена гипотеза, объясняющая вековое ускорение наличием абберационного эффекта для светового давления солнечной радиации. Эта гипотеза, как и предыдущие, не объясняет векового замедления.

В последнее время Уинплом была построена ледяная модель ядра, которая позволила возродить гипотезу Бесселя—Бредихина, объясняющую вековые аномалии истечением материи из ядра кометы под некоторым углом к радиусу-вектору. До последнего времени у исследователей не возникало сомнения в реальности явления векового ускорения. Так, например, более ста лет тому назад Энcke посвятил изучению этого явления ни. Так, например, более ста лет тому назад Энcke посвятил изучению этого явления ни. Так, например, более ста лет тому назад Энcke посвятил изучению этого явления ни. Так, например, более ста лет тому назад Энcke посвятил изучению этого явления ни. Так, например, более ста лет тому назад Энcke посвятил изучению этого явления ни.

156

и наоборот, вычисления без этой гипотезы не привели бы к обнаружению кометы, кроме, быть может, трех случаев.

В своей работе Энcke приводит несколько доказательств существования векового ускорения, основанных на:

- 1) хорошем согласии наблюдений кометы с вычислениями;
- 2) исследовании движения кометы за шесть оборотов (1819—1838 гг.);
- 3) хорошем представлении наблюдений кометы за девять оборотов (1819—1848 гг.);
- 4) невозможности представления движения кометы чисто гравитационной теорией;
- 5) близком согласии с теорией наблюдений за время до 1819 и после 1848 г.;
- 6) изучении наблюдаемых моментов прохождения кометы через перигелий, освобожденных от влияния планетных возмущений.

В частности, в четвертом разделе своей работы Энcke приводит следующую итоговую таблицу, представляющую остаточные ошибки средней аномалии кометы при попытках объединения десяти появлений без гипотезы векового ускорения (I) и с учетом этой гипотезы (II):

	I	II
1819 г.	-11'55.7	+1.79
1822 г.	- 3 59.6	-1.0
1825 г.	+ 1 59.5	-1.3
1829 г.	+ 5 57.5	-1.1
1832 г.	+ 7 57.7	-0.1
1835 г.	+ 7 58.1	+0.4
1838 г.	+ 5 59.2	+0.9
1842 г.	+ 2 01.5	+0.9
1845 г.	- 3 58.6	+1.8
1848 г.	-11 58.1	-2.3

Сравнение столбцов I и II дает весьма сильное доказательство реальности явления векового ускорения.

За последнее время Д. О. Мокначем (1956а, 1956б) было подвергнуто сомнению существование векового ускорения и высказано предположение, что оно является полностью или частично следствием систематических ошибок наблюдений.

В своих работах, посвященных теории кометных форм, Д. О. Мокнач показал, что центр яркости кометы смещен по отношению к центру масс по направлению к Солнцу. Поэтому все наблюдения кометы, которые по необходимости относятся к центру ее видимого изображения, содержат систематические ошибки.

Для проверки предположения о том, что эффект векового ускорения объясняется наличием этих систематических ошибок, Д. О. Мокначем был сделан пример обработки некоторых фиктивных наблюдений, полученных введением в вычисленные положения систематических ошибок, укорачивающих гелиоцентрический радиус-вектор. Ряд последовательных улучшений эллиптических элементов орбиты показал, что возникает эффект увеличения среднесуточного движения. В настоящей работе была сделана попытка получить эти систематические ошибки из реальных наблюдений кометы Энcke—Бакунда.

Методика, используемая в данной работе, заключается в объединении нескольких появлений кометы с помощью учета шести эллиптических элементов орбиты и подбора некоторых дополнительных параметров. Само собой понятно, что объединение двух появлений кометы без гипотезы векового ускорения не представляет труда. Но уже попытка объединения трех появлений без дополнительной гипотезы о вековом ускорении может привести к значительным трудностям. Эти трудности быстро растут с увеличением числа появлений, включаемых в обработку. И, наконец, совместная обработка двух групп появлений, разделенных значительным промежутком времени (например, нескольких появлений первой половины XIX в. с несколькими современными нам появлениями), могла бы дать особенно наглядный материал для доказательства существования векового ускорения.

В рамках настоящей статьи мы ограничимся попыткой изучения систематических ошибок и попыткой объединения без векового ускорения лишь трех появлений кометы.

157

§ 1. Вывод дифференциальных коэффициентов

Д. О. Мохначем была предложена следующая форма закона влияния систематических ошибок наблюдений:

$$\vec{r}_0 - \vec{r}_e = \Delta \vec{r} = -A r^n \vec{e}_0, \quad (1)$$

где A — существенно положительная величина, а n равно или больше единицы, \vec{e}_0 — единичный вектор, направленный по радиусу-вектору. Из (1) легко получить влияние систематической ошибки на прямое восхождение и склонение кометы.

Улучшая орбиту кометы, будем наряду с обычными поправками к эллиптическим элементам отыскивать также параметры A и n . Выведем формулы для дифференциальных поправок δA и δn . На основании известных формул, дающих связь между вариациями прямоугольных и сферических координат, можно записать:

$$\begin{pmatrix} \cos \delta \Delta x \\ \Delta \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial (\Delta x)}{\partial A} \\ \frac{\partial (\Delta y)}{\partial A} \\ \frac{\partial (\Delta z)}{\partial A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sin \alpha}{p} & -\frac{\cos \alpha \sin \delta}{p} \\ \frac{\cos \alpha}{p} & -\frac{\sin \alpha \sin \delta}{p} \\ 0 & \frac{\cos \delta}{p} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $\delta(\Delta x)$, $\delta(\Delta y)$, $\delta(\Delta z)$ есть проекции вариации изменения радиуса-вектора при варьировании A и n на координатные оси. Проварьировав изменение радиуса-вектора по A и n , получим

$$\delta(\Delta r) = -\delta A r^n \vec{e}_0 - A r^n \ln r \vec{e}_0 \delta n. \quad (3)$$

Так как $\vec{r} \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right)$, то векторное равенство можно переписать в координатной форме

$$\begin{pmatrix} \delta(\Delta x) \\ \delta(\Delta y) \\ \delta(\Delta z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r^{n-1} x \delta A - A r^{n-1} x \ln r \delta n \\ -r^{n-1} y \delta A - A r^{n-1} y \ln r \delta n \\ -r^{n-1} z \delta A - A r^{n-1} z \ln r \delta n \end{pmatrix}, \quad (4)$$

Теперь формула (2) примет окончательное выражение

$$\begin{pmatrix} \cos \delta \Delta x \\ \Delta \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^{n-1} x & A r^{n-1} x \ln r \\ r^{n-1} y & A r^{n-1} y \ln r \\ r^{n-1} z & A r^{n-1} z \ln r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sin \alpha}{p} & -\frac{\cos \alpha \sin \delta}{p} \\ \frac{\cos \alpha}{p} & -\frac{\sin \alpha \sin \delta}{p} \\ 0 & \frac{\cos \delta}{p} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Объединив уравнения (5) с обычными уравнениями Эккерта—Брауэра, получим систему уравнений, которая и была использована в нашей работе.

Если A положить равным нулю, то все члены второго столбца первого краковяна правой части обратятся в нули и окажется невозможным определение поправки δn — показателя степени при r в формуле (1).

Так как нам заранее неизвестна величина A , то необходимо будет сделать улучшение орбиты в двух приближениях: сначала положить A равным нулю и придавать n некоторые целые положительные значения 1, 2, ..., с помощью уравнений, в которых отсутствует столбец для δn , определить поправки шести эллиптических элементов и A ,

а затем, выбрав из полученных решений тот вариант, который дает наилучшее представление, сделать второе улучшение элементов орбиты, при котором отыскать как поправки к шести эллиптическим элементам и A , так и поправку к n .

§ 2. Улучшение элементов орбиты кометы

Для решения поставленной перед нами задачи мы воспользовались объединением трех появлений кометы Энке—Бакулуда (1931, 1934, 1937 гг.), опубликованном в предыдущей статье (Лунич, 1958). В течение рассматриваемого промежутка времени комета не приближалась к Юпитеру, а потому ее возмущения от планет были невелики. В нашей предыдущей работе показано, что при переходе от системы A к системе B возмущения изменились незначительно, хотя поправки элементов были довольно велики. Следовательно, можно быть уверенным, что малые изменения элементов, которые будут получены при дальнейших улучшениях орбиты, не вызовут изменения возмущений. Нормальные места и возмущения были взяты из указанной работы. Сводка нормальных мест дана в табл. 10 (см. стр. 148).

Для сравнения с наблюдениями была использована система элементов C_1 , причем вековое ускорение и вековое изменение эксцентриситета не учитывались. Эта система была названа C_1 . Оскулирующие элементы C_1 приведены в предыдущей статье (табл. 15); для 1931 и 1934 гг. элементы системы C_1 и C_2 совпадают.

Таблица 1
Улучшение уравнений

№ по порядку	5 δA_0	δA_x	δA_y	δA_z	δA	δn	10 δA	10 δn	10 δA	10 δn	4 δA	100 δA	100 δn
1	-0.2131	-0.4218	-0.1869	-0.6302	-0.2413	-0.2806	-1.9775	-0.0001	-0.2337	-0.0014	0	+0.1306	-0.1088
2	-1.1898	-0.5264	-0.1948	-0.4618	-0.2418	-0.2818	+2.4651	+0.0003	+0.0103	+0.0036	0	+0.1472	+0.1185
3	-0.0170	-0.2958	-0.0076	+0.0295	+0.0514	+0.0295	+0.0103	+0.0036	+0.0013	+0.0009	0	+0.0506	+0.0491
4	+0.3042	-0.2097	+0.0249	-0.3323	-0.3323	-0.3323	+0.0013	+0.0009	+0.0028	+0.0028	0	+1.4389	-0.1797
5	+0.5799	+1.3822	-0.5752	-1.6620	-0.5386	-0.5386	+0.0012	+0.0012	+0.5492	+0.5492	-0.5430	+2.6611	+0.4109
6	-0.5799	-0.9957	-0.4609	-2.4366	-0.7406	-0.7406	-0.0012	-0.0012	-0.5972	-0.5972	-0.6740	-12.2667	+0.1445
7	-2.9694	-0.2193	-1.3254	-1.3888	-0.0564	-0.0564	-0.0081	-0.0120	-0.2924	-0.2924	0	+0.0750	-0.5119
8	-0.6951	-0.7069	+0.3947	+0.1142	+0.0299	+0.0299	+0.0005	+0.0001	+0.0001	+0.0001	0	+0.0528	+0.0152
9	-1.9593	-1.9890	+0.6600	-1.3998	+1.8293	+1.8293	+0.0119	+0.0005	+0.0001	+0.0001	0	+0.0528	+0.0152
10	+0.0522	+0.3761	-0.1015	-0.0786	+0.0281	+0.0281	+0.0018	+0.0018	+0.0018	+0.0018	0	+0.2442	+0.2568
11	-0.1429	-0.1429	-0.1429	-0.1429	-0.1429	-0.1429	+0.0001	+0.0001	+0.0001	+0.0001	0	+0.0528	+0.0152
12	+0.4802	+0.8894	-2.2219	-0.2706	-0.2706	-0.2706	+0.0002	+0.0002	+0.0002	+0.0002	0	+0.5820	+2.0889
13	+0.4802	+0.8894	-2.2219	-0.2706	-0.2706	-0.2706	+0.0002	+0.0002	+0.0002	+0.0002	0	+0.5820	+2.0889
14	+0.4802	+0.8894	-2.2219	-0.2706	-0.2706	-0.2706	+0.0002	+0.0002	+0.0002	+0.0002	0	+0.5820	+2.0889
15	+0.4802	+0.8894	-2.2219	-0.2706	-0.2706	-0.2706	+0.0002	+0.0002	+0.0002	+0.0002	0	+0.5820	+2.0889
16	+0.4802	+0.8894	-2.2219	-0.2706	-0.2706	-0.2706	+0.0002	+0.0002	+0.0002	+0.0002	0	+0.5820	+2.0889
17	+0.4802	+0.8894	-2.2219	-0.2706	-0.2706	-0.2706	+0.0002	+0.0002	+0.0002	+0.0002	0	+0.5820	+2.0889
18	+0.4802	+0.8894	-2.2219	-0.2706	-0.2706	-0.2706	+0.0002	+0.0002	+0.0002	+0.0002	0	+0.5820	+2.0889

Примечание. В первой графе даны номера нормальных мест, приведенных в табл. 6; поперек без выносов обозначают уравнения по n , поперек со выносами — уравнения по A .

Таблица 2

Нормальные уравнения	10 δk	4 $\delta \mu$	5 δM_0	10 δA $n = -4,7$	1000 $\delta \mu$	10 δA $n = 2$	10 δA $n = 1$	4 $\delta \mu$	10 δk	100 δk	100 δk	10 δk $A = -0,00010$	100 δk
-11,40593	-2,71681	5,40371	-11,28846	7,77682	1,39374	-9,19651	-6,38483	1,59174	1,39374	1,59174	1,59174	1,59174	1,59174
-1,40593	2,71681	-5,40371	11,28846	-7,77682	-1,39374	9,19651	6,38483	-1,59174	-1,39374	-1,59174	-1,59174	-1,59174	-1,59174
1,40593	-2,71681	5,40371	-11,28846	7,77682	1,39374	-9,19651	-6,38483	1,59174	1,39374	1,59174	1,59174	1,59174	1,59174
-1,40593	2,71681	-5,40371	11,28846	-7,77682	-1,39374	9,19651	6,38483	-1,59174	-1,39374	-1,59174	-1,59174	-1,59174	-1,59174
1,40593	-2,71681	5,40371	-11,28846	7,77682	1,39374	-9,19651	-6,38483	1,59174	1,39374	1,59174	1,59174	1,59174	1,59174
-1,40593	2,71681	-5,40371	11,28846	-7,77682	-1,39374	9,19651	6,38483	-1,59174	-1,39374	-1,59174	-1,59174	-1,59174	-1,59174
1,40593	-2,71681	5,40371	-11,28846	7,77682	1,39374	-9,19651	-6,38483	1,59174	1,39374	1,59174	1,59174	1,59174	1,59174
-1,40593	2,71681	-5,40371	11,28846	-7,77682	-1,39374	9,19651	6,38483	-1,59174	-1,39374	-1,59174	-1,59174	-1,59174	-1,59174
1,40593	-2,71681	5,40371	-11,28846	7,77682	1,39374	-9,19651	-6,38483	1,59174	1,39374	1,59174	1,59174	1,59174	1,59174
-1,40593	2,71681	-5,40371	11,28846	-7,77682	-1,39374	9,19651	6,38483	-1,59174	-1,39374	-1,59174	-1,59174	-1,59174	-1,59174
1,40593	-2,71681	5,40371	-11,28846	7,77682	1,39374	-9,19651	-6,38483	1,59174	1,39374	1,59174	1,59174	1,59174	1,59174
-1,40593	2,71681	-5,40371	11,28846	-7,77682	-1,39374	9,19651	6,38483	-1,59174	-1,39374	-1,59174	-1,59174	-1,59174	-1,59174

Улучшения орбиты выполнены в нескольких вариантах, отличающихся между собой числом введенных неизвестных. Условные уравнения для всех этих вариантов могут быть получены из табл. 1 путем отбрасывания в некоторых случаях соответствующих графов. Нормальные уравнения таким же образом (путем отбрасывания соответствующих строк и графов) могут быть получены из данных табл. 2.

В качестве первого варианта решения была предпринята попытка представить все 8 нормальных мест только эллиптической системой элементов. Найденные поправки элементов, а также средняя квадратическая ошибка единицы веса приведены в табл. 3, невязки условных уравнений — в табл. 4. Все основные результаты решения приведены в табл. 5. Представление нормальных мест оказалось неудовлетворительным.

Во второй гипотезе было принято, что комета движется только под действием сил тяготения и наблюдения отягощены систематическими ошибками. Для l было принято значение, равное 2, $A = 0$.

Были решены 16 условных уравнений с семью неизвестными: с шестью поправками к эллиптическим элементам и δA . Коэффициенты условных и нормальных уравнений, а также полученные из решения поправки элементов и невязки условных уравнений приведены в тех же таблицах, что и для первого решения. В результате этого улучшения была получена система элементов Е:

Эпоха 1931 июнь 28,0 в. вр.

$$M_0 = 7946818$$

$$e_0 = 167,89189$$

$$\Omega_0 = 350,78603$$

$$i_0 = 35,20436$$

$$r_0 = 58,18965$$

$$h = 0,33014398$$

$$A = -0,00248$$

$$l = 2$$

Представления нормальных мест, как видно из табл. 4, оказались также неудовлетворительными.

Для второго варианта решения были определены положения кометы на основании новой системы элементов Е. Эти вычисленные положения кометы были сравнены с нормальными местами (табл. 4, седьмая и восьмая графы). Согласно этих сравнений с невязками условных уравнений гипотезы № 2 является наиболее полным контролем всех вычислений по улучшению орбиты для данной гипотезы.

Для этого варианта решения было сделано, кроме того, второе приближение, т. е. улучшение с восемью неизвестными: кроме всех поправок, определявшихся в предыдущем улучшении, определялись еще и δl . Правые части условных уравнений были получены сравнением нормальных мест с положениями, вычисленными по системе Е. В результате этого улучшения были получены: отрицательная поправка к A , равная $-0,00554$, и отрицательная поправка к l , равная $-6,7$. Это решение нельзя считать окончательным, так как поправка δl не мала, поэтому коэффициенты условных и нормальных уравнений для этого решения не приводятся.

Таблица 3

	Поправки неизвестных и средние квадратические ошибки						
	Гипотеза № 1	Гипотеза № 2	Гипотеза № 3	Гипотеза № 4	Гипотеза № 5	Гипотеза № 6	Гипотеза № 7
δM_0	+0°00369	+0°000356	+0°000004	-0°000042	-0°000044	-0°000038	-0°000013
1000 $\delta \mu$	+0,00344	+0,00403	+0,00100	-0,00067	-0,00071	-0,00058	-0,00032
δe	-0,00015	-0,00050	+0,00199	-0,00102	-0,00105	-0,00095	+0,00064
$\delta \Omega$	-0,00020	-0,00024	-0,00259	+0,00377	+0,00360	+0,00376	+0,00379
δi	-0,00033	-0,00195	-0,00131	+0,00043	+0,00045	+0,00035	+0,00085
$\delta \mu$	+0,00052	-0,00039	+0,00126	+0,00028	-0,00027	+0,00027	-0,00037
δA	—	-0,00248	-0,00232	+0,00017	-0,00024	—	—
δk	—	—	—	+0,00458	+0,00461	+0,00453	+0,00420
δr	—	—	—	—	—	—	-0,00074
Максимальное значение $O-C$	50"	44"	18,8	3,5	3,5	3,4	3,9

В гипотезе № 3 были положены в основу вычисления результаты, полученные во втором приближении гипотезы № 2: $l = -4,7$ и $A = -0,00802$. В качестве правых частей условных уравнений были взяты невязки, полученные во втором приближении гипотезы № 2. В табл. 1 и 2 эти правые части находятся в графах, обозначенной 1002. Результаты решения при этой гипотезе приведены в табл. 5. Представления нормальных мест в гипотезе № 3, как и в предыдущих двух гипотезах, оказались неудовлетворительными. Это противоречит положению Д. О. Мохнаха, что систематические ошибки наблюдений укорачивают радиус-вектор кометы. Даже l оказалось отрицательным, что тоже противоречит предположению Д. О. Мохнаха.

Затем были произведены улучшения орбиты, при которых наряду с поправками к шести эллиптическим элементам и δA также отыскивалась поправка векового ускорения. В гипотезе № 4 предполагалось, что $l = 2$, в гипотезе № 5, что $l = 1$. Обе эти гипотезы дали примерно одинаковое представление наблюдений. Средняя ошибка единицы веса в обоих случаях оказалась равной $\pm 3,2$.

Для параметра A получились значения:
в гипотезе № 4 $0,62 \pm 1,28$,
" " " № 5 $0,86 \pm 2,91$.

Полученные результаты говорят о том, что представление наблюдений очень слабо зависит от l — показателя степени при радиус-векторе в выражении для систематической ошибки, несмотря на то, что пределы для изменения l довольно значительны (от 0,54 до 1,96 а.е.).

Таким образом, величина A оказалась в обоих случаях в 2—3 раза меньше своей ошибки, т. е. практически A оказалось равным нулю. Видно вышесказанного было решено не предпринимать улучшения с девятью неизвестными: шестью эллиптическими элементами, δk , δA и δl .

В дальнейшем было предпринято улучшение в предположении, что существует лишь вековое ускорение (гипотеза № 6). В результате величина коэффициента векового ускорения получилась практически той же самой, что и в гипотезах № 4 и 5 (см. табл. 5). Средняя ошибка единицы веса даже улучшилась, хотя и незначительно.

Таблица 4
Остаточные уклонения

№ п.п.	Дата нормального места	с ₁ часов	δ ₁ д ⁰	Нормальные условия уравнений									
				гипотеза № 1	гипотеза № 2	гипотеза № 3	гипотеза № 4	гипотеза № 5	гипотеза № 6	гипотеза № 7			
		Δα	Δδ	Δα	Δδ	Δα	Δδ	Δα	Δδ	Δα	Δδ	Δα	Δδ
1	1921 г. июль	20.0	72708991 - 10'00"	57	-74	1074	-188	-32	+128	-374	+270	-876	+374
2	1921 г. июль	17.0	4134482 - 29'10"	277	+104	723	-18	-43	+120	-120	-111	+109	+13
3	1924 г. август	18.0	7273293 + 27'17"	521	-190	-13	34	+9	+99	+24	-35	-30	+34
4	1927 г. октябрь	3.0	224885 + 37'34"	497	+201	-43	-84	+123	+19	-34	+21	-31	+24
5	1937 г. октябрь	3.0	224885 + 37'34"	61	+148	-29	-70	+14	-16	+3	-1	+2	-1
6	период	3.0	224885 + 37'34"	22	-110	+9	-11	+0.4	-0.5	+3.1	-0.5	+3.1	-0.4
7	период	26.0	19373404 + 11'28"	563	74	+69	+18	-14	+0.4	-0.5	+3.1	-0.5	+3.1
8	период	26.0	19373404 + 11'28"	563	74	+69	+18	-14	+0.4	-0.5	+3.1	-0.5	+3.1
		σ _φ для разлчных гипотез		203		±197	±1179	±352	±352	±370	±370	±370	±370

* Сравнение с звездой Б.

Для планеты картины было проведено еще одно улучшение. В гипотезе № 7 предполагалось существование как векового ускорения, так и векового изменения угла эксцентриситета. Основные результаты улучшения приведены в табл. 5. Вековое изменение эксцентриситета получилось отрицательным, что согласуется с выводами всех предыдущих исследователей, но его средняя ошибка оказалась почти равной самой определяемой величине. Это говорит о том, что вековое изменение эксцентриситета плохо определяется из исследования участка движения, на котором комета всего лишь один раз прошла через перигелий.

Заключение

В заключение приведем таблицу, сопоставляющую результаты всей работы (табл. 5). На основании сравнения семи вариантов решения можно сделать следующие выводы. Первый и второй варианты решения дают примерно равные средние ошибки единицы веса (± 203 и ± 197). Это говорит о том, что введение систематических ошибок, укорачивающих теллоцентрический радиус-вектор кометы, не улучшает представление наблюдений. Кроме того, в силу исходных допущений A должно быть существенно положительной величиной, в результате же формальных вычислений в гипотезе № 2 оно оказалось отрицательным. Гипотеза № 3, в которой определялись поправки шести эллиптических элементов, δA и δl , дала абсолютно нереальные результаты: не только A , но и l оказались отрицательными, что противоречит теоретическим выводам Д. О. Мохначу об уменьшении расстояния между фотометрическим центром кометы и ее центром массы при приближении к перигелию. Кроме того, и средняя ошибка единицы веса осталась сравнительно большой (± 119).

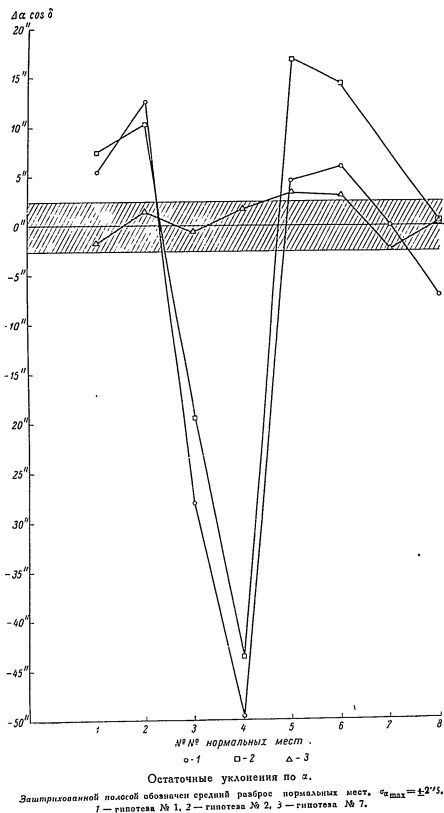


Таблица 5

№ гипотезы	Число неизвестных	x	A	n	φ'	$[tt]$	σ_p	Примечания
1	6	0	0	—	0	4104'05	$\pm 20'3$	Поправлялась только δ вальнитических элементов
2	7	0	-8'94	2	0	2702'69	19'7	Одновременно с улучшением δ вальнитических элементов определялось A
3	8	0	-37'22	-4.3	0	1133'73	11'9	Определялись поправки к вальнитическим элементам и к значению $A = -0'00802$ и $n = -4.7$, определенным промежуточным улучшением, которое не приводится
4	8	$16'49 \pm 1'02$	$+0'62 \pm 1'28$	2	0	82'26	3'2	Определялись поправки к вальнитическим элементам, A и x
5	8	$16'58 \pm 1'02$	$+0'86 \pm 2'91$	1	0	82'98	3'2	
6	7	$16'31 \pm 0'96$	0	—	0	82'12	3'0	Определялись поправки вальнитических элементов и x
7	8	$15'12 \pm 0'91$	0	—	-2'67 \pm 2'40	73'85	3'0	Определялись δ вальнитических элементов, x и φ'

Четвертый, пятый и шестой варианты решения дают практически одно и то же значение для коэффициента векового ускорения, а величина A в четвертом и пятом вариантах оказалась близкой к нулю, и только введение векового изменения эксцентриситета несколько улучшило представление.

Результаты представления наблюдений в гипотезах №№ 1, 2 и 7 наглядно представлены на рисунке.

Таким образом, предположение о наличии систематических ошибок в наблюдениях кометы Энке—Баклунда, по крайней мере в данной Д. О. Мохначем форме, не объясняет эффекта векового ускорения.

В заключение хочу отметить, что моим научным руководителем С. Г. Маковером была оказана неоценимая помощь при выполнении этой, а в равной мере и предыдущей работы. Ряд важных замечаний при чтении рукописи сделали В. Ф. Проскуриной и Д. К. Куликов. При написании статей был использован богатый материал по истории вопроса, собранный в диссертации Е. И. Казимирчак-Полонской (1950).

Автор считает своим приятным долгом выразить этим научным сотрудникам ИТА свою искреннюю признательность и сердечную благодарность.

ЛИТЕРАТУРА

Казимирчак-Полонская Е. И. 1950.—Тесные систематических ошибок в наблюдениях кометы Энке—Баклунда, по крайней мере в данной Д. О. Мохначем форме, не объясняет эффекта векового ускорения. Бюлл. ИТА, 7, 2, 140.
 Лучин С. И. 1958. Исследование движения кометы Энке—Баклунда за 1931—1937 гг. Бюлл. ИТА, 7, 2, 140.
 Мохнач Д. О. 1956а. Распределение видимой плотности в голове кометы и его влияние на определение элементов орбиты. Бюлл. ИТА, 6, 5 (78).
 Мохнач Д. О. 1956б. О вековом ускорении и замедлении движения короткопериодических комет. ДАН СССР, III, 1, 50.
 Енске J. F. 1858. Über die Existenz eines widerstehenden Mittels im Weltraum. Berl. Astr. Jahrb für 1861.

Поступило в Редакцию 23 августа 1957 г.

Бюллетень Института Теоретической Астрономии

T. VII

1958

№ 2 (85)

Определение разности между эфемеридным и всемирным временем для 1951, 1953, 1954 и 1955 гг.

Г. Е. Серебрякова

В данной работе определена поправка Δt , равная разности между эфемеридным и всемирным временем, для 1951, 1953, 1954 и 1955 гг. по наблюдениям покрытий звезд Луну и по меридианным наблюдениям Луны. Вычисления производились по схеме Иннеса.

DETERMINATION OF THE DIFFERENCE BETWEEN EPHEMERIS AND UNIVERSAL TIME FOR 1951, 1953, 1954 AND 1955, by G. E. Serebriškova. — The correction Δt — difference between Ephemeris time and Universal time has been calculated for the years 1951, 1953, 1954 and 1955 from observations of occultations of stars by the Moon, using Innes' formulae.

1. Как известно, в основу измерения времени положен периодический процесс вращения Земли вокруг своей оси. До последнего времени период вращения Земли считался постоянным, однако последние исследования показали, что он не постоянен. В скорости вращения Земли наблюдаются три типа изменений: 1) вековые, 2) сезонные и 3) неправильные. Причиной вековых изменений во вращении Земли является приливное трение. На приливы, как на причину замедления скорости вращения Земли, впервые было указано в 1754 г. Иммануилом Кантом. Вслед за ним Тобиас Мейер предположил, что тормозящим действием приливов может быть объяснено найденное Галлем в 1693 г. ускорение среднего движения Луны. Работами Н. Н. Парицкого (1954) и А. Андуйе (1935) показано, что основная часть расхождения между наблюдаемым и вычисленным значением векового ускорения обусловлена действием приливов.

Многие астрономы занимались анализом наблюдательных материалов. Ньюком исследовал древние и современные затмения и покрытия звезд Луною. Коуэлл изучил гринвичские меридианные наблюдения с 1750 по 1900 г. В 1906 г. Коуэлл открыл вековое ускорение Солнца, а в 1914 г. Браун доказал существование вековых ускорений Меркурия и Венеры. Большие работы по определению вековых ускорений и их объяснению проделали Фозернгейм, Кроммелитг, Дайсон, Джонс Спенсер и др. Все результаты достаточно согласуются между собой.

Уместно привести таблицу полученных разными авторами вековых ускорений Солнца и Луны (табл. 1).

Сезонные изменения были открыты с помощью кварцевых часов (Paavel, Uhnk, 1935; Uhnk, 1950). Существенного значения в проблеме времени они не имеют, так как период их составляет примерно один год.

Большое значение в определении эфемеридного времени имеет знание величин неправильных изменений в скорости вращения Земли. Эти изменения вызывают в свою очередь неправильные изменения в долготях планет, Луны и Солнца, которые названы Джоном Спенсером (Spenser, 1939) флюктуациями. Имеем:

$$B = \lambda_{\text{ц.в.}} - C,$$

Таблица 1

Автор	Солнце %	Луна %	$\frac{\lambda}{\omega}$ %
Фозернгейм	1'5	4'7	3.13
Де Ситтер	1.80	5.22	2.90
Джонс Спенсер	1.23	5.22	4.24
" "	1.67	5.11	2.90
Брауэр	1.01	2.20	2.18

$$C_1 = \lambda_{\text{вр.}} - 10'71 \sin(240'07'' + 140'07'') + 4'65'' + 12'967'' + 5'222''^2,$$

где T считается в юлианских столетиях от 1900.0 г., $\lambda_{\text{вр.}}$ берется из таблиц Брауна, B — флюктуация.

Как видно, флюктуация предвычислить невозможно, так как в их определении входит наблюдаемая величина долготы.

В результате указанных изменений в скорости вращения Земли всемирное время, связанное с вращением Земли, неравномерно. На практике используется это неравномерное время, тогда как движение небесных тел описывается дифференциальными уравнениями, в которых в качестве независимой переменной является равномерное время. Использование одного рода времени на практике и другого в теории приводит к несоответствию между наблюдениями и теорией. Это расхождение должно быть пропорционально среднему движению наблюдаемого объекта, что и подтверждается наблюдениями.

Эфемеридное время, вводимое в астрономию, представляет собой равномерное время. Небесная механика определяет движение тел на основе гравитационной теории, дающей примерное согласие с наблюдениями на достаточно большой период времени. Так, например, таблицы Ньюкома дают движение Солнца в эфемеридном времени, следовательно наблюдения Солнца на его орбите могло бы дать непосредственно измеренное эфемеридное время. Однако на практике это осуществить невозможно из-за медленного движения Солнца по орбите (всего 0'04 за 1'). Поправка к средней долготе Солнца может быть представлена выражением

$$\alpha + \beta T + CT^2 + 0.074804 \dots B.$$

Член $\alpha + \beta T$ выбирается так, чтобы как можно точнее привести в согласие вычисленное положение Солнца с наблюдаемым. Численное выражение этой поправки имеет вид

$$1'00 + 2'977T + 1'237T^2 + 0'074804 \dots B.$$

Солнце движется на 1" за 24'349... откуда следует выражение для ΔT , принятое VIII Генеральной ассамблеей Астрономического союза в 1952 г.:

$$\Delta T = 24'349 + 72'318T + 29'950T^2 + 1.82144 \dots B'.$$

Ближайшим объектом к нам является Луна, движение которой по орбите составляет 0'55 за 1". На практике эфемеридное время вычисляется из наблюдений положения Луны.

2. Наиболее обширным материалом для определения эфемеридного времени являются покрытия звезд Луною, так как для наблюдения покрытий нужен рефрактор небольших размеров и хронометр, дающий возможность зафиксировать момент покрытия по всемирному времени.

Обработка покрытий была осуществлена по методу Иннеса (Innes, 1924). Самую трудоемкую работу представляет вычисление наблюдаемого радиуса Луны, или, иначе говоря, наблюдаемого углового расстояния от центра Луны до звезды в момент покрытия. Последовательность вычислений такова: α^* , δ^* , α , δ — видимые геоцентрические координаты звезды и Луны в момент покрытия, θ — местное звездное время в момент покрытия, π — параллакс Луны,

$$\pi'' = \sin \pi \cdot 206264.806,$$

$X = \rho' \cos \varphi'$, $Y = \rho' \sin \varphi'$ — координаты места наблюдения,
 ρ' — расстояния от центра Земли до места наблюдения,
 φ' — геоцентрическая широта места наблюдения,

$$X'' = \pi'' \cdot X,$$

$$Y'' = \pi'' \cdot Y,$$

$$\sigma = \pi'' \cdot 0.272496 — \text{полурадиус Луны,}$$

$$\xi' = X'' \sin(\theta - \alpha^*),$$

$$\eta' = Y'' \cos \delta^* - X'' \sin \delta^* \cos(\theta - \alpha^*),$$

$$x' = 15(\alpha' - \alpha) \cos \delta,$$

$$y' = \delta' - \delta - \frac{hx^2 \sin \delta^*}{2 \cos \delta},$$

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{\xi' + x'}{\eta' + y'},$$

где χ — угол покрытия,

$$\sigma' = \frac{\xi' + x'}{\sin \chi} = \frac{\eta' + y'}{\cos \chi},$$

σ' — наблюдаемый полурадиус Луны.

Если бы таблицы давали точные значения координат α и δ Луны, то в результате предыдущего вычисления получилось бы $\sigma' = \sigma$. На самом деле этого нет из-за применения разного рода времен в теории и на практике. Между $\sigma' - \sigma$ и ошибкой орбитальной долготы существует соотношение

$$\Delta \sigma = \frac{\sigma' - \sigma}{\cos(\rho - \chi)},$$

где ρ — угол между направлением движения Луны и направлением на север.

Вычисления, приведенные в табл. 2 и 3, дали возможность определить поправку Δt равную разности эфемеридного времени и всемирного:

$$\text{для } 1954.5 \Delta t = 30'3 \pm 0'34 \text{ по } 62 \text{ наблюдениям,}$$

$$\text{„ } 1955.5 \Delta t = 30'9 \pm 0'31 \text{ по } 100 \text{ „}$$

Анализируя приведенные результаты, нужно отметить, что при вычислении Δt очень важно знать точно момент покрытия. Однако при наблюдении покрытий часто наблюдаются ошибки до 2'–3', что не может не снизить точность окончательного результата. Правда, ошибка может быть уменьшена увеличением количества покрытий. Наиболее точный момент покрытия может быть получен, когда звезда заходит за Луну со стороны ее темного края.

3. Не меньшее значение в определении поправки Δt имеют меридианные наблюдения Луны. Данные, приведенные в „Tokyo astr. bull.“ (Nakano, Yasuda, Fukaya, 1952; Nakano, Fukaya, 1954; Nakano и others, 1955), дают прямые восхождения центра Луны. Сравнение этих прямых восхождений, полученных во всемирном времени, с табличными¹ дает возможность определить поправку Δt . Такой анализ меридианных наблюдений Луны позволил определить поправку (см. табл. 4, 5)

$$\text{для } 1953.5 \Delta t = 29'5 \pm 0'29 \text{ по } 58 \text{ наблюдениям,}$$

$$\text{„ } 1954.5 \Delta t = 30'2 \pm 0'32 \text{ по } 82 \text{ „}$$

Несколько сложнее обстояло дело с обработкой меридианных наблюдений за 1951 г., так как предварительно предстояло вычислить прямые восхождения в эфемеридном времени. Используя поправки долготы и широты из таблиц (Железняк, Митрофанова, 1954) с помощью формул (Михайлов, 1954):

$$\cos \delta \Delta \alpha = \cos \beta \cos s \Delta \lambda - \sin s \Delta \beta,$$

$$\Delta \delta = \cos \beta \sin s \Delta \lambda + \cos s \Delta \beta,$$

¹ Имеются в виду координаты Луны в эфемеридном времени, приведенные в „Improved Lunar Ephemeris 1952–1959“.

Таблица 2
Покртия звезд Луною в 1954 г.

Table with columns: № п.п., Дата, Эпизод NZC, Величина, Явление, Всемирное время, Обсерватория, p, q, Δσ, Δt, Отклонение от среднего.

Таблица 2 (продолжение)

Table with columns: № п.п., Дата, Эпизод NZC, Величина, Явление, Всемирное время, Обсерватория, p, q, Δσ, Δt, Отклонение от среднего.

Таблица 3
Покртия звезд Луною в 1955 г.

Table with columns: № п.п., Дата, Эпизод NZC, Величина, Явление, Всемирное время, Обсерватория, p, q, Δσ, Δt, Отклонение от среднего.

Таблица 3 (продолжение)

№ п. п.	Дата	Звезда NZC	Величина	Явление	Всемирное время	Обсерватория	p	q	λ	Δt	Отклонение от среднего
41		31 1158	7.1	П	15 40 ^м 43.7	Ташкент	+88	-47	-1'60	3150	+0.64
42		31 1151	6.8	П	18 31 41.4	Красрур	+60	-80	-0.60	33.59	+2.73
43		31 1151	6.8	П	19 17 40.2	Абастумани	+89	-45	-1.25	33.17	+2.31
44	Апрель	3 1047	5.2	П	17 44 43.2	Харьков	+99	+13	-2.56	30.89	+0.03
45		3 1054	6.8	П	23 28 52.8	"	+97	+26	-2.49	30.96	+0.10
46		2 1410	5.3	П	20 13 55.4	Абастумани	+91	+42	-1.89	31.75	+0.89
47		4 1605	6.2	П	20 13 55.4	Казань	+92	+39	-2.36	31.10	-0.24
48		4 1605	6.2	П	20 13 55.4	"	+92	+39	-2.55	30.71	-0.15
49		4 1605	6.2	П	20 13 55.4	"	+92	+39	-2.66	30.49	-0.37
50		27 1109	7.3	П	18 01 48.5	"	+99	+91	-3.61	29.70	-1.16
51		27 1109	7.3	П	18 05 09.5	Киев	+82	-58	+0.08	36.11	+5.25
52		27 1109	7.3	П	18 14 54.4	Одесса	+72	-70	+1.55	39.53	+8.57
53		28 1246	6.6	П	18 47 12.1	Казань	+71	-42	-1.40	32.04	+1.18
54		29 1364	6.5	П	17 44 59.2	Одесса	+81	-59	-2.04	30.38	-0.48
55		29 1364	6.5	П	17 46 39.0	Казань	+100	-05	-2.89	29.59	-1.27
56	Май	1 1582	6.3	П	19 57 45.1	Красрур	+95	+31	-2.58	29.38	-1.48
57		1 1582	6.3	П	20 31 27.8	Одесса	+82	+57	-2.26	30.24	-0.62
58		1 1582	6.3	П	20 37 49.8	Казань	+59	-81	-3.55	28.76	-2.10
59		1 1587	6.0	П	22 51 17.5	Одесса	+54	-84	-1.40	30.06	-0.80
60		1 1590	6.9	П	23 05 29.6	"	+100	+01	-3.00	30.28	-0.58
61		1 1587	6.0	—	22 26 30.8	Ландсхут	+76	-65	-2.63	30.71	-0.15
62		1 1590	6.9	—	22 50 44.8	"	+98	+18	-2.36	32.11	+1.25
63		1 1532	6.3	П	20 33 12.8	Харьков	+96	+29	-2.33	30.92	+0.06
64		30 1752	6.5	П	19 17 20.3	Абастумани	+91	-41	-2.16	31.47	+0.61
65		1 1967	5.7	П	19 03 04.1	Харьков	+52	+86	-1.81	29.17	-1.69
66	Июнь	1 1967	5.7	П	19 15 17.9	Абастумани	+66	+75	-3.19	26.42	-4.44
67		28 1944	5.6	П	20 06 31.6	Одесса	+73	-68	-2.16	30.46	-0.40
68		29 2045	6.4	П	18 31 56.0	Абастумани	+69	+72	-2.55	28.53	-2.33
69		29 2045	6.4	П	17 36 35.8	Абастумани	+88	-47	-3.01	29.95	-0.91
70		29 2051	5.7	П	18 49 24.9	Ташкент	+85	-76	-2.31	28.53	-2.33
71	Июль	10 3453	4.9	О	19 19 11.4	Стамбул	-1.00	+01	-3.17	30.59	-0.27
72		30 2510	6.3	П	17 08 83.0	"	+87	-50	-4.77	28.45	-7.41
73		30 2510	6.3	П	17 14 03.8	"	+82	-58	-3.88	27.19	-3.67
74		30 2513	4.3	П	19 01 39.7	"	+82	-58	-3.71	27.07	-3.79
75		30 2513	4.3	П	19 01 39.6	"	+82	-58	-3.71	27.07	-3.79
76	Август	1 2779	3.9	П	14 46 27.1	"	+1.00	-04	-3.62	33.76	+2.90
77		14 1077	3.8	П	23 52 31.8	"	+1.00	-06	-1.65	33.76	+2.90
78		20 2584	6.8	П	16 31 24.0	"	+54	+84	+0.44	38.25	+7.39
79		27 2589	4.8	П	18 22 34.0	"	+70	+72	-0.03	36.12	+5.26
80		28 2725	5.8	П	14 23 33.0	"	+1.00	-06	-2.40	31.78	+0.92
81	Сентябрь	8 709	4.3	П	23 52 32.0	"	+99	-11	-0.70	35.20	+4.34
82		28 3199	6.8	П	17 14 03.8	Ташкент	+92	-39	-2.99	26.68	-4.18
83		29 3300	5.3	П	15 45 16.2	"	+96	-28	-4.96	28.44	-2.42
84		30 3453	4.9	П	15 38 20.1	"	+80	-60	-4.24	28.01	-2.85
85	Октябрь	4 465	4.5	П	17 45 28.8	Казань	+82	+57	+0.25	37.08	+6.22
86		5 657	5.4	П	15 45 28.8	"	+99	+12	-1.01	34.02	+4.06
87		5 657	5.4	П	23 09 34.6	"	+89	+46	-1.38	34.06	+3.20
88		5 656	4.4	П	23 38 38.5	Ташкент	+89	+47	-2.65	31.18	+0.32
89		6 656	5.4	П	0 39 16.5	"	+64	-77	+1.11	33.41	+2.87
90		6 656	4.4	П	0 39 16.5	"	+91	-41	-3.97	28.94	-1.92
91		6 784	6.2	ОС	18 02 27.0	"	-44	-90	+0.16	35.83	+4.96
92		24 3008	3.9	П	15 43 17.8	"	+83	+56	-6.62	26.53	-4.33
93		24 3015	5.3	П	15 06 23.4	"	+93	+37	-1.51	33.48	+2.62
94	Ноябрь	28 465	4.5	П	13 13 58.0	"	+95	+32	-1.16	34.92	+4.06
95		28 465	4.5	П	13 54 24.5	Иркутск	+100	-07	-1.07	35.24	+4.38
96		23 3326	6.4	П	13 20 42.0	"	+100	-07	-1.07	35.24	+4.38
97		19 2854	7.3	П	13 12 18.3	Ташкент	+94	+34	-4.01	27.97	-2.89
98		28 465	4.5	П	13 13 57.5	"	+95	+32	-0.27	37.18	+6.32
99	Декабрь	25 421	6.6	П	17 55 41.7	"	+77	+64	-2.95	32.33	+1.47
100		26 534	6.0	П	13 05 49.5	"	+93	+36	-3.41	27.97	-2.89

Таблица 4 Меридианные наблюдения 1953 г.

№ п. п.	Дата	Всемирное время	α _{наб.}	α _{наб.} - α _{нф.}	Δα _{час.}	Δt	Отклонение от среднего
1	Январь	9 21 57 998	14 40 08 214 921	73 955	125 013	31 937	+1 985
2		20 6 89 489	0 08 26 877	115 899	128 332	28 12	-0 40
3		21 7 71 374	1 03 35 482	98 333	129 279	29 54	+0 02
4		22 8 54 825	1 57 45 162	73 611	132 434	28 66	-0 86
5		23 9 41 009	2 53 35 666	57 120	136 655	28 43	-0 09
6		28 13 83 990	7 39 53 468	108 646	128 272	33 76	+3 22
7		31 16 09 498	10 05 10 555	11 392	108 660	35 50	+5 98
8	Февраль	1 16 76 095	10 49 11 894	81 579	105 831	35 60	+6 08
9		2 17 41 464	11 32 28 262	44 625	105 235	34 02	+4 50
10		6 20 25 708	14 39 09 052	34 066	128 125	31 68	+2 16
11		22 10 04 003	5 30 14 392	7 848	141 038	27 32	-2 20
12		24 11 79 055	7 22 54 790	10 331	129 662	27 40	-2 12
13		26 13 36 627	9 03 43 933	39 540	115 211	24 95	-4 57
14		28 8 83 872	6 07 52 313	119 019	140 507	30 06	+0 54
15		30 14 72 503	12 31 25 319	80 322	109 347	34 31	+4 79
16		31 15 42 454	13 37 25 572	49 644	114 469	32 65	+3 13
17	Март	20 8 83 872	6 07 52 313	119 019	140 507	30 06	+0 54
18		22 14 72 503	12 31 25 319	80 322	109 347	34 31	+4 79
19		24 15 42 454	13 37 25 572	49 644	114 469	32 65	+3 13
20		26 11 79 055	7 22 54 790	10 331	129 662	27 40	-2 12
21		28 13 36 627	9 03 43 933	39 540	115 211	24 95	-4 57
22	Апрель	23 10 60 980	10 03 31 287	72 732	108 849	26 60	-2 92
23		24 11 92 857	10 47 38 726	35 701	105 227	26 68	-2 84
24		25 11 98 735	11 31 12 062	105 583	106 113	27 58	-1 94
25		26 12 65 959	12 15 14 236	71 743	108 478	27 97	-1 55
26		27 13 34 474	13 00 47 052	59 870	113 278	26 03	-3 49
27	Май	3 18 56 218	18 36 09 837	84 492	147 591	37 04	+7 52
28		20 8 58 942	9 45 17 998	65 365	111 349	27 32	-2 20
29		21 9 26 904	10 30 10 240	29 722	107 245	29 16	-0 36
30		24 11 26 910	12 42 20 785	30 759	111 076	27 97	-1 55
31	Июль	24 12 92 345	18 22 32 987	143 234	153 610	32 40	+2 88
32		26 14 88 137	20 28 12 123	129 945	146 112	28 73	-0 79
33		28 14 92 138	20 28 13 182	156 041	146 112	33 98	+4 46
34		29 15 84 120	21 27 36 644	118 760	139 970	26 170	-3 35
35		30 16 71 854	22 24 21 638	97 723	134 464	29 59	+0 07
36		31 18 40 447	0 13 41 496	54 285	131 466	30 42	+0 90
37	Август	20 10 64 510	17 51 54 516	97 824	149 733	29 59	+0 07
38		21 11 62 171	18 54 36 789	94 923	150 868	26 89	-2 63
39		22 12 17 076	21 25 52 778	24 942	139 359	29 66	+0 14
40	Сентябрь	20 13 93 310	23 19 47 149	128 092	136 750	27 90	-1 62
41		21 8 18 587	19 04 42 195	27 412	141 472	28 40	-1 12
42	Октябрь	15 9 08 827	20 02 55 621	13 252	138 944	25 60	-3 02
43		16 10 83 204	21 55 35 817	112 034	135 569	30 71	+1 19
44		18 10 83 204	22 50 47 249	91 992	133 298	28 98	-0 54
45		19 13 42 536	6 43 36 882	60 559	140 498	28 87	-0 65
46		21 16 37 810	5 27 25 861	16 122	151 116	34 70	+5 18
47		22 17 08 166	6 21 33 684	13 861	148 308	31 68	+2 16
48		24 18 00 778	7 31 04 837	2 260	138 076	30 92	+1 40
49		25 18 85 277	8 25 54 445	10 710	127 245	31 10	+1 58
50		29 21 68 801	11 32 20 894	74 013	106 345	28 66	-0 14
51	Декабрь	12 7 49 849	22 11 57 558	64 376	127 064	29 34	-0 18
52		13 8 30 153	23 04 12 878	39 070	126 223	28 80	-0 72
53		14 9 10 858	23 56 43 479	14 940	128 344	28 19	-1 33
54		15 9 40 073	0 50 45 092	126 297	133 128	28 66	-0 86
55		16 10 31 675	1 47 25 644	115 666	140 338	26 82	-2 70
56		17 11 74 834	2 47 26 780	112 161	148 394	28 80	-0 72
57		20 14 75 592	6 00 14 405	116 676	152 701	29 38	-0 14
58		20 14 79 674	6 00 20 793	123 064	152 701	33 01	+3 49

Таблица 5
Меридианные наблюдения 1954 г.

№ п. п.	Дата	Всемирное время	α _{набл.}	α _{набл.} — α _{вр.}	Δ _{час.}	Δ _t	Отклонение от среднего
1	Январь 10	7 075080	23 40 49 887	10 634	127 91	29 00	-1 18
2	16	12 546192	5 33 44 682	83 890	151 35	29 11	-1 07
3	18	14 425128	7 34 37 206	59 464	137 43	27 21	-2 97
4	19	15 311640	8 29 42 415	41 124	128 10	33 80	+3 62
5	25	19 558128	13 08 54 683	63 410	111 87	31 28	+1 10
6	Февраль 10	8 508048	3 09 20 717	75 672	146 89	25 61	-4 57
7	11	9 470616	4 11 12 670	71 728	150 04	26 79	-3 39
8	12	10 443960	5 13 42 878	67 627	149 62	28 91	-1 27
9	14	12 313920	7 14 02 969	44 296	137 93	26 02	-4 16
10	15	13 170264	8 09 28 839	23 077	129 45	28 38	-0 80
11	23	16 185752	11 21 35 744	15 808	108 46	35 99	+5 81
12	23	18 935664	14 25 47 747	113 512	120 13	33 28	+3 10
13	24	19 718544	15 16 46 681	92 319	126 80	34 28	+4 10
14	Март 14	11 120880	7 52 38 256	16 766	130 79	26 32	-3 86
15	15	11 926368	8 45 00 345	114 582	122 74	25 80	-4 38
16	19	14 740248	11 50 21 980	81 614	108 13	30 70	+0 52
17	20	15 458424	12 35 10 280	51 286	109 76	30 91	+0 73
18	21	16 154808	13 20 59 824	18 717	113 24	37 72	+7 54
19	22	16 889904	14 08 36 040	105 015	117 98	33 13	+2 95
20	24	18 451608	15 50 56 026	59 846	129 70	35 32	+5 14
21	25	19 296720	16 45 42 19	41 311	134 61	36 62	+6 44
22	Апрель 9	8 146944	6 36 16 803	22 549	145 55	28 72	-1 46
23	10	9 052728	7 34 40 774	8 140	135 40	26 60	-3 58
24	11	9 886440	8 28 44 309	112 580	135 96	26 41	-3 77
25	14	12 064008	10 51 30 002	7 800	108 61	28 11	-2 07
26	16	13 409736	12 20 20 930	45 437	108 88	27 27	-2 91
27	20	16 398120	15 33 50 766	52 111	128 01	32 27	-2 09
28	22	18 090648	17 23 31 505	13 516	135 62	32 45	-2 27
29	Май 10	9 337176	6 49 58 786	39 683	115 03	28 09	-2 09
30	11	10 041312	7 36 15 660	5 578	110 13	27 08	-3 10
31	12	10 720216	8 11 02 704	78 605	108 00	27 10	-3 08
32	13	11 392488	12 05 25 611	43 205	108 22	24 28	-5 90
33	17	14 307240	15 16 38 331	39 963	126 92	27 46	-2 72
34	18	15 170736	16 10 32 590	23 862	132 30	34 65	+4 47
35	16	16 029312	17 05 57 585	5 232	135 73	33 25	+3 07
36	20	16 903296	18 02 28 759	124 579	136 54	32 77	+2 59
37	23	19 454880	20 47 51 222	59 548	128 36	32 52	+2 34
38	Июнь 15	13 896840	16 46 19 167	122 764	135 78	26 28	-3 90
39	Август 8	9 606024	16 01 02 967	80 331	130 82	28 92	-1 26
40	9	10 457952	16 56 16 078	63 053	135 53	26 21	-3 97
41	10	11 336760	17 53 05 628	47 707	138 17	30 66	+0 48
42	11	12 225816	18 50 31 407	32 928	138 32	28 45	-1 73
43	12	13 108296	19 47 33 255	16 150	136 39	36 41	+6 23
44	14	14 816712	21 38 12 022	107 962	130 84	30 96	+0 18
45	14	14 854080	21 38 16 880	112 620	130 84	29 99	-6 19
46	15	15 682992	22 32 03 897	89 348	129 42	28 73	-1 45
47	16	16 507704	23 25 39 586	67 035	130 01	28 48	-1 70
48	17	17 345520	0 19 59 835	46 981	132 91	28 65	-1 53
49	Сентябрь 6	9 156768	17 28 22 432	22 234	134 97	31 07	+1 60
50	8	10 897776	19 21 03 568	122 833	135 62	28 59	-1 60
51	9	11 769912	20 16 52 258	102 394	133 94	28 96	-1 22
52	10	12 611064	21 11 57 343	81 851	132 16	29 76	-0 42
53	11	13 451208	22 06 26 421	60 279	131 29	28 51	-1 67
54	14	16 052456	0 53 10 659	9 909	139 99	29 98	-0 20
55	15	16 983840	1 52 31 866	144 865	145 88	33 13	+2 95
56	16	17 948976	2 54 31 255	145 312	151 71	31 86	+1 68

Таблица 5 (продолжение)

№ п. п.	Дата	Всемирное время	α _{набл.}	α _{набл.} — α _{вр.}	Δ _{час.}	Δ _t	Отклонение от среднего
57	Октябрь 7	10 5402248	20 45 30 164	53 238	129 82	28 23	-1 95
58	12	14 725536	1 23 06 028	107 398	146 41	27 35	-2 83
59	13	15 700566	2 25 40 362	109 129	154 01	28 54	-1 64
60	14	16 724496	2 31 11 907	116 964	159 51	31 59	+1 41
61	16	18 807624	5 44 25 681	127 573	156 16	33 53	+3 35
62	Ноябрь 2	7 458480	19 30 53 834	60 066	128 71	29 51	-0 67
63	3	8 270136	20 23 39 907	35 192	126 53	28 78	-1 40
64	4	9 068840	21 15 38 438	9 506	125 17	26 30	-3 88
65	5	9 867704	22 07 21 568	109 205	125 44	28 34	-1 84
66	9	13 316928	1 51 02 914	48 910	150 61	28 14	-2 04
67	10	14 325744	2 55 44 110	53 266	159 57	29 03	-1 15
68	11	15 431664	4 08 47 554	72 677	164 91	32 55	+2 37
69	12	16 512960	5 12 47 436	85 792	164 08	35 66	+3 48
70	13	17 564064	6 19 59 978	90 060	157 00	34 44	+4 26
71	15	19 449336	8 21 23 770	61 690	134 56	32 84	+2 66
72	17	21 034704	10 04 44 145	5 149	117 08	33 39	+3 21
73	Декабрь 1	7 005408	20 57 56 939	1 690	122 99	30 00	-0 18
74	7	9 335232	23 29 57 786	43 143	126 00	25 82	-4 36
75	6	11 030688	1 19 54 947	5 454	141 45	28 93	-1 85
76	9	14 068320	4 34 35 670	12 772	165 93	31 15	+0 97
77	12	17 215968	7 53 26 539	32 502	144 39	32 87	+2 69
78	13	18 106200	8 50 59 208	15 385	132 94	34 30	+4 12
79	16	20 398056	11 20 47 202	46 046	113 03	33 56	+3 38
80	17	21 066072	12 06 55 835	8 522	111 85	36 43	+6 25
81	17	21 100464	12 06 59 586	12 273	111 85	33 35	+3 17
82	31	7 287960	23 13 13 655	36 075	122 24	25 76	-4 42

Таблица 6
Меридианные наблюдения 1951 г.

№ п. п.	Дата	Всемирное время	α _{набл.}	α _{набл.} — α _{вр.}	Δ _{час.}	Δ _t	Отклонение от среднего
1	Январь 2	21 194138	14 00 25 06	128 11	134 80	32 96	+3 96
2	14	8 05620	0 54 28 80	7 05	111 17	25 99	-3 01
3	15	8 75546	1 40 30 22	86 06	112 83	26 21	-2 79
4	17	10 22894	3 17 04 76	28 86	122 18	24 08	-4 92
5	18	11 02471	4 08 55 40	4 33	128 55	32 29	+3 29
6	22	14 49298	7 51 09 63	66 02	132 07	24 88	+4 12
7	23	15 28102	8 44 42 25	36 58	126 94	25 74	+3 26
8	24	16 10866	9 36 09 14	13 92	121 72	29 16	+0 16
9	27	18 32628	12 01 33 94	39 19	117 02	31 03	+2 03
10	29	19 86622	13 42 02 81	28 45	112 36	30 67	+1 67
11	Февраль 1	22 67508	16 42 44 48	110 06	161 07	28 69	-0 31
12	11	9 73010	4 41 26 59	97 14	131 74	26 14	-2 86
13	17	11 45412	6 33 03 87	62 76	135 82	28 66	-0 34
14	18	12 31846	7 29 00 10	43 55	133 70	26 17	-2 83
15	20	13 96968	9 16 11 43	122 10	124 98	26 21	-2 79
16	22	15 53724	10 56 16 01	64 84	118 50	35 75	+6 75
17	26	18 66655	14 20 13 74	51 80	135 93	31 68	+2 68
18	Март 15	8 42988	5 13 36 93	58 57	133 91	27 00	-2 00
19	16	9 29225	6 09 26 67	40 63	135 12	30 42	+1 42
20	18	10 99891	7 59 59 53	17 27	130 52	24 59	-4 41
21	20	12 60403	9 44 24 47	74 80	122 43	24 95	-4 05
22	22	14 88924	12 13 43 25	109 64	122 41	23 18	-5 33
23	23	16 92956	12 13 48 11	114 50	122 41	33 91	+4 91
24	24	15 71923	13 05 26 82	93 04	127 92	29 16	+0 16
25	26	17 47085	14 58 38 45	70 01	146 16	29 34	+0 34
26	30	21 59329	19 21 11 55	89 88	154 21	34 38	+5 38

Таблица 6 (продолжение)

№ п. п.	Дата	Всемирное время	$\alpha_{набл.}$	$\alpha_{набл.} - \alpha_{эф.}$	$\Delta \alpha_{час.}$	Δt	Отклонение от среднего	
27	Апрель	15 9 ^h 66331	8 ^h 30 ^m 00 ^s 65	8450	12605	2542	-3 ^m 58	
28		16 10.44902	9 21 12.39	55.63	121.97	25.49	-3.51	
29		17 11.21009	10 10 55.37	25.88	119.24	25.02	-3.98	
30		18 11.95894	10 59 55.01	114.69	118.69	26.50	-2.50	
31		21 14.32243	13 34 00.56	44.28	134.68	22.68	-	
32		23 16.24301	15 35 07.06	39.49	156.81	31.75	+2.75	
33		25 18.38563	17 51 52.37	65.50	166.13	31.10	+2.10	
34		26 19.45603	19 00 14.19	74.51	159.93	35.50	+6.50	
35		27 20.46072	20 04 40.55	70.04	148.78	36.14	+7.14	
36		Май	19 12.94764	14 01 42.44	133.40	139.73	25.42	-3.58
37	21 14.93239		16 09 06.08	155.07	164.92	28.37	-0.63	
38	21 14.97552		16 09 13.35	162.34	164.92	31.82	+2.82	
39	23 17.20850		18 31 26.30	36.81	168.66	35.10	+6.10	
40	Июнь	13 9.17544	11 53 13.24	21.21	115.70	28.37	-0.63	
41		18 13.65154	16 42 26.77	111.64	169.55	24.85	-4.15	
42		20 15.95892	19 06 39.31	162.87	168.17	34.42	+5.42	
43	Июль	23 19.00222	0 20 04.07	1.31	116.91	32.36	+3.36	
44		24 19.73472	1 08 04.97	86.60	116.48	31.54	+2.54	
45		25 20.47958	1 56 28.17	57.12	118.60	28.94	-0.06	
46	Август	13 11.22115	17 56 59.94	38.24	166.61	30.13	+1.13	
47		15 13.35238	20 13 03.75	56.02	154.98	32.72	+3.72	
48		17 15.24866	22 12 43.65	34.40	133.17	34.78	+5.78	
49		19 16.84742	23 56 51.43	103.55	120.81	34.96	+5.96	
50		20 17.60373	0 46 15.87	72.83	119.14	30.85	+1.85	
51		21 18.35640	1 35 31.95	43.84	120.18	30.20	+1.20	
52		Сентябрь 21	19.44722	4 43 19.15	61.23	134.32	31.07	+2.07
53		Октябрь	6 6.95083	17 12 57.39	153.71	160.23	30.53	+1.53
54			7 8.00100	18 20 04.86	1.61	160.11	32.62	+3.62
55			10 10.90350	21 26 02.22	122.60	135.07	26.57	-2.43
56	11 11.75101		1 20 53.96	84.93	119.39	24.41	-4.39	
57	12 12.51751		23 11 22.43	63.97	121.64	30.20	+1.20	
58	16 15.61709		2 31 29.23	79.04	126.42	29.27	+0.27	
59	17 16.43659		3 24 43.81	58.32	130.94	31.68	+2.68	
60	18 17.28588		4 19 44.52	39.49	134.48	27.97	-1.03	
61	Ноябрь		3 5.86106	17 57 48.305	143.14	164.59	31.03	+2.03
62			4 6.92182	19 05 32.76	147.77	158.91	29.09	+0.09
63		7 9.68693	22 03 36.63	88.55	127.61	25.13	-3.87	
64		8 10.47319	23 49 49.77	58.11	120.94	26.28	-2.72	
65		9 11.23677	23 43 54.51	27.17	117.52	27.07	-1.93	
66		11 12.70459	1 20 53.96	84.93	119.39	24.41	-4.39	
67		13 14.27194	3 03 07.40	35.91	128.71	25.42	-3.58	
68		14 15.14604	3 57 27.50	20.60	133.31	30.56	+1.56	
69		18 18.56983	7 38 52.93	72.68	126.89	32.22	+3.22	
70		Декабрь	6 9.20527	23 28 55.81	25.22	118.40	27.86	-1.14
71	8 10.67609		1 05 18.06	80.21	117.31	27.54	-1.46	
72	9 11.42501		1 54 18.97	52.16	120.69	25.31	-3.19	
73	10 12.20369		2 49 07.56	26.50	125.61	26.21	-2.79	
74	13 14.73391		5 29 13.45	100.75	135.71	30.53	+1.53	
75	14 15.63626		6 25 13.84	86.31	133.66	34.13	+5.13	
76	16 17.27857		8 11 39.91	34.77	122.69	35.39	+6.39	
77	18 18.74462		9 48 06.02	84.50	112.06	33.98	+4.98	
78	19 19.43470		10 33 34.35	48.50	109.39	31.21	+2.21	
79	20 20.11519		11 18 28.31	15.52	109.41	30.17	+1.17	
80	21 20.80668		12 04 00.07	91.56	112.36	25.52	+0.52	
81	23 22.31458		13 42 32.38	41.52	128.86	27.47	-1.53	

где

$$\cos \beta \sin s = \cos \alpha \sin \epsilon,$$

$$\cos \beta \cos s = \cos \delta \cos \epsilon + \sin \delta \sin \epsilon \sin \alpha,$$

были определены поправки прямого восхождения. А затем уже, аналогично 1953 и 1954 гг., была определена поправка (см. табл. 6).
Для 1951.5 $\Delta t = 29^{\circ}3 \pm 0^{\circ}31$ по 81 наблюдению.

4. Самым точным методом является определение поправки по фотографическим наблюдениям Луны. Однако этих наблюдений еще очень мало. Так, в данной работе рассмотрены только пять фотографических положений Луны для марта 1955 г., которые были предоставлены Пулковской обсерваторией. Поправка, полученная по этим наблюдениям, равна $32^{\circ}23'$, что дает тот же порядок величины, какой получился и при получении поправки другими методами. Остается только пожелать увеличить число фотографических определений положений Луны.

Использовать заграничные наблюдения не представляется возможным, так как Naval Observatory, где производятся фотографические наблюдения, дает лишь окончательный результат для 1955.0 $\Delta t = 30^{\circ}0'$.

5. В заключение отметим, что полученные в данной работе поправки к эфемеридному времени хорошо согласуются между собой. Это позволяет утверждать, что поправка для 1954.5, полученная по двум типам наблюдений, а именно по наблюдениям покрытий звезд Луною ($30^{\circ}3'$) и по меридианным наблюдениям Луны ($30^{\circ}2'$), составляет $30^{\circ}3'$, а не $31^{\circ}4'$, как предвычислено Садлером. Результаты вычислений представим в виде табл. 7:

Таблица 7

Дата	Поправка	Количество наблюдений	Вид наблюдений	Дата	Поправка	Количество наблюдений	Вид наблюдений
1951.5 г.	29 ^h 3	82	Меридианные	1954.5 г.	30 ^h 3	64	Покрывтия
1953.5 г.	29.5	81	"	1955.5 г.	30.9	100	"
1954.5 г.	30.2	57	"				

ЛИТЕРАТУРА

Аидулайе А. 1935. Вращение Земли. Успехи астр. наук, 5.
Железняк М. Б., Э. А. Митрофанова. 1954. Таблица для приведения эфемерид Луны к эфемеридному времени. Бюлл. ИТА, 5, 10.
Загребин Д. В. 1951. Об учете эмпирического члена при вычислении лунной орбиты. Бюлл. ИТА, 5, 1.
Загребин Д. В. 1954. Эфемеридное время. Астр. вестн.
Загребин Д. В., Э. А. Митрофанова, Г. М. Позняк. 1955. Определение разности между эфемеридным временем и всемирным по наблюдениям покрытий звезд Луною. Бюлл. ИТА, 6, 1.
Михайлов А. А. 1954. Теория затмений. Гостехиздат, М.
Парийский Н. Н. 1945. Изменение длины суток и деформация Земли. Астр. журн., 22.
Парийский Н. Н. 1953 а. Изменение скорости вращения Земли в течение года. Труды Геофиз. инст., 19.
Парийский Н. Н. 1953 б. О влиянии свободной нутации Земли на угловую скорость ее вращения. Труды Геофиз. инст., 19.
Парийский Н. Н. 1954. Неравномерности вращения Земли. Изд. АН СССР, М.—Л.
Парийский Н. Н., О. А. Бердид. 1953. Влияние сезонных изменений атмосферной циркуляции на скорость вращения Земли. Труды Геофиз. инст., 19.
Brouwer D. 1952. A study of the changes in the rate of rotation of the Earth. A. J., 57, 1201.
Clement G. M. 1948. On the system of Astronomical Constants. A. J., 53, 1170.
Comrie L. J. 1938. The reduction of Lunar Occultations. A. J., 46.
Dungen van den F. H., J. F. Cox, J. van Miegheem. 1949. Sur les fluctuations de période annuelle de la rotation de la Terre. Bull. cl. Sci. Acad. Roy. Belgique, sér. 5, 35, 642.
Eckert W. 1942. The occultation data in the American Ephemeris. A. J., 50.
Finch H. F. 1930. On a periodic fluctuation in the length of the day. M. N., 110.

Gondolatsch F. 1953. Erdrotation, Mondbewegung und das Zeitproblem der Astronomie. Karlsruhe.
 Innes R. T. A. 1924. Reduction of occultations of stars by the Moon. A. J., 35, 835.
 Jeffreys H. 1929. The Earth. Cambridge.
 Laurent M. 1949. Sur les fluctuations de période annuelle de la rotation de la Terre. Bull. cl. Sci. Acad. Roy. Belgique, sér. 5, 35, 1125.
 Laurent M. 1950. Sur les fluctuations de période annuelle de la rotation de la Terre. Bull. cl. Sci. Acad. Roy. Belgique, sér. 5, 35, 128.
 Markowitz W., 1955. The annual variation in the rotation of the Earth 1951-1954. A. J., 60, 1228.
 Markowitz W., R. G. Wall, G. Edelson. 1955. Ephemeris time from photographic positions of the Moon. A. J., 60, 1298.
 Nakano S., R. Fukaya. 1954. Meridian observations of the right ascensions of the Moon and planets during the year 1953. Tokyo astr. bull., 68.
 Nakano S., H. Yasuda, R. Fukaya. 1952. Meridian observations of the right ascensions of the Moon and planets during the year 1951. Tokyo astr. bull., 50.
 Nakano S., H. Yasuda, R. Fukaya, H. Hara. 1955. Meridian observation of the right ascension of the Moon and planets during the year 1954. Tokyo astr. bull., 74.
 Pauvel F. W. Uhink. 1955. Die Quarzuhren des Geodätischen Instituts in Potsdam. A. N., 257.
 Sadler D. H. 1954. Ephemeris time Occasional Notes. R. A. S., 17.
 Sadler F. M. 1955. Discussion of occultations observed in 1951 and 1952. A. J., 60, 8.
 Sitter de W. 1927. On the secular accelerations and the fluctuations of the longitudes of the Moon, the Sun, Mercury and Venus. B. A. N., 124.
 Spencer J. 1932. Discussion of observations of occultations of stars by the Moon 1672-1908, being a revision of Newcomb's "Researches on the motion of the Moon, pt. II". Ann. Cape Observ., 23, 3.
 Spencer J. 1939. The rotation of the Earth and secular acceleration of the Sun, Moon and planets. M. N., 99.
 Stoyko N. 1949. 1) L'irrégularité de la rotation de la Terre et les horloges astronomiques; 2) Sur la variation saisonnière de la rotation de la Terre; 3) Sur l'influence de l'attraction luni-solaire et de la rotation du rayon terrestre sur la rotation de la Terre. Bull. cl. Sci. Acad. Roy. Belgique, sér. 5, 35.
 Uhink W. 1950. Gänge der Quarzuhren des Geodätischen Instituts Potsdam und ihre Verwendung zur Feststellung von Zeitschwankungen. A. N., 278.
 Woolard E., 1952. A discrepancy between Brown's Lunar tables and the theory from which they were constructed. A. J., 57, 1198.

Поступило в Редакцию
23 марта 1957 г.

БОУЛЕТЬ ИНСТИТУТА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ АСТРОНОМИИ
Том VII, № 2 (85)

Утверждено к печати
Институтом теоретической астрономии Академии Наук СССР

Технический редактор А. В. Смирнова

Сдано в набор 20 августа 1958 г. Подписано к печати 1/IX 1958 г. РИСО АН СССР № 44-148. Формат бумаги 84 x 109/16.
Бум. л. 29, Печ. л. 5 1/2 = 9,02 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 10,16. Изд. № 833, Тираж экз. № 780, М-18991. Тираж 1000.
Цена 7 р. 10 к.

Ленинградское отделение Издательства Академии наук СССР
(Ленинград, В-154, Моделеская алл., д. 1)

1-й тип. Издательства Академии наук СССР, Ленинград, В-34, 9 линия, д. 12

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
А. В. Фокки. Орбита кометы Отерма 3, 1942 VII по наблюдениям 1943-1950 гг.	89
А. В. Фокки. Исследование тесного сближения кометы Отерма 3 с Юпитером	113
М. А. Мерзлякова. Комета 1948 IX: Ашбрука-Джексона	120
С. И. Лучич. Исследование движения кометы Энке-Бакаунда за 1931-1937 гг.	140
С. И. Лучич. К вопросу о наличии систематических ошибок в наблюдениях кометы Энке-Бакаунда	156
Г. Е. Серебрякова. Определение разности между эфемеридным и видимым временем для 1951, 1953, 1954 и 1955 гг.	165

ОПЕЧАТКИ И ИСПРАВЛЕНИЯ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
109	Табл. 13, графа 8, 1 сверху	+ 0.009	- 0.009
147	4 сверху	июнь	июль 28
154	Табл. 18, графа 5, 2 снизу	58.79803	57.79803
154	Табл. 18, графа 6, 2 снизу	58.84262	57.84262

Булетень ИТА, т. VII, № 2 (85)

7 p. 10 к.

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ
РЕСПУБЛИК

БЮЛЛЕТЕНЬ ИНСТИТУТА
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ АСТРОНОМИИ

Том VII, № 3 (86)



ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА 1959 ЛЕНИНГРАД

Бюллетень Института Теоретической Астрономии

T. VII

1959

№3 (86)

Директор Института теоретической астрономии чл.-корр. АН СССР М. Ф. Субботин
 Ответственный редактор проф. Г. А. Чеботарев

Малые планеты
 (1957)

Н. С. Самойлова-Яхонтова

Результаты наблюдательной и эфемеридной работы по малым планетам и краткий обзор литературы за 1957 г. Библиография работ в области малых планет.

MINOR PLANETS (1957), by N. S. Samoilova-Yakhontova. — The Institute for Theoretical Astronomy at Leningrad published in 1957 the Ephemeris volume for 1958. Various centres (Academy of Sciences of Latvian SSR, Astronomisches Rechen-Institut at Heidelberg, the observatories at Cincinnati, Madrid, Nanking, Tokyo, Zo-Si) took part in the computation of the Ephemerides.

142 Minor Planet Circulars (№№ 1537—1678) were issued this year by the Planet Centre at Cincinnati. Preliminary designations were assigned to 89 asteroids discovered in 1956 and to 44 ones discovered in 1957. Four planets received permanent numbers as a result of identification of objects observed in different years (Table 1).

The elements of only two planets discovered in 1957 have been determined (1957 CA, 1957 NA) and besides these the elliptical elements of 24 and the circular elements of 41 planets discovered previously. A fast moving object (object Schubart, 1957 NA) has been observed at the Sonneberg observatory and has been identified by A. Patry with 1929 SH. The elements of this asteroid are very similar to those of Apollo. 112 systems of improved elements have been published in MPC's. The element corrections for 98 of them have been computed at the Institute for Theoretical Astronomy at Leningrad with the aid of punched card machines. The calculation of the Ephemerides with new elements was performed on the Electronic Calculator of the Academy of Sciences of USSR in Moscow (perturbations by Jupiter, Saturn and the Earth).

Many observatories published accurate positions of planets selected for the determination of systematic errors of the Catalogue of Faint Stars (Table 2).

A. Patry continued his search for identifications. He compiled a Catalogue of circular elements and established by its aid 187 identities, the most remarkable were $\Sigma 106 = 459$ Signe, 1930 UK = 650 Amaluntha, 1928 FN = 750 Oskar, 1940 EF = 452 Hamiltonia, 1931 PF = 810 Atossa.

The Planet Centre issued a pamphlet "The Names of the Minor Planets", where the names of the first 342 asteroids were explained.

Among articles dealing with theoretical problems the following are mentioned: I. Kovalevsky on Laplace-Danjon's method for the orbit determination; W. Popovic, who developed a method for computing

the perturbations of vectorial elements δ , ϵ and the elements M and $E = \frac{1}{r}$; U. A. Rjabov computed an intermediate orbit of the asteroids of Trojan group, using Delaunay-Hill's method; W. I. Oreiskaya published the results of the determination of systematic corrections to star positions of FK3 from 289 observations of Juno in 1934—1943 ($\Delta\alpha = +0.11 \pm 1.40$, $\Delta\delta = +0.02 \pm 0.22$). The mean errors being large, this must be considered as preliminary solution, needing further investigations; P. Naur attacked the same problem using 750 observations of Nemausa in 1943—1953, and obtained $\Delta\alpha = -0.912 \pm 0.71$, $\Delta\delta = -0.1042 \pm 0.075$. Considering that the mean error of $\Delta\alpha$ is large and that the elements of the Sun are well known a second solution was made, and besides the elements of Nemausa only the correction to the declinations of FK3 was derived ($\Delta\delta = -0.1021 \pm 0.043$).

The Systematic Survey of the asteroid belt undertaken by G. Kuiper at the McDonald observatory was completed in 1957. The photographic magnitudes of all numbered asteroids will be published in the Supplement to the "Astrophysical Journal". T. Gehrels determined the phase coefficients of 90 asteroids by comparing pairs of plates of the Survey taken in two oppositions. The large mean value of the phase coefficient 0.9768 ± 0.005 is due probably to the "opposition effect", the angles of phase being small, less than 6° in most cases; 22 asteroids with phase angles between 10° and 20° give 0.923 for the mean phase coefficient.

В 1957 г. Институтом теоретической астрономии АН СССР выпущен очередная сборник "Эфемериды малых планет на 1958 г." (двенадцатый год издания). В вычисле-

ни эфемерид, кроме Института теоретической астрономии (ИТА), принимали участие Институт физики Академии наук Датской ССР (сектор астрономии) и ряд зарубежных институтов и обсерваторий (Астрономический вычислительный институт в Гейдельберге, Калифорнийский университет, обсерватории в Цинциннати, Мадриде, Нанкине, Токио и Шанхае). Для 80% планет эфемериды вычисляются с возмущениями от Юпитера, а в некоторых случаях и других планет. Все эфемериды, полученные в ИТА при помощи численного интегрирования на электронной машине БЭСМ в Москве (около 700), вычислены с возмущениями от Юпитера и Сатурна, эфемериды, присланные из обсерватории Цинциннати, и часть эфемерид Астрономического вычислительного института в Гейдельберге вычислены на электронной машине NORC с учетом возмущений от Юпитера, Сатурна и Земли.

В сборнике помещено 180 новых улучшенных систем элементов (причем 125 систем получено в ИТА). Все они опубликованы также в „Minor Planet Circulars“ (MPC) в 1956 и 1957 гг., где можно найти подробности, касающиеся улучшения.

Планетным центром в Цинциннати выпущено в истекшем году 142 „Планетных циркуляра“ от 1537 до 1678 номера (Minor Planet Circulars, 1957). В них опубликованы предварительные обозначения 89 планет, открытых в 1956 г.: 1956 LB—LE, NC, PB—PF, QA—QB, RE—RS, SA—SH, TA—TW, UA—UQ, VE—VL, XA—XJ, YA, и 44 планет, открытых в 1957 г.: 1957 AA—AD, BA—BS, CA—CD, EA—EC, FA—FD, GA—GB, HA—HG, NA, VA. Таким образом, в 1956 г. было зарегистрировано всего 185 новых планет (Самойлова-Яхонтова, 1958). Из них только 9 планет наблюдались 3 и более раз, и только для трех определены эллиптические элементы: 1956 AA, 1957 XA и 1956 YA.

Планета 1956 YA, открытая на обсерватории Пурпурная Гора, оказалась планетой 840 Zenobia, планета 1956 AA была отождествлена с планетой 1927 AA, открытой в 1927 г. в Барселоне; по двум оппозициям были определены элементы, и планета получила постоянный номер 1626. Кроме того, определены элементы двух планет, открытых в 1957 г. (1957 CA и 1957 NA), 24 планет, открытых ранее, и 41 система круговых элементов.

В 1957 г. был открыт на обсерватории Зоннеберг быстро движущийся объект („объект Шубарта“), оказавшийся малой планетой, типа нумерованной потерянной планеты Arolo (i=1440°, q=23°5, i=8.4). Планета получила обозначение 1957 NA. А. Патри удалось отождествить ее с планетой 1929 SH. Получено много точных наблюдений, так что элементы 1957 NA определены достаточно надежно; можно думать, что планета не будет потеряна и в будущем получит постоянный номер.

Только 4 планеты получены в 1957 г. постоянные номера (табл. 1) и только одна получила название: планета (1625) 1953 RB, открытая С. Арендом в Уккле. П. Херст предложил для этой планеты название „The NORC“, в честь большой электронной машины NORC (Naval Ordnance Research Calculator), на которой очень успешно ведутся вычисления возмущений малых планет в США. Планета 1953 RB была отождествлена с пятью ранее открытыми планетами (табл. 1), возмущения от 7 больших планет (от Венеры до Нептуна) были вычислены на машине NORC и элементы определены Рабе (Rabe) по пяти оппозициям с 1929 по 1953 г. (MPC, 1957, № 1591).

В MPC опубликованы 112 улучшенных систем элементов нумерованных планет. Из них 98 систем получены в Институте теоретической астрономии, 3 — в Нанкине, 3 — в Цинциннати, 3 — в Токио, 2 — в Зо-Се, 2 — в Мадриде и одна система в Гейдельберге. Выполнить такое большое число улучшений в ИТА удалось благодаря тому, что большая часть необходимых операций выполнялась на счетно-аналитических машинах (Извекков, 1957). Было выбрано около 100 планет с большими отклонениями от эфемерид, для которых ранее было произведено на счетно-аналитических машинах численное интегрирование с учетом возмущений от Юпитера. Сравнение с наблюдениями (приближенными), вычисление коэффициентов условных уравнений, составление нормальных уравнений выполнялось на тех же машинах. Некоторым препятствием при улучшении оказалось большое число ошибочных наблюдений: около 20% всей работы пришлось переделывать, отбрасывая выскочившие наблюдения. После улучшения интегрирование было повторено вновь, теперь уже на электронной машине БЭСМ в Москве.

Таблица 1

Список планет, получивших постоянные номера в 1957 г.

№ планеты	Предварительное обозначение	Кто открыл	Место наблюдения	Кто вычислила элементы	Где опубликованы элементы
1623	1948 PL	E. Johnson.	Johannesburg.	H. Hirose и M. Utiida.	MPC 1551.1
1624	1931 TT	K. Reinmuth.	Heidelberg.	C. Kenda.	MPC 1588.
1625	1953 RB	S. Arend.	Uccle.	E. Rabe.	MPC 1591.
1626	1927 AA	Comas Sola.	Barcelona.	S. Bohme.	MPC 1592.

(1623) 1948 PL = 1954 SA = 1955 YC; (1624) 1931 TT = 1928 DC = 1939 BN = 1954 UP; (1625) The NORC 1953 RB = 1929 CA = 1956 QS = 1942 RK = 1917 NG = 1953 QK; (1626) 1927 AA = 1956 AA.

До сих пор перед началом численного интегрирования проводилась большая подготовительная работа — вычисление вручную точных значений исходных координат, а вычисление приближенных эфемерид на каждый год на основании полученных прямоугольных координат выполнялось на счетно-аналитических машинах. В 1957 году в ИТА В. А. Извекков разработал программу, совершенно исключающую всякие лобовые вычисления: в машину БЭСМ закладываются координаты возмущающих планет на все время интегрирования и 6 элементов планеты. По заданным элементам машина сама вычисляет начальные координаты, затем производит интегрирование; сама нащупывает момент оппозиции и момент, с которого надо вычислять координаты на среднюю (интерполирование полученных прямоугольных геоцентрических координат на среднюю (интерполирование ведется через 20 дней, а эфемеридные положения — через 10) и вычисляет геоцентрические координаты — прямое восхождение и склонение, среднюю аномалию на третий эфемеридный момент, видимую величину, g , p и вариации. Закончив вычисление эфемерид, машина ведет интегрирование дальше, и весь процесс повторяется вновь для следующей оппозиции. По этой программе было произведено интегрирование для 70 планет. Для каждой планеты выполнено 260 шагов интегрирования с учетом возмущений от трех планет — Юпитера, Сатурна и Земли и вычислены эфемериды на 1959—1965 гг. На выполнение всего цикла работы для каждой планеты требовалось 4.5 мин.

А. И. Сластенов (1957) произвел вычисление частных возмущений и улучшение элементов планеты 284 Amalia, применив метод, предложенный Г. М. Баженовым, который основан на широком использовании аппарата матричного исчисления.

Почти все обсерватории публикуют точные положения малых планет. Три обсерватории (Юганессбург, Лаплата, Сидней) ведут наблюдения планет с южными склонениями, причем, согласно договоренности, Лаплата наблюдает планеты с нечетными номерами, а Сидней — с четными. Очень много наблюдений десяти планет, избранных для определения постоянных элементов Каталога слабых звезд. Опубликованы главным образом наблюдения за 1956 г. На 9 обсерваториях (Барселона, Капская обсерватория, Копенгаген, Мадрид, Москва, Пулково, Рим, Сант-Яго, Сидней) получено большое число точных положений (табл. 2). Parthenope и Laetitia были доступны для наблюдения только в конце 1956 г. Большое число наблюдений их получено в первой половине

Таблица 2

Планеты	Число наблюдений	Планеты	Число наблюдений
1 Ceres	190	7 Iris	103
2 Pallas	49	11 Parthenope	26
3 Juno	82	18 Melpomene	129
4 Vesta	89	39 Laetitia	12
6 Hebe	82	40 Harmonia	58

Печатки в этом номере были исправлены в MPC 1592.

1957 г.: Parthenope—121, Laetitia—39. Наблюдения, произведенные за эти годы в Киеве, Москве и Лейдене, пока не опубликованы.

Большое внимание уделяется отождествлению планет, мало наблюдавшихся и не получивших постоянных номеров. О. Киппес, Р. Митринович, А. Патри опубликовали в „Nachrichtenblatt der Astronomischen Zentralstelle“ и MPC большое количество отождествлений планет, наблюдения которых отделены часто большими промежутками времени (например, 1956AA=1927 AA1626; 1957NA=1929SH и др.). А. Патри составила и издала продолжение каталога круговых орбит (Patry, 1957). Каталог в двух частях содержит элементы 1590 планет, наблюдавшихся 2 раза с промежутком не менее, чем в 2 дня. Главная цель каталога — облегчить идентификацию нумерованных планет. С помощью этого каталога произведено 187 идентификаций. Среди них особенно замечательны $\Sigma 106=459$ Signe, 1930 UK=650 Amalasintha, 1928 FN=750 Oskat, которые не наблюдались с года их открытия, а именно с 1900, 1907 и 1913 гг., а теперь их элементы оказались возможным улучшить, и они наблюдаются регулярно. Можно надеяться, что то же будет с планетами 1940 EF=452 Hamiltonia, 1931PF=810 Atossa, 1949MS=1402 Eri, которые не наблюдались с 1899, 1915 и 1936 гг.

В связи с тем, что по действующим сейчас правилам, каждый предлагающий название новой планеты должен дать объяснение этого названия, возникла мысль издать брошюру, в которой были бы собраны объяснения названий всех малых планет. Брошюра „Названия малых планет“ (часть 1), в которой собраны пояснения названий первых 342 планет, была составлена и издана Планетным центром (Herget, 1955; Ashbrook, 1957).

Большие планеты были известны еще в древности и сохранили имена римских и греческих богов. Когда были открыты первые малые планеты, эта традиция некоторое время сохранялась, и названия для них выбирались из мифологии. Названия часто отражают давно забытые отношения, споры, борьбу. Так, например, когда английский астроном Хинд открыл в 1850 г. двенадцатую малую планету и предложил назвать ее Викторией в честь английской королевы, американские астрономы резко протестовали; споры прекратились, когда Бонд — высший авторитет по астрономии в Америке — указал, что существует богиня Виктория и традиция не будет нарушена. Планета 55 была открыта в 1858 г. на обсерватории Далаей, близ Нью-Йорка, в период острой борьбы ее директора В. Гульда с попечителями обсерватории. Гульд дал ей название Пандора, намекая на „Ящик Пандоры“, содержавший по преданию все бедствия, который любопытная Пандора открыла и выпустила беды на человечество, а в ящике осталась лишь одна несбыточная надежда. Интересно, например, что И. Палиса, открывший за свою долгую жизнь визуально 125 планет, использовала однажды свое право давать названия открытым им планетам для ирригации средств, которых ему не хватало для организации экспедиции на солнечное затмение в 1886 г., видимое в Африке. Он поместил в журнале „Observatory“ объявление, что продает свое право на наименование малой планеты. На объявление откликнулся барон Ротшильд и купил это право за 250 долларов. Планета 250 была названа Bettina в честь жены Ротшильда.

И. Ковалевский (Kovalevsky, 1957a, 1957b) занимался дальнейшим развитием видоизмененного метода Лапласа определения орбит, предложенного А. Данконом. Точность определения элементов в способе Лапласа зависит от точности шести величин $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0, \epsilon_0, \zeta_0$ — координат и их первых и вторых производных в некоторый начальный момент t_0 . Данкон предложил способ улучшения по нескольким наблюдениям этих шести величин, определенных по трем наблюдениям. Числовые значения коэффициентов условных уравнений могут быть получены путем варьирования исходных данных. И. Ковалевский нашел для этих коэффициентов практические выражения в виде рядов, исследовав их сходимость. Разработала практические приемы вычисления. Метод не применим, если геоцентрическая скорость лежит в плоскости Солнце—планета—Земля. В этом случае рекомендуется в качестве начальных данных вместо α_0 и β_0 принимать D_0 и D_0' — геоцентрическое расстояние планеты и его производную в момент t_0 , т. е. искать поправки к шести величинам: $\alpha_0, \beta_0, \alpha_0', \beta_0', D_0, D_0'$.

180

В. Попович (Popovic, 1956a, 1956b), занимаясь вопросами, связанными с вычислением частных возмущений, разработал систему формул для определения возмущений векторов

$$e = r \times v \text{ и } a = v \times e - \frac{r}{r}$$

и двух скалярных величин E и M , где $E^2 = n$ — среднее суточное движение и M средняя аномалия. Метод аналогичен методу Музена (Musen, 1954); отличие лишь в том, что последний определяет возмущения векторов

$$c = r \times v \text{ и } g = \frac{1}{a^2} c \times a, \quad c = |c|$$

и возмущения n и M .

Ю. А. Рябов продолжал свои исследования по теории движения планет троянской группы. Рассматривая троянцев как обычные малые планеты, не имеющие никакого отношения к треугольным точкам либрации, но суточные движения которых близки к суточному движению Юпитера, он строит промежуточную орбиту, исходя из однократно-осредненной задачи Делонс-Хилла. В первом варианте (Рябов, 1957a) промежуточная орбита находится численным интегрированием, т. е. для каждого троянца эта орбита строится отдельно, и получается частное решение, соответствующее определенным начальным условиям.

Во втором варианте (Рябов, 1957b) допускается дальнейшее упрощение правых частей дифференциальных уравнений, определяющих промежуточную орбиту, которое позволяет найти общее решение: в правых частях уравнений сохраняются лишь члены нулевого порядка эксцентриситета (отбрасываются члены с e^2, e^4, \dots ; нечетных степеней уравнения не содержат). Элементы орбиты — большая полуось, долгота перигелия и разность долгот между Юпитером и троянцем выражаются рядами по степеням некоего параметра d и содержат три произвольных постоянных. Эксцентриситет, долгота узла и наклон орбиты остаются постоянными. Эта орбита может быть использована в дальнейшем для построения более точной теории движения троянцев. В качестве примера построена промежуточная орбита планеты 884 Priamus.

Появляются первые работы по определению постоянных звездных каталогов по наблюдениям малых планет. В. И. Орельская (1957)¹ произвела опыт определения элементов ориентации каталога FK3 по наблюдениям Юноны за 1934—1943 гг. Было использовано 289 наблюдений Юноны в течение 7 оппозиций. Все наблюдения приведены в системе FK3, образовано 19 нормальных мест. Точные эфемеридные положения получены численным интегрированием уравнений движения в особых координатах (методом Б. В. Нумерова) с точностью до 10^{-8} с учетом возмущений от всех больших планет, кроме Плутона. Определены поправки к 6 элементам Юноны, четырем элементам Земли и ошибкам прямых восхождений и склонений каталога FK3, оказавшиеся равными

$$\Delta\alpha_0 = +0.11 \pm 1.40, \quad \Delta\delta_0 = +0.02 \pm 0.22$$

для эпохи 1934.7.

Поправки к прямым восхождениям и склонениям каталога FK3 получались с большими средними ошибками, которые только отчасти могут быть объяснены недостаточным хорошим качеством наблюдений (средняя ошибка одной нормальной координаты $\sigma = \pm 0.48$); вопрос требует дальнейшего исследования.

Вторая работа принадлежит П. Науру (Naur, 1957) — „Малая планета 51 Nemausa и фундаментальная система склонений“. Еще в 1940 г. на Копенгагенской обсерватории начали точную обработку планеты 51 Nemausa, имея в виду определение систематических ошибок склонений звезд. Сначала обработкой этой планеты занимался О. Меллер, который улучшил ее элементы по наблюдениям 1927—1943 гг. Исходя из элементов Меллера, Науру произвел численное интегрирование уравнений движения в прямоуголь-

¹ Доклад был прочитан на 12-й астрономической конференции СССР 8 декабря 1955 г.

181

ных координатах на машине EDSAC, принадлежащей Математической лаборатории Кембриджского университета. Интегрирование выполнено на интервале в 102 года, от 1934 г. назад до 1838 г. и вперед до 1960 г. с учетом возмущений от семи планет от Венеры до Нептуна, чтобы можно было воспользоваться всеми наблюдениями планеты с момента ее открытия и до наших дней. В виде опыта проделана до конца небольшая часть работы: по наблюдениям в семи оппозициях с 1943 по 1954 г. определены постоянные каталога FK3. Было использовано 750 наблюдений, полученных на 11 обсерваториях с достаточно крупными инструментами, образовано 28 нормальных мест и проведено решение в двух предположениях. Первое — система условных уравнений содержит 12 неизвестных (6 поправок к элементам планеты, 4 поправки к элементам Земли и систематические ошибки прямых восхождений и склонений каталога FK3). Получены следующие значения ошибок:

$$\Delta\alpha_0 = -0."5912 \pm 0."71,$$

$$\Delta\delta_0 = -0."1042 \pm 0."075.$$

Так как поправки к элементам Земли получились значительно меньше их средних ошибок, то можно принять, что таблицы движения Солнца Ньюкома достаточно хороши и поправок не требуют. Поэтому решена система условных уравнений, содержащая только 7 неизвестных: 6 поправок к элементам планеты и ошибка склонений звезд. Эта последняя оказалась равной

$$\Delta\delta_0 = -0."1021 \pm 0."043,$$

т. е. оба найденные значения $\Delta\delta_0$ практически совпадают, и П. Наур принимает, что поправка склонений каталога FK3 есть

$$-\Delta\delta_0 = +0."10 \pm 0."04$$

для эпохи 1950.7. Этот результат совпадает с выводами Оорта, на основе совершенно других соображений (Naug, 1957). Ошибка единицы веса в обоих решениях довольно велика ($\pm 0."57$) и не может быть объяснена ошибками наблюдения, так как при составлении нормальных мест наименьшая средняя ошибка одного нормального места, принятая за ошибку единицы веса, была 0."25. Вопрос также требует дальнейшего исследования.

Е. Тайлор (Taylor, 1957), как и в прошлые годы, предсказал несколько покрытий звезд малыми планетами. Покрытие звезды Юноной 19 февраля 1958 г. должно было быть видно в СССР, на Скандинавском полуострове и Британских островах. К сожалению, пока (март 1958 г.) не поступило ни одного сообщения о наблюдении покрытия.

Закончено проведение фотометрического обозрения всех астероидов по программе Г. Кайпера. Материал подготовлен к печати и будет выущен специальным приложением к "Astrophysical Journal". Некоторые результаты уже могли быть использованы. Так, Т. Герас (Gehrels, 1957) произвел детальное изучение системы звездных величин астероидов, публикуемых в ежегодных "Эфемеридах", и сделал сравнение этих величин с величинами, полученными по программе Кайпера. Звездные величины фотометрического обозрения получены в интернациональной фотографической системе; они определялись из сравнения с площадками Mount Wilson. Звездные величины, даваемые в "Эфемеридах", на 1—2 величины меньше, чем полученные по интернациональной системе. Из сравнения звездных величин 150 планет из фотометрического обозрения со звездными величинами "Эфемерид" найдена эмпирическая зависимость между m_0 — звездной величиной в средней оппозиции и p_0 — той же величиной в обозрении:

$$m_0 = p_0 - 1.66 - 0.12(p_0 - 15.0).$$

Систематические разности в звездных величинах, публикуемые различными обсерваториями, иногда достигают 3 звездных величин.

На 24' рефлекторе Иерской обсерватории Т. Герас произвел определение звездных величин всех планет троянской группы и из сопоставления оценок их блеска различными наблюдателями нашел значения абсолютных величин троянцев с вероятной ошибкой около $\pm 0."08$. На том же инструменте были определены видимые величины и коэффициенты фаз 17 слабых малых планет: 26, 62, 122, 228, 268, 291, 317, 341, 440, 480, 617, 938, 1043, 1128, 1267, 1287, 1291.

Кроме того, из сравнения снимков, полученных по программе Кайпера в двух оппозициях, удалось определить коэффициенты фаз для 90 планет. Коэффициент фаз для них оказался очень большим — $0."078 \pm 0.05$, т. е. гораздо больше, чем полученный в 1893 г. Мюллером из визуальных наблюдений. Возможно, что причина заключается в том, что для большинства планет обозрения угол фазы был мал, не превышал 6° . Этот "эффект оппозиции" заметен также среди 17 вышеперечисленных планет и подтверждается фотоэлектрическими наблюдениями планеты 20 Massalia. Отобрав 22 планеты с углами фазы между 10 и 20° , автор нашел средний коэффициент фазы, равный $0."023$.

Вопрос о происхождении астероидов тесно связан с вопросом о происхождении метеоритов и в настоящее время разрабатывается главным образом лицами, занимающимися исследованием метеоритов. Еще не так давно считалось, что физическая структура метеоритов может быть объяснена только, если предположить, что метеориты (а также и астероиды) образовались в результате распада одной планеты типа Земли с тяжелым железным ядром. В последнее время детальное исследование химического состава и структуры метеоритов показало, что такое предположение совсем не обязательно (Фесенков, 1956; Янваль, 1957); железные метеориты могли возникнуть из местных скоплений металла в среде породившего их тела. Размеры этого родоначального тела должны были быть значительно больше размеров метеоритов, это мог быть астероид без железного ядра, без полного разделения металлической и силикатной фаз и не похожий на такие планеты, как наша Земля, где на больших глубинах не может сохраняться кристаллическая структура, характерная для метеоритов. Определенный радиоактивным методом возраст метеоритов в 5 млрд лет доказывает, что вещество метеоритов образовалось в эпоху возникновения планет нашей солнечной системы. Содержание изотопа гелия He_3 в метеоритах характеризует продолжительность их облучения космическими лучами, т. е. продолжительность их существования как самостоятельных образований. Этот метод дает промежуток времени в 300 млн лет. Итак, можно, по-видимому, считать установленным (Фесенков, 1956), что вещество метеоритов образовалось в среде небольших планет астероидального типа в эпоху возникновения планет нашей солнечной системы, т. е. примерно 5 млрд лет тому назад, но что метеориты как отдельные тела образовались путем дробления астероидов в более поздние эпохи. Сами же астероиды возникли одновременно с планетами из той же протопланетной среды и были сначала весьма немногочисленны. В течение долгого существования астероидов происходило их постепенное дробление в результате столкновений с образованием все более многочисленных и более мелких тел. Об этом говорит и сравнительная молодость семейств Хирарам. Таким образом, углубленное изучение метеоритов приводит к подтверждению гипотезы о происхождении кольда астероидов в результате дробления первоначально небольшого числа крупных астероидов.

ЛИТЕРАТУРА

- Абалакии В. К. 1957. Элементы орбиты малой планеты с 164 = 1951 QA. Астр. ц., 185.
 Баженков Г. М. 1957. Таблица для решения уравнения Кеплера с помощью арифмометра. Труды Астр. обсерв. Харьк. гос. ун-та, 12.
 Бертенева О. Н. 1957. Новые элементы восьми малых планет. Бюлл. ИТА, 6, 7(80).
 Буаутова Ф. Ф. и О. Н. Чудовичева. 1957. Точные положения малых планет по фотографическим наблюдениям в Пулков. Изв. ГАО, 20, 4(157), 139—156.
 Гаврилов И. В. 1957. Точные положения малых планет Ириды (7) и Летиции (39) по наблюдениям в ГАО АН УССР (Голосеево). Астр. ц., 186.
 Извеков В. А. 1957. New Elements of 98 Minor Planets. Minor Planet Circulars, 1641—1659.

- Онегина А. Б. 1957. Точные положения малой планеты Паллады (2), полученные по пластинкам 400 мм астрографа ГАО АН УССР. Астр. ц., 176.
- Орландов В. И. 1957. Опыт определения постоянных каталога ФКЗ по наблюдениям Юноном за 1934—1953 гг. Труды 12-й астрономической конференции СССР, А.
- Пережогина Т. П. 1957. Фотографические наблюдения ярких малых планет. Астр. ц., 178.
- Рябов Ю. А. 1957а. О некоторых способах построения промежуточной орбиты для малых планет Троицкой группы. I. Астр. журн., 34, 2.
- Рябов Ю. А. 1957б. О некоторых способах построения промежуточной орбиты для малых планет Троицкой группы. II. Астр. журн., 34, 4.
- Самойлова-Яхонтова Н. С. 1957. Малые планеты (1955). Бюлл. ИТА, 6, 7(80).
- Самойлова-Яхонтова Н. С. 1958. Малые планеты (1956). Бюлл. ИТА, 6, 10(83).
- Сластенина А. И. 1957. Улучшение элементов орбиты малой планеты Амвлия (284). Труды Астр. общ. Харьк. гос. ун-в., 12.
- Феенков В. Г. 1956. Метеориты и их роль в космогонии солнечной системы. Астр. журн., 33, 5.
- Яценко А. А. 1957. Особенности химического состава метеоритного вещества и происхождение метеоритов. Астр. журн., 34, 3.
- Arend S. et F. Rigaux. 1957. Observations photographiques de petites planètes. Bull. Astr. Obs. Belgique, 4, 9.
- Arend S., F. Rigaux et G. Roland. 1957. Observations de petites planètes et de comètes. Bull. Astr. Obs. Belgique, 4, 9.
- Ashbrook J. 1957. Naming Some Minor Planets. Sky and Telescope, 17, 2.
- Baumgartner U. 1957. Zur Verteilung der Kleinen Planeten, AN, 283, 6.
- Brouwer D. 1956. Current trends in Minor Planet research. Vistas in Astronomy, 2, London—New York, Pergamon Press, 943—948.
- Bruwer J. A. 1957. Photographic Observations of Minor Planets. Circ. Union Obs., 116.
- Chang Chia-hsiang. 1957. The asteroids PO 3 and PO 4. Acta Astr. Sinica, 5, 1.
- Chang Chia-hsiang, Huang Chan-chung. 1957. Introducing of Numerow's special coordinates in Encke's method for the calculation of special perturbations with application to planet 739 Mendeleville. Acta Astr. Sinica, 5, 1.
- Gehrels Th. 1957. Photometric Studies of Asteroids. VI. Aph. J., 125, 2.
- Herget P. 1955. The Names of the Minor Planets. Minor Planet Centre. Cincinnati Observatory.
- Hirose H. and K. Tomita. 1957. Photographic Observations of Minor Planets and Comets (34). Tokyo Astr. Bull., 2d Ser., 90.
- Ho Tien-chien. 1957. The new elements and ephemeris of (234) Barbara. Acta Astr. Sinica, 5, 1.
- Hoffmeister C. 1957NA (Object Schubart)=1929SH. Nachrichtenbl. Astr. Zentralstelle, 11, 6, 8.
- Kippes O. 1957. Identitäten. Doppelbezeichnungen. Nachrichtenbl. Astr. Zentralstelle, 11, 7, 8.
- Kovalevsky J. 1957a. Sur la détermination des orbites elliptiques par la méthode de Laplace. Bull. astr., 21, 3.
- Kovalevsky J. 1957b. Sur la détermination des orbites par la méthode de Laplace (Méthode des variations). C. R. Acad. Sc., 244, 7.
- Kresak L. 1957. Monograms for Computing the Parallax Corrections for Comets and Planets. Bull. Inst. Czechoslovakia, 8, 5.
- Malsch W. 1957. Beobachtungen von Planetoiden 1956. AN, 284, 1.
- Minor Planet Circulars. 1957. 1537—1678.
- Mitrinovic R. 1957a. Identifications des petites planètes. Bull. Obs. Astr. Beograd, 21, 1—2.
- Mitrinovic R. 1957b. Orbites circulaires des petites planètes. Bull. Obs. Astr. Beograd, 21, 1—2.
- Musch P. 1954. Special Perturbations of the Vectorial Elements. A. J., 59, 7.
- Nakano S., H. Yasuda and H. Hara. 1957. Meridian Observations of the Right Ascension of Minor Planets during the Year 1956. Tokyo Astr. Bull., 2d Ser., 98.
- Naur P. 1957. Minor Planet 51 Nemausa and the Fundamental System of Declinations. Publ. og mindre Medd. fra Kobenhavns Observ., 171.
- Paroubek A., R. Podstanička. 1957. Observations of Minor Planets Made at Skalnaté Pleso III. Bull. Inst. Czechoslovakia, 8, 6.
- Patry A. 1957. Catalogue d'orbites circulaires de certains astéroïdes non numérotés 2-e partie. J. O., 40, 5.
- Popovic B. 1956a. Pri preciza kalkulato de „vektoraj Konstantoj“ de planetedorbito. Bull. Obs. Astr. Beograd, 20, 1—2.
- Popovic B. 1956b. Special perturboj de vektoraj elementoj de planetedorbito. Вестн. Астр. музеем. и фот. И. Р. Српске, 8, 1—2.
- Popovic B. 1957. Pripredioj de Eltrovataj rapidoj de Planetetoj. Bull. Obs. Astr. Beograd, 21, 1—2.
- Protitch M. et C. Cepinae. 1957. Observation photographiques de petites planètes. Bull. Obs. Astr. Beograd, 21, 1—2.
- Reinmuth K. 1957. Photographische Aufnahmen von Kleinen Planeten in Heidelberg. Nachrichtenbl. Astr. Zentralstelle, 11, 5, 6.
- Reinmuth K., I. Groeneveld. 1957. Photographische Aufnahmen von Kleinen Planeten in Heidelberg. Nachrichtenbl. Astr. Zentralstelle, 11, 1.
- Robertson W. H. 1956. Minor Planets observed at Sydney Observatory during 1955. J. and Proc. Roy. Soc. N. S. Wales, 90, 2.
- Strobel W. 1957a. Die Verbesserung des fundamentalen Koordinatensystems aus Beobachtungen kleiner Planeten. Astr. Rech.-Inst. in Heidelberg, Mittell., Serie A, 7.
- Strobel W. 1957b. Elemente. Nachrichtenbl. Astr. Zentralstelle, 11, 3, 4, 6, 8.
- Taylor G. E. 1957. Occultations of Stars by Minor Planets. Handbook British Astr. Ass., 1958.
- Yih Jao-hwa. 1957. Improvement of the convergence of the development of perturbative function. Development of the planar problem of three bodies by means of the linear transformation. Acta Astr. Sinica, 5, 1.

Поступило в Редакцию
19 апреля 1958 г.

Бюллетень Института Теоретической Астрономии

Т. VII

1959

№ 3(86)

Исследование движения двух троянцев численным методом

Г. А. Чеботарев и А. И. Божкова

В настоящей работе методом численного интегрирования исследовано движение двух планет троянской группы (617) Патрокла и (1173) Анхиза в интервале времени свыше 700 лет.

THE INVESTIGATION OF THE MOTION OF TWO ASTEROIDS OF THE TROJAN GROUP BY MEANS OF NUMERICAL INTEGRATION, by G. Chebotarev and A. Bozhkova. — The motion of two asteroids of the Trojan group (617) Patroclus and (1173) Anchises is investigated for the time interval of about 700 years. The results are summarized in tables 1—14 and figures 1—7.

§ 1. Введение

В настоящей работе методом численного интегрирования исследовано движение двух планет троянской группы Патрокла (617) и Анхиза (1173) в интервале времени свыше 700 лет.

Изучение движения троянцев численным методом за длительный промежуток времени впервые было проведено немецким астрономом Тюрингом (Thüring, 1951), который проследил движение фиктивного троянца на протяжении 160 лет.

Настоящая работа непосредственно примыкает к работе Тюринга и представляет ее дальнейшее развитие.

§ 2. Работа Тюринга

В работе Тюринга принята следующая схема. В начальный момент средние движения троянца и Юпитера равны

$$n = n_1 = 299^{\circ} 128,$$

а орбиты планет круговые

$$e = e_1 = 0.$$

Движение троянца предполагается происходящим в плоскости движения Юпитера. Разность долгот троянца и Юпитера при $t=0$ принята

$$\lambda - \lambda_1 = 35^{\circ}.$$

Таким образом, угловое расстояние троянца от точки либрации

$$\alpha = \lambda - \lambda_1 - 60^{\circ} = -25^{\circ}.$$

Из известных троянцев только Диомед (1437) имеет столь же значительную амплитуду либрационных колебаний ($\alpha = -24^{\circ} 4$).

Возмущения троянца определялись методом численного интегрирования уравнений движения в элементах. Интервал интегрирования был выбран равным $\omega = 240.70$ суток, что соответствует перемещению Юпитера в 20° по долготе. Вычисления велось с пятизначными логарифмами. Работа была начата автором в 1936 г. и продолжалась

с перерывами до 1949 г. Численное интегрирование охватывает промежуток времени около 160 лет, что соответствует полному либрационному периоду в движении троянцев. Основные выводы из исследований Тюринга могут быть сформулированы следующим образом.

1. Величины $\lambda - \lambda_1$ и α не имеют „короткопериодических“ колебаний. Максимальное значение разности $\lambda - \lambda_1 = -13^{\circ} 160$ и минимальное $\lambda - \lambda_1 = -13^{\circ} 789$. Наибольшее приближение к Юпитеру определяется величиной $\alpha = -25^{\circ} 048$, а наибольшему удалению от Юпитера соответствует $\alpha = +42^{\circ} 180$.

2. Изменения элементов φ и π характеризуются „короткопериодическими“ колебаниями, период которых приблизительно соответствует времени обращения Юпитера, причем среднее значение $\varphi = 15'$ и $\pi = 290''$.

3. Движение троянца не является строго периодическим движением. В конце либрационного периода начальная конфигурация трех тел больше не восстанавливается. Если определить период либрации как промежуток времени между двумя последовательными моментами обращения в нуль величины $\lambda - \lambda_1$, то в конце периода получаем

$$n - n_1 = 0, \alpha = -25^{\circ} 020, \varphi = 28^{\circ} 43, \pi = 277^{\circ} 51$$

Расстояние троянца в конце либрационного периода от точки, в которой он находится при $t=0$, составляет 315 400 км. Продолжительность полного периода либрации — 159.211 юл. лет.

§ 3. Постановка задачи

В настоящей работе сделана попытка в отличие от работы Тюринга максимально близко подойти к реальному движению троянцев. Единственное упрощение задачи состоит в том, что движение троянцев предполагается происходящим в плоскости Юпитера (если не считать того, что мы пренебрегаем возмущениями от Сатурна). Пространственную задачу авторы предполагают рассмотреть в следующей работе.

Интегрирование уравнений движения проводится в прямоугольных координатах методом Коуэлла, и вычисления ведутся с шестью десятичными знаками. Интервал интегрирования принят $\omega = 54.1573495$ суток. Координаты Юпитера взяты из таблиц В. Ф. Проскурина и Т. И. Машинской (Проскурин и Машинская, 1951). В основу этих таблиц положены следующие элементы Юпитера (по Хиллу):

$$\begin{aligned} n_1 &= 299^{\circ} 128, \\ m_1 &= 1: 1047.355, \\ e_1 &= 0.0482538. \end{aligned}$$

Масса Солнца принята за единицу. Большая полуось Юпитера удовлетворяет соотношению

$$a^3 n^3 = k^2 (1 + m),$$

что дает

$$a_1 = 5.20280395.$$

Для того чтобы воспользоваться таблицами В. Ф. Проскурина и Т. И. Машинской, примем за начальный момент t_0 момент прохождения Юпитера через перигелий

$$t_0 = 1928 \text{ март } 1.104,^1$$

а за начало счета долгот — долготу перигелия Юпитера в этот момент

$$\pi_1 = 13^{\circ} 124.$$

¹ Этот момент вычислен в предположении, что движение Юпитера является невозмущенным, начиная с января 1.0 1925 г.

Таким образом, ось ox будет направлена вдоль линии апсид в сторону перигелия Юпитера.

В работе проведено исследование движения двух малых планет Патрокла (617) и Анхиза (1173) в интервале времени, который соответствует тридцати оборотам Юпитера вперед и назад от начального момента. Таким образом, общий интервал времени, охваченный интегрированием, составляет около 710 лет для каждой планеты, что в $4\frac{1}{2}$ раза превышает интервал времени, исследованный в работе Тюринга.

Патрокла был выбран нами как троянец, обладающий одновременно и большим эксцентриситетом и большой наклонностью, а Анхиза — как троянец с наибольшим суточным движением. Интервал времени в 30 оборотов Юпитера определен с учетом накопления ошибок в процессе численного интегрирования. Как известно, ошибка координат x и y определяется по формуле

$$\Delta x = 0.1 n \sqrt{a} \rho,$$

где n — количество шагов интегрирования и ρ — возможная ошибка округления при каждом шаге. В нашей работе $n = 2400$ и $\rho < 5 \cdot 10^{-7}$. Таким образом, максимальная ошибка в координатах может достигать 0.005 астрономических единиц. Поскольку наша работа ставит своей целью исследование общих свойств движения троянцев, то указанная точность может быть признана вполне удовлетворительной.

§ 4. Движение Патрокла

Исходные оскулирующие элементы планеты Патрокла взяты из „Эфемерид малых планет“ на 1937 г. и затем приведены к начальному моменту $t_0 = 1928$ март 1.0 и к принятому началу счета долгот (см. § 3)

Эпоха и оскуляция 1928 март 1.0 всем. вр.

$$\begin{aligned} \lambda &= 303^{\circ}59' \\ \pi &= 333^{\circ}85' \\ e &= 0.1386 \\ \omega &= 297^{\circ}15' \\ a &= 5.19436 \end{aligned}$$

В табл. 1 и 2 и на рис. 1 приведены элементы Патрокла, полученные в результате численного интегрирования. Элементы Патрокла вычислены через каждый оборот Юпитера (11.86 лет). Счет долгот — от точки весеннего равноденствия для эпохи 1925.0.

Основные выводы, которые можно сделать из анализа табл. I и II, сводятся к следующему:

1. Большая полуось Патрокла испытывает „доолгопериодические“ колебания с периодом около 12.3 оборотов Юпитера или 146 лет. Максимальное значение среднесуточного движения $n = 301.13$ и минимальное $n = 296.49$. Таким образом, экстремальное значение $n_1 - n = 2^{\circ}64$, что хорошо совпадает с теоретическим расчетом Тюринга, который для Патрокла дает экстремальное значение $n_1 - n = 2^{\circ}66$. Минимальное значение радиуса-вектора Патрокла $r = 4.41$ и максимальное $r = 6.00$.

2. Наибольшее приближение Патрокла к Юпитеру по долготе соответствует $\alpha = -\lambda_1 - \lambda - 60^{\circ} = -4^{\circ}34'$ и наибольшее удаление от Юпитера $\alpha = +6^{\circ}56'$. Теоретическое значение Тюринга соответственно $\alpha = -6^{\circ}04'$ и $\alpha = +6^{\circ}65'$. В линейных единицах минимальное расстояние Патрокла от Юпитера $\Delta = 3.87$ и максимальное $\Delta = 6.62$.

3. Эксцентриситет Патрокла убывает вековым образом, уменьшаясь от значения $e = 0.1495$ до $e = 0.1173$.

4. Линия апсид вращается поступательно со средней скоростью $\Delta\pi = -0^{\circ}842$ за один оборот Юпитера. В рассмотренном интервале времени линия апсид повернулась на угол, равный $50^{\circ}50'$, от значения $\pi = 323^{\circ}19'$ до $\pi = 13.69'$. Таким образом, разность долгот перигелиев планеты и Юпитера не остается постоянной величиной.

Для того чтобы исследовать характер „короткопериодических“ возмущений, были вычислены элементы для промежуточных моментов в течение первого оборота Юпитера. Эти элементы приведены в табл. 3.

Таблица 1

Гелиоцентрические элементы планеты Патрокла (617)

№	t (в годах)	a	n	e	π	$\Delta\pi$	$\alpha = \lambda_1 - \lambda - 60^{\circ}$
0	0	5.1945	299.71	0.1386	346.98	1503	-3.89
1	11.86	5.2083	298.51	0.1378	348.01	1.06	-4.23
2	23.72	5.2217	297.36	0.1372	349.07	1.00	-3.12
3	35.59	5.2298	296.67	0.1366	350.07	0.93	-0.92
4	47.45	5.2258	296.58	0.1361	351.00	0.79	+1.71
5	59.31	5.2258	297.03	0.1357	351.79	0.74	+4.11
6	71.17	5.2157	297.89	0.1352	352.53	0.70	+5.72
7	83.03	5.2040	298.88	0.1347	353.23	0.67	+6.20
8	94.89	5.1926	299.87	0.1342	353.90	0.71	+5.45
9	106.76	5.1835	300.66	0.1336	354.61	0.74	+3.63
10	118.62	5.1795	301.02	0.1329	355.35	0.82	+1.12
11	130.48	5.1819	300.80	0.1322	356.17	0.90	-1.49
12	142.34	5.1913	299.98	0.1313	357.07	1.03	-3.51
13	154.20	5.2045	298.84	0.1304	358.10	1.07	-4.34
14	166.07	5.2181	297.68	0.1296	359.17	1.07	-3.73
15	177.93	5.2282	296.80	0.1288	360.24	0.97	-1.87
16	189.79	5.2320	296.49	0.1282	361.21	0.87	+0.67
17	201.65	5.2288	296.76	0.1276	362.08	0.78	+3.21
18	213.51	5.2203	297.46	0.1270	362.86	0.73	+5.35
19	225.37	5.2094	298.42	0.1264	363.59	0.72	+6.06
20	237.24	5.1975	299.45	0.1258	364.31	0.73	+5.76
21	249.10	5.1873	300.34	0.1252	365.04	0.75	+4.30
22	260.96	5.1816	300.82	0.1244	365.79	0.84	+1.99
23	272.82	5.1816	300.82	0.1235	366.53	0.93	-0.65
24	284.68	5.1881	300.27	0.1226	367.26	1.04	-2.93
25	296.54	5.1999	299.24	0.1215	368.00	1.12	-4.23
26	308.41	5.2140	298.02	0.1204	368.72	1.12	-4.35
27	320.27	5.2255	297.04	0.1195	369.44	1.04	-2.72
28	332.13	5.2318	296.51	0.1187	370.18	0.95	-0.39
29	343.99	5.2310	296.58	0.1180	370.93	0.86	+2.20
30	355.85	5.2249	297.09	0.1173	371.69	0.86	+4.42

Таблица 2

Гелиоцентрические элементы планеты Патрокла (617)

№	t (в годах)	a	n	e	π	$\Delta\pi$	$\alpha = \lambda_1 - \lambda - 60^{\circ}$
0	0	5.1945	299.71	0.1386	346.98	1503	-3.89
-1	-11.86	5.1840	300.61	0.1393	346.04	0.94	-2.88
-2	-23.72	5.1792	301.04	0.1399	345.23	0.81	+0.29
-3	-35.59	5.1813	300.85	0.1405	344.50	0.73	+2.94
-4	-47.45	5.1886	300.21	0.1410	343.83	0.67	+5.07
-5	-59.31	5.2003	299.21	0.1414	343.18	0.65	+6.18
-6	-71.17	5.2119	298.22	0.1418	342.54	0.64	+6.08
-7	-83.03	5.2228	297.28	0.1422	341.82	0.72	+4.78
-8	-94.89	5.2293	296.72	0.1425	341.07	0.75	+2.57
-9	-106.76	5.2298	296.67	0.1429	340.20	0.87	-0.06
-10	-118.62	5.2238	297.19	0.1434	339.24	0.96	-2.44
-11	-130.48	5.2121	298.18	0.1438	338.20	1.04	-3.91
-12	-142.34	5.1978	299.42	0.1443	337.18	1.02	-3.99
-13	-154.20	5.1856	300.48	0.1448	336.24	0.94	-2.66
-14	-166.07	5.1795	301.02	0.1452	335.41	0.83	-0.33
-15	-177.93	5.1795	301.02	0.1456	334.68	0.73	+2.34
-16	-189.79	5.1854	300.50	0.1460	334.03	0.65	+4.68
-17	-201.65	5.1964	299.54	0.1463	333.38	0.65	+6.10

Таблица 2 (продолжение)

№	t (в годах)	a	n	e	π	Δπ	α=λ ₁ -λ-60°
-18	-213.51	5.2083	2989.51	0.1466	3329.78	0.960	+6.934
-19	-225.37	5.2195	297.56	0.1468	3321.11	0.67	+5.35
-20	-237.24	5.2274	296.89	0.1471	331.39	0.72	+3.34
-21	-249.10	5.2301	296.66	0.1473	330.57	0.82	+0.75
-22	-260.96	5.2255	297.04	0.1476	329.62	0.95	-1.74
-23	-272.82	5.2148	297.96	0.1479	328.62	1.00	-3.51
-24	-284.68	5.2008	299.16	0.1482	327.59	1.03	-3.96
-25	-296.54	5.1881	300.25	0.1485	326.68	0.91	-3.01
-26	-308.41	5.1795	301.02	0.1487	325.79	0.89	-0.80
-27	-320.27	5.1781	301.13	0.1489	325.05	0.74	+1.88
-28	-332.13	5.1832	300.68	0.1491	324.41	0.64	+4.35
-29	-343.99	5.1932	299.83	0.1493	323.78	0.63	+6.04
-30	-355.85	5.2054	298.77	0.1495	323.19	0.59	+6.56

Таблица 3

Геоцентрические элементы планеты Патрокла (617)

t (в годах)	a	n	e	π	Δπ	α=λ ₁ -λ-60°
0	5.1945	299.71	0.1386	3465.98	+0.032	-3.990
1.48	5.1956	299.61	0.1390	347.20	+0.53	-4.06
2.96	5.2002	299.21	0.1389	347.83	+0.46	-4.20
4.45	5.2056	298.76	0.1379	348.29	-0.01	-4.29
5.93	5.2089	298.46	0.1367	348.28	-0.31	-4.32
7.41	5.2105	298.33	0.1362	347.97	-0.24	-4.30
8.90	5.2105	298.32	0.1367	347.73	+0.03	-4.29
10.38	5.2097	298.39	0.1372	347.76	+0.25	-4.24
11.86	5.2083	298.51	0.1378	348.01	-	-4.23

Таблица 4

Элементы планеты Патрокла относительно точки либрации

№	t (в годах)	a	e	№	t (в годах)	a	e
0	0	0.2847	0.9999	0	0	0.2847	0.9999
1	11.86	0.2716	0.9999	1	11.86	0.3526	0.9998
2	23.72	0.3204	0.9994	2	23.72	0.4634	0.9993
3	35.59	0.4277	0.9994	3	35.59	0.5874	0.9964
4	47.45	0.5633	0.9966	4	47.45	0.6891	0.9919
5	59.31	0.6890	0.9916	5	59.31	0.7415	0.9886
6	71.17	0.7747	0.9864	6	71.17	0.7415	0.9891
7	83.03	0.8025	0.9846	7	83.03	0.6587	0.9931
8	94.89	0.7673	0.9871	8	94.89	0.5403	0.9975
9	106.76	0.6781	0.9924	9	106.76	0.4060	0.9998
10	118.62	0.5568	0.9970	10	118.62	0.2981	0.9998
11	130.48	0.4391	0.9994	11	130.48	0.2491	0.9994
12	142.34	0.3400	0.9999	12	142.34	0.2500	0.9993
13	154.20	0.3028	—	13	154.20	0.2875	0.9995
14	166.07	0.3392	0.9999	14	166.07	0.3705	—
15	177.93	0.4260	0.9993	15	177.93	0.4830	0.9992
16	189.79	0.5544	0.9968	16	189.79	0.5892	0.9965
17	201.65	0.6836	0.9920	17	201.65	0.6547	0.9936

Таблица 4 (продолжение)

№	t (в годах)	a	e	№	t (в годах)	a	e
18	213.51	0.7823	0.9863	-18	-213.51	0.6598	0.9931
19	225.37	0.8288	0.9830	-19	-225.37	0.6014	0.9956
20	237.24	0.8146	0.9841	-20	-237.24	0.4937	0.9988
21	249.10	0.7426	0.9889	-21	-249.10	0.3675	—
22	260.96	0.6295	0.9944	-22	-260.96	0.2723	0.9994
23	272.82	0.5025	0.9981	-23	-272.82	0.2449	0.9989
24	284.68	0.3933	0.9996	-24	-284.68	0.2523	0.9989
25	296.54	0.3318	0.9999	-25	-296.54	0.2607	0.9988
26	308.41	0.3564	0.9999	-26	-308.41	0.2963	0.9992
27	320.27	0.4070	0.9994	-27	-320.27	0.3801	0.9994
28	332.13	0.5215	0.9977	-28	-332.13	0.4794	0.9996
29	343.99	0.6480	0.9939	-29	-343.99	0.5512	0.9976
30	355.85	0.7556	0.9886	-30	-355.85	0.5690	0.9969

Таблица 5

Элементы планеты Патрокла относительно Юпитера

№	t (в годах)	a	e	№	t (в годах)	a	e
0	0	6.5121	0.2549	0	0	6.5121	0.2549
1	11.86	6.3853	0.2402	-1	-11.86	7.6086	0.3362
2	23.72	7.1849	0.2950	-2	-23.72	10.2062	0.4780
3	35.59	9.2670	0.4207	-3	-35.59	15.7257	0.6442
4	47.45	13.7476	0.5879	-4	-47.45	27.0197	0.7855
5	59.31	23.5627	0.7493	-5	-59.31	42.4448	0.8610
6	71.17	43.7637	0.8615	-6	-71.17	39.2311	0.8501
7	83.03	58.9970	0.8965	-7	-83.03	23.3481	0.7538
8	94.89	39.3391	0.8463	-8	-94.89	13.7024	0.5978
9	106.76	21.3220	0.7240	-9	-106.76	9.0383	0.4253
10	118.62	12.9400	0.5630	-10	-118.62	6.7990	0.2888
11	130.48	9.1050	0.4062	-11	-130.48	5.8265	0.2259
12	142.34	7.3822	0.2949	-12	-142.34	5.6948	0.2208
13	154.20	6.8710	0.2519	-13	-154.20	6.3480	0.2693
14	166.07	7.3308	0.2826	-14	-166.07	8.0328	0.3831
15	177.93	8.9469	0.3858	-15	-177.93	11.4416	0.5402
16	189.79	12.4860	0.5384	-16	-189.79	17.8190	0.6912
17	201.65	20.0040	0.6998	-17	-201.65	26.5252	0.7873
18	213.51	35.7143	0.8271	-18	-213.51	28.0505	0.7983
19	225.37	55.5247	0.8873	-19	-225.37	19.8158	0.7199
20	237.24	46.7072	0.8666	-20	-237.24	12.4875	0.5739
21	249.10	26.4690	0.7692	-21	-249.10	8.3549	0.4027
22	260.96	15.5942	0.6202	-22	-260.96	6.2185	0.2641
23	272.82	10.5075	0.4592	-23	-272.82	5.2018	0.2044
24	284.68	8.1486	0.3274	-24	-284.68	4.9205	0.1998
25	296.54	7.2202	0.2556	-25	-296.54	5.2698	0.2871
26	308.41	7.2897	0.2572	-26	-308.41	6.3524	0.4232
27	320.27	8.3619	0.3325	-27	-320.27	8.4976	0.5742
28	332.13	10.8448	0.4644	-28	-332.13	12.1832	0.7472
29	343.99	15.8228	0.6184	-29	-343.99	16.9405	0.6834
30	355.85	25.3807	0.7547	-30	-355.85	18.9251	0.7139

Таблица 6

Элементы планеты Патрокла относительно Юпитера

t (в годах)	a	e	t (в годах)	a	e	t (в годах)	a	e
0	6.5121	0.2549	4.45	2.8223	0.4803	8.90	5.4939	0.0617
1.48	3.9769	0.1977	5.93	4.1944	0.4401	10.38	6.9750	0.2002
2.96	2.8720	0.3963	7.41	—	—	11.86	6.3853	0.2402

В табл. 4 приведены элементы Патрокла, вычисленные в предположении, что начало координат перенесено в точку либрации. Траектория Патрокла относительно точки либрации изображена на рис. 2 и 2а.

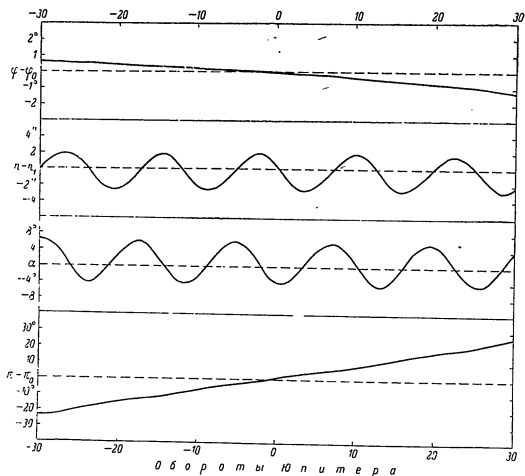


Рис. 1. Изменение геоцентрических элементов планеты Патрокл.

В табл. 5 приведены элементы Патрокла, вычисленные в предположении, что начало координат перенесено в Юпитер. Орбита Патрокла на всем интервале времени сохраняет эллиптический характер, как это видно из табл. 5 и на рис. 3. Промежуточные значения элементов для одного оборота приведены в табл. 6.

§ 5. Движение Анхиза

Исходные оскулирующие элементы планеты Анхиза взяты из „Эфемерид малых планет“ на 1937 г. и затем приведены к началному моменту $t_0 = 1928$ март 1.0 и к принятому счету долгот (см. § 3).

Эпоха и оскуляция 1928 март 1.0 всем. вр.

- $\lambda = 285^{\circ}79$
- $\mu = 300^{\circ}76$
- $e = 0.1366$
- $a = 307.733$
- $a = 5.1037$

В табл. 7 и 8 и на рис. 4 приведены элементы планеты Анхиза, полученные в результате численного интегрирования. Элементы Анхиза вычислены через каждый обо-

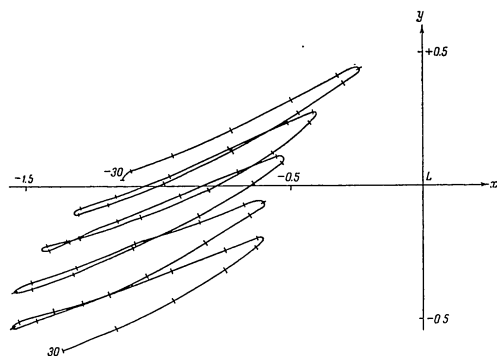


Рис. 2. Положения планеты Патрокл относительно точки либрации (через оборот Юпитера).

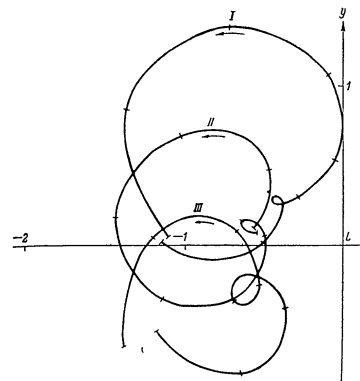


Рис. 2а. Движение планеты Патрокл относительно точки либрации.

I — в время — 30-го оборота Юпитера; II — в время 1-го оборота Юпитера; III — в время 30-го оборота Юпитера.

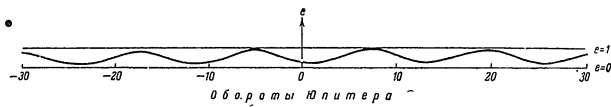


Рис. 3. Изменение эксцентриситета (повицентрического) планеты Палла.

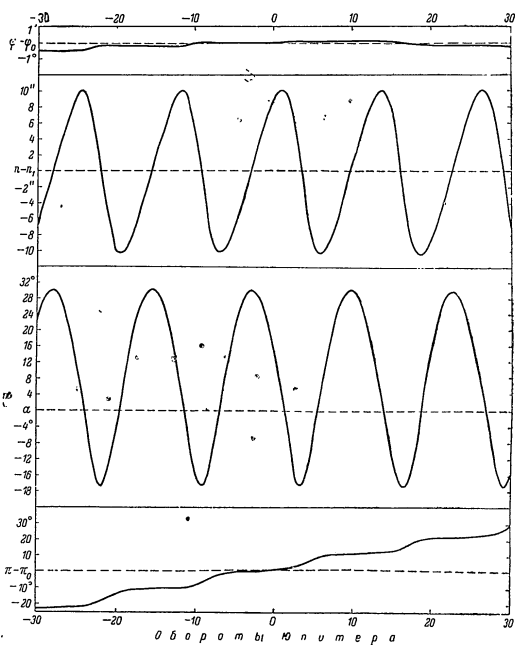


Рис. 4. Изменение гелиоцентрических элементов планеты Анхиз.

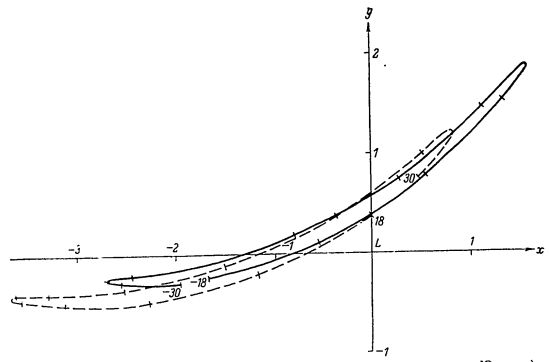


Рис. 5. Положения планеты Анхиз относительно точки либрации (через оборот Юпитера).

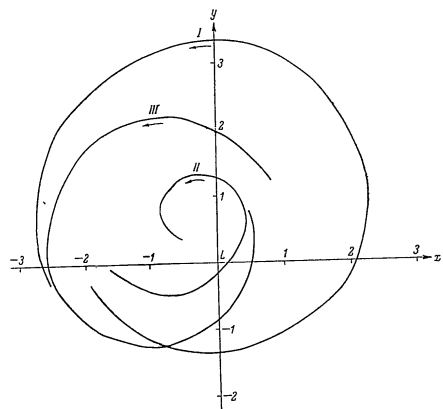


Рис. 5а. Движение планеты Анхиз относительно точки либрации.
I — за время -30-го оборота Юпитера; II — за время 1-го оборота Юпитера; III — за время 30-го оборота Юпитера

рот Юпитера (11.86 лет). Счет долгот — от точки весеннего равноденствия для эпохи 1925.0. Основные выводы, которые можно сделать из анализа табл. 7 и 8, сводятся к следующему.

1. Большая полуось Анхиза испытывает „долгопериодические“ колебания с периодом около 12.6 оборотов Юпитера или 149.4 года. Максимальное значение среднесуточного движения $\lambda = 309^{\circ}12$ и минимальное $\lambda = 288^{\circ}36$. Таким образом, экстремальное значение $\lambda_1 - \lambda = 10^{\circ}27$, что хорошо совпадает с теоретическим расчетом Тюринга, который для Анхиза дает экстремальное значение $\lambda_1 - \lambda = 9^{\circ}65$.

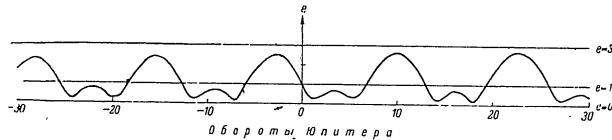


Рис. 6. Изменение эксцентриситета (новационического) планеты Анхиза.

Минимальное значение радиуса-вектора Анхиза $r = 4.39$ и максимальное $r = 6.05$.
 2. Наибольшее приближение Анхиза к Юпитеру по долготе соответствует $\alpha = \lambda_1 - \lambda - 60^{\circ} = -19^{\circ}11$, и наибольшее удаление от Юпитера $\alpha = +30.20$. Теоретические значения Тюринга соответственно $\alpha = -19.39$ и $\alpha = +27.72$. В линейных единицах минимальное расстояние Анхиза от Юпитера $\Delta = 2.52$ и максимальное $\Delta = 8.19$.

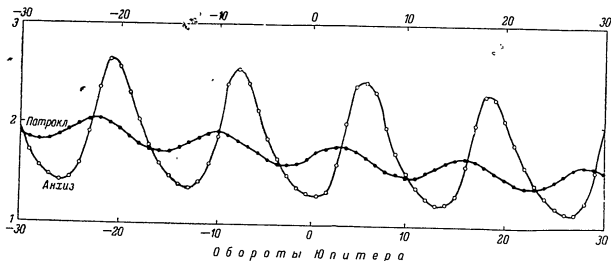


Рис. 7. Изменение разности $\Delta_{\max} - \Delta_{\min}$.

3. Эксцентриситет Анхиза сохраняет постоянное значение на всем рассмотренном интервале времени. Незначительное уменьшение эксцентриситета на концах интервала лежит в пределах накопления вычислительных ошибок.

4. Линия апсид вращается поступательно со средней скоростью $\Delta\pi = +0^{\circ}850$ за один оборот Юпитера. За рассмотренный промежуток времени линия апсид повернулась на угол 50.99 , от значения $\pi = 290.87$ до $\pi = 341.86$. Таким образом, разность долгот перигелия планеты и Юпитера $\pi - \pi_1$ непрерывно изменяется.

Для того чтобы исследовать характер „короткопериодических“ возмущений, были вычислены элементы для промежуточных моментов в течение первого оборота Юпитера.

Таблица 7

Геоцентрические элементы планеты Анхиза (1173)

№	t (в годах)	a	l	e	π	Δπ	α = λ ₁ - λ - 60°
0	0	5.1036	307.74	0.1366	313.989	0.930	+14.921
1	11.86	5.0888	309.09	0.1366	314.19	0.49	+ 2.46
2	23.72	5.1023	307.86	0.1371	314.68	1.23	- 9.58
3	35.59	5.1397	302.75	0.1380	315.91	2.49	-17.72
4	47.45	5.2474	295.18	0.1382	318.40	2.49	-17.45
5	59.31	5.3090	290.08	0.1378	320.89	1.48	- 9.26
6	71.17	5.3237	288.86	0.1376	322.37	0.78	+ 2.41
7	83.03	5.3081	290.13	0.1375	323.15	0.46	+13.83
8	94.89	5.2770	292.71	0.1376	323.61	0.80	+22.86
9	106.76	5.2394	295.86	0.1376	323.91	0.25	+28.44
10	118.62	5.1991	299.30	0.1375	324.16	0.24	+30.06
11	130.48	5.1600	302.71	0.1375	324.40	0.25	+27.55
12	142.34	5.1245	305.87	0.1374	324.66	0.29	+21.00
13	154.20	5.0974	308.31	0.1371	324.95	0.34	+10.98
14	166.07	5.0885	309.12	0.1369	325.29	0.62	- 1.16
15	177.93	5.1122	306.97	0.1368	325.91	1.51	-12.59
16	189.79	5.1814	300.85	0.1371	327.42	2.68	-18.77
17	201.65	5.2679	293.47	0.1366	330.10	2.20	-16.03
18	213.51	5.3172	289.39	0.1362	332.30	1.25	- 6.48
19	225.37	5.3223	288.98	0.1360	333.55	0.68	+ 5.39
20	237.24	5.3011	290.70	0.1360	334.23	0.39	+16.34
21	249.10	5.2684	293.42	0.1360	334.62	0.31	+24.57
22	260.96	5.2296	296.69	0.1360	334.93	0.28	+29.18
23	272.82	5.1891	300.16	0.1360	335.21	0.27	+29.75
24	284.68	5.1507	303.54	0.1359	335.48	0.32	+26.21
25	296.54	5.1169	306.54	0.1356	335.80	0.34	+18.74
26	308.41	5.0932	308.70	0.1352	336.14	0.42	+ 8.03
27	320.27	5.0906	308.92	0.1348	336.56	0.76	- 4.26
28	332.13	5.1248	305.84	0.1343	337.92	1.81	-14.89
29	343.99	5.2021	299.05	0.1335	339.13	2.73	-19.11
30	355.85	5.2837	292.15	0.1326	341.86	3.41	-14.47

Таблица 8

Геоцентрические элементы планеты Анхиза (1173)

№	t (в годах)	a	l	e	π	Δπ	α = λ ₁ - λ - 60°
0	0	5.1036	307.74	0.1366	313.989	0.930	+14.921
-1	-11.86	5.1337	305.05	0.1367	313.64	0.25	+23.33
-2	-23.72	5.1709	301.75	0.1368	313.42	0.22	+28.75
-3	-35.59	5.2108	298.29	0.1368	313.21	0.21	+30.06
-4	-47.45	5.2504	294.92	0.1368	312.96	0.25	+27.25
-5	-59.31	5.2871	291.86	0.1368	312.64	0.32	+20.57
-6	-71.17	5.3149	289.58	0.1367	312.11	0.53	+10.65
-7	-83.03	5.3234	288.89	0.1368	311.17	0.94	- 1.12
-8	-94.89	5.2960	291.13	0.1371	309.40	1.77	-12.22
-9	-106.76	5.2222	297.32	0.1374	306.69	2.71	-18.40
-10	-118.62	5.1338	304.59	0.1361	304.51	2.18	-15.70
-11	-130.48	5.0948	308.55	0.1346	303.48	1.03	- 5.75
-12	-142.34	5.0914	308.87	0.1339	303.07	0.41	+ 6.56
-13	-154.20	5.1125	306.95	0.1338	302.62	0.25	+17.63
-14	-166.07	5.1456	303.98	0.1338	302.62	0.20	+25.62
-15	-177.93	5.1840	300.61	0.1338	302.41	0.21	+29.71
-16	-189.79	5.2238	297.19	0.1338	302.23	0.18	+29.64
-17	-201.65	5.2632	293.85	0.1338	301.98	0.25	+25.49

Таблица 8 (продолжение)

№	t (в годах)	a	л	е	π	Δπ	α = λ ₁ - λ - 60°
-18	-213.51	5.2977	290.99	0.1337	301.961	0.937	+17.963
-19	-225.37	5.3200	289.17	0.1336	300.92	0.69	+ 6.91
-20	-237.24	5.3197	289.18	0.1339	299.83	1.09	- 5.03
-21	-249.10	5.2732	293.03	0.1337	297.53	2.30	-14.97
-22	-260.96	5.1951	299.66	0.1339	295.02	2.51	-18.35
-23	-272.82	5.1206	306.22	0.1315	293.11	1.91	-12.61
-24	-284.68	5.0911	308.88	0.1297	292.23	0.88	- 1.31
-25	-296.54	5.0974	308.32	0.1289	291.86	0.37	+10.85
-26	-308.41	5.1235	305.95	0.1287	291.65	0.21	+20.96
-27	-320.27	5.1586	303.84	0.1286	291.47	0.18	+27.60
-28	-332.13	5.1983	299.38	0.1286	291.31	0.16	+30.20
-29	-343.99	5.2283	295.96	0.1286	291.12	0.19	+28.63
-30	-355.85	5.2762	292.77	0.1285	290.87	0.25	+23.07

Таблица 9

Гелиоцентрические элементы планеты Анхис (1173)

№	a	л	е	π	Δπ	α = λ ₁ - λ - 60°
0	5.1036	307.74	0.1366	313.989	+0.20	14.21
1.48	5.1010	307.98	0.1361	314.09	+0.07	12.83
2.96	5.0994	308.13	0.1354	314.16	-0.16	11.41
4.45	5.0979	308.27	0.1349	314.00	-0.26	9.97
5.93	5.0968	308.36	0.1348	313.74	-0.17	8.68
7.41	5.0945	308.57	0.1354	313.57	+0.02	7.05
8.90	5.0930	308.71	0.1361	313.59	+0.40	5.54
10.38	5.0901	308.98	0.1365	313.99	+0.20	3.92
11.86	5.0888	309.09	0.1366	314.19		2.46

Таблица 10

Элементы планеты Анхис относительно точки Лабрадик

№	t (в годах)	a	е	№	t (в годах)	a	е
0	0	0.8313	0.9775	0	0	0.8313	0.9775
1	11.86	0.3150	0.9994	-1	-11.86	1.3653	0.8851
2	23.72	0.5690	0.9962	-2	-23.72	1.7533	0.7842
3	35.59	0.9899	0.9962	-3	-35.59	1.8606	0.7533
4	47.45	0.9296	0.9601	-4	-47.45	1.6378	0.8141
5	59.31	0.4472	0.9972	-5	-59.31	1.1806	0.9200
6	71.17	0.3107	0.9999	-6	-71.17	0.6046	0.9910
7	83.03	0.9204	0.9658	-7	-83.03	0.1986	0.9998
8	94.89	1.4808	0.8631	-8	-94.89	0.7506	0.9981
9	106.76	1.8958	0.7541	-9	-106.76	1.1396	0.9990
10	118.62	2.0305	0.7160	-10	-118.62	1.0058	0.9987
11	130.48	1.8208	0.7756	-11	-130.48	0.5052	0.9990
12	142.34	1.5611	0.8933	-12	-142.34	0.3500	
13	154.20	0.7916	0.9838	-13	-154.20	0.8790	0.9683
14	166.07	0.2892	0.9990	-14	-166.07	1.3517	0.8789
15	177.93	0.5817	0.9941	-15	-177.93	1.6433	0.8028
16	189.79	0.8826	0.9641	-16	-189.79	1.6378	0.8032
17	201.65	0.6884	0.9820	-17	-201.65	1.3374	0.8787

Таблица 10 (продолжение)

№	t (в годах)	a	е	№	t (в годах)	a	е
18	213.51	0.1949	-	-18	-213.51	0.8484	0.9660
19	225.37	0.5813	0.9946	-19	-225.37	0.2759	0.9998
20	237.24	1.1912	0.9300	-20	-237.24	0.4744	0.9975
21	249.10	1.7284	0.8097	-21	-249.10	1.0398	0.9516
22	260.96	2.0885	0.7101	-22	-260.96	1.2636	0.9151
23	272.82	2.1344	0.6964	-23	-272.82	0.9460	0.9674
24	284.68	1.8427	0.7783	-24	-284.68	0.3977	0.9999
25	296.54	1.3580	0.9037	-25	-296.54	0.4023	0.9990
26	308.41	0.7507	0.9880	-26	-308.41	0.9092	0.9509
27	320.27	0.2587	0.9990	-27	-320.27	1.3120	0.8772
28	332.13	0.5528	0.9928	-28	-332.13	1.4916	0.8309
29	343.99	0.7420	0.9746	-29	-343.99	1.3790	0.8586
30	355.85	0.4530	0.9939	-30	-355.85	1.0184	0.9346

Таблица 11

Элементы планеты Анхис относительно Юпитера

№	t (в годах)	a	е	№	t (в годах)	a	е
0	0	-39.0016	1.1506	0	0	-39.0016	1.1506
1	11.86	+ 6.5559	0.3278	-1	-11.86	- 7.0771	1.9428
2	23.72	+ 2.7807	0.4283	-2	-23.72	- 4.9312	2.4446
3	35.59	+ 1.8335	0.6916	-3	-35.59	- 4.6290	2.5662
4	47.45	+ 1.9170	0.6675	-4	-47.45	- 5.4446	2.9956
5	59.31	+ 3.0854	0.5705	-5	-59.31	- 9.6684	1.6762
6	71.17	+ 8.2028	0.3817	-6	-71.17	+34.6620	0.8366
7	83.03	- 26.8025	1.2314	-7	-83.03	+ 4.6962	0.1322
8	94.89	- 6.8404	2.0170	-8	-94.89	+ 1.6139	0.7442
9	106.76	- 4.8274	2.5261	-9	-106.76	+ 1.8076	0.6842
10	118.62	- 4.4506	2.6762	-10	-118.62	+ 3.0523	0.3452
11	130.48	- 5.0018	2.4488	-11	-130.48	+ 8.7161	0.4412
12	142.34	- 7.7670	1.8640	-12	-142.34	-21.5796	1.2758
13	154.20	-194.852	1.0299	-13	-154.20	- 6.6993	1.9913
14	166.07	+ 5.8851	0.2555	-14	-166.07	- 5.0659	2.3788
15	177.93	+ 2.6830	0.4700	-15	-177.93	- 1.9227	2.3681
16	189.79	+ 1.9803	0.6638	-16	-189.79	- 6.9382	1.9663
17	201.65	+ 2.5719	0.5548	-17	-201.65	- 24.2072	1.2504
18	213.51	+ 4.2887	0.1678	-18	-213.51	+ 8.6775	0.4162
19	225.37	+ 18.4196	0.6918	-19	-225.37	+ 8.0935	0.3151
20	237.24	- 12.2115	1.5457	-20	-237.24	+ 1.7801	0.6845
21	249.10	- 5.8442	2.2496	-21	-249.10	-260.96	+ 1.4670
22	260.96	- 4.6094	2.6528	-22	-260.96	- 272.82	+ 1.9237
23	272.82	- 4.4787	2.7039	-23	-272.82	+ 3.5652	0.2223
24	284.68	- 5.2640	2.3960	-24	-284.68	+12.4828	0.5885
25	296.54	- 6.3051	1.7581	-25	-296.54	-15.5545	1.3889
26	308.41	+ 66.4893	0.9127	-26	-308.41	-320.27	+ 1.9394
27	320.27	+ 5.3254	0.2095	-27	-320.27	- 5.5148	2.2395
28	332.13	+ 3.6949	0.4807	-28	-332.13	- 6.2201	2.0834
29	343.99	+ 2.2156	0.6008	-29	-343.99	-11.2994	1.5591
30	355.85	+ 2.9159	0.4214	-30	-355.85		

Таблица 12

Элементы планеты Анхис относительно Юпитера

t (в годах)	a	е	t (в годах)	a	е	t (в годах)	a	е
0	-39.0016	1.1506	4.45	6.6912	0.1992	8.90	15.4321	0.5895
1.48	-12.8800	0.5997	5.93	8.0632	0.2595	10.38	14.8699	0.6219
2.96	6.8190	0.2359	7.41	10.8331	0.4036	11.86	6.8559	0.9278

Таблица 13

Максимальные и минимальные расстояния планеты Патрокла от Юпитера

№	Δ_{\max}	Δ_{\min}	Разность	№	Δ_{\max}	Δ_{\min}	Разность
-30	6.62	4.72	1.90	1	5.70	3.96	1.74
-29	6.51	4.66	1.85	2	5.77	4.01	1.76
-28	6.34	4.51	1.83	3	5.93	4.14	1.79
-27	6.14	4.30	1.84	4	6.13	4.35	1.78
-26	5.96	4.08	1.88	5	6.31	4.57	1.74
-25	5.86	3.92	1.94	6	6.43	4.75	1.68
-24	5.87	3.87	2.00	7	6.47	4.85	1.62
-23	5.98	3.95	2.03	8	6.41	4.86	1.55
-22	6.16	4.12	2.04	9	6.28	4.76	1.52
-21	6.35	4.35	2.00	10	6.09	4.60	1.49
-20	6.50	4.56	1.94	11	5.88	4.39	1.49
-19	6.58	4.71	1.87	12	5.72	4.19	1.53
-18	6.57	4.77	1.80	13	5.64	4.06	1.58
-17	6.47	4.72	1.75	14	5.67	4.04	1.63
-16	6.31	4.59	1.72	15	5.81	4.14	1.67
-15	6.11	4.39	1.72	16	6.01	4.33	1.68
-14	5.92	4.17	1.75	17	6.20	4.55	1.65
-13	5.80	4.00	1.80	18	6.35	4.74	1.61
-12	5.78	3.93	1.85	19	6.42	4.87	1.55
-11	5.87	3.97	1.90	20	6.39	4.90	1.49
-10	6.04	4.13	1.91	21	6.28	4.84	1.44
-9	6.24	4.35	1.89	22	6.10	4.69	1.41
-8	6.40	4.57	1.83	23	5.90	4.50	1.40
-7	6.51	4.73	1.78	24	5.71	4.29	1.42
-6	6.52	4.81	1.71	25	5.60	4.14	1.46
-5	6.44	4.79	1.65	26	5.60	4.08	1.52
-4	6.29	4.68	1.61	27	5.71	4.14	1.57
-3	6.09	4.49	1.60	28	5.90	4.30	1.60
-2	5.89	4.28	1.61	29	6.10	4.51	1.59
-1	5.74	4.09	1.65	30	6.27	4.71	1.56

Таблица 14

Максимальные и минимальные расстояния планеты Анхиза от Юпитера

№	Δ_{\max}	Δ_{\min}	Разность	№	Δ_{\max}	Δ_{\min}	Разность
-30	8.05	6.12	1.93	1	6.49	5.20	1.29
-29	8.19	6.47	1.72	2	5.62	4.31	1.31
-28	8.09	6.52	1.57	3	4.87	3.27	1.60
-27	7.75	6.28	1.47	4	4.67	2.65	2.02
-26	7.17	5.74	1.43	5	5.19	3.65	1.54
-25	6.39	4.93	1.46	6	6.08	4.62	1.46
-24	5.53	3.93	1.60	7	6.95	5.63	1.32
-23	4.89	2.98	1.91	8	7.60	6.25	1.35
-22	4.88	2.52	2.36	9	7.98	6.57	1.41
-21	5.54	2.91	2.63	10	8.10	6.58	1.52
-20	6.44	3.88	2.56	11	7.97	6.31	1.66
-19	7.24	4.94	2.30	12	7.59	5.76	1.83
-18	7.81	5.78	2.03	13	6.98	4.94	2.04
-17	8.10	6.32	1.78	14	6.16	4.94	1.22
-16	8.15	6.55	1.60	15	5.28	3.97	1.31
-15	7.95	6.48	1.47	16	4.65	3.06	1.59
-14	7.51	6.12	1.39	17	4.68	2.66	2.02
-13	6.84	5.48	1.36	18	5.37	3.07	2.30

Таблица 14 (продолжение)

№	Δ_{\max}	Δ_{\min}	Разность	№	Δ_{\max}	Δ_{\min}	Разность
-12	6.00	4.58	1.42	19	6.30	4.03	2.27
-11	5.17	3.57	1.60	20	7.13	5.06	2.07
-10	4.63	2.75	1.88	21	7.70	5.88	1.82
-9	5.01	2.61	2.40	22	8.00	6.40	1.60
-8	5.82	3.28	2.54	23	8.05	6.62	1.43
-7	6.72	4.32	2.40	24	7.85	6.55	1.30
-6	7.45	5.32	2.13	25	7.40	6.20	1.20
-5	7.91	6.05	1.86	26	6.71	5.57	1.14
-4	8.12	6.47	1.65	27	5.84	4.71	1.13
-3	8.07	6.58	1.49	28	4.98	3.73	1.25
-2	7.78	6.41	1.37	29	4.49	2.93	1.56
-1	7.25	5.94	1.31	30	4.73	2.75	1.98

Эти элементы приведены в табл. 9. В табл. 10 приведены элементы Анхиза, вычисленные в предположении, что начало координат перенесено в точку либрации.

Траектория Анхиза относительно точки либрации изображена на рис. 5 и 5а. Для наглядности на рис. 5 показаны только два либрационных оборота, соответствующие первым и последним двенадцати оборотам Юпитера в интервале интегрирования.

В табл. 11 приведены элементы Анхиза, вычисленные в предположении, что начало координат перенесено в Юпитер.

Движение Анхиза относительно Юпитера периодически меняет свой характер, как это видно на рис. 6. Эллиптическая орбита переходит в гиперболическую и обратно. Промежуточные значения элементов Анхиза приведены в табл. 12.

§ 6. Некоторые замечания об устойчивости движения Патрокла и Анхиза

В заключение мы приводим табл. 13 и 14, в которых содержатся максимальные и минимальные расстояния Патрокла и Анхиза от Юпитера для каждого оборота Юпитера вокруг Солнца (11.8 лет). Анализ этих таблиц показывает, что Δ_{\max} имеет тенденцию к постоянному уменьшению, а Δ_{\min} возрастает. Таким образом, разность $\Delta_{\max} - \Delta_{\min}$ убывает, или, другими словами, амплитуда колебаний Δ постепенно уменьшается (рис. 7). Этот факт может рассматриваться как тенденция к увеличению устойчивости троянцев с течением времени.

Авторы выражают свою глубокую благодарность В. Н. Стратилатовой, выполнившей значительную часть численного интегрирования.

ЛИТЕРАТУРА

- Прокурири В. Ф. и Т. И. Машинская. 1951. Гелиоцентрические орбитальные координаты Юпитера. Бюлл. ИТА, 5, 1(64).
- Thüring B. 1951. Numerische Untersuchungen zu den Bewegungstheorien der Planeten der Jupitergruppe. A. N., 279, 5/6.

Поступило в Редакцию
19 апреля 1958 г.

Таблица 13

Максимальные и минимальные расстояния планеты Патрокла от Юпитера

№	Δ_{\max}	Δ_{\min}	Разность	№	Δ_{\max}	Δ_{\min}	Разность
-30	6.62	4.72	1.90	1	5.70	3.96	1.74
-29	6.51	4.66	1.85	2	5.77	4.01	1.76
-28	6.34	4.51	1.83	3	5.93	4.14	1.79
-27	6.14	4.30	1.84	4	6.13	4.35	1.78
-26	5.96	4.08	1.88	5	6.31	4.57	1.74
-25	5.86	3.92	1.94	6	6.43	4.75	1.68
-24	5.87	3.87	2.00	7	6.47	4.85	1.62
-23	5.98	3.95	2.03	8	6.41	4.86	1.55
-22	6.16	4.12	2.04	9	6.28	4.76	1.52
-21	6.35	4.35	2.00	10	6.09	4.60	1.49
-20	6.50	4.56	1.94	11	5.88	4.39	1.49
-19	6.58	4.71	1.87	12	5.72	4.19	1.53
-18	6.57	4.77	1.80	13	5.64	4.06	1.58
-17	6.47	4.72	1.75	14	5.67	4.04	1.63
-16	6.31	4.59	1.72	15	5.81	4.14	1.67
-15	6.11	4.39	1.72	16	6.01	4.33	1.68
-14	5.92	4.17	1.75	17	6.20	4.55	1.65
-13	5.80	4.00	1.80	18	6.35	4.74	1.61
-12	5.78	3.93	1.85	19	6.42	4.87	1.55
-11	5.87	3.97	1.90	20	6.39	4.90	1.49
-10	6.04	4.13	1.91	21	6.28	4.84	1.44
-9	6.24	4.35	1.89	22	6.10	4.69	1.41
-8	6.40	4.57	1.83	23	5.90	4.50	1.40
-7	6.51	4.73	1.78	24	5.71	4.29	1.42
-6	6.52	4.81	1.71	25	5.60	4.14	1.46
-5	6.44	4.79	1.65	26	5.60	4.08	1.52
-4	6.29	4.68	1.61	27	5.71	4.14	1.57
-3	6.09	4.49	1.60	28	5.71	4.14	1.60
-2	5.89	4.28	1.61	29	5.90	4.30	1.59
-1	5.74	4.09	1.65	30	6.10	4.51	1.59
					6.27	4.71	1.56

Таблица 14

Максимальные и минимальные расстояния планеты Анхиза от Юпитера

№	Δ_{\max}	Δ_{\min}	Разность	№	Δ_{\max}	Δ_{\min}	Разность
-30	8.05	6.12	1.93	1	6.49	5.20	1.29
-29	8.19	6.47	1.72	2	5.62	4.31	1.31
-28	8.09	6.52	1.57	3	4.87	3.27	1.60
-27	7.75	6.28	1.47	4	4.67	2.65	2.02
-26	7.17	5.74	1.43	5	5.19	2.81	2.38
-25	6.59	4.93	1.66	6	6.08	3.66	2.42
-24	5.83	3.93	1.90	7	6.95	4.62	2.33
-23	4.89	2.98	1.91	8	7.60	5.63	1.97
-22	4.88	2.52	2.36	9	7.98	6.25	1.73
-21	5.54	2.91	2.63	10	8.10	6.57	1.53
-20	6.44	3.88	2.56	11	7.97	6.58	1.39
-19	7.24	4.94	2.30	12	7.39	6.31	1.08
-18	7.81	5.78	2.03	13	6.98	5.76	1.22
-17	8.10	6.32	1.78	14	6.16	4.94	1.22
-16	8.15	6.55	1.60	15	5.28	3.97	1.31
-15	7.95	6.48	1.47	16	4.65	3.06	1.59
-14	7.51	6.12	1.39	17	4.68	2.66	2.02
-13	6.84	5.48	1.36	18	5.37	3.07	2.30

Таблица 14 (продолжение)

№	Δ_{\max}	Δ_{\min}	Разность	№	Δ_{\max}	Δ_{\min}	Разность
-12	6.00	4.58	1.42	19	6.30	4.03	2.27
-11	5.17	3.57	1.60	20	7.13	5.06	2.07
-10	4.63	2.75	1.88	21	7.70	5.88	1.82
-9	5.01	2.61	2.40	22	8.00	6.40	1.60
-8	5.82	3.28	2.54	23	8.05	6.62	1.43
-7	6.72	4.32	2.40	24	7.85	6.55	1.30
-6	7.45	5.32	2.13	25	7.40	6.20	1.20
-5	7.91	6.05	1.86	26	6.71	5.57	1.14
-4	8.12	6.47	1.65	27	5.84	4.71	1.13
-3	8.07	6.58	1.49	28	4.98	3.73	1.25
-2	7.78	6.41	1.37	29	4.49	2.93	1.56
-1	7.25	5.94	1.31	30	4.73	2.75	1.98

Эти элементы приведены в табл. 9. В табл. 10 приведены элементы Анхиза, вычисленные в предположении, что начало координат перенесено в точку либрации.

Траектория Анхиза относительно точки либрации изображена на рис. 5 и 5а. Для наглядности на рис. 5 показаны только два либрационных оборота, соответствующие первым и последним двенадцати оборотам Юпитера в интервале интегрирования.

В табл. 11 приведены элементы Анхиза, вычисленные в предположении, что начало координат перенесено в Юпитер.

Движение Анхиза относительно Юпитера периодически меняет свой характер, как это видно на рис. 6. Эллиптическая орбита переходит в гиперболическую и обратно.

Промежуточные значения элементов Анхиза приведены в табл. 12.

§ 6. Некоторые замечания об устойчивости движения Патрокла и Анхиза

В заключение мы приводим табл. 13 и 14, в которых содержатся максимальные и минимальные расстояния Патрокла и Анхиза от Юпитера для каждого оборота Юпитера вокруг Солнца (11.8 лет). Анализ этих таблиц показывает, что Δ_{\max} имеет тенденцию к постоянному уменьшению, а Δ_{\min} возрастает. Таким образом, разность $\Delta_{\max} - \Delta_{\min}$ убывает, или, другими словами, амплитуда колебаний Δ постепенно уменьшается (рис. 7). Этот факт может рассматриваться как тенденция к увеличению устойчивости тройцев с течением времени.

Авторы выражают свою глубокую благодарность В. Н. Стратилатовой, выполнившей значительную часть численного интегрирования.

ЛИТЕРАТУРА

Проскури В. Ф. и Т. И. Машинская. 1951. Гелиоцентрические орбитальные координаты Юпитера. Бюлл. ИТА, 5, 1(64).
Thüring B. 1951. Numerische Untersuchungen zu den Bewegungstheorien der Planeten der Jupitergruppe. A. N., 279, 5/6.

Поступило в Редакцию
19 апреля 1958 г.

Движение Патрокла в поле тяготения Солнца и прото-Юпитера

Г. А. Чеботарев и М. С. Волков

В настоящей работе методом численного интегрирования исследовано движение планеты троянской группы Патрокла (617) в поле тяготения Солнца и прото-Юпитера.

THE INVESTIGATION OF THE MOTION OF THE ASTEROID PATROCLUS IN THE GRAVITATIONAL FIELD OF THE SUN AND PROTO-JUPITER, by G. Chebotarev and M. Volkov. — The motion of the asteroid of the Trojan group (617 Patroclus) is investigated for the timeinterval of about 400 years. The results are summarized in tables 1—2 and figures 1—5.

§ 1. Введение

Согласно современным космогоническим представлениям, массы больших планет несколько миллиардов лет тому назад в десятки раз превосходили их современные значения. Постепенное уменьшение масс протопланет должно было оказать существенное

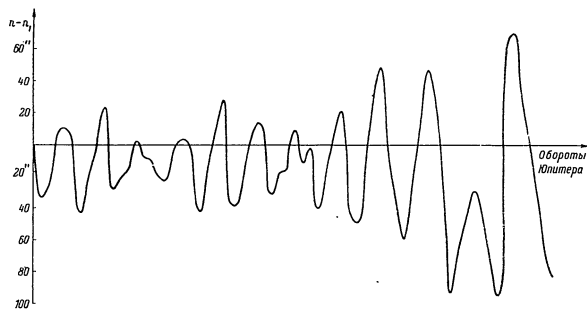


Рис. 1. Изменение среднего движения Патрокла.
 Масштаб: 10° = 4 км; один оборот Юпитера равен 1 см.; n₁ = 299713.

влияние на эволюцию планетных орбит и привести к различным изменениям в структуре солнечной системы.

В частности, предполагается возможность потери большими планетами их спутников, превращение регулярных спутников в нерегулярных, превращение спутников Юпитера

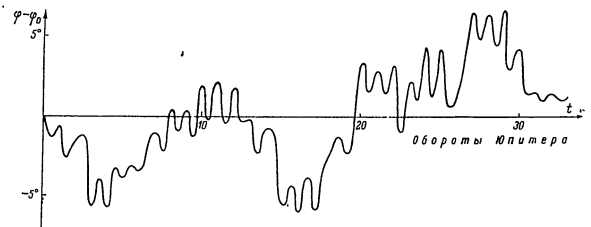


Рис. 2. Изменение эксцентриситета Патрокла.
 Масштаб: 1° = 4 км; 11,86 года = 1 см.; e = 7965.

Таблица 1

№ оборота	t (в годах)	a	λ	e	π-π ₁	α	Δ ₁
0	0.00	5.1944	299.72	0.1386	333.95	- 3.989	0.589
1	11.86	5.5204	273.56	0.1278	7.56	+ 9.28	2.208
2	23.72	5.0933	308.68	0.1101	17.83	+ 5.61	1.600
3	35.59	5.7541	277.07	0.0433	81.42	+ 0.50	1.026
4	47.45	5.2135	298.07	0.0398	105.47	+ 14.91	1.414
5	59.31	5.5724	271.33	0.0744	216.41	- 6.08	1.476
6	71.17	5.3996	282.79	0.0812	231.26	+ 7.96	0.238
7	83.03	5.3012	290.70	0.1218	245.65	- 1.11	1.181
8	94.89	5.4626	277.91	0.1442	261.87	- 1.14	1.137
9	106.76	5.2248	297.10	0.1451	279.06	+ 9.14	0.643
10	118.62	5.2464	295.26	0.1718	285.48	- 6.47	1.362
11	130.48	5.3994	282.81	0.1783	321.91	+ 18.05	2.802
12	142.34	4.9155	325.58	0.1684	325.64	+ 0.78	1.186
13	154.20	5.6355	265.22	0.1344	10.63	+ 8.32	2.256
14	166.07	5.0842	309.51	0.1232	20.42	+ 11.61	2.252
15	177.93	5.5067	267.99	0.0434	59.85	- 4.37	0.728
16	189.79	5.3930	283.31	0.0361	94.42	+ 8.81	1.093
17	201.65	5.3280	288.51	0.0406	182.38	- 1.20	0.656
18	213.51	5.7276	258.85	0.0933	221.27	- 0.36	1.235
19	225.37	5.2037	292.25	0.0585	232.49	+ 15.80	0.545
20	237.24	5.6968	260.95	0.1960	257.91	- 8.02	2.453
21	249.10	5.3919	283.39	0.1876	286.33	+ 34.69	3.612
22	260.96	4.7140	346.68	0.1944	286.44	+ 6.72	1.199
23	272.82	5.6016	267.63	0.1750	303.10	- 10.50	1.205
24	284.68	5.5649	270.28	0.2312	332.45	+ 37.72	5.378
25	296.54	4.7304	344.87	0.2120	334.95	+ 24.95	3.892
26	308.41	5.5037	274.80	0.1540	330.50	- 19.74	1.352
27	320.27	6.1570	232.25	0.2509	10.84	+ 55.58	7.664
28	332.13	5.5658	270.22	0.2498	8.75	+120.17	10.21
29	343.99	6.1742	231.28	0.2545	6.78	+184.27	11.80
30	355.85	4.5964	368.06	0.2121	93.73	+248.94	6.446
31	367.71	4.8895	328.18	0.1646	98.91	+169.16	9.053
32	379.57	5.6382	265.03	0.1650	95.52	+176.46	9.764
33	391.43	6.4128	218.49	0.1598	110.39	+249.39	8.049

α = λ₁ - λ - 60° — угловое расстояние Патрокла от точки либрации L₅;
 Δ₁ — расстояние Патрокла от точки либрации L₅ (в а. е.).

в малые планеты типа троянцев или Гидальго, превращение спутника Нептуна в самостоятельную планету Плутона (Kuiper, 1956).

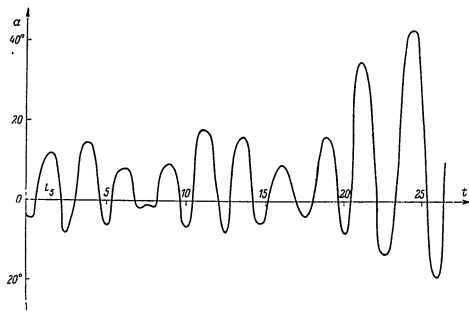


Рис. 3. Угловое расстояние Патрокла от точки либрации.
Масштаб: $4^\circ = 4$ мм; один оборот Юпитера равен 1 см. $\alpha = (\nu_1 - \lambda) - 60^\circ$

В ноябре 1952 г. Койпер обсуждал эти вопросы с Рабе и заинтересовал его настолько, что тот глубоко занялся разработкой указанных проблем. В течение 1954—1957 гг. были опубликованы пять работ Рабе (Rabe, 1954a, 1954b, 1956, 1957a, 1957b), в которых, в частности, показано, что минимальное значение для массы прото-Юпитера равно

$$\mu_0 = 20 \mu_1,$$

Таблица 2

№ оборота	α	Δ_1	Δ_2
27	56°	7.7	12.2
28	120	10.2	10.5
29	194	11.8	7.8
30	249	6.4	2.4
31	169	9.1	6.1
32	176	9.8	5.9
33	249	8.0	2.7

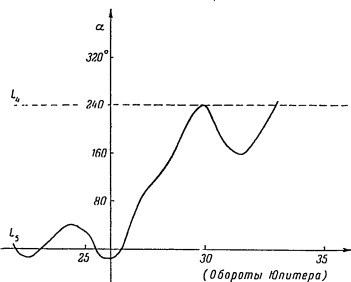


Рис. 3а. Угловое расстояние Патрокла от точки либрации L_5 .
Масштаб: $40^\circ = 6$ мм; один оборот Юпитера равен 7 см. $\alpha = (\nu_1 - \lambda) - 60^\circ$.

где μ_1 — современное значение массы Юпитера. Этот результат находится в хорошем согласии с результатом Койпера, который определял массу протопланет из рассмотрения их динамической устойчивости.

Таким образом, возник новый раздел небесной механики: изучение эволюции орбит планет и спутников в эпоху образования солнечной системы.

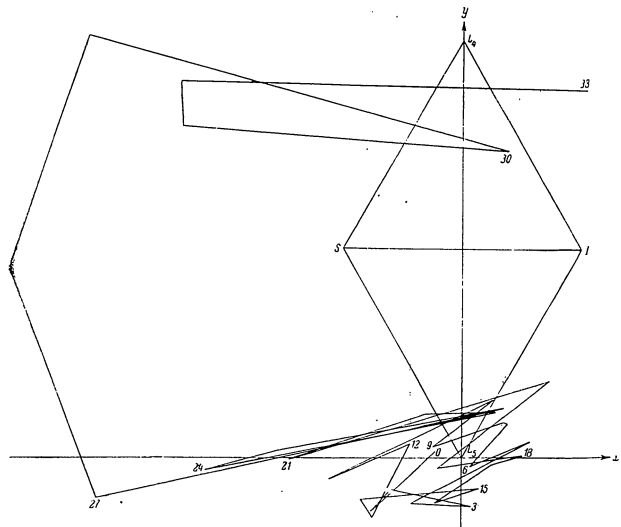


Рис. 4. Положения Патрокла относительно точки либрации (через оборот Юпитера).
Масштаб: 1 в с. = 1.2 см. S — Солнце, I — Юпитер.

§ 2. Постановка задачи

В настоящей работе сделана попытка изучить движение малой планеты троянской группы (617) Патрокла в поле тяготения Солнца и прото-Юпитера.

Авторы считают интересным выяснить вопрос об устойчивости движения троянцев и о характере эволюции их орбит на конкретных примерах с помощью численного интегрирования. Авторы используют оскулирующие элементы планеты Патрокла для эпохи 1928 март 1.0 всем. вр., но предполагают, что движение Патрокла происходит в плоскости движения Юпитера. Вся методика работы аналогична методике, примененной в работе Г. А. Чеботарева и А. И. Божковой (1958).

Координаты Юпитера взяты из таблиц В. Ф. Проскурина и Т. И. Машинской (1951), причем масса Юпитера увеличена в $i = 20$ раз, без изменения суточного движения ν_1 . Поэтому в таблицах было проведено умножение

$$x, y \text{ на } \lambda_1,$$

где

$$X, Y \text{ на } \bar{n}_1^{-2},$$

$$n_1 = \left(\frac{1 + im_1}{1 - im_1} \right)^{\frac{1}{2}} = 1.006005,$$

$$m_1 = 1:1047.355.$$

Интервал времени, охваченный интегрированием, соответствует 33 оборотам Юпитера вокруг Солнца, или приблизительно 400 годам. Общее число шагов интегрирования составляет 2640, что дает максимальную ошибку в координатах к концу 33-го оборота $\Delta x < 0.007$ а. е.

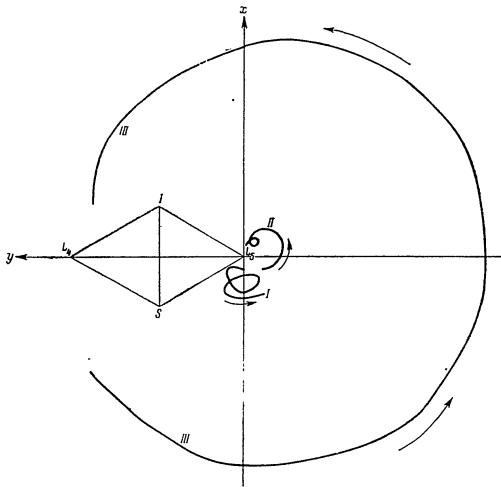


Рис. 5. Движение Патрокла относительно точки либрации L_5 .
I — движение Патрокла в течение 1-го оборота Юпитера, II — в течение 17-го оборота и III — в течение 33-го оборота Юпитера. Масштаб: 1 а. е. = 2 км. S и J — положение Солнца и Юпитера.

§ 3. Основные результаты

Основные результаты сопоставлены в табл. 1, которая дает изменения гелиоцентрических элементов Патрокла за 400 лет, через каждый оборот Юпитера вокруг Солнца (11.86 лет). Для наглядности изменения элементов показаны также на рис. 1—3.

Радиус-вектор Патрокла меняется в пределах от 3.7 до 7.8 а. е., а расстояние от Юпитера — в пределах от 1.9 до 11.9 а. е.

206

Движение Патрокла показано на рис. 4 и 5. На рис. 4 даны положения Патрокла относительно точки либрации через каждый оборот Юпитера, а на рис. 5 изображено движение Патрокла относительно точки либрации L_5 в течение 1-го, 17-го и 33-го оборотов Юпитера вокруг Солнца.

После 27 оборотов Юпитера устойчивость движения Патрокла нарушается, и он начинает постепенно отходить от точки либрации L_5 , что видно из данных табл. 2.

Напомним (Субботин, 1937), что треугольные точки либрации, являясь положениями устойчивого относительного равновесия для тела, имеющего бесконечно малую массу, если масса Юпитера

$$m_1 < 0.0385209.$$

В настоящей работе показано, что уже при массе Юпитера

$$m_1 = 0.0190957,$$

тройнец покидает точку либрации.

ЛИТЕРАТУРА

- Прокурин В. Ф. и Т. И. Машинская. 1951. Гелиоцентрические орбитальные координаты Юпитера. Бюлл. ИТА, 5, 1(64).
Субботин М. Ф. 1937. Курс небесной механики, 2. ОНТИ, Л.—М., 125.
Чеботарев Г. А. и А. И. Божкова. 1958. Исследование движения двух троянцев численными методами. Бюлл. ИТА, 7, 3(86).
Kuiper G. P. 1956. The origin of the Satellites and the Trojans. Vistas in Astronomy, 2, 1631.
Rabe E. 1954a. Escaping satellites of Jupiter. A. J., 59, 1217, 190.
Rabe E. 1954b. The Trojans as escaped satellites of Jupiter. A. J., 59, 1223, 433.
Rabe E. 1956. On the Origin of the Kirkwood Gaps and the Minor Planet Families. Zeitschrift für Astrophysik, 40, 2, 107.
Rabe E. 1957a. On the Origin of Pluto and the masses of the Protoplanets. Aph. J., 125, 1, 290.
Rabe E. 1957b. Further studies on the orbital development of Pluto. Aph. J., 126, 2, 240.

Поступило в Редакцию
3 июня 1958 г.

Бюллетень Института Теоретической Астрономии

Т. VII 1959 № 3 (86)

Комета 1951 X Аренда

Ш. У. Кан

Определена окончательная орбита кометы 1951 X по наблюдениям 1951—1952 гг. и произведено предвычисление появления кометы в 1959 г.

COMET 1951 X AREND, by S. U. Kan. — The definitive orbit of the comet 1951 X has been obtained from observations during 1951—1952. The prediction for the return of the comet in 1959 has been made.

Короткопериодическая комета 1951 X была открыта фотографическим путем на обсерватории в Укде (Бельгия) С. Арендом. Комета была обнаружена на фотопластинке, снятой вечером 4 октября 1951 г. при помощи 16-дюймового двойного астрографа Дейсса при неблагоприятном небе (наличие густого тумана и проходящих облаков). На снимке, полученном восточной камерой, комета имела вид бледной туманности, которой не оказалось на снимке, полученном одновременно западной камерой. Это можно было объяснить различной чувствительностью использованных пластинок. 5 октября был сделан новый снимок, который и подтвердил существование кометы. В момент открытия комета имела 14-ю звездную величину (Arend, 1952). На снимке от 9 октября комета имеет вид небольшой круглой туманности 13' в диаметре, с очень четким ядром диаметром 1".8.

Крупные телескопы позволили получить изображения с большим диаметром. Так, на негативе, снятом Г. Ванбисбреком 4 ноября с выдержкой в 10 мин. при помощи 82-дюймового телескопа на обсерватории Макдональда, комета имеет звездообразное ядро с рассеянной комой, переходящей в веерообразный хвост длиной 2' в позиционном угле 140° (Merton, 1952).

Комета получила предварительное обозначение 1951j, а впоследствии — окончательный номер 1951 X (Vinter Hansen, 1955).

Элементы орбиты были вычислены Л. Е. Квиннхэмом (Vinter Hansen, 1951a), Е. Дэй (Vinter Hansen, 1951b) и А. Прижильским (Vinter Hansen, 1951c). Эллиптическая орбита А. Прижильского основана на самой большой дуге, соответствующей десяти наблюдениям, произведенным с 8 октября по 20 декабря 1951 г. Она имеет следующие элементы:

$$\begin{aligned} T &= 1951 \text{ ноябрь } 23.31237 \text{ всем. вр.} \\ \omega &= 44^{\circ}43'19'' \\ \Omega &= 357^{\circ}7'15'' \quad 1951.0 \\ i &= 21^{\circ}7'04'' \\ e &= 0.5355579 \\ a &= 3.9212104 \\ n &= 0^{\circ}12'6933 \\ P &= 7.765 \text{ лет} \end{aligned}$$

Комета была открыта после того, как она прошла восходящий узел своей орбиты и за 50 дней до прохождения через перигелий. Ее перигелийное расстояние составляет 1.821 а. е., а афелийное расстояние — 6.021 а. е. В среднем орбита кометы заключена

между границами, расположенными вблизи орбит Марса и Юпитера. Поэтому движение кометы в некоторые периоды времени может подвергаться сильному влиянию этих двух планет.

Общий промежуток, в течение которого наблюдалась комета, составляет 207 дней, а именно: с 1 октября 1951 г. по 24 апреля 1952 г. Последнее наблюдение было сделано Г. Ванбисбреком при помощи 82-дюймового телескопа на обсерватории Макдональда. Комета в это время имела 19-ю звездную величину и вид рассеянного туманного пятна.

§ 1. Определение окончательной орбиты кометы 1951 X по наблюдениям 1951—1952 гг.

Для определения окончательной орбиты кометы Аренда обработаны все наблюдения кометы, упоминаемые в „Astronomischer Jahresbericht“, а также в ссылках, которые встречаются в литературе при опубликовании сведений о комете. Всего собрано 41 наблюдение. Наблюдения кометы производились на 7 обсерваториях, список которых представлен в табл. 1.

Таблица 1

№	Место наблюдения	λ	C	S	tg φ'	Наблюдатель	Количество наблюдений
1	Аджир	-0°12'8.15	0.4703	5.243	0.7431	Бойе.	2
2	Казань (обс. им. Энгельгардта)	-3 15 15.7	0.3904	7.244	1.4620	Усманов.	5
3	Рейдальберг	-0 34 53.0	0.3334	6.653	1.1590	Реймут.	1
4	Форт Дэйвис (обс. Макдональда)	+6 56 05.4	0.5053	4.464	0.5891	Ванбисбрек.	12
5	Мунит-Гамалтон (обс. Айка)	+8 6 34.9	0.4671	5.309	0.7577	Васильевский.	2
6	Иерке	+5 54 13.2	0.4327	5.923	0.9124	Ванбисбрек.	6
7	Укда	-0 17 26.0	0.3715	6.787	1.2178	Аренд, Ригго.	13

Наблюдения кометы Аренда, использованные в настоящей работе, приведены в табл. 2.

Все наблюдения были отнесены к равноденствию 1950 г., были вычислены поправки за параллакс и aberratio fixarum.

За исходные элементы в работе принята вышеприведенная система А. Прижильского.

На основании этих элементов была вычислена эфемерида кометы на период с 1 октября по 30 декабря 1951 г., причем методом Энке были вычислены возмущения от пяти планет — Венеры, Земли, Марса, Юпитера и Сатурна. Для сравнения с отдельными наблюдениями в марте—апреле 1952 г. вычисления возмущений были продолжены до 28 апреля 1952 г. и сравнение с этими наблюдениями произведено в индивидуальном порядке.

Суммарные возмущающие ускорения от всех пяти планет и возмущения прямоугольных координат даны в табл. 3. Эфемерида кометы приведена в табл. 4. Эфемеридные моменты не исправлены за абберационное время. Наблюдения кометы, отнесенные к 1950 г., параллакс, звездная абберация и разности между вычисленными и наблюдательными положениями (в смысле наблюдения минус вычисления) представлены в табл. 5; цифры I—VI объединяют группы наблюдений, послужившие для составления одного нормального места. При составлении нормальных мест отброшены наблюдения, дающие сильные расхождения, а именно: четыре наблюдения, произведенные Ванбисбреком на обсерватории Макдональда. Все обработанные наблюдения объединены в нормаль-

Таблица 2

№ п.п.	Дата (всех. вр.)	α	δ	Эпоха	Наблюдатель	Литературный источник (см. в конце таблицы)
1951						
1	Октябрь 1.38889	1 ^h 6 ^m 37.731	+22°22'43.7	1951	Ванбисбек.	1
2	4.95719	1 2 21.22	+23 27 21.2	1951		2
3	5.99843	1 1 2.95	+23 45 50.8	1951	Аренд.	2
4	6.88178	0 59 56.06	+24 11 47.1	1951	Ринго.	2
5	7.93107	0 58 32.14	+24 18 57.3	1950	Рейнмут.	2
6	7.97889	0 58 31.80	+24 20 4.9	1951	Аренд.	2
7	8.91376	0 57 15.77	+24 35 35.3	1950	Бойе.	4
8	8.92826	0 57 17.68	+24 36 13.1	1951	Ринго.	2
9	8.92830	0 57 14.56	+24 35 53.8	1950	Бойе.	4
10	9.29448	0 56 45.70	+24 42 1.7	1950		6
11	9.30145	0 56 45.18	+24 42 8.8	1950	Василевский.	6
12	9.36597	0 56 42.98	+24 43 35.9	1951	Ванбисбек.	7
13	9.99409	0 55 53.72	+24 53 54.6	1951	Аренд.	2
14	11.05646	0 54 39.25	+25 11 21.2	1951	Ринго.	2
15	12.11052	0 53 5.12	+25 28 14.8	1951	Аренд.	2
16	20.20862	0 42 17.45	+27 22 26.9	1951		7
17	21.38988	0 40 42.56	+27 42 15.2	1951	Ванбисбек.	7
18	22.41832	0 39 25.32	+27 55 15.7	1951	Аренд.	2
19	23.93871	0 37 31.73	+28 13 57.3	1951	Ринго.	2
20	25.82783	0 35 13.24	+28 36 6.2	1951		7
21	27.00042	0 33 42.94	+28 50 19.2	1951	Ванбисбек.	7
22	29.30277	0 31 12.49	+29 13 39.9	1951		7
23	30.31766	0 30 6.47	+29 23 54.1	1951		7
24	Ноябрь 2.01874	0 27 20.22	+29 50 0.4	1951		7
25	4.10382	0 25 27.03	+30 8 5.2	1951	Ванбисбек.	7
26	6.90167	0 23 8.92	+30 31 1.8	1951	Аренд.	2
27	21.74106	0 17 15.07	+32 07 35.0	1951	Усманова.	5
28	22.69812	0 17 15.18	+32 12 52.7	1951	Усманова.	5
29	23.70601	0 17 17.96	+32 18 18.4	1951	Усманова.	5
30	25.04851	0 17 26.85	+32 25 25.2	1951	Ванбисбек.	7
31	25.72491	0 17 33.42	+32 28 59.4	1951	Усманова.	5
32	26.80068	0 17 46.76	+32 34 34.1	1951	Ринго.	2
33	Декабрь 2.17220	0 19 43.99	+33 1 49.3	1951	Ванбисбек.	7
34	3.76191	0 20 35.21	+32 9 51.0	1951	Усманова.	5
35	19.02553	0 34 26.74	+34 28 3.4	1951	Ванбисбек.	7
36	20.85566	0 36 44.18	+34 37 49.5	1951	Аренд.	2
37	24.04124	0 41 1.53	+34 55 9.8	1951	Ванбисбек.	7
1952						
38	Март 16.10404	3 54 14.91	+41 21 49.2	1952		7
39	17.10135	3 57 1.44	+41 22 55.9	1952		7
40	Апрель 23.13750	5 39 13.36	+40 30 8.4	1952	Ванбисбек.	7
41	24.14931	5 41 54.87	+40 26 13.2	1952		7

1. A. J., 1953, 58, 3. — 2. Bull. Astr. Obs. Belgique, 1952, 6. — 3. Circ. UAI, 1492. — 4. Circ. UAI, 1331. — 5. Астр. ц., 1952, 132. — 6. Л. О. В., 1952, 525.

ные места, причем интервалы времени, охватывающие группы наблюдений, выбирались сравнительно небольшими (обычно по лунностям). Всего составлено шесть нормальных мест. Для составления нормального места поправки

$$\Delta\alpha = \frac{1}{n} (\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2 + \dots + \Delta\alpha_n),$$

$$\Delta\delta = \frac{1}{n} (\Delta\delta_1 + \Delta\delta_2 + \dots + \Delta\delta_n)$$

Таблица 3

№ п.п.	Дата	X · 10 ³	Y · 10 ³	Z · 10 ³	ε · 10 ³	η · 10 ³	ζ · 10 ³
1951							
1	Октябрь 1	+1425	+ 98	-307	+ 9894	- 1022	- 3858
2	11	-1341	- 1	-393	+ 5448	- 702	- 2270
3	21	+1269	- 87	-462	+ 2375	- 363	- 1044
4	31	+1203	-162	-514	+ 584	- 102	- 268
5	Ноябрь 10	+1148	-225	-549	0	0	0
6	20	+1095	-274	-571	+ 564	- 121	- 279
7	30	+1041	-306	-577	+ 2223	- 512	- 1125
8	Декабрь 10	+ 986	-370	-570	+ 4920	- 1200	- 2536
9	20	+ 929	-328	-558	+ 8588	- 2198	- 4495
10	30	+ 867	-323	-537	+ 13150	- 3506	- 6983
1952							
11	Январь 9	+ 795	-310	-511	+ 18517	- 5119	- 9975
12	19	+ 722	-293	-484	+ 24585	- 7036	- 19451
13	29	+ 640	-259	-453	+ 31245	- 9260	- 17937
14	Февраль 8	+ 560	-257	-426	+ 38382	- 11802	- 21808
15	18	+ 471	-247	-399	+ 45890	- 14685	- 26689
16	28	+ 380	-241	-377	+ 53664	- 17945	- 32056
17	Март 9	+ 294	-244	-359	+ 61611	- 21628	- 37933
18	19	+ 216	-253	-347	+ 69653	- 25789	- 44349
19	29	+ 140	-272	-337	+ 77736	- 30491	- 51341
20	Апрель 8	+ 75	-297	-332	+ 85818	- 35800	- 58944
21	18	+ 17	-327	-334	+ 93878	- 41788	- 67195
22	28	- 34	-360	-336	+ 101913	- 48523	- 76132

Таблица 4

№ п.п.	Дата (0 ^h эфем. вр.)	α _{1950.0}	δ _{1950.0}	ρ	№ п.п.	Дата (0 ^h эфем. вр.)	α _{1950.0}	δ _{1950.0}	ρ
1951									
1	Октябрь 1	1 ^h 7 ^m 2 ^o 02	+22°15'20.72	0.9208588	27	Октябрь 27	0°33'47.724	+26°49' 9.71	0.8943101
2	2	1 5 52.67	22 33 49.1	0.9168472	28	28	0 32 37.06	28 59 58.6	0.8963737
3	3	1 4 41.77	22 52 6.5	0.9130772	29	29	0 31 30.48	29 10 28.7	0.8986462
4	4	1 3 29.42	23 10 12.7	0.9095498	30	30	0 30 24.93	29 20 39.8	0.9011248
5	5	1 2 15.72	23 28 05.9	0.9062656	31	31	0 29 21.42	29 30 32.4	0.9038060
6	6	1 1 0.19	23 45 5.8	0.9032249	32	32	0 28 20.05	29 40 6.8	0.9068363
7	7	0 59 44.74	24 31 17.1	0.9004281	33	33	0 27 20.95	29 49 23.8	0.9097622
8	8	0 58 27.69	24 20 22.8	0.8978745	34	34	0 26 24.19	29 58 23.7	0.9130207
9	9	0 57 9.77	24 37 18.5	0.8955643	35	35	0 25 29.88	30 7 7.3	0.9164867
10	10	0 55 31.44	25 53 58.2	0.8933469	36	36	0 24 38.09	30 15 35.1	0.9201273
11	11	0 54 31.79	25 10 21.2	0.8916711	37	37	0 23 48.91	30 24 47.7	0.9239483
12	12	0 53 12.00	25 26 27.1	0.8900863	38	38	0 23 2.39	30 31 45.8	0.9279456
13	13	0 51 51.84	25 42 15.2	0.8887415	39	39	0 22 18.60	30 39 30.0	0.9321151
14	14	0 50 31.44	26 57 45.8	0.8872238	40	40	0 21 54.28	31 40 21.1	0.9368660
15	15	0 49 10.94	26 12 56.1	0.8867674	41	41	0 20 59.41	30 54 19.0	0.9409568
16	16	0 47 50.48	26 27 48.1	0.8864354	42	42	0 20 24.10	31 1 25.1	0.9456212
17	17	0 46 30.19	26 42 20.5	0.8862387	43	43	0 19 51.70	31 8 19.7	0.9504438
18	18	0 45 10.20	26 56 33.1	0.8861752	44	44	0 19 22.24	31 15 3.4	0.9554207
19	19	0 43 50.66	27 10 25.5	0.8861438	45	45	0 18 55.75	31 21 36.8	0.9605482
20	20	0 42 31.71	27 23 57.5	0.8859426	46	46	0 18 32.24	31 28 0.5	0.9658240
21	21	0 41 13.49	27 37 9.2	0.8864700	47	47	0 18 11.75	31 34 15.0	0.9712442
22	22	0 39 56.19	27 50 0.3	0.8872238	48	48	0 17 54.28	31 40 21.1	0.9768660
23	23	0 38 39.80	28 2 30.8	0.8882014	49	49	0 17 39.85	31 46 19.1	0.9825064
24	24	0 37 24.60	28 14 40.8	0.8894017	50	50	0 17 28.47	31 52 9.7	0.9888428
25	25	0 36 10.69	28 26 30.4	0.8908215	51	51	0 17 20.14	31 57 53.5	0.9943117
26	26	0 34 53.19	+28 37 59.8	0.8924535	52	52	0 17 14.87	+32 3 31.0	1.0004106

Таблица 4 (продолжение)

№ п.п.	Дата (0 ^а афем. вр.)	$\alpha_{1950.0}$	$\delta_{1950.0}$	ρ	№ п.п.	Дата (0 ^а афем. вр.)	$\alpha_{1950.0}$	$\delta_{1950.0}$	ρ
1951									
53	Ноябрь 22	0 ^h 17 ^m 12 ^s 65	+32 ^o 9' 26"	1.0066370	71	Декабрь 10	0 ^h 25 ^m 07 ^s 71	+33 ^o 41' 8"	1.1374217
54	23	0 17 13.50	32 14 29.2	1.0129875	72	11	0 25 53.25	33 46 13.1	1.1455590
55	24	0 17 17.39	32 19 51.0	1.0194596	73	12	0 25 48.35	33 51 19.6	1.1537955
56	25	0 17 24.33	32 25 8.6	1.0265010	74	13	0 27 45.96	33 56 27.4	1.1620599
57	26	0 17 34.30	32 30 22.5	1.0327589	75	14	0 28 46.06	34 1 36.8	1.1704810
58	27	0 17 47.29	32 35 33.2	1.0395508	76	15	0 29 48.60	34 6 47.8	1.1789371
59	28	0 18 3.29	32 40 41.1	1.0465137	77	16	0 30 55.54	34 12 0.5	1.1874678
60	29	0 18 22.28	32 45 46.8	1.0535553	78	17	0 32 0.86	34 17 14.8	1.1960714
61	30	0 18 44.23	32 50 50.7	1.0607022	79	18	0 33 10.51	34 22 31.1	1.2047470
62	1	0 19 9.14	32 55 53.3	1.0679525	80	19	0 34 22.47	34 27 49.1	1.2134937
63	2	0 19 36.97	33 0 54.8	1.0753030	81	20	0 35 36.69	34 33 9.0	1.2223105
64	3	0 20 7.69	33 5 55.6	1.0827512	82	21	0 36 53.15	34 38 30.9	1.2311965
65	4	0 20 41.26	33 10 56.2	1.0902946	83	22	0 38 11.81	34 43 54.6	1.2401508
66	5	0 21 17.67	33 15 56.8	1.0979304	84	23	0 39 32.64	34 49 20.4	1.2491728
67	6	0 21 56.85	33 20 57.7	1.1056566	85	24	0 40 55.62	34 54 48.1	1.2582616
68	7	0 22 38.79	33 25 59.0	1.1134708	86	25	0 42 20.70	35 0 17.8	1.2674160
69	8	0 23 23.44	33 31 1.1	1.1213706	87	26	0 43 47.86	+35 5 49.5	1.2766353
70	9	0 24 10.76	+33 36 4.0	1.1293552					

Таблица 5

№ п.п.	Дата (всех вр.)	α_{1950}	δ_{1950}	ρ_a	ρ_b	Звездная aberrация	O-C			
							$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$		
1951										
1	Октябрь 1	1.38889	1 ^h 6 ^m 34 ^s 08	-22 ^o 22'24"	-0.028	-1.174	+1.194	+ 6.39	+0.10	+ 5.2
2	2	4.95719	1 2 17.99	23 27 1.9	-0.11	-4.49	+1.37	+ 6.85	-0.04	- 1.4
3	3	5.99843	1 0 59.72	23 45 31.5	+0.02	+4.39	+1.37	+ 6.99	-0.19	+ 4.1
4	4	6.88178	0 59 52.83	24 0 55.3	-0.28	-4.91	+1.38	+ 7.11	-0.25	+ 4.0
5	5	7.93107	0 58 32.14	24 18 57.3	-0.10	-4.06	+1.38	+ 7.26	-0.01	+ 1.7
6	6	7.97889	0 58 28.57	24 19 45.5	-0.09	-4.33	+1.38	+ 7.26	+0.20	+ 1.2
7	7	8.91376	0 57 15.77	24 35 35.3	-0.25	-2.37	+1.38	+ 7.40	+0.01	- 1.2
8	8	8.92826	0 57 14.46	24 35 53.7	-0.15	-4.44	+1.38	+ 7.40	-0.10	+ 4.5
9	9	8.92830	0 57 14.56	24 35 53.8	-0.20	-2.25	+1.38	+ 7.40	-0.05	+ 2.4
10	10	9.29448	0 56 45.70	24 42 1.7	-0.15	-2.20	+1.39	+ 7.45	-0.11	+ 1.9
11	11	9.30145	0 56 45.18	24 42 8.8	-0.10	-2.17	+1.39	+ 7.45	-0.05	+ 2.0
12	12	9.36597	0 56 39.76	24 43 16.5	+0.32	-1.48	+1.39	+ 7.46	+0.02	+ 4.3
13	13	9.94889	0 55 50.87	24 53 35.2	+0.05	-4.28	+1.39	+ 7.56	-0.02	- 0.2
14	14	11.05646	0 54 26.03	25 11 1.7	+0.23	-4.58	+1.39	+ 7.87	+0.09	+ 0.4
15	15	12.11052	0 53 1.90	25 27 55.3	+0.36	-5.18	+1.39	+ 8.19	+0.06	+ 2.8
16	16	22.41832	0 39 22.63	27 55 56.0	+0.59	-2.86	+1.36	+ 9.48	-0.12	+ 4.6
17	17	23.93371	0 37 28.54	28 13 37.5	+0.02	-3.76	+1.34	+ 9.71	-0.03	+ 1.6
18	18	25.82783	0 35 10.66	28 35 46.4	-0.26	-4.17	+1.35	+10.00	+0.19	+ 1.6
19	19	29.30277	0 31 9.22	29 13 20.0	+0.36	-0.92	+1.28	+10.49	+0.20	+ 1.0
20	20	30.31766	0 30 3.30	29 23 34.2	+0.42	-1.18	+1.27	+10.62	+0.13	- 0.9
21	21	4.10382	0 25 23.87	30 7 45.3	-0.32	-0.63	+1.20	+11.22	+0.09	- 0.9
22	22	6.90167	0 23 40.19	30 40 1.9	+0.07	-3.28	+1.16	+11.52	-0.08	- 0.2
23	23	21.74106	0 17 11.93	32 7 15.0	+0.08	-3.53	+1.16	+11.52	-0.08	- 0.2
24	24	22.69812	0 17 14.82	32 12 32.7	-0.02	-3.45	+0.85	+12.49	-0.04	+ 0.5
25	25	25.04831	0 17 14.82	32 17 58.4	0.00	-3.82	+0.83	+12.51	-0.25	- 0.1
26	26	25.72491	0 17 30.28	32 28 39.4	+0.06	-3.38	+0.79	+12.53	-0.27	- 3.0
27	27	26.80068	0 17 43.62	32 34 14.1	-0.05	-2.64	+0.77	+12.54	-0.04	- 0.3
28	28	21.7220	0 19 40.84	33 1 29.3	+0.30	-2.05	+0.66	+12.51	-0.07	- 0.8
29	29	3.76591	0 20 22.06	32 9 31.0	+0.18	-3.55	+0.62	+12.22	-0.04	+ 3.1
30	30	19.02553	0 34 25.53	34 27 43.6	-0.01	-1.00	+0.34	+11.75	+0.04	+ 1.3
31	31	20.85566	0 36 40.96	34 37 29.7	+0.19	-2.35	+0.31	+11.63	+0.03	+ 1.7
32	32	24.04124	0 40 58.29	34 54 50.1	+0.06	-0.93	+0.26	+11.41	+0.13	+ 3.1
1952										
34	Март 16	16.10404	3 54 6.76	+41 21 28.3	+0.24	-1.17	-0.74	+ 5.02	+4.02	+ 0.2
35	17	17.10135	3 56 53.27	41 22 35.4	+0.23	-1.14	-0.75	+ 4.99	+3.15	- 0.2
36	18	23.13750	3 59 4.94	40 30 4.8	+0.23	-0.69	-1.10	+ 4.34	+5.40	+ 1.9
37	19	24.14931	5 41 46.45	40 26 10.0	+0.24	+1.06	-1.10	+ 4.35	+5.58	-18.5

прибавлялись к эфемеридным положениям кометы для моментов, ближайших к

$$\tau = \frac{1}{\pi} (t_1 + t_2 + \dots + t_n).$$

При сравнении с наблюдениями не учитывалась разница между эфемеридным и реальным временем. Соответствующие поправки были внесены непосредственно в нормальные места. Величины поправок Δt в смысле „эфемеридное время минус всемирное“ взяты из статьи Д. В. Загребина, Э. А. Митрофановой и Г. М. Позняк (1955):

$$\Delta t$$

$$1951 \text{ г. } \dots +2888$$

$$1952 \text{ г. } \dots +29.6$$

К средним значениям невязок были для каждого нормального места прибавлены величины

$$\Delta t \cdot \Delta \alpha_0 \text{ и } \Delta t \cdot \Delta \delta_0,$$

где $\Delta \alpha_0$ и $\Delta \delta_0$ — средние суточные изменения координат около даты нормального места (табл. 6). Нормальные места приведены в табл. 7.

Таблица 6

	8 октября	29 октября	26 ноября	21 декабря	17 марта	24 апреля
$\Delta t \cdot \Delta \alpha_0$	+0.003	+0.002	0.000	-0.003	-0.006	-0.005
$\Delta t \cdot \Delta \delta_0$	-0.03	-0.2	-0.1	-0.1	+0.1	+0.1

Таблица 7

№ норм. места	Эфемеридное время	α_{1950}	δ_{1950}	$\Delta \alpha$	$\Delta \delta$	№№ наблюдений	Количество наблюдений
1951							
1	Октябрь 8.0	0 ^h 58 ^m 27 ^s 69	+24 ^o 30'24"	+0.000	+ 1.78	1—15	15
2	23.0	0 31 30.59	+29 10 27.9	+0.11	- 0.8	16—26	7
3	Ноябрь 26.0	0 17 34.20	+32 30 21.8	-0.10	- 0.7	27—34	8
4	Декабрь 21.0	0 36 53.17	+34 38 32.8	+0.04	+ 1.9	35—37	3
1952							
5	Март 17.10135	3 56 55.26	+41 22 42.5	+3.52	+ 0.0	38—39	2
	Апрель 24.14931	5 41 47.94	+40 26 11.6	+5.44	+18.6	40—41	2

Для определения поправок к элементам орбиты был принят способ Эккерта и Брауэра (Eskert and Brauer, 1937; Самолова-Яхонтова, 1945). Сущность этого метода состоит в следующем. Вариации прямого восхождения и склонения и вариации прямоугольных координат связаны соотношениями

$$\cos \delta d\alpha = -\frac{\sin \alpha}{\rho} dx + \frac{\cos \alpha}{\rho} dy,$$

$$d\delta = -\frac{\sin \delta \cos \alpha}{\rho} dx - \frac{\sin \delta \sin \alpha}{\rho} dy + \frac{\cos \delta}{\rho} dz. \quad (1)$$

dx, dy, dz зависят от изменения средней аномалии эпохи dM_0 , большой полуоси $\frac{da}{a}$, эксцентриситета de и от изменения ориентации орбиты в пространстве. Изменение ориентации можно представить как элементарный поворот плоскости орбиты вокруг некоторой оси. Проекция этого элементарного поворота $d\psi$ на экваториальные оси координат обозначают через $d\psi_x, d\psi_y$ и $d\psi_z$.

Обозначая через x, y, z прямоугольные экваториальные координаты, x', y', z' — проекции скоростей, t — время, $p = a(1 - e^2) = a \cos^2 \varphi$ — параметр орбиты, n — среднее суточное движение кометы и вводя обозначения $K = \frac{r+p}{p} \cdot \frac{r'}{a^2 en}$ и $H = \frac{r+p-2a}{ep}$, получим следующий простой вид вариаций:

$$\begin{matrix} dM_0 & d\psi_x & d\psi_y & d\psi_z & \frac{da}{a} & de \\ dx = \frac{x'}{n} & 0 & z & -y & x - \frac{3}{2}tx' & Hx + K\frac{x'}{n}; \\ dy = \frac{y'}{n} & -z & 0 & x & y - \frac{3}{2}ty' & Hy + K\frac{y'}{n}; \\ dz = \frac{z'}{n} & y & -x & 0 & z - \frac{3}{2}tz' & Hz + K\frac{z'}{n}. \end{matrix} \quad (2)$$

Чтобы получить правые части основных уравнений (1), надо «кракован» с элементами (2) умножить на «кракован» (3)

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sin \alpha}{p} & -\frac{\sin \delta \cos \alpha}{p} \\ \frac{\cos \alpha}{p} & -\frac{\sin \delta \sin \alpha}{p} \\ 0 & \frac{\cos \delta}{p} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Так как в данной работе наблюдения, служащие для исправления орбиты, охватывают небольшой промежуток времени, неизвестные будут определяться неточно. В этом случае целесообразно применить способ, рассмотренный Д. А. Калнин при определении окончательной орбиты кометы Швассмана—Вахмана 3, 1930 VI (Кондратьева—Калнин, 1956). Исследование Д. А. Калнин показывает, что хуже всего разделяются эксцентриситет и средняя аномалия эпохи. Поэтому исключим эти переменные, введя вместо dM_0 поправку ndT , а вместо поправки эксцентриситета — $\frac{da}{a}$, т. е. рассмотрим следующие переменные: $ndT, d\psi_x, d\psi_y, d\psi_z, \frac{da}{a}, \frac{dq}{q}$, где q — перигелиальное расстояние.

Тогда вариации прямоугольных координат будут иметь вид

$$\begin{matrix} ndT & d\psi_x & d\psi_y & d\psi_z & \frac{da}{a} & \frac{dq}{q} \\ dx = -\frac{x'}{n} & 0 & z & -y & x - \frac{3}{2}x'(t-T) + (1-e)(Hx + K\frac{x'}{n}) & -(1-e)(Hx + K\frac{x'}{n}); \\ dy = -\frac{y'}{n} & -z & 0 & x & y - \frac{3}{2}y'(t-T) + (1-e)(Hy + K\frac{y'}{n}) & -(1-e)(Hy + K\frac{y'}{n}); \\ dz = -\frac{z'}{n} & y & -x & 0 & z - \frac{3}{2}z'(t-T) + (1-e)(Hz + K\frac{z'}{n}) & -(1-e)(Hz + K\frac{z'}{n}). \end{matrix}$$

Коэффициенты основных уравнений, вычисленные с четырьмя десятичными знаками, приведены в табл. 8.

Таблица 8

№ п.п.	ndT	$d\psi_x$	$d\psi_y$	$d\psi_z$	$\frac{da}{a}$	$\frac{dq}{q}$	L
A 1	-5.6685	-0.5016	-0.1308	+2.0183	-0.0825	+0.9194	0.00
2	-5.2169	-0.7312	-0.1012	+1.8522	-0.0412	+0.9280	+1.44
3	-3.9528	-0.8732	-0.0671	+1.3372	+0.0038	+0.7056	+1.26
4	-3.2753	-0.8747	-0.1421	+0.9639	+0.0336	+0.3844	+0.49
5	-2.7191	-0.3440	-0.5176	+0.5422	+0.0964	-0.7336	+39.62
6	-2.2584	-0.0451	-0.5647	+0.5475	+0.0783	-0.9394	+62.11
B 7	-5.3601	+0.4866	-1.9944	-0.0146	-0.0831	+0.5485	+1.80
8	-5.8288	+0.6583	-1.9047	-0.2184	-0.0497	+0.2816	-0.80
9	-5.3496	+0.7486	-1.5455	-0.4003	+0.0049	-0.0327	-0.70
10	-4.3429	+0.7920	-1.1851	-0.4089	+0.0402	-0.2585	+1.90
11	-1.0180	+0.8850	-0.1778	+0.2645	+0.0358	-0.2781	0.00
12	-0.0981	+0.7993	+0.1589	-0.1894	+0.0124	+0.0138	-18.60

В табл. 8 буквой А отмечена группа уравнений, имеющих в правых частях поправки по прямому восхождению, буквой В — поправки по склонению; L — свободные члены в правых частях уравнений.

Решение нормальной системы производилось 2 раза. При первом решении исключение неизвестных производилось в той последовательности, в какой они расположены в табл. 8, а при втором решении исключение неизвестных производилось в порядке возрастания их весов. При этом порядок расположения неизвестных не изменялся, если весовые коэффициенты были одного порядка. Такой порядок исключения, как замечает Д. К. Куликов (Сакк и Куликов, 1951), дает наилучшие условия определения неизвестных при одной и той же степени точности вычисления. Для однородности основных уравнений введены новые неизвестные:

$$x_1 = 5ndT, \quad x_2 = d\psi_x, \quad x_3 = d\psi_y, \quad x_4 = \frac{1}{10} \cdot \frac{da}{a}, \quad x_5 = \frac{dq}{q}, \quad x_6 = d\psi_z,$$

а вместо правых частей

$$l_i = 10^{-2} \cdot L_i.$$

Коэффициенты основных уравнений с новыми переменными даны в табл. 9.

Таблица 9

№ п.п.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	l
1	-1.1337	-0.1308	+2.0183	-0.8250	+0.9194	-0.5016	0.0000
2	-1.0434	-0.1012	+1.8522	-0.4120	+0.9280	-0.7312	+0.0144
3	-0.7906	-0.0671	+1.3372	+0.0380	+0.7056	-0.8732	-0.0126
4	-0.6551	-0.1421	+0.9639	+0.3360	+0.3844	-0.8747	+0.0049
5	-0.5438	-0.5176	+0.5422	+0.9640	-0.7336	-0.3440	+0.3962
6	-0.4517	-0.5647	+0.5475	+0.7830	-0.9394	-0.0451	+0.6211
7	-1.0720	-1.9944	-0.0146	-0.8310	+0.5485	+0.4866	+0.0180
8	-1.1658	-1.9047	-0.2184	-0.4970	+0.2816	+0.6583	-0.0080
9	-1.0669	-1.5455	-0.4003	-0.0490	-0.0327	+0.7486	-0.0070
10	-0.8686	-1.1851	-0.4089	+0.0402	-0.2585	+0.7920	0.0000
11	-0.2036	-0.1778	+0.2645	+0.3580	-0.2781	+0.8850	0.0000
12	-0.0196	+0.1589	+0.1894	+0.1240	+0.0138	+0.7993	-0.1860

На основании этих уравнений получена следующая система нормальных уравнений (табл. 10).

Таблица 10

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	l
+8.37698	+ 8.04364 +12.15996	- 7.53137 - 2.80753 +11.29631	+1.23044 +1.10824 -0.89639 +3.75221	-2.60008 -0.58709 +3.84348 -3.22204 +4.28709	-0.17146 -3.80359 -3.44303 +0.06053 -1.80965 +5.71411	-0.51961 -0.64280 -0.53715 -0.83674 -0.86366 -0.30349

Решение нормальной системы производилось способом матриц, предложенным С. Г. Маковером (1956).
После нахождения неизвестных $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ были получены поправки элементов.

$$ndt = +0^{\circ}11070, da = -0.0008200, de = +0.0001274, dn = -0^{\circ}0000398.$$

Поправки элементов ориентации $d\omega, d\Omega, di$ определены по формулам:

$$\begin{aligned} \sin id\omega &= \sin \Omega d\psi_p - \cos \Omega (\cos ed\psi_p + \sin ed\psi_p), \\ di &= \cos \Omega d\psi_p + \sin \Omega (\cos ed\psi_p + \sin ed\psi_p), \\ d\Omega &= -\cos id\omega - \sin ed\psi_p + \cos ed\psi_p, \\ d\omega &= +3' 43^{\circ}60, d\Omega = -24^{\circ}29, di = -15^{\circ}65. \end{aligned}$$

Средние квадратичные ошибки поправок элементов вычислены по схеме, предложенной С. Г. Маковером (1956).

Для определения средних ошибок предварительно все поправки выражены через неизвестные $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$:

$$dT = \frac{20}{n} x_1,$$

$$da = 1000ax_1,$$

$$de = 1000(1-e)x_4 - 100(1-e)x_5,$$

$$d\omega = -100 \operatorname{cosec} i \cos \Omega \cos \varepsilon x_2 - 100 \operatorname{cosec} i \cos \Omega \sin \varepsilon x_3 + 100 \operatorname{cosec} i \sin \Omega x_6,$$

$$di = 100 \sin \Omega \cos \varepsilon x_2 + 100 \sin \Omega \sin \varepsilon x_3 + 100 \cos \Omega x_6,$$

$$d\Omega = 100 (\operatorname{ctg} i \cos \Omega \cos \varepsilon - \sin \varepsilon) x_2 + 100 (\operatorname{ctg} i \cos \Omega \sin \varepsilon + \cos \varepsilon) x_3 - 100 \operatorname{ctg} i \sin \Omega x_6.$$

Численные значения коэффициентов при x_1, x_2, \dots, x_6 , обозначаемые соответственно через g_1, g_2, \dots, g_6 , даны в табл. 11.

Таблица 11

	dT	da	de	$d\omega$	di	$d\Omega$
g_1	+9027.715					
g_2				-247.922	-3.691	+190.563
g_3				-107.520	-1.601	+191.644
g_4		+3922.030	+464.315			
g_5			-46.431			
g_6				-0.109	+99.919	+10.109

После этого в схеме вычисления весов неизвестных вместо правых частей нормальных уравнений l_i подставлены были величины g_i и выполнены все операции для вычисления весов.

Таким образом, получили окончательно следующие поправки элементов и их ошибки:

$$\begin{aligned} dT &= +0.11070 \pm 0.00989, \\ da &= -0.0008200 \pm 0.0006272, \\ de &= +0.0001274 \pm 0.0000635, \\ dn &= -0^{\circ}0000398 \pm 0.0000304, \\ d\omega &= +3' 43^{\circ}60 \pm 19^{\circ}28, \\ di &= -15^{\circ}65 \pm 1^{\circ}11, \\ d\Omega &= -24^{\circ}29 \pm 3^{\circ}78. \end{aligned}$$

Придав полученные поправки к исходным элементам (стр. 208), которые предварительно были переведены на 1950.0, мы получим элементы улучшенной орбиты:

Момент оскуляции 10.0 ноября 1951 г.

$T = 1951$, ноябрь 23.42307 эфем. вр.

$$\begin{aligned} \omega &= 44^{\circ} 29' 38^{\circ}37 & P_e &= +0.73894247 \\ \Omega &= 367^{\circ}41' 39^{\circ}87 & P_\Omega &= +0.46748821 \\ i &= 21^{\circ} 42' 1^{\circ}30 & P_i &= +0.48519972 \end{aligned} \quad 1950.0$$

$$\begin{aligned} a &= 3.9220304 & Q_e &= -0.67360429 \\ e &= 0.5356853 & Q_\Omega &= +0.52848200 \\ n &= 0^{\circ}1268930 & Q_i &= +0.51668559 \\ P &= 7.778 \text{ лет} \end{aligned}$$

Для контроля вычислений по новым элементам определены прямоугольные координаты x, y, z на моменты нормальных мест. Затем, прибавив возмущения, вычисленные выше, и переведя их в геоцентрическую систему, получили α и δ . После этого сравнили полученные экваториальные координаты с нормальными местами. Возникшие невязки и остаточные уклонения, получаемые при подстановке величин $ndT, d\psi_2, d\psi_1, d\psi_2, \frac{da}{a}, \frac{dq}{q}$

Таблица 12

№ нормальных мест	Дата (эфем. вр.)	По условным уравнениям		По окончательным элементам	
		$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
	1951 г.				
1	Октябрь 8.0	+0.1	+0.5	+0.1	+0.5
2	29.0	+0.6	-0.5	+0.5	-0.6
3	Ноябрь 26.0	-0.1	-0.0	-0.1	-0.1
4	Декабрь 21.0	-1.5	-0.2	-1.5	-0.3
	1952 г.				
5	Март 17.10135	+2.6	-0.7	+2.5	-0.7
6	Апрель 24.14981	-1.6	+1.0	-1.6	+1.0

§ 2. Предвычисление появления кометы 1951 X в 1959 г.

Чтобы дать эфемериду для предстоящего появления кометы в 1959 г., выполнено интегрирование уравнений движения на протяжении от 1 X 1951 г. по 6 II 1960 г. Интегрирование велось в баридентрической системе координат. При этом учитывались возмущающие ускорения от внутренних планет с 1 X 1951 г. по 28 IV 1952 г. и с 13 VIII 1959 г. по 6 II 1960 г., т. е. в течение 7 месяцев в 1951—60 гг. и 6 месяцев в 1959—60 гг.

Средняя ошибка одной нормальной координаты $\sigma = \pm 1^{\circ}50$.

Интегрировались дифференциальные уравнения барикентрического движения вида (Маковер, 1955)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2 \left(1 + \sum_i m_i \right) \frac{x}{r^3} = k^2 \sum_i m_i \left[\frac{x_i - x}{\Delta_i^3} - \frac{x_i - x}{r^3} + 3x \frac{xx_i + yy_i + zz_i}{r^5} \right] + k^2 \sum_j m_j \left[\frac{x_j - x}{\Delta_j^3} - \frac{x_j - x}{r^3} \right],$$

где \sum_i — знак суммирования по всем внутренним планетам, а \sum_j — по внешним планетам.

Интегрирование велось по методу квадратур с учетом возмущений от Юпитера, Сатурна, Марса, Венеры и Земли по следующим формулам:

$$x_n = f_n^{-2} + \frac{1}{12} f_n - \frac{1}{240} f_n^2 + \frac{1}{1951} f_n^3 - \dots,$$

$$f_n^2 = x_0 - \frac{1}{12} f_0 + \frac{1}{240} f_0^2 - \frac{1}{1951} f_0^3 + \dots,$$

$$f_n^{-1} = x_0 - x_{-1} - \frac{1}{12} f_{-1} + \frac{1}{240} f_{-1}^2 - \frac{1}{1951} f_{-1}^3 + \dots,$$

$$f_x = \omega^2 \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Функция f_i ее суммы (1-я и 2-я) и разности вычислялась в восьмью десятичными знаками; возмущающие ускорения — с девятью знаками и координаты кометы — с семью знаками.

Интервал интегрирования был следующий:

1 октября 1951 г. — 28 апреля 1952 г. ... 10 дней
 28 апреля 1952 г. — 21 февраля 1959 г. ... 20 " "
 21 февраля 1959 г. — 6 февраля 1960 г. ... 10 " "

Необходимость перехода на новый интервал определялась в процессе работы в зависимости от хода разностей интегрируемой функции. Возмущающие ускорения от действия Юпитера и Сатурна на Солнце брались из таблиц „Planetary coordinates“ (1939). При вычислении возмущающих ускорений Юпитера и Сатурна на комету величины $\frac{k^2 a_i^3 m_i}{\Delta^3}$ по аргументу Δ^2 брались из таблицы Г. Расмусена (Rasmussen, 1936).

Для внутренних планет из таблиц были взяты только их координаты. Сумма ускорений для этих планет вычислялась непосредственно. Сумма масс внутренних планет, выраженная в единицах массы Солнца, равна 0.00000595. Величины $k^2 a_i^3 m_i \cdot 10^{14}$ для Венеры, Земли и Марса, использованные в данной работе, соответственно равны 7288, 8967, 956.6 ($\omega = 10$ дням).

Чтобы начать интегрирование, вычислялись невозмущенные прямоугольные гелиоцентрические координаты с новыми элементами для пяти моментов: 1951 октябрь 21.0, 31.0 и ноябрь 10.0, 20.0, 30.0, расположенных симметрично относительно момента оскуляции. Прибавив к этим невозмущенным координатам возмущения координат из табл. 3 и поправки за барикентр из таблицы Расмусена (Rasmussen and Hesselberg, 1954), получим возмущенные прямоугольные барикентрические координаты кометы. Эти координаты являются исходными данными. С этими координатами вычислялись функции f и их разности.

Следует отметить, что вычисленные поправки за барикентр без учета Меркурия совпадают с поправками, взятыми из таблицы Расмусена, с точностью до единицы восьмого десятичного знака.

Орбита кометы лежит между орбитами Юпитера и Марса. Сближения с Юпитером возможны в окрестности афелия, с Марсом — около перигелия кометы. На протяжении оборота 1951—1959 гг. она не приближалась ни к Юпитеру, ни к Марсу.

На основании численного интегрирования получены следующие элементы кометы:

Оскуляция 20.0 Августа 1959 г.
 $T = 1959$, сентябрь 2.46552 афем. вр.
 $\omega = 44^\circ 36' 02''$
 $\Omega = 357^\circ 36' 30''$ 1950.0
 $i = 21^\circ 38' 58''$
 $a = 3.931139$
 $e = 0.534075$
 $n = 0^\circ 12' 6.452$
 $P = 7.80$ лет

В табл. 13 приводится эфемерида кометы на 1959 г. Прохождение кометы через перигелий — 2 сентября 1959 г. Видимая величина кометы вычислена по приближенной формуле $m = 9.6 + 19.4 \log r + 5 \log p$. Постоянные получены на основании оценок ее видимой величины в появлении 1951 г.

Таблица 13

№ п. п.	Дата (0 ^h афем. вр.)	$\alpha_{1950.0}$	$\delta_{1950.0}$	p	r	m
1959 г.						
1	Июль 21	3 ^h 0 ^m 55 ^s	+25° 20' 26"	2.010	1.875	16.4
2	31	3 23 34	+28 41 33	1.914	1.858	16.2
3	10	3 46 53	+31 59 48	1.821	1.845	16.1
4	20	4 10 49	+35 13 28	1.734	1.835	15.9
5	30	4 35 13	+38 21 5	1.653	1.832	15.8
6	Сентябрь 9	4 59 48	+41 21 24	1.577	1.832	15.8
7	19	5 24 12	+44 13 29	1.506	1.838	15.6
8	29	5 47 51	+46 57 14	1.442	1.848	15.6
9	Октябрь 9	6 10 1	+49 33 3	1.383	1.862	15.5
10	19	6 29 49	+52 1 27	1.331	1.881	15.5
11	29	6 46 10	+54 22 58	1.286	1.904	15.6
12	10	6 57 49	+56 36 32	1.249	1.932	15.6
13	18	7 3 35	+58 38 4	1.222	1.962	15.7
14	28	7 2 34	+60 20 7	1.207	1.995	15.8
15	8	6 54 41	+61 30 57	1.205	2.032	16.0
16	18	6 41 32	+61 58 14	1.220	2.072	16.2
17	28	6 26 15	+61 34 48	1.252	2.113	16.4

В предстоящем появлении кометы в 1959 г. условия для наблюдения будут немного хуже, чем в 1951 г. Как видно из эфемериды, оппозиция и прохождение через перигелий разделены четырехмесячным промежутком (в 1951 г. — полуторамесячным промежутком), расстояния от Земли и Солнца больше, чем в появлении 1951 г., поэтому яркость кометы будет немного меньше. Но зато большое положительное склонение дает возможность наблюдать ее на многих обсерваториях.

ЛИТЕРАТУРА

Загребин Д. В., Э. А. Митрофанова, Г. М. Позняк. 1955. Определение разности между эфемеридными временами и измерениями по наблюдениям покрытия звезд Луной. Бюлл. ИТА, 6, 1 (74).
 Кошартьев В. (Калинин) Д. А. 1956. Определение окончательной орбиты кометы 1930 VI Швассман-Вахман 3. Академия наук Латвийской ССР. Институт физики. Труды Астр. сектор. 6.
 Маковер С. Г. 1955. Комета Энке—Бакула. Сообщение 1. Труды ИТА, 4.
 Маковер С. Г. 1956. Решение системы нормальных уравнений при помощи матриц. Астр. ж., 33, 3.

- Сакк В. В. и Д. К. Кузиков. 1951. Определение окончательной орбиты кометы 1925 VII Шайн—Комас-Солье. Бюлл. ИТА, 4, 9 (62).
- Самойлова-Яхонтова Н. С. 1945. Исправление эллиптических орбит. Бюлл. АИ, [3], 53.
- Arend S. 1952. Comète Arend (1951). Bull. Astr. Obs. Belgique, 4, 6.
- Eckert W. and D. Brouwer. 1937. The use of rectangular coordinates in the differential correction of orbits. A. J., 46, 1069.
- Merton G. 1952. Comets (Annual report). M. N., 112, 3.
- Planetary Coordinates for the years 1940—1960. 1939.
- Rasmussen H. Q. 1936. Hilfstafeln für die numerische Integration der rechtwinkligen Koordinaten eines Himmelskörpers. A. N., 260, 6235—6256.
- Rasmussen H. Q. and O. K. Hesselberg. 1954. An appropriate method for integration of the motion of periodic comets. København.
- Vinter Hansen J. 1951 a. Circ. UAI, 1331.
- Vinter Hansen J. 1951 b. Circ. UAI, 1337.
- Vinter Hansen J. 1951 c. Circ. UAI, 1351.
- Vinter Hansen J. 1955. Circ. UAI, 1493.

Поступило в Редакцию
22 марта 1958 г.

Бюллетень Института Теоретической Астрономии

T. VII

1959

№ 3 (86)

Исследование движения кометы Неуймина 1 за 1931—1948 гг.

Х. К. Раудсаар

Эта комета с периодом обращения в 18 лет была открыта в 1913 г. Г. Н. Неуйминым и наблюдалась в 1931 и 1948 гг. Ванбисброк получил систему элементов кометы на основании наблюдений в 1913 и 1931 гг. с учетом возмущений от Юпитера и Сатурна. В настоящей работе получена система элементов на основании наблюдений 1931 и 1948 гг. с учетом возмущений от пяти планет.

ON THE MOVEMENT OF THE COMET NEUJMIN 1 IN 1931—1948, by H. Raadsaar. — This comet with a 18 years period of revolution was discovered by G. N. Neujmin in 1913 and was observed in 1931 and 1948. Van-Biesbroeck investigated its motion during the period 1913—1931, taking into account the perturbations due to Jupiter and Saturn. The aim of the present paper is to investigate the comet's movement during 1931—1948. The perturbations due to 5 planets have been computed according to Cowell's method. A new set of elements has been calculated on the basis of all the observations in 1931 and 1948.

Исследование движения короткопериодических комет привлекает в последнее время значительное внимание астрономов. Как известно, среди комет этой группы обнаружено несколько таких, движение которых не может быть объяснено действием одних только гравитационных сил. Эти кометы испытывают так называемое вековое ускорение или вековое замедление среднего движения. При более тщательных исследованиях у них удается заметить следы вековых изменений остальных эллиптических элементов. К числу комет, у которых обнаружены такие изменения, относятся: знаменитая комета Энке—Бакунда, кометы Брукса 2, д'Арре, Вольфа 1, Понс—Виннеке и распавшаяся в прошлом веке комета Биела. Изучению причин, вызывающих эти отклонения от чисто гравитационного движения, посвящены многие работы, например А. Д. Дубяго (1954). Неоднократно высказывались предположения, что не только вышеназванные шесть комет имеют отклонения от чисто гравитационного движения, но что этим же свойством обладают все члены семейства короткопериодических комет. И если до сих пор такие отклонения не были у них обнаружены, то это объясняется прежде всего отсутствием точной числовой теории их движения. Поэтому построение такой теории движения для возможно большего числа короткопериодических комет является весьма актуальной задачей.

Для нахождения аномалий в движении комет необходимо иметь ее наблюдения минимум за три появления. Из сопоставления первого и второго появлений кометы можно вывести уверенную систему ее оскулирующих элементов, а из объединения второго и третьего появлений — другую, независимую систему. Из сравнения первой и второй систем элементов для общей эпохи оскуляции можно получить выводы о существовании вековых изменений этих элементов. Понятно, что необходимостью предельно для такой обработки является точное вычисление возмущений кометы со стороны всех больших планет за исследуемый промежуток времени. Так как такая работа, вообще говоря, требует затраты значительного труда, то неудивительно, что для многих комет, наблюдавшихся в нескольких появлениях, она еще не выполнена.

Объектом настоящего исследования выбрана комета Неуймина 1, интересная по многим отношениям. Она наблюдалась в трех появлениях (1913, 1931, 1948) и, следовательно, для нее возможно определение вековых изменений элементов.

Известно, что комета Нейуина 1 имеет своеобразные элементы, а именно: ее период обращения близок к 18 годам, в то время как другие кометы, для которых обнаружены вековые ускорения, имеют периоды не более 5—6 лет. Необходимо выяснить, имеет ли место явление векового ускорения у комет с такими большими периодами.

Далее, интересны физические особенности кометы Нейуина 1. К их числу относятся прежде всего очень малая туманная оболочка кометы. Многие наблюдатели отмечали, что комета по внешнему виду имела часто почти звездобразный вид. Можно предположить, что вековое ускорение связано с процессами испарения твердых ядер и образования атмосферы кометы. Поэтому изучение вопросов об особенностях движения кометы с заведомо малой атмосферой имеет само по себе немалый интерес. Кроме этого, известно что комета Нейуина 1 быстро деинтегрируется. Ее абсолютная яркость, по данным С. К. Вехевятского (1956), быстро падает. Это видно из следующих данных:

Год	H_{10}
1913	10.3
1931	10.9
1948	11.9

Из приведенных данных следует, что за один оборот абсолютная звездная величина кометы увеличивается примерно на 0,8 звездной величины, что гораздо больше, чем для большинства других комет. Поэтому большой интерес представляет установление и наличие векового ускорения у кометы со столь большим изменением абсолютной звездной величины.

Наконец, существует еще одна причина, вызывающая особый интерес к изучению движения именно этой кометы. Она заключается в том, что открытие этой кометы связано с именем замечательного советского ученого, основателя и долголетнего директора Симензской обсерватории проф. Г. Н. Нейуина (1886—1946 гг.), открывшего за 35 лет своей наблюдательской деятельности 6 комет, в том числе 5 периодических, и значительное количество малых планет. Достоинство советской науки требует, чтобы научное наследство, оставленное нам таким талантливым наблюдателем, как Г. Н. Нейуин, было бы надлежащим образом обработано и чтобы изучению движения открытых им короткопериодических комет было уделено достаточное внимание.

1. Общие сведения о комете

Г. Н. Нейуин, исследуя на Симензской обсерватории одну из пластинок, снятых им 3 сентября 1913 г. для поисков малых планет, открыл новый объект, принятый им первоначально за малую планету. 6 сентября он же получил снимок объекта по способу Меткофа. Изображение объекта получилось в виде определенного и отчетливого звездобразного ядра; к юго-востоку от него была расположена веерообразная туманность — хвост длиной около 1". Стало очевидным, что вновь открытый объект — комета.

Е. Е. Барнард (Barnard, 1914) пишет, что в 40-дюймовый телескоп Иерской обсерватории при увеличении в 460 раз комета имела вид звезды. А при увеличении в 700 раз изображение кометы было несколько туманным. В хвосте кометы не замечалось никаких уплотнений. Звездная величина кометы, по определению Барнарда, составляла 11^m.2.

В дальнейшем Г. Н. Нейуин смог снять комету только 10 сентября, но и то из-за облачности удалось сделать снимок лишь с короткой экспозицией. На снимке вышли ядро и очень слабый хвост, похожий на туманность. 5 сентября комету наблюдал О. А. Бакулиа в Пулково. В телеграмме от 7 сентября он сообщает, что объект Нейуина — это безусловно комета. К. Граф из Бергедорфа сообщил 6 сентября, что объект Нейуина — это комета с очень небольшим хвостом. Всего комета Нейуина наблюдалась в 1913 г. 215 раз на 25 обсерваториях. Последний раз она наблюдалась на обсерватории Helwan 31 декабря 1913 г.

На основании наблюдений 1913 г. было опубликовано 7 приближенных орбит кометы, в том числе С. Эйнарссон и С. Е. Никольсон (Einarsson, Nicholson, 1913a, 1913b, 1913c,

222

1914) опубликовали четыре системы элементов, Э. Сигрев (Seagrave, 1914, 1929) — две, Ванбисбрек (Van-Biesbroeck, 1930) — одну. Исходя из последней системы элементов, Ванбисбрек вычислил возмущения кометы от Юпитера и Сатурна за 1913—1931 г. и ее эфемериду для появления 1931 г.

В 1931 г. комету Нейуин 1 обнаружил Никольсон 17 сентября на обсерватории Маунт-Вилсон после длительных поисков. Комета имела вид звезды 16-й величины без всяких признаков туманной оболочки. Позднее он же обнаружил комету на снимках от 20 августа. При втором появлении кометы условия ее видимости были весьма неблагоприятны: во время прохождения через перигелий и в течение двух месяцев после этого комета была в соединении с Солнцем.

Всего в 1931—1932 гг. было получено 33 наблюдения кометы на трех обсерваториях: Маунт-Вилсон, Иерской и Ликской. Последний раз ее наблюдал Никольсон 10 января 1932 г. на обсерватории Маунт-Вилсон в виде звезды 17-й величины.

Никольсон и Ричмонд (Nicholson, Richmond, 1932) вычислили элементы кометы по наблюдениям в августе, сентябре и октябре 1931 г. Эти элементы ими были использованы для составления эфемериды на конец 1931 г., а впоследствии Ванбисбреком для образования нормальных мест. На основании наблюдений 1913 и 1931 гг. Ванбисбрек (Van-Biesbroeck, 1935) вновь вычислил возмущения кометы, улучшил элементы ее орбиты, а также вычислил эфемериду кометы на появление 1948 г.

Впрочем следует оговориться, что вычисления возмущений, выполненные Ванбисбреком, далеки от совершенства. В самом деле, во-первых, принимались во внимание только возмущения от Юпитера и Сатурна. Во-вторых, возмущения за целый оборот кометы (почти 18 лет) вычислялись без смены оскуляции и притом в двух вариантах: исходя из элементов Ванбисбрера 1913 г. и исходя из элементов Никольсона 1931 г., в качестве окончательных значений возмущений принято среднее из двух вариантов.

Комета при появлении в 1948 г. была настолько слаба, что ее удалось сфотографировать всего только 11 раз на четырех обсерваториях, а именно: на обсерватории Маунт-Вилсон — 1 раз, на обсерватории Макдональд — 4 раза, на Иерской обсерватории — 3 раза и на обсерватории Боске-Аллегре — 3 раза. Впоследствии выяснилось, что единственное наблюдение на обсерватории Маунт-Вилсон ошибочно. Звездная величина кометы по оценке Иерской обсерватории составляла 16^m.

Таким образом, всего до настоящего времени комета наблюдалась 3 раза и имела следующие обозначения: 1913 III, 1931 I и 1948 XIII.

Целью настоящей работы является определение элементов кометы Нейуина 1 по ее наблюдениям в 1931—1932 и 1948 гг. Для этого нами было выполнено численное интегрирование уравнений движения кометы с 1931 по 1948 г. Интегрирование проведено в прямоугольной системе координат с восьмью десятичными знаками. Принимались во внимание возмущения от Венеры, Земли, Марса, Юпитера и Сатурна.

2. Вычисление возмущений кометы за период 1931—1948 гг.

За время с 9 апреля до 25 ноября 1931 г. возмущения вычислялись по методу Энке. Этот способ является самым удобным, когда возмущения невелики.

В качестве исходной системы оскулирующих элементов была принята система элементов Ванбисбрера, а именно:

$$\begin{aligned} T &= 1931 \text{ апр. } 30.0767 \text{ всем. вр.} \\ \omega &= 346^{\circ}96414 \\ \Omega &= 347^{\circ}30685 \\ i &= 15.14826 \\ e &= 0.7749251 \\ a &= 6.788457 \\ n &= 0^{\circ}05572466 \end{aligned} \quad 1931.0$$

Возмущения вычислялись от Венеры, Земли, Марса, Юпитера и Сатурна с интервалом в 10 дней. Результаты вычисления даны в табл. 1.

223

Таблица 2 (продолжение)

Table with columns: № п. п., Дата, x, y, z, № п. п., Дата, x, y, z. Rows 66-97, covering dates from 1939 to 1947.

Таблица 2 (продолжение)

Table with columns: № п. п., Дата, x, y, z, № п. п., Дата, x, y, z. Rows 135-159, covering dates from 1948 to 1949.

Таблица 3

Table with columns: № п. п., Дата (мес. и др.), x, y, z, О-С, Да, Аб, Источники. Rows 1-4, covering dates from 1981 to 1985.

Таблица 3 (продолжение)

№ п.п.	Дата (мес. пр.)	Уровень	Р%	Уровень	Р%	Уровень	Р%	О-С		Наблюдатель	Место наблюдения	Источник
								Δт	Δ%			
5	1931 Октябрь 13, 1930	4 20 51,52	-0,20	4 20 51,52	1,5	4 20 51,52	0,0	-1,9	0,30	Валбесберг, Хаб.	Иерс.	А. J., 42, 29.
6	16, 20, 25	4 48 36,47	0,081	4 48 36,47	0,0	4 48 36,47	0,0	-0,08	-7,0	Валбесберг, Иерс.	Иерс.	А. J., 42, 29.
7	17, 14, 12	4 48 06,41	0,081	4 48 06,41	0,0	4 48 06,41	0,0	-0,31	-7,0	Валбесберг, Иерс.	Иерс.	А. J., 42, 29.
8	17, 14, 12	4 48 06,41	0,081	4 48 06,41	0,0	4 48 06,41	0,0	-0,31	-7,0	Валбесберг, Иерс.	Иерс.	А. J., 42, 29.
9	17, 14, 12	4 48 06,41	0,081	4 48 06,41	0,0	4 48 06,41	0,0	-0,31	-7,0	Валбесберг, Иерс.	Иерс.	А. J., 42, 29.
10	17, 14, 12	4 48 06,41	0,081	4 48 06,41	0,0	4 48 06,41	0,0	-0,31	-7,0	Валбесберг, Иерс.	Иерс.	А. J., 42, 29.
11	18, 20, 25	4 47 35,50	0,081	4 47 35,50	0,0	4 47 35,50	0,0	-0,26	-5,3	Валбесберг, Иерс.	Иерс.	А. J., 42, 29.
12	18, 20, 25	4 47 35,50	0,081	4 47 35,50	0,0	4 47 35,50	0,0	-0,26	-5,3	Валбесберг, Иерс.	Иерс.	А. J., 42, 29.
13	18, 20, 25	4 47 35,50	0,081	4 47 35,50	0,0	4 47 35,50	0,0	-0,26	-5,3	Валбесберг, Иерс.	Иерс.	А. J., 42, 29.
14	18, 20, 25	4 47 35,50	0,081	4 47 35,50	0,0	4 47 35,50	0,0	-0,26	-5,3	Валбесберг, Иерс.	Иерс.	А. J., 42, 29.
15	18, 20, 25	4 47 35,50	0,081	4 47 35,50	0,0	4 47 35,50	0,0	-0,26	-5,3	Валбесберг, Иерс.	Иерс.	А. J., 42, 29.
16	18, 20, 25	4 47 35,50	0,081	4 47 35,50	0,0	4 47 35,50	0,0	-0,26	-5,3	Валбесберг, Иерс.	Иерс.	А. J., 42, 29.
17	18, 20, 25	4 47 35,50	0,081	4 47 35,50	0,0	4 47 35,50	0,0	-0,26	-5,3	Валбесберг, Иерс.	Иерс.	А. J., 42, 29.
18	18, 20, 25	4 47 35,50	0,081	4 47 35,50	0,0	4 47 35,50	0,0	-0,26	-5,3	Валбесберг, Иерс.	Иерс.	А. J., 42, 29.
19	18, 20, 25	4 47 35,50	0,081	4 47 35,50	0,0	4 47 35,50	0,0	-0,26	-5,3	Валбесберг, Иерс.	Иерс.	А. J., 42, 29.
20	18, 20, 25	4 47 35,50	0,081	4 47 35,50	0,0	4 47 35,50	0,0	-0,26	-5,3	Валбесберг, Иерс.	Иерс.	А. J., 42, 29.
21	18, 20, 25	4 47 35,50	0,081	4 47 35,50	0,0	4 47 35,50	0,0	-0,26	-5,3	Валбесберг, Иерс.	Иерс.	А. J., 42, 29.
22	18, 20, 25	4 47 35,50	0,081	4 47 35,50	0,0	4 47 35,50	0,0	-0,26	-5,3	Валбесберг, Иерс.	Иерс.	А. J., 42, 29.
23	18, 20, 25	4 47 35,50	0,081	4 47 35,50	0,0	4 47 35,50	0,0	-0,26	-5,3	Валбесберг, Иерс.	Иерс.	А. J., 42, 29.
24	18, 20, 25	4 47 35,50	0,081	4 47 35,50	0,0	4 47 35,50	0,0	-0,26	-5,3	Валбесберг, Иерс.	Иерс.	А. J., 42, 29.
25	18, 20, 25	4 47 35,50	0,081	4 47 35,50	0,0	4 47 35,50	0,0	-0,26	-5,3	Валбесберг, Иерс.	Иерс.	А. J., 42, 29.
26	18, 20, 25	4 47 35,50	0,081	4 47 35,50	0,0	4 47 35,50	0,0	-0,26	-5,3	Валбесберг, Иерс.	Иерс.	А. J., 42, 29.
27	18, 20, 25	4 47 35,50	0,081	4 47 35,50	0,0	4 47 35,50	0,0	-0,26	-5,3	Валбесберг, Иерс.	Иерс.	А. J., 42, 29.
28	18, 20, 25	4 47 35,50	0,081	4 47 35,50	0,0	4 47 35,50	0,0	-0,26	-5,3	Валбесберг, Иерс.	Иерс.	А. J., 42, 29.
29	18, 20, 25	4 47 35,50	0,081	4 47 35,50	0,0	4 47 35,50	0,0	-0,26	-5,3	Валбесберг, Иерс.	Иерс.	А. J., 42, 29.
30	18, 20, 25	4 47 35,50	0,081	4 47 35,50	0,0	4 47 35,50	0,0	-0,26	-5,3	Валбесберг, Иерс.	Иерс.	А. J., 42, 29.
31	18, 20, 25	4 47 35,50	0,081	4 47 35,50	0,0	4 47 35,50	0,0	-0,26	-5,3	Валбесберг, Иерс.	Иерс.	А. J., 42, 29.
32	18, 20, 25	4 47 35,50	0,081	4 47 35,50	0,0	4 47 35,50	0,0	-0,26	-5,3	Валбесберг, Иерс.	Иерс.	А. J., 42, 29.
33	18, 20, 25	4 47 35,50	0,081	4 47 35,50	0,0	4 47 35,50	0,0	-0,26	-5,3	Валбесберг, Иерс.	Иерс.	А. J., 42, 29.
34	18, 20, 25	4 47 35,50	0,081	4 47 35,50	0,0	4 47 35,50	0,0	-0,26	-5,3	Валбесберг, Иерс.	Иерс.	А. J., 42, 29.
35	18, 20, 25	4 47 35,50	0,081	4 47 35,50	0,0	4 47 35,50	0,0	-0,26	-5,3	Валбесберг, Иерс.	Иерс.	А. J., 42, 29.
36	18, 20, 25	4 47 35,50	0,081	4 47 35,50	0,0	4 47 35,50	0,0	-0,26	-5,3	Валбесберг, Иерс.	Иерс.	А. J., 42, 29.

Таблица 3 (продолжение)

№ п.п.	Дата (мес. пр.)	Уровень	Р%	Уровень	Р%	Уровень	Р%	О-С		Наблюдатель	Место наблюдения	Источник
								Δт	Δ%			
37	1948 Сентябрь 3, 10, 17, 24	15 30 7,50	+0,21	15 30 7,50	0,0	15 30 7,50	0,0	-10,85	+4,45	Валбесберг, Мандола.	Иерс.	А. J., 55, 56.
38	15 30 7,50	+0,21	15 30 7,50	0,0	15 30 7,50	0,0	-10,85	+4,45	Валбесберг, Мандола.	Иерс.	А. J., 55, 56.	
39	15 30 7,50	+0,21	15 30 7,50	0,0	15 30 7,50	0,0	-10,85	+4,45	Валбесберг, Мандола.	Иерс.	А. J., 55, 56.	
40	15 30 7,50	+0,21	15 30 7,50	0,0	15 30 7,50	0,0	-10,85	+4,45	Валбесберг, Мандола.	Иерс.	А. J., 55, 56.	
41	15 30 7,50	+0,21	15 30 7,50	0,0	15 30 7,50	0,0	-10,85	+4,45	Валбесберг, Мандола.	Иерс.	А. J., 55, 56.	
42	15 30 7,50	+0,21	15 30 7,50	0,0	15 30 7,50	0,0	-10,85	+4,45	Валбесберг, Мандола.	Иерс.	А. J., 55, 56.	
43	15 30 7,50	+0,21	15 30 7,50	0,0	15 30 7,50	0,0	-10,85	+4,45	Валбесберг, Мандола.	Иерс.	А. J., 55, 56.	
44	15 30 7,50	+0,21	15 30 7,50	0,0	15 30 7,50	0,0	-10,85	+4,45	Валбесберг, Мандола.	Иерс.	А. J., 55, 56.	

Таблица 4

Представление нормальных весов

№ п.п.	Дата (мес. пр.)	Уровень	Р%	Уровень	Р%	Уровень	Р%	Дл. улучшения		Дл. ухудшения		После улучшения	Сравнение с нормальными значениями 1931 г.	Сравнение с нормальными значениями 1948 г.
								Δт	Δ%	Δт	Δ%			
1	1931 Август 20, 46, 64	4 13 53,23	0,0	4 13 53,23	0,0	4 13 53,23	0,0	1,1	1,6	1,4	1,0	1,25	—	—
2	Сентябрь 18, 0	4 45 29,16	0,0	4 45 29,16	0,0	4 45 29,16	0,0	0,2	1,1	1,5	1,1	1,0	—	—
3	Октябрь 10, 0	4 26 32,54	0,0	4 26 32,54	0,0	4 26 32,54	0,0	4,9	5,7	6,6	6,6	6,6	—	—
4	Ноябрь 8, 0	3 52 20,43	0,0	3 52 20,43	0,0	3 52 20,43	0,0	—	—	—	—	—	—	—
5	1932 Январь 4, 0	3 35 28,00	0,0	3 35 28,00	0,0	3 35 28,00	0,0	—	—	—	—	—	—	—
6	1948 Июль 12, 0	14 59 58,87	0,0	14 59 58,87	0,0	14 59 58,87	0,0	—	—	—	—	—	—	—
7	Сентябрь 4, 0	15 51 47,05	0,0	15 51 47,05	0,0	15 51 47,05	0,0	—	—	—	—	—	—	—
8	Октябрь 30, 0	15 54 11,43	0,0	15 54 11,43	0,0	15 54 11,43	0,0	—	—	—	—	—	—	—
9	Ноябрь 30, 0	15 54 11,43	0,0	15 54 11,43	0,0	15 54 11,43	0,0	—	—	—	—	—	—	—

После произведенного сравнения наблюдения были объединены в нормальные места. Все наблюдения хорошо укладываются в девять групп, поэтому решено было образовать девять нормальных мест (табл. 4). Для момента каждого из нормальных мест была выбрана круглая дата, которая находится приблизительно в середине данной группы наблюдений. Отклонения $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$ для нормальных мест определялись как средние арифметические значения всех отклонений соответствующей группы.

Для исправления орбиты был принят способ Эккерта-Брауера.

Обозначая через x, y, z прямоугольные экваториальные координаты, x', y', z' — проекции скоростей, t — момент нормального места, T — момент прохождения через перигелий 1931 г., $p = a(1 - e^2)$ — параметр орбиты и полагая для краткости

$$K = \frac{p+r}{a^2 ep} \cdot \frac{r'}{n} \text{ и } H = \frac{r+r-2a}{ep}$$

получим следующий вид коэффициентов условных уравнений: (1)

$$\begin{aligned} n\delta T \quad \delta\psi_x \quad \delta\psi_y \quad \delta\psi_z \quad \delta n \quad \delta e \\ \delta x = \frac{\dot{x}}{n} \quad 0 \quad -z \quad -y \quad + \left[\frac{\dot{x}}{n}(t-T) - \frac{2}{3} \frac{x}{n} \right] \quad + \left[Hx + K \frac{\dot{x}}{n} \right], \\ \delta y = \frac{\dot{y}}{n} \quad -z \quad 0 \quad +x \quad + \left[\frac{\dot{y}}{n}(t-T) - \frac{2}{3} \frac{y}{n} \right] \quad + \left[Hy + K \frac{\dot{y}}{n} \right], \\ \delta z = \frac{\dot{z}}{n} \quad +y \quad -x \quad 0 \quad - \left[\frac{\dot{z}}{n}(t-T) - \frac{2}{3} \frac{z}{n} \right] \quad + \left[Hz + K \frac{\dot{z}}{n} \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Вариации сферических координат связаны с вариациями прямоугольных координат формулой

$$\begin{Bmatrix} \cos \delta \Delta\alpha \\ \Delta\delta \end{Bmatrix} = \frac{1}{p} \begin{Bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -\sin \alpha & -\cos \alpha \sin \delta \\ \cos \alpha & -\sin \alpha \sin \delta \\ 0 & \cos \delta \end{Bmatrix}. \quad (3)$$

Коэффициенты условных уравнений и свободные члены (выраженные в 100 сек. дуги) были приведены к численной однородности. Полученная система условных уравнений представлена в табл. 5 (L — свободные члены в правых частях уравнений).

Таблица 5
Условные уравнения

№ уравнения	$5n\delta T$	$\delta\psi_x$	$\delta\psi_y$	$\delta\psi_z$	$25000\delta n$	$5\delta e$	L
1	-0.8730	-0.1964	-0.3934	+0.7933	+0.0335	+1.0711	+0.0112
2	-0.8715	-0.1924	-0.5708	+0.9082	+0.0390	+1.2327	-0.0023
3	-0.9719	-0.2384	-0.7317	+1.0939	+0.0449	+1.4056	-0.0176
4	-1.0690	-0.3410	-0.7894	+1.2091	+0.0470	+1.4720	-0.0494
5	-1.0543	-0.4633	-0.7439	+1.1755	+0.0433	+1.3661	-0.0657
6	-0.8971	-0.4772	-0.6536	+1.0136	+0.0365	+1.1540	-0.0538
7	-0.8757	-0.6110	-0.6118	+0.9991	+1.1114	-1.3193	-1.2400
8	-0.9645	-0.3486	-0.5577	+0.6689	+1.2079	-1.0998	-1.3194
9	-1.4331	+0.1212	-0.2222	+0.6287	+1.8314	-0.4694	-1.8713
1	-0.2715	+0.6211	-0.7801	-0.2791	+0.0081	+0.2618	-0.0410
2	-0.1032	+0.8970	-0.7379	-0.3292	+0.0055	+0.1730	-0.0730
3	-0.0204	+1.1637	-0.7079	-0.2687	+0.0056	+0.1636	-0.0440
4	-0.0695	+1.2866	-0.7137	-0.1406	+0.0090	+0.2638	-0.0573
5	-0.2013	+1.2856	-0.6920	+0.0863	+0.0134	+0.4032	-0.0340
6	-0.2484	+1.1809	-0.5813	+0.1918	+0.0134	+0.4073	-0.0480
7	+0.5938	-1.2156	+0.6521	-0.3282	-0.7453	+0.6220	+0.8430
8	+0.2014	-1.0138	+0.1284	-0.3111	-0.3781	-0.3214	+0.4550
9	-0.6616	-0.4390	-0.6077	-0.1547	+0.8488	-0.1083	-0.9450

Система нормальных уравнений, соответствующая приведенной системе условных уравнений, представлена в табл. 6 вместе с решением этой системы по способу матриц (Маковер, 1956).

Таблица 6
Нормальные уравнения и их решение

$5n\delta T$	$\delta\psi_x$	$\delta\psi_y$	$\delta\psi_z$	$25000\delta n$	$5\delta e$	L
+10.34942	+0.88610 +11.15107	+6.62253 -3.29347 -7.14604	-8.53567 -2.66551 -4.81243	-6.12619 -3.01027 +3.55351	-4.29038 -0.52376 -4.19982	+6.52524 -0.32136 -3.43489 +5.32426 -3.72996 -3.99728 -8.01174 +14.20384 -4.41975
+10.34942	+0.88610 +11.07520	+6.62253 -3.86048 +1.56268	-8.53567 -1.93470 -0.02488 +1.54718	-6.12619 +0.54572 +1.10006 +1.80847	-4.29038 -0.15642 -1.50895 -1.79442 -3.91299 -0.55510	+6.52524 -0.38004 -1.04732 +1.48132 -2.04138 +0.02953
+1.00000	+0.08562 +1.00000	+0.63989 -0.34857 +1.00000	-0.82475 -0.17469 -0.01592 +1.00000	-0.59194 +0.04927 +0.70396 +1.00000	-0.41455 -0.01412 -0.95562 -1.12102 -2.16370 -1.00000	+6.63049 -0.07946 -0.61021 +0.95743 -1.12879 +0.04239
-0.04631	+0.00389	+0.10047	-0.01926	-1.03706	+0.04239	

Решение системы нормальных уравнений дало следующие поправки элементов и их средние ошибки:

$$\begin{aligned} \delta T &= -0^{\circ}00462 \pm 0^{\circ}00975 \\ \delta i &= -0^{\circ}00041 \pm 0.00026 \\ \delta \omega &= -0.00885 \pm 0.00240 \\ \delta \Omega &= +0.00695 \pm 0.00223 \\ 1000 \delta n &= -0.00115 \pm 0.00008 \\ \delta e &= +0.00024 \pm 0.00018 \end{aligned}$$

В результате улучшения орбиты были получены две системы элементов

Система I
Оскуляция 1931 май 9.0
T = 1931 апр. 30.0721
ω = 346°95529
Ω = 347.31380 1931.0
i = 15°14785
e = 0.7749292
a = 6.788551
n = 0°05572351

Система II
Оскуляция 1948 дек. 15.0
T=1948 дек. 15.93892
 $\omega = 346^{\circ}68889$
 $\Omega = 347^{\circ}17380$
 $i = 15^{\circ}00365$ } 1950.0
 $e = 0.7744632$
 $a = 6.860925$
 $n = 0.0548441$

Для контроля вычислений остаточные члены условных уравнений были вычислены двумя способами: во-первых, путем подстановки в условные уравнения вычисленных значений поправок элементов и, во-вторых, путем нового численного интегрирования прямоугольных координат кометы от соответствующего момента оскуляции (1931 или 1948 г.) до момента каждого из нормальных мест и путем сравнения этих нормальных мест с вновь полученными прямоугольными координатами. Ближайшее совпадение тех и других вычислений служит хорошим контролем правильности вычислений.

В табл. 4 представлены значения $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$ после улучшения элементов орбиты. Как видно из табл. 4, отклонения для наблюдений 1931 г. остались прежними, а для 1948 г. они существенно уменьшились и стали по величине такими же, как для 1931 г.

Средняя ошибка одного нормального места $\sigma = \pm 2''.4$.

Заключение

Целью настоящей работы было исследование движения кометы Нейумин I за промежуток времени с 1931 по 1948 г. Полученная нами улучшенная система элементов может быть использована для вычисления приближенных возмущений вперед до появления 1966 г. и для вычисления эфемерид на это появление.

Поскольку комета наблюдалась уже в трех появлениях, можно было бы сделать попытку определения векового ускорения ее движения. К сожалению, в настоящее время это невозможно, так как возмущения, полученные Ванбисбреком за период 1913—1931 гг., вычислены слишком неточно.

ЛИТЕРАТУРА

- Всежвятский С. К. 1956. Каталог абсолютных величин комет. Астр. ж., 33, 4.
 Дубяго А. Д. 1954. О движении комет. Труды Сталинградской астр. об., 4, 5.
 Маккер С. Г. 1956. Решение системы нормальных уравнений при помощи матриц. Астр. ж., 33, 423.
 Bagnard E. 1914. Neujmns Comet. A. N., 196, 181.
 Einarsson S., S. B. Nicholson. 1913a. Elements and ephemeris of object Neujmin. L. O. B., 7, 160.
 Einarsson S., S. B. Nicholson. 1913b. Second elements and ephemeris of object Neujmin. L. O. B., 7, 189.
 Einarsson S., S. B. Nicholson. 1913c. Third elements and ephemeris of object Neujmin. L. O. B., 8, 22.
 Einarsson S., S. B. Nicholson. 1913d. Comet 1913 c (Neujmin). A. J., 28, 48.
 Einarsson S., S. B. Nicholson. 1914. Parabolic elements of Neujmns comet. A. N., 196, 15.
 Nicholson S. B., M. L. Richmond. 1932. Observations of comet Neujmin I (1931 III). A. J., 42, 33.
 Seagrave F. E. 1914. Neujmns comet. A. J., 28, 152.
 Seagrave F. E. 1929. Elements of Neujmns comet 1913 III = 1913c. A. J., 40, 18.
 Van-Biesbroeck G. 1930. The return of comet 1913 III (Neujmin) in 1931. A. J., 40, 78.
 Van-Biesbroeck G. 1935. The orbit of periodic comet 1913 III (Neujmin). A. J., 44, 113.

Поступило в Редакцию
19 апреля 1958 г.

Бюллетень Института Теоретической Астрономии

T. VII

1959

№ 3(86)

Очерк математических работ Михаила Федоровича Субботина

(к 65-летию со дня рождения)

Г. А. Мерляин

Настоящая статья не претендует на освещение всех работ Михаила Федоровича Субботина. Это не может быть сделано прежде всего потому, что круг вопросов, охватываемый ими, слишком широк. Алгебра, дифференциальные уравнения, теория вероятностей, прикладная и вычислительная математика, небесная механика, астрометрия, история астрономии, составление учебников и популярных статей — таков приблизительный перечень разделов науки, которыми занимается Михаил Федорович, начиная с 1916 г. Ясно, что сколько-нибудь серьезный разбор столь разных вещей может быть выполнен лишь в результате сотрудничества представителей нескольких специальностей. Конечно, при отборе материала не могли не сказаться и личные вкусы автора предлагаемой статьи, но есть и другая, объективная причина, заставляющая обратиться именно к математическим работам М. Ф. Субботина. Дело в том, что благодаря неблагоприятному стечению обстоятельств эта сторона его творчества меньше всего известна, хотя работы М. Ф. Субботина как в области чистой, так и прикладной математики по актуальности поставленных задач, оригинальности и эффективности методов их решения, по глубине и общности полученных результатов заслуживают, по нашему мнению, того, чтобы с ними познакомиться и математики и астрономы.

Приведем два характерных примера.
 Первая и одна из самых оригинальных работ Михаила Федоровича по чистой математике — «О форме степенных разложений алгебраических функций» — была опубликована в «Известиях Донского политехнического института» в Новочеркасске. Трудно, конечно, ожидать, чтобы эти «Annales de l'Institut Polytechnique du Don», вышедшие в 1919 г., дошли когда-нибудь до алгебраистов. Между тем, там содержится решение очень интересной, с точки зрения теории функций, проблемы: как решить, является ли функция, заданная рядом Тейлора, трансцендентной. 22-летний автор чувствует себя совершенно свободно в области самых тонких вопросов высшей алгебры (теория алгебраических чисел) и алгебраических функций (теория Руисеух). Анализ проводится им со всей возможной общностью, не оставляющей места для каких-либо дополнений.

Другая работа М. Ф. Субботина «Об одном способе улучшения сходимости тригонометрических рядов, имеющих основное значение для небесной механики» достаточно известна астрономам. Однако это исследование имеет гораздо более широкое значение для математики, так как в ней содержится общий метод улучшения сходимости рядов Фурье для аналитических функций. Математики же не знают этой работы, так как им не приходится в голову искать подобную вещь в астрономических изданиях.

По указанным причинам мы совершенно не касаемся здесь широко известного трехтомного «Курса небесной механики», являющегося до сих пор времени единственным пособием на русском языке, способным удовлетворить не только нужды студентов, но и астрономов-практиков, а также работ по астрометрии и статей по истории астрономии. Почти незатронутым остался также цикл работ по численному интегрированию.

Математические работы мы объединили в три группы, соблюдая внутри каждой из них в основном хронологический порядок. Первая группа включает работы по теории функций. Мы старались излагать их с наибольшей полнотой, воспроизводя часто не только результаты, но и доказательства или их основные идеи. Вторая группа — исследования по теории вероятностей. Третья группа объединяет довольно разнородные по характеру работы, имеющие отношение к небесной механике. Большая или меньшая обстоятельность их освещения определялась, однако, не их значением для небесной механики, а их математичностью.

В заключение приводится полная библиография научных трудов М. Ф. Субботина, включающая 76 названий и охватывающая период с 1916 по 1958 г. Большая работа по сравнению этих работ была проведена библиотекарями Института теоретической астрономии Л. А. Зудовой и Н. С. Бергман, которым автор приносит свою благодарность.

I. Теория функций

Первая математическая работа М. Ф. Субботина „О форме коэффициентов степенных разложений алгебраических функций“ (1919) относится к алгебре и является обобщением следующей теоремы, высказанной Эйзенштейном: „Если коэффициенты ряда

$$y = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots \quad (1)$$

представляющего алгебраическую функцию, — рациональные числа, то можно указать такое целое число a , что после замены $z = \frac{x}{a}$ коэффициенты разложения по степеням z будут целыми числами“.

Эта теорема интересна главным образом по своим приложениям к доказательству трансцендентности аналитических функций, заданных рядом Тейлора, например e^x , $\sin x$ и т. п. В самом деле, знаменатели коэффициентов Тейлора этих функций растут как $1!$ и поэтому не могут быть представлены в виде a^n . Следовательно, по теореме Эйзенштейна они не могут удовлетворять никакому алгебраическому уравнению. Это было замечено уже Гейне, впервые доказавшим теорему Эйзенштейна. М. Ф. Субботин указывает на нестрогость этого замечания: теорема Эйзенштейна позволяет лишь утверждать, что e^x , $\sin x$ и т. п. не могут удовлетворять алгебраическому уравнению с рациональными коэффициентами. Для доказательства же трансцендентности e^x и т. п. необходимо рассмотреть алгебраические уравнения, коэффициенты которых представляли бы собой числа произвольной арифметической природы, что, как мы увидим ниже, и было выполнено М. Ф. Субботин-м.

Теорема Эйзенштейна была уточнена Кохом, который дал следующее выражение для коэффициентов ряда (1):

$$C_n = \frac{h_n}{b^{2n-1}}, \quad h_n = -K_n b^n c^{n-1} \pmod{h},$$

$$K_1 = K_2 = 1, \quad K_n = \frac{(n+1) \dots (2n-2)}{(n-1)!},$$

где h, b, c — целые числа.

М. Ф. Субботин приводит пример, противоречащий этому результату, и показывает, каким образом следует исправить формулировку Коха, чтобы сделать его теорему применимой.

Квинтесбергер обобщил теорему Эйзенштейна на случай уравнений, алгебраических по y , но аналитических по x . Однако его результат менее определен, чем, например, та форма, которую получил Кох для коэффициентов ряда (1).

Теорема М. Ф. Субботина обобщает все перечисленные результаты (в том числе исправленную теорему Коха). Это обобщение идет не только по формальной линии [вместо ряда (1) по целым степеням x рассматриваются ряды по любым дробным степеням], но главным образом в сторону очень глубокого обобщения класса рассматри-

ваемых уравнений, что позволяет, как было отмечено выше, применить этот результат для строгих доказательств трансцендентности.

Эта широкая постановка вопроса у М. Ф. Субботина была навеяна работами Д. Д. Мордухай-Болтовского, изучавшего арифметическую природу коэффициентов степенных разложений решений дифференциальных уравнений; однако само доказательство базируется у М. Ф. Субботина на иной точке зрения, позволяющей, с одной стороны, значительно упростить его, а с другой — получить более сильные результаты.

Итак, рассматривается следующая задача. Пусть функция $y(x)$, аналитическая при $x=0$

$$y(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots \quad (1)$$

удовлетворяет уравнению, алгебраическому относительно y :

$$f(x, y) = A_0(x) + A_1(x)y + \dots + A_m(x)y^m = 0, \quad (2)$$

коэффициенты которого аналитические при $x=0$ функции

$$A_i(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}x^j \quad (i=0, 1, \dots, m).$$

Числа a_{ij} ($i=0, 1, \dots, m; j=0, 1, 2, \dots$) совершенно произвольны. Уравнение (2) предполагается неприводимым в области рациональности (a) . Смысл этого условия заключается в следующем. Рассмотрим всевозможные числа, которые можно получить из коэффициентов a_{ij} путем применения рациональных операций (сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в целую степень) и называем полученную таким образом совокупность чисел областью рациональности (a) . Неприводимость уравнения (2) означает, что его левая часть не может быть разложена на множители вида (2) с коэффициентами, которые представлялись бы, как и A_i , рядами Тейлора по x , коэффициенты которых принадлежали бы области (a) .

Спрашивается, какова будет форма коэффициентов C в функции от a_{ij} ? Очевидно, прежде всего, что C_0 является корнем уравнения

$$f(0, C_0) = a_{00} + a_{10}C_0 + \dots + a_{m0}C_0^m = 0.$$

Здесь могут представиться два случая: 1) C_0 — простой корень этого уравнения и, следовательно, $-a = a_{10} + 2a_{20}C_0 + \dots + ma_{m0}C_0^{m-1} \neq 0$ и 2) C_0 — кратный корень, а $a = 0$.

В первом случае, подставляя ряд (1) в уравнение (2) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , М. Ф. Субботин получает рекуррентные соотношения:

$$C_n = \frac{a_{n0}}{a} + \frac{1}{a} \sum_{\beta_1+\dots+\beta_m=n} a_{1\beta_1} C_{n-\beta_1} + \frac{1}{a} \sum_{\beta_1+\dots+\beta_m=n} a_{2\beta_2} C_{n-\beta_2} \dots C_{1\beta_m} C_{1\beta_1} \dots C_{1\beta_m}$$

где

$$k = \begin{cases} n, & \text{если } n < m \\ m, & \text{если } n \geq m \end{cases}, \quad \beta_i \geq 1, \beta_i \geq 0, i \geq 2, \gamma_j \geq 1, j \geq 1,$$

$$a_{gh} = \sum_{j=g}^m \frac{h}{(j-g)!} a_{j,h} C_0^{j-g} \quad (g=0, 1, \dots, m; h=0, 1, \dots),$$

что приводит к заключению:

$$C_n = \frac{P_n}{a^{2n-1}},$$

где P_n — полином с целыми коэффициентами от a_{ik} ($i+k \leq n$) степени $2n-1$. Так как степень a_{ik} относительно C_0 не превосходит m , то степень P_n относительно C_0 не превосходит $2n-1$.

восходит $(2n-1)m$, а соответствующие коэффициенты представляют собой полиномы с целыми коэффициентами от чисел a_{ij} (принадлежат области $[a]$). Располагая P_n по степеням a , можно получить выражение

$$P_n = Q_n + R_n a + S_n a^2 + \dots + \tau_n a^{2n-2},$$

где, в частности, $Q_n = K_n a_0^{2n-1}$ (K_n — число, фигурирующее в теореме Коха).

Далее, переходя к случаю $a=0$, М. Ф. Субботин, пользуясь теорией Puiseux, исправляет ошибку Коха, который считал свой результат верным и в случае $\frac{df(0, C_0)}{dC_0} = 0$. В этом случае среди m ветвей функции y , определяемой уравнением (2), имеются, кроме ряда (1), еще другие, обращающиеся в C_0 при $x=0$. Ни одна из них не может быть тождественна с ветвью (1), так как тогда уравнение (2) имело бы кратный корень y в окрестности точки $x=0$ и общий множитель с производной, для которого левую часть (2), мы получили бы разложение (2) на множители, что противоречит условию неприводимости в области (a) . Поэтому, если, кроме ветви (1), имеются еще ветви $y_i = C_0 + C_1^i x + C_2^i x^2 + \dots$ ($i=1, \dots, h \leq m$), то всегда можно определить такое k , чтобы $C_0^k \neq C_k$. Делая замену

$$y = C_0 + C_1 x + \dots + C_k x^k + x^k y_i,$$

найдем для нашей ветви

$$\eta = C_{k+1} x + C_{k+2} x^2 + \dots,$$

а другие ветви η при $x=0$ должны обращаться в бесконечность. Следовательно, для искомой ветви для всех коэффициентов должно получиться единственное решение, и все дальнейшее сводится к предыдущему случаю. На основании полученных результатов можно утверждать, что

$$C_{k+n} = \frac{P_n}{a^{2n-1}},$$

где P_n — полином степени $2n-1$ с целыми коэффициентами от чисел a_{ij} ($i+j \leq n$), которые в свою очередь являются полиномами степени m от C_0, C_1, \dots, C_k с коэффициентами, принадлежащими области (a) .

Наличие случаев, для которых $k > 0$, как раз и противоречит теореме Коха. Далее М. Ф. Субботин обобщает свой результат на случай алгеброиды

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} C_j x^j, \quad (3)$$

удовлетворяющего уравнению

$$A_0(x) + A_1(x)y + \dots + A_m(x)y^m = 0,$$

где

$$A_i(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} x^j \quad (i=0, 1, 2, \dots, m).$$

Без труда получается форма коэффициентов C :

$$C_{\mu+n} = \frac{1}{a^{2\mu-1}} \{Q_{\mu} + R_{\mu} a + S_{\mu} a^2 + \dots + V_{\mu} a^{2\mu-2}\}, \quad \nu = qn - k, \quad q = \frac{d}{p},$$

где d — общее наименьшее кратное чисел p, p_0, p_1, \dots, p_m ; $Q_{\nu} = R_{\nu} = S_{\nu} = \dots = 0$; $V_{\nu} \neq 0$ ($\nu < 0$); $Q_{\nu} = K_{\nu} a_0^{2\nu-1}, \dots$; $V_{\nu} = a_0$ ($\nu > 0$);

a, a_0, \dots, a_n — полными степени не выше m от $C_0, C_{k+1}, \dots, C_{k+m}$ с коэффициентами, принадлежащими $[a]$.

Полученные результаты применяются затем к алгебраическим функциям.

Пусть алгеброид

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} C_j x^j$$

представляет алгебраическую функцию, т. е. удовлетворяет уравнению

$$A_0(x) + A_1(x)y + \dots + A_m(x)y^m = 0,$$

где

$$A_i(x) = a_{i0} + a_{i1}x + \dots + a_{im}x^m \quad (i=0, 1, \dots, m),$$

и левая часть неприводима в области (a) . Что касается числа a_{ij} , то их арифметическая природа определяется чрезвычайно общим образом.

Пусть заданы s алгебраически независимых чисел ξ_1, \dots, ξ_s (например, числа $\sqrt{2}, e, \pi$ и т. п. или $1, e, \pi^2$ и т. п.). Произведя над ними все рациональные операции, получим область рациональности (ξ) . Те числа из (ξ) , которые представляют собой полиномы от ξ_1, \dots, ξ_s с целыми коэффициентами, назовем целыми числами области (ξ) . Присоединим к области (ξ) конечное число алгебраических чисел $\alpha, \beta, \dots, \lambda$, т. е. числа, каждое из которых является корнем некоторого алгебраического уравнения с коэффициентами, являющимися целыми числами области (ξ) ; при этом, если коэффициент при старшем члене этого уравнения равен единице, то соответствующее алгебраическое число называется целым. Произведя все рациональные операции над алгебраическими числами $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ с целыми. Произведя все рациональные операции над алгебраическими числами $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ и присоединяя полученные таким образом числа к области (ξ) , получим область рациональности $(\alpha, \beta, \dots, \lambda/\xi)$. Те числа из области $(\alpha, \beta, \dots, \lambda/\xi)$, которые представляются в виде полиномов с целыми коэффициентами от ξ_1, \dots, ξ_s и от целых алгебраических чисел, назовем целыми числами области $(\alpha, \beta, \dots, \lambda/\xi)$. Числа a_{ij} как раз и считаются такими целыми числами области $(\alpha, \beta, \dots, \lambda/\xi)$.

Принимая во внимание, что на основании изложенных выше результатов k первых коэффициентов $C_0, C_{k+1}, \dots, C_{k+k}$ выражаются алгебраически через ξ_1, \dots, ξ_s , и пользуясь теорией алгебраических чисел, М. Ф. Субботин получает следующую форму коэффициентов:

$$C_{\nu+n} = \frac{1}{a^{2\nu-1}} (Q_{\nu} + R_{\nu} a + \dots + V_{\nu} a^{2\nu-2}), \quad \nu = n - k, \quad k \geq 0, \quad (4)$$

где $Q_{\nu} = K_{\nu} \tau_0^{2\nu-1}, \dots, \tau$ — целое число области (ξ) , τ_0, \dots, τ_n — целые числа некоторой области (ω/ξ) .

Однако М. Ф. Субботин не ограничивается этим результатом, имея, по всей вероятности, в виду его применение к доказательству трансцендентности функций, заданных рядами. В самом деле, если ряд (3) представляет алгебраическую функцию, то полученный результат доказывает лишь существование таких чисел ξ_1, \dots, ξ_s и такой области (ω/ξ) , что коэффициенты C имеют форму (4). Однако по заданным коэффициентам C можно построить бесчисленным множеством способов такие числа τ_0, \dots, τ_n и такие области (ω/ξ) , что коэффициенты C будут принадлежать области (ω/η) . Если форма (4) характерна только для какой-нибудь избранной системы трансцендентности конкретной функции, мы, очевидно, никогда не сможем доказать трансцендентность конкретной функции, даже если бы коэффициенты C и не могли быть представлены в форме (4). Эта трудность преодолевается следующей обобщающей теоремой.

Если ряд (3) представляет алгебраическую функцию, то можно указать (бесчисленным множеством способов) такую область вида (ω/ξ) , что все коэффициенты C будут

ей принадлежать; причем, какова бы ни была выбранная область (ω/δ) , этим коэффициентам можно придать форму (4).

Теорема доказывается простой подстановкой ряда (3) при произвольном выборе области (η/η) в алгебраическое уравнение $\sum_j B_j x^j y^j = 0$, дающее систему линейных соотношений между коэффициентами B , определяющих (однозначно или бесчисленным множеством способов) принадлежность B области (η/η) .

Если все C рациональны, то за область (ω/δ) можно принять просто область рациональных чисел; $\gamma, \gamma_0, \gamma_{20}, \dots$ будут тогда просто целыми числами, и теорема М. Ф. Субботина даст исправленную теорему Коха, содержащую в себе теорему Эвэнштейна.

Вторая математическая работа М. Ф. Субботина "Sur les points singuliers de certaines équations différentielles" (1916) в известном смысле сопрягается с первой. Если первая работа дает критерий неалгебраичности функции, заданной рядом Тейлора, то вторая в аналитической природе интегралов в окрестности обыкновенной точки правой части.

Случай особых точек — полюсов и точек разветвления — обычно стараются подходить заменой переменных свести к голоморфному случаю. При этом основная трудность современной теории дифференциальных уравнений достаточно хорошо изучена. Аналогичная природа интегралов в окрестности обыкновенной точки правой части. Случай особых точек — полюсов и точек разветвления — обычно стараются подходить заменой переменных свести к голоморфному случаю. При этом основная трудность современной теории дифференциальных уравнений достаточно хорошо изучена. Аналогичная природа интегралов в окрестности обыкновенной точки правой части. Стоит обычно в доказательстве отсутствия существенно особых точек в решении. Аналогичная природа интегралов в окрестности обыкновенной точки правой части. Стоит обычно в доказательстве отсутствия существенно особых точек в решении. Аналогичная природа интегралов в окрестности обыкновенной точки правой части. Стоит обычно в доказательстве отсутствия существенно особых точек в решении.

В работе доказывается следующая теорема: Если функция y , голоморфная в начале, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (5)$$

левая часть которого есть полином от $y, y', \dots, y^{(n)}$ с коэффициентами вида

$$\phi_0 + \phi_1 x^{\lambda_1} e^{\alpha_1 (\frac{1}{x})} (\log x)^{l_1} + \dots + \phi_i x^{\lambda_i} e^{\alpha_i (\frac{1}{x})} (\log x)^{l_i},$$

где $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_i$ — функции от x , голоморфные в начале, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i$ — постоянные числа, $\alpha_1 (\frac{1}{x}), \dots, \alpha_i (\frac{1}{x})$ — полиномы от $\frac{1}{x}, l_1, \dots, l_i$ — целые положительные числа, то эта функция удовлетворяет уравнению того же вида (5), где коэффициенты голоморфны в начале; порядок и степень этого уравнения не превосходят порядка и степени уравнения (5).

Мы видим, прежде всего, что $x=0$ является существенно особой точкой коэффициентов вследствие наличия множителей $e^{\alpha_i (\frac{1}{x})}, \dots, e^{\alpha_i (\frac{1}{x})}$. Доказательство распадается на ряд лемм.

Лемма 1. Тожество

$$A_0 + A_1 e^{\alpha_1 (\frac{1}{x})} + \dots + A_n e^{\alpha_n (\frac{1}{x})} = 0,$$

где A_0, A_1, \dots, A_n — функции от x , голоморфные в начале, а полиномы $\alpha_1 (\frac{1}{x}), \dots, \alpha_n (\frac{1}{x})$ отличаются друг от друга не только константой, влечет за собой

$$A_0 \equiv A_1 \equiv \dots \equiv A_n \equiv 0.$$

Действительно, пусть, например, $A_0 \neq 0$. Тогда, деля это тождество на A_0 , дифференцируя и умножая на $A_0^2 e^{-\alpha_1 (\frac{1}{x})}$, найдем $Q_0 + Q_1 e^{\alpha_1 (\frac{1}{x}) - \alpha_1 (\frac{1}{x})} + \dots + Q_{n-1} e^{\alpha_{n-1} (\frac{1}{x}) - \alpha_1 (\frac{1}{x})} = 0$, где Q_0, Q_1, \dots, Q_{n-1} — голоморфны в начале. Продолжая этот процесс дальше, придем к равенству $M_0 + M_1 e^{\alpha_1 (\frac{1}{x})} = 0$, $e^{\alpha_1 (\frac{1}{x})} = -\frac{M_0}{M_1}$, что невозможно, так как $\frac{M_0}{M_1}$ мероморфна в $x=0$, а $x=0$ — существенно особая точка левой части.

Лемма 2. Тожество

$$B_0 + B_1 x^{\mu_1} + \dots + B_m x^{\mu_m} = 0,$$

где B_0, B_1, \dots, B_m — функции, разлагающиеся в окрестности $x=0$ в ряды Лорана, μ_1, \dots, μ_m — числа, такие, что ни одна из разностей

$$\mu_i - \mu_k \quad (i, k = 0, 1, \dots, m; \mu_0 = 0, i \neq k)$$

не равна целому числу, влечет за собой

$$B_0 \equiv B_1 \equiv \dots \equiv B_m \equiv 0.$$

В самом деле, заставляя x обходить вокруг начала i раз, можно получить тождество:

$$B_0 + B_1 x^{\mu_1 \omega_i} + \dots + B_m x^{\mu_m \omega_i} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, m),$$

где $\omega_k = e^{2\pi i/k}$. Так как $\omega_k \neq 1, \omega_k \neq \omega_l$ при $k \neq l$, то определитель этой однородной системы

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_1 & \dots & \omega_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \omega_1^m & \dots & \omega_m^m \end{vmatrix} \neq 0,$$

откуда

$$B_0 \equiv B_1 \equiv \dots \equiv B_m \equiv 0.$$

Лемма 3. Тожество

$$C_0 + C_1 \log x + \dots + C_n (\log x)^n = 0,$$

где коэффициенты C_0, C_1, \dots, C_n имеют вид

$$B_0 + B_1 x^{\mu_1} + \dots + B_m x^{\mu_m},$$

(B_i и μ_i имеют тот же смысл, что и в лемме 2), влечет за собой

$$C_0 \equiv C_1 \equiv \dots \equiv C_n \equiv 0.$$

Доказательство леммы 3 более сложно, чем доказательство первых двух лемм. Пусть $n=1$. В этом случае получим тождество

$$-\log x = \frac{\sum_{k \neq 0} K_{k,0} x^{\mu_k}}{\sum_{k \neq 0} L_{k,0} x^{\mu_k}}.$$

После k обходов x вокруг начала получим тождество

$$-\log x - 2\pi i k = \frac{\sum_{k \neq 0} K_{k,0} e^{2\pi i k \mu_k}}{\sum_{k \neq 0} L_{k,0} e^{2\pi i k \mu_k}}.$$

Отделяя справа вещественную и мнимую части и привлекая аппарат непрерывных дробей, М. Ф. Субботин показывает, что для всякого $x = x_0$ можно подобрать такую бесконечную последовательность чисел k , для которой правая часть либо ограничена по модулю сверху постоянным числом, не зависящим от k , либо ограничена снизу выражением вида $\text{const} e^{2\mu k}$, где $\mu > 0$.

Как видно из выражения левой части, обе эти возможности приводят к противоречию, что и доказывает лемму при $n=1$.

Допуская справедливость леммы при всех $n < k$, дифференцируем тождество $C_n + C_1 \log x + \dots + C_k (\log x)^k = 0$ и исключаем $(\log x)^k$. Тогда получится аналогичное соотношение при $n=k-1$, что влечет за собой равенство нулю всех коэффициентов. В частности, приравняв нулю коэффициент при $(\log x)^{k-1}$, получаем соотношение

$$\frac{C_k C_{k-1} - C_k C'_{k-1}}{C_k^2} = \frac{k}{x},$$

интегрирование которого дает $k C_k \log x + C_{k-1} + C_k \cdot \text{const} = 0$. По доказанному, в частности, $C_k = 0$. Но тогда мы опять приходим к случаю $n=k-1 < k$. Таким образом, лемма 3 доказана полностью.

Подставляя теперь голоморфное решение в уравнение (5) и последовательно применяя к полученному тождеству леммы 3, 2 и 1, М. Ф. Субботин без труда получает результат, сформулированный в теореме.

В работе содержится также обобщение на тот случай, когда коэффициенты полинома (5) имеют вид

$$\sum_{k=1}^n \theta_k(x) [\varphi_k(x)]^{l_k} e^{w_k \frac{1}{x}} [\log \theta_k(x)]^{l_k},$$

где θ_k, l_k сохраняют прежний смысл, φ_k, w_k, θ_k — алгебронные функции.

В следующей работе М. Ф. Субботина — «Об определении особых точек аналитических функций» — решается такая задача. Дан ряд Тейлора

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \quad (6)$$

требуется найти все изолированные особые точки аналитической функции $f(z)$, заданной этим рядом. Эта задача впервые была решена И. Р. Брауэром, метод которого состоит из двух частей: в первой части дается способ нахождения модуля особой точки, во второй — ее аргумента. М. Ф. Субботин показывает, что эта вторая часть является излишней. В развитом им оригинальном методе модуль и аргумент особой точки определяются одновременно.

Сущность метода М. Ф. Субботина заключается в следующем. Допустим для определенности, что радиус сходимости ряда (6), а следовательно, рядов

$$f_1(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots \quad \text{и} \quad f_2(z) = a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \dots,$$

равен единице.

Введем два вещественных параметра α и φ , меняющихся в области

$$0 < \alpha \leq 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

и составим вспомогательный ряд

$$\Psi(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\log z + 2\pi k i} f_1 \left[\frac{e^{i\varphi}}{(-\log z + 2\pi k i)^\alpha} \right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\varphi}}{(-\log z + 2\pi k i)^{1+\alpha}} f_2 \left[\frac{e^{i\varphi}}{(-\log z + 2\pi k i)^\alpha} \right],$$

сходящийся в области $|z| < e^{-1}$, так как при этом

$$\left| \frac{e^{i\varphi}}{(-\log z + 2\pi k i)} \right| < 1, \quad \alpha > 0.$$

Разложим $\Psi(z)$ по степеням z . Имеем

$$\Psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i n \varphi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(-\log z + 2\pi k i)^{n+1}}$$

в силу сходимости двойного ряда.

Применяя, с одной стороны, к контурному интегралу $\int \frac{dt}{t^{n+1}(1-ze^t)}$, где t обходит отрицательную часть вещественной оси, теорему вычетов, а с другой — формулу Ханкеля для функции Γ , и переставляя порядок суммирования в силу сходимости двойного ряда, М. Ф. Субботин приходит к формуле $\Psi(z) = \Psi(z, \varphi) - \frac{1}{1-z}$, где

$$\Psi(z, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\rho^{\frac{1}{m}} e^{i\varphi}) z^n, \quad (7)$$

где $F_n(x)$ — целая функция, определяемая формулой

$$F_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m x^m}{\Gamma(m+1)}.$$

В силу определения функции $\Psi(z, \varphi)$ всякой особой точке ξ функции $f(z)$ соответствует особая точка η функции $\Psi(z, \varphi)$, причем

$$\xi = \frac{e^{i\varphi}}{(-\log \eta)^\alpha}.$$

Если ρ, ϑ — модуль и аргумент особой точки ξ , то $\xi = \rho e^{i\vartheta}$ ($0 \leq \vartheta < 2\pi$), $|\eta| = e^{-\frac{1}{\alpha} \cos \vartheta \frac{\vartheta - \vartheta_0}{\alpha}}$. Рассмотрим кривые, уравнение которых в полярных координатах r и φ имеет вид

$$r = \frac{\rho}{\left(\cos \frac{\varphi - \vartheta_0}{\alpha} \right)^\alpha}. \quad (8)$$

При $\alpha = \frac{1}{m}$ (m — целое) эти кривые представляют собой m гиперболических ветвей с вершинами $(\rho, \vartheta + \frac{2\pi k}{m})$, где k — целое, удовлетворяющее неравенству $0 \leq \vartheta + \frac{2\pi k}{m} < 2\pi$. Каждой особой точке $\xi = \rho e^{i\vartheta}$ соответствует своя гипербола. Для нахождения модулей особых точек функции $\Psi(z, \varphi)$ при $\varphi = \varphi_0$ достаточно найти радиус-векторы

$$r_1, r_2, r_3, \dots$$

точек пересечения прямой $\varphi = \varphi_0$ с гиперболическими ветвями, соответствующими различным особым точкам $f(z)$. Модули особых точек $\Psi(z, \varphi_0)$ будут

$$e^{-r_1 \frac{1}{\alpha}}, e^{-r_2 \frac{1}{\alpha}}, \dots$$

На каждом радиусе-векторе отметим ближайшую к началу точку пересечения. При изменении φ_0 от $\varphi_0 = 0$ до $\varphi_0 = 2\pi$ эта точка опишет фигуру, которую М. Ф. Субботин называет многоугольником K_n . В его состав войдут те из гипербол (8), которые расположены ближе всего к началу. Те из кривых (8), которые войдут в состав K_n , называются его сторонами, а точки пересечения сторон — вершинами. Если (r_0, φ_0) — точка, не являющаяся вершиной, то из особых точек функции $\Psi(z, \varphi_0)$ наименьшим модулем будет обладать та, которая соответствует стороне K_n , проходящей через точку (r_0, φ_0) (потому что функция $e^{-r \frac{1}{\alpha}}$ возрастает вместе с r). Следовательно, на круге сходимости

сти ряда (7) при $\varphi = \varphi_0$ лежит одна особая точка, модуль которой равен радиусу сходимости этого ряда, равному, по известной теореме Адамара, выражению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|F_n(p^{\alpha} e^{i\varphi})|} = e^{\frac{1}{\alpha}} \quad (9)$$

Формулы (8) и (9) и решают поставленную задачу об определении особых точек $\xi = \rho e^{i\varphi}$ функции $f(z)$. Действительно, разыскание этих особых точек т. е. ρ и ϑ , равносильно отысканию стороны K_{α} , которая имеет своим уравнением (8). Легко видеть, что если известны две точки стороны $K_{\alpha} = (r_0, \varphi_0)$ и (r_1, φ_1) , то легко найти ее уравнение (8), т. е. параметры ρ и ϑ (последний лишь с точностью до слагаемого, кратного $2\pi\alpha = \frac{2\pi}{m}$). Эти точки можно найти с помощью формулы (9), дающей для произвольных φ_0 и φ_1 соответствующие r_0 и r_1 . При этом, правда, может случиться, что разность $\varphi_1 - \varphi_0$ слишком велика, так что r_0 и r_1 соответствуют разным сторонам K_{α} . Но тогда можно показать, что для всякого φ , лежащего между φ_0 и φ_1 , точка (φ, r') , где r' вычислена по формуле (9), не лежит на кривой (8).

Таким образом, мы найдем точки $(\rho, \vartheta + \frac{2\pi k}{m})$, т. е. вершины гипербол, соответствующих особой точке $\xi = \rho e^{i\vartheta}$. Чтобы решить, какая из этих точек есть ξ , т. е. чтобы найти истинное ϑ , мы строим многоугольник K_{β} , где $\beta = \frac{1}{n}$, $n \neq m$. Точка ξ должна содержаться также среди вершин K_{β} . Если m и n взаимно просты, то у K_{α} и K_{β} может быть только одна общая вершина, которая и даст нам искомую особую точку.

Разумеется, в силу самого определения многоугольника Субботина K_{α} мы найдем таким путем только вершины звезды Минтаг-Леффлера функции $f(z)$, т. е. из всех особых точек, лежащих на каком-либо луче, идущем из начала, мы найдем лишь точку с наименьшим модулем. Остальные точки можно найти последовательно путем переноса начала координат в одну из уже найденных вершин звезды.

Однако с точки зрения эффективности в изложенном построении имеется один пробел.

В самом деле, при фиксированном α некоторые из кривых (8) могут оказаться вне многоугольника K_{α} и изложенное построение не даст соответствующей особой точки ξ . Опираясь на одну теорему Кронекера из теории диофантовых приближений, М. Ф. Субботин показывает, что всегда можно выбрать такое целое m и φ_0 , чтобы при $\alpha = \frac{1}{m}$ кривая (8), соответствующая любой паре (ρ, ϑ) , лежала бы в направлении $\varphi = \varphi_0$ ближе к началу координат, чем все кривые (8), соответствующие всем остальным парам (ρ, ϑ) , если число этих последних конечно, т. е. если особая точка ξ изолирована.

При таком α , следовательно, часть кривой (8), соответствующей заданной особой точке ξ , войдет в состав K_{α} . Слабое место метода заключается в том, что мы не можем, не зная ξ , указать а priori нужное значение m . По этому поводу М. Ф. Субботин замечает, что успешное применение метода мыслимо вообще лишь в том случае, когда есть возможность предвидеть величину

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{|F_p(p^{\alpha} e^{i\varphi})|}$$

в виде более или менее простой функции φ и α , а это равносильно тому, что многоугольник K_{α} построен для всякого α , и отмеченная выше трудность отпадает. При этом не играет роли и априорное предположение об изолированности особых точек.

М. Ф. Субботин иллюстрирует свой метод на примере ряда

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{\alpha n + \beta} \cos \beta, \quad \beta > 0.$$

В данном случае оказывается, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{|F_p(p^{\alpha} e^{i\varphi})|} = e^{\cos \frac{\varphi+1}{\alpha}}.$$

Многоугольник K_{α} состоит из двух кривых $r = (\cos \frac{\varphi+1}{\alpha})^{-\alpha}$ и $r = (\cos \frac{\varphi-1}{\alpha})^{-\alpha}$. Звезда $F(z)$ имеет две вершины $z = e^{\pm i}$.

Работа 1930 г. „Sur les propriétés-limites des fonctions entières d'ordre fini“ тесно связана с предыдущей. Если там вопрос о нахождении особых точек аналитической функции сводится к исследованию предельных значений модуля некоторой целой функции при неограниченном возрастании аргумента, то здесь решается обратная задача. Дана целая функция

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

конечного порядка $\rho = \sigma^{-1}$, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\sigma} |c_n|^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{\sigma}{c}\right)^{\sigma}.$$

Требуется выяснить поведение модуля этой целой функции при неограниченном возрастании z вдоль полупрямой $\arg z = \varphi$. Точнее, требуется найти

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |g(r e^{i\varphi})|}{r} = h(\varphi).$$

М. Ф. Субботин вводит вспомогательные аналитические функции

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(n + \varphi) c_n z^n$$

$$\Psi(z, \varphi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1 + i^k}{(-Lgz + 2\pi ki)^{\sigma}} f\left(\frac{e^{i\varphi}}{(-Lgz + 2\pi ki)^{\sigma}}\right), \quad (\sigma > 0)$$

особые точки которых ξ и η_{φ} связаны соотношением

$$\xi = |\xi| e^{i\vartheta} = e^{i\vartheta} (-Lg \eta_{\varphi} + 2\pi ki)^{-\sigma},$$

откуда

$$|\eta_{\varphi}| = e^{-\frac{\vartheta - \varphi}{\sigma}} \quad (10)$$

Кроме точек η_{φ} , особой точкой для функции $\Psi(z, \varphi)$ может оказаться точка $z = 1$. Назовем звездой Σ геометрическое место тех точек пересечения прямых

$$\vartheta - \sigma\pi \leq \varphi \leq \vartheta + \sigma\pi$$

с кривыми (10), которые расположены ближе всего к началу координат. Если (R_{φ}, φ) — полярные координаты точек звезды Σ , то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} |g(p^{\alpha} e^{i\varphi})|^{\frac{1}{p}} = R_{\varphi}^{-\sigma}. \quad (11)$$

Формула (11) вполне аналогична формуле (9) предыдущей работы. Эта формула показывает, что для всех значений φ , для которых $R_{\varphi} < 1$, функция $g(p^{\alpha} e^{i\varphi})$ должна стремиться к бесконечности при $p \rightarrow \infty$. Если же $R_{\varphi} > 1$, то $g(p^{\alpha} e^{i\varphi}) \rightarrow 0$.

На основании этого простого замечания М. Ф. Субботин получает выводы относительно предельных свойств целых функций, частными случаями которых являются отдельные результаты Линделёфа и Поля (Lindelöf, Pólya).

Формула (10) показывает, что если $\cos \frac{\sigma-3}{\sigma} > 0$, то $|\chi_\sigma| < 1$, а следовательно, и $R_\sigma < 1$ для всех φ . Отсюда сразу следует, например, что для $\sigma > 2$ (т. е. если порядок целой функции меньше $\frac{1}{2}$), верхний предел $|g(\rho^{\sigma} e^{i\varphi})|$ есть бесконечность при всяком φ . Прямым следствием этого замечания является теорема Линделёфа о том, что если целая функция конечного порядка ρ остается ограниченной на полупрямых, расположенных внутри угла, равного $\frac{\pi}{\rho}$, то эта функция приводится к константе.

Используя результат Поля о том, что написанный „наугад“ ряд Тейлора не может быть аналитически продолжен за свой круг сходимости, М. Ф. Субботин получает следующую теорему.

Множество целых функций $g(z)$ порядка σ^{-1} , для которых при всяком φ выполняется равенство

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} |g(\rho^{\sigma} e^{i\varphi})|^{\frac{1}{\rho}} = e,$$

есть множество всюду плотное (по отношению к множеству направлений φ) и содержит только внутренние точки. Целые функции, для которых это соотношение не выполняется, образуют нигде не плотное, совершенное множество.

II. Теория вероятностей

Кроме работ по теории функций, у М. Ф. Субботина имеется также несколько статей по теории вероятностей.

В работе „On the Law of Frequency of Error“ (1923) выводится обобщенный закон распределения ошибок, частным случаем которого является нормальный закон распределения Гаусса.

Отправным пунктом вывода Гаусса являлось предположение, что наимвероятнейшее значение измеряемой величины равно среднему арифметическому из ее наблюдаемых значений. Многие авторы старались заменить это мало очевидное требование системой аксиом, которые больше говорили бы нашей интуиции. Так, Скиапарелли ввел следующие три аксиомы, из которых следует закон среднего арифметического.

Наивероятнейшее значение x измеряемой величины есть такая функция F ее измеренных значений l_1, \dots, l_n , что

- 1) $F(l_1 + c, \dots, l_n + c) = F(l_1, \dots, l_n) + c$,
- 2) $F(al_1, \dots, al_n) = aF(l_1, \dots, l_n)$,
- 3) $F(l_1 + k, \dots, l_n) = \dots = F(l_1, \dots, l_n + k)$.

М. Ф. Субботин отбрасывает 1-ю и 3-ю аксиомы Скиапарелли и ограничивается следующими двумя:

- 1) вероятность ошибки зависит только от величины этой ошибки ε и может быть выражена непрерывной и дифференцируемой функцией $\varphi(\varepsilon)$;
- 2) вероятнейшее значение измеряемой величины не должно зависеть от единичных измерений (что равносильно 2-й аксиоме Скиапарелли).

На основании 1-й из этих аксиом можно записать вероятность того, что при наблюдениях одновременно были сделаны ошибки $x - l_i$ ($i = 1, \dots, n$) в виде

$$\prod_{i=1}^n \varphi(x - l_i).$$

Наивероятнейшее значение x определяется из условия максимума этой вероятности. Это условие, опят-таки в силу 1-й аксиомы, запишется так:

$$\sum_{i=1}^n f(u_i) = 0,$$

где

$$f(u) = \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}, \quad u_i = x - l_i.$$

На основании 2-й аксиомы при любом α будем иметь

$$\sum_{i=1}^n f(\alpha u_i) = 0.$$

При $n=2$ будем иметь $f(\alpha u_1) = -f(\alpha u_2)$, $f(u_1) = -f(u_2)$. Перемножая эти равенства почленно и полагая $u_1 = uv$, $u_2 = u$, $\alpha = \frac{v}{u}$, получим

$$f(uv)f(1) = f(u)f(v).$$

Решая это функциональное уравнение, получим $f(u) = Au^{m-1}$, откуда $\varphi(u) = Ce^{hu^m}$.

Так как $\varphi(u)$ есть функция распределения, то $\varphi(\pm\infty) = 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) du = 1$. Первое из этих условий показывает, что $\varphi(u)$ должна иметь вид $Ce^{-h|u|^m}$ ($h > 0$, $m > 0$), а второе дает окончательно искомый обобщенный закон распределения

$$\varphi(u) = \frac{mh}{2\Gamma(\frac{1}{m})} e^{-h|u|^m},$$

где гамма-функция определяется, как обычно: $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$. Отсюда легко найти среднюю ошибку $\bar{\nu}$, среднюю квадратичную ошибку $\bar{\mu}$ и отношение $\frac{\bar{\mu}}{\bar{\nu}}$:

$$\bar{\nu} = 2 \int_0^{\infty} \varepsilon \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{\Gamma(\frac{2}{m})}{h\Gamma(\frac{1}{m})}; \quad \bar{\mu}^2 = 2 \int_0^{\infty} \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{\Gamma(\frac{3}{m})}{h^2\Gamma(\frac{1}{m})}; \quad \frac{\bar{\mu}}{\bar{\nu}} = \frac{\Gamma(\frac{2}{m})}{\Gamma(\frac{3}{m})\Gamma(\frac{1}{m})}.$$

Отношение $\frac{\bar{\mu}}{\bar{\nu}}$ оказывается возрастающей функцией m . Поэтому М. Ф. Субботин предлагает называть число m^{-1} „степенью точности“.

Наивероятнейшее значение измеренной величины x , согласно предыдущему, найдется из уравнения

$$\sum_{i=1}^n \frac{|x - l_i|^m}{x - l_i} = 0.$$

При $m=2$ получаем нормальный закон распределения ошибок Гаусса

$$\varphi(u) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-hu^2}$$

и среднее арифметическое для величины x : $x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i$.

При $m=1$ закон распределения имеет вид

$$\varphi(u) = \frac{h}{2} e^{-h|u|},$$

а $x = l_{n+1}$ (при l нечетном) и $x = l_{\frac{n}{2}}$ или $l_{\frac{n}{2}+1}$ (при l четном), если только наблюдения перенумерованы таким образом, чтобы $l_i \leq l_{i+1}$ ($i=1, \dots, n-1$) (правило Этьена).

При других l получим другие формы закона распределения ошибок и другие наименьшие значения измеримой величины x .

Как замечает М. Ф. Субботин, отсюда становится ясной ошибочность вывода Ферреро, пытавшегося получить закон среднего арифметического без использования 3-й аксиомы Скинапарелли. Действительно, как показывает вывод М. Ф. Субботина, эта аксиома, а также закон среднего арифметического равносильны предположению $m=2$. Однако, по мнению автора, разумнее всего не постулировать значение m , а брать его в зависимости от точности той или иной серии наблюдений в соответствии с указанным выше физическим смыслом величины m^{-1} .

В статье "On the Solar Rotation Period from Greenwich Sunspot Measures 1886—1909" (1923) М. Ф. Субботин применяет свой обобщенный закон распределения к вопросу об определении периода вращения Солнца вокруг оси по наблюдениям солнечных пятен. Приняв в первом приближении $m=1$, М. Ф. Субботин находит теоретическое наименьшее значение измеримой величины, соответствующее этому m ; затем, сравнивая его с наблюдаемыми значениями, находит среднюю ошибку δ и среднюю квадратическую ошибку μ ; по отношению $\frac{\delta}{\mu}$ находит новое значение m , и т. д. Таким образом, последовательными приближениями находится точное значение m , соответствующее степени точности данной серии наблюдений. Оно оказалось равным в данном случае $m=1.027$.

III. Небесная механика.

Переходя к тем работам М. Ф. Субботина, которые имеют непосредственное применение к механике, но остаются математическими по своему методу, следует прежде всего отметить исследование по улучшению сходимости тригонометрических рядов, над которыми М. Ф. Субботин работал с 1943 по 1947 г. [Дока. АН СССР, 1943, т. XI, № 8; Бюлл. ИТА, 1947, т. IV, № 1 (54)].

Математиком и механиком хорошо известен метод академика А. Н. Крылова, имеющий ту же цель и состоящий в суммировании тех членов тригонометрического ряда, которые вызывают его плохую сходимость. Этот метод имеет отношение к функции вещественного переменного с разрывными производными определенного порядка и состоит, по сути дела, в повышении гладкости функции, разлагаемой в ряд Фурье.

Небесная механика имеет дело с аналитическими периодическими функциями, имеющими производные всех порядков во всех точках комплексной плоскости, за исключением конечного числа особых точек. Так, например, основное значение в теории возмущений имеет функция

$$\Delta^{-2s}(H) \quad (s=1, 2, \dots),$$

где

$$\Delta^2 = 1 - 2\alpha \cos H + \alpha^2 \quad (0 \leq \alpha < 1).$$

Ясно, что метод А. Н. Крылова здесь теряет смысл, потому что функция Δ^{-2s} и так уже достаточно гладкая; тем не менее уже при α , близких к $\frac{1}{2}$, ее коэффициенты Фурье убывают слишком медленно. Этой задачей интересовался еще Лежандр, который в 1826 г. предложил преобразование переменной H к новой переменной φ по формуле

$$\operatorname{tg}\left(\varphi - \frac{1}{2}H\right) = \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \operatorname{tg} \frac{1}{2}H.$$

С этой же целью — улучшения сходимости разложения Фурье функции Δ^{-2s} — Гюльден в 1870 г. предложил новую переменную T , определив ее формулой:

$$\operatorname{sn} \frac{K}{\alpha} T = \cos H,$$

где K — полный эллиптический интеграл 1-го рода с модулем $\frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$.

Н. С. Самойлова-Яхонтова нашла эмпирическим путем, что переменные Лежандра и Гюльдена дают примерно одинаковое улучшение сходимости. Кроме того, ей принадлежит интересное замечание, что переменная Гюльдена совпадает с приближенным значением переменной, регуляризирующей двойные соударения в задаче трех тел.

Однако истинная причина улучшения сходимости, даваемого преобразованиями Лежандра и Гюльдена, оставалась до работ М. Ф. Субботина неясной. Отсутствовал также какой бы то ни было общий метод улучшения сходимости рядов Фурье для аналитических функций.

М. Ф. Субботин ставит и решает эту задачу в самом общем виде. Пусть тригонометрический ряд

$$f(H) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kH \quad (a_{-k} = a_k)$$

представляет аналитическую функцию. Тогда ряд Лорана

$$f(H) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k \quad (z = e^{iH})$$

будет сходиться в некотором кольце

$$r < |z| < r^{-1} \quad (r < 1),$$

так как он сходится при $|z|=1$.

При этом коэффициенты a_k имеют порядок r^k . Поэтому чем меньше r (т. е. чем шире кольцо сходимости), тем быстрее сходится ряд.

М. Ф. Субботин рассматривает следующее конформное преобразование:

$$\prod_{k=1}^m \left(\frac{w - \alpha_k}{1 - \bar{\alpha}_k w} \right) = \prod_{k=1}^m \left(\frac{z - \beta_k}{1 - \bar{\beta}_k z} \right),$$

где α_k, β_k — положительные вещественные числа, меньшие единицы. После перехода к переменной w мы снова получим ряд Лорана

$$f(H) = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k w^k \quad (A_{-k} = A_k),$$

кольцо сходимости которого опять имеет вид

$$\rho < |w| < \rho^{-1} \quad (\rho < 1),$$

так как рассматриваемое преобразование переводит единичную окружность в себя, в силу чего ряд должен сходиться при $|w|=1$, причем коэффициенты A_k имеют порядок ρ^k . Следовательно, при $\rho < r$ мы получаем улучшение сходимости. Но величина ρ , как известно, вполне определяется расположением особых точек $f(H)$, рассматриваемой как аналитическая функция z . Тогда особые точки этой функции на комплексной плоскости w и, следовательно, величина ρ определяются указанным выше преобразованием (т. е. числами α_k, β_k).

В простейшем случае $m=1$ получаем дробно-линейное преобразование

$$w = \frac{z - \beta}{1 - \bar{\beta}z}.$$

Для функции

$$\Delta^{-2\alpha} = \left[\frac{1}{(1-\alpha z)(1-\alpha z^{-1})} \right]^\alpha$$

имеем четыре особые точки 0, α^{-1} , ∞ и, следовательно, $r = \alpha$. Соответствующие особые точки на плоскости w будут $-\beta, B, B^{-1}, -\beta^{-1}$, где $B = \frac{\alpha - \beta}{1 - \alpha\beta}$. При увеличении β от 0 до 1 B монотонно убывает от α до -1 . Пока $\beta < B$, внутренний и внешний радиусы кольца сходимости будут равны B и B^{-1} ; при $\beta > B$ они равны соответственно β и β^{-1} . Следовательно, наименьший (а значит и наибольший) внутренний радиус кольца будет при $B = \beta$. Это условие дает

$$\beta = \frac{\alpha}{1 + \sqrt{1 - \alpha^2}}$$

Так как $\rho = \beta$, то

$$\rho = \frac{r}{1 + \sqrt{1 - r^2}}, \quad \frac{r}{\rho} = 1 + \sqrt{1 - \alpha^2}$$

что при малых α дает выигрыш в сходимости почти в 2 раза.

При $m=2$ получаем преобразование

$$w^\alpha = \frac{(z - \beta_1)(z - \beta_2)}{(1 - \beta_1 z)(1 - \beta_2 z)}$$

Оказывается, что если положить здесь $\beta_1 = 0, \beta_2 = \alpha$, то получим формулу

$$w^\alpha = \frac{z(z - \alpha)}{1 - \alpha z}$$

которая представляет собой не что иное, как преобразование Лежандра (при $w = e^{\theta}$). Легко видеть, что это преобразование вносит особую точку, для которой

$$|\omega| = \frac{\alpha}{1 + \sqrt{1 - \alpha^2}}$$

что дает тот же радиус кольца, что и в предыдущем случае. Таким образом, с точки зрения сходимости, преобразование Лежандра не дает особых преимуществ перед более простым дробно-линейным преобразованием.

Однако подобно тому, как это было сделано для линейного случая, Субботин находит наилучшие значения параметров β_1, β_2 , что дает уже весьма ощутимый выигрыш в скорости сходимости.

Точно так же, находя координаты особых точек на плоскости w , соответствующие преобразованию Гюльдена, равные $\pm q, \pm q^3, \pm q^5, \dots$, где $q = e^{-\frac{\pi}{2k}} = \frac{1}{4} + 4\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{k}} + \dots$, автор показывает, что эта трансцендентная подстановка не дает никаких выгод по сравнению с алгебраическими.

Таким образом, это исследование открывает большие возможности для небесной механики. Но М. Ф. Субботин не ограничивается установлением принципиальной возможности получения новых разложений в ряд Фурье, сходящиеся быстрее известных, но и дает выражения для коэффициентов этих рядов через старые (коэффициенты Лапласа), для которых имеются таблицы. Кроме того, он приводит асимптотические формулы для приближенного вычисления этих коэффициентов A_k при больших k , а также составляет обширные таблицы, облегчающие пользование всем этим новым аппаратом для практических нужд теории возмущений.

К тому же типу работ, прикладных по форме, но выполненных со всей строгостью, требуемой чистой математикой, относится исследование задачи двух тел с переменными массами, притягивающимися по закону Ньютона: „Sur le problème des deux corps de masses

variables" (Астр. ж., 1936, 13, 6). Это один из немногих случаев, когда М. Ф. Субботин обращается к качественной небесной механике. Он исследует вопрос о поведении взаимного расстояния двух тел r при $t \rightarrow \infty$ в предположении, что сумма масс взаимодействующих тел неограниченно возрастает.

История этого вопроса такова. Впервые эта задача в такой постановке была рассмотрена Армеллини в 1913 г., который получил следующие три теоремы.

Теорема 1. Если α ограничено снизу, то $\lim_{t \rightarrow \infty} r = \infty$; если r ограничено сверху, то $\lim_{t \rightarrow \infty} r = 0$.

Теорема 2. Если сумма масс $f(t)$ возрастает монотонно и если радиус-вектор r имеет максимум, то все следующие значения r не превосходят этого максимума.

Теорема 3. Если $f(t) = O(t^\alpha)$, то при $\alpha < 1$ существуют траектории, вдоль которых $\lim_{t \rightarrow \infty} r = \infty$, а при $\alpha \geq 1$ для всех траекторий $\lim_{t \rightarrow \infty} r = 0$.

Первая теорема показывает, что вообще может представиться только один из следующих трех случаев при $t \rightarrow \infty$:

- 1) $\lim_{t \rightarrow \infty} r = 0$;
- 2) $\lim_{t \rightarrow \infty} r = \infty$;
- 3) $\lim_{t \rightarrow \infty} r = 0$; $\lim_{t \rightarrow \infty} r = \infty$.

Этот результат немедленно следует из уравнения движения

$$r'' = c^2 r^{-2} - f(t) r^{-2},$$

где c — постоянная площадей.

Наиболее интересной здесь является теорема 2, которая исключает третью возможность. Теорема 3 является уточнением теоремы 2. Однако эти две теоремы Армеллини накладывают на $f(t)$ очень серьезное ограничение — требование монотонности.

Все усилия позднейших авторов были направлены на то, чтобы получить тот же результат, но без требования монотонности. Так, Г. Н. Дубошину в 1930 г. удалось обобщить первую часть теоремы 3 на случай немонотонных функций, но ценой наложения на функцию $f(t)$ требования аналитичности, что с точки зрения приложений является не менее серьезным ограничением, чем монотонность.

М. Ф. Субботин пошел иным путем. Им доказаны следующие две теоремы.

1. Если существует такая монотонная функция $f_1(t)$, что

$$f_1(t) \geq f(t), \quad \int_0^\infty f_1(t) t^{-2} dt < \infty,$$

то при подходящем выборе начальных данных радиус-вектор удовлетворяет неравенству $r > t$.

Доказательство состоит в следующем. Рассматривается дифференциальное уравнение сравнения

$$s'' = -f_1(s) s^{-2}$$

Легко показать, что решение этого уравнения удовлетворяет неравенству $s > t$,

если только $s_0 > t_0$ и $s'_0 > 1 + \int_0^\infty f_1(s) s^{-2} ds$. Тогда, согласно условию, $f_1(s) \geq f(s)$, и исходное уравнение движения дает $r'' > -f(s) r^{-2}$, откуда

$$r'' - s'' > (s^2 - r^2) f_1(s).$$

Отсюда ясно, что достаточно взять $r_0 > s_0$, $r'_0 > s'_0$, чтобы получить

$$r > s > t \text{ при } t \geq t_0.$$

2. Если существует такая монотонная положительная функция $f_2(t)$, что

$$f(t) \geq f_2(t), \int_{t_0}^t f_2(s) s^{-2} ds \rightarrow \infty \text{ при } t \rightarrow \infty,$$

то при всех начальных условиях $\lim_{t \rightarrow \infty} r = 0$ при $t \rightarrow \infty$.

В силу теоремы 1 Армеллини для доказательства этого утверждения достаточно показать невозможность случая $\lim_{t \rightarrow \infty} r = \infty$. Если при этом первая производная r' бесконечное число раз обращается в нуль, то r'' также бесконечное число раз обращается в нуль, и для таких моментов в силу исходного уравнения движения $r = \frac{c^2}{f(t)}$, откуда следует, что $\lim_{t \rightarrow \infty} r = 0$ при $t \rightarrow \infty$, так как $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty$.

Следовательно, остается случай $\frac{dr}{dt} > 0$. Но тогда, интегрируя исходное уравнение, находим

$$r^2 + c^2 r^{-2} - r_0^2 - c^2 r_0^{-2} = -2 \int_{t_0}^t f(t) r^{-2} dt.$$

С другой стороны, исходное уравнение дает

$$r = r_0 + r'_0 t + \int_{t_0}^t (t-x) \frac{c^2}{r^2(x)} - f(x) dx.$$

Подинтегральное выражение при достаточно большом $x < t$ отрицательно, так как $r(x) \rightarrow \infty$, а $f(x)$ ограничено снизу положительным числом при $x \rightarrow \infty$. Следовательно, при достаточно большом t_0 получаем неравенство для $t \geq t_0$

$$r < r_0 + r'_0 t < \frac{t}{\gamma},$$

$$\text{где } \frac{1}{\gamma} = \frac{r_0}{t_0} + r'_0.$$

Но тогда $f(t) \geq f_2(t) > f_2(\gamma t)$ в силу монотонности $f_2(t)$.

Отсюда $\int_{t_0}^t f(t) r^{-2} dt \geq \int_{t_0}^t f_2(\gamma t) r^{-2} dt \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, т. е. при $t \rightarrow \infty$, что противоречит написанному выше равенству, левая часть которого ограничена снизу.

Теорема 3 Армеллини для монотонной функции $f(t)$ при $a < 1$ следует из первой теоремы Субботина [в качестве $f_1(t)$ можно взять, например, $f_1(t) = \max_{\tau \leq t} f(\tau)$]. Что же касается второй части теоремы Армеллини (при $a \geq 1$), то для немонотонных функций в качестве следствия второй теоремы Субботина получим лишь $\lim r = 0$.

Г. Н. Дубошин пытался обобщить вторую часть теоремы Армеллини на случай немонотонного изменения масс, опираясь на следующее утверждение: "Если $\lim_{t \rightarrow \infty} f'(t) \neq 0$ при $t \rightarrow \infty$, то $r(t)$ ограничено сверху при всех начальных условиях".

М. Ф. Субботин замечает по этому поводу, что этому условию удовлетворяют, например, функции $f(t) = 2t^2 + \sin t$, $f(t) = 2 + \sin(t^2)$, и тем не менее на основании доказанной им теоремы 1 существуют траектории, вдоль которых $r \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$.

Таким образом, вопрос о том, можно ли в теореме 2 Субботина заменить равенство $\lim r = 0$ более сильным результатом $\lim r = 0$, и тем самым полностью обобщить теорему Армеллини для немонотонных функций $f(t)$, остается открытым.

Вопросам качественной небесной механики посвящена еще одна небольшая работа М. Ф. Субботина — "О некоторых свойствах движения в задаче n тел" (1940). Вводя в задаче n тел новые переменные E_{ij} по формуле $\frac{dE_{ij}}{dt} = n_j a_{ij} \Delta_{ij}^{-1}$, где n_{ij} , a_{ij} — постоянные, а Δ_{ij} — взаимные расстояния, автор получает соотношение

$$\sum_{ij} m_i m_j a_{ij}^{-1} \left\{ \frac{d^2 E_{ij}}{dt^2} + t - n_i^2 E_{ij} \right\} = \text{const},$$

которое он называет обобщенным уравнением Кеплера. Оно носит, конечно, чисто формальный характер, так как найти функции Δ_{ij} можно только после решения дифференциальных уравнений задачи n тел. Тем не менее в одном случае М. Ф. Субботину удалось извлечь из этого уравнения определенный качественный результат. Именно, если допустить, что все $\Delta_{ij} \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, то, выделяя в левой части обобщенного уравнения Кеплера один член, это уравнение можно записать в виде

$$\frac{d^2 \Phi}{dt^2} + t = n^{-1} E + \Phi,$$

где Φ — ограниченная функция. В силу аналогии с уравнением Кеплера (в гиперболическом случае) отсюда сразу следует, что Δ_{ij} на бесконечности имеет порядок t .

Таким образом, здесь получен результат Шази о характере гиперболических движений в задаче n тел, но совершенно другим путем.

Из других работ М. Ф. Субботина по небесной механике, носящих математический характер, отметим две: "О новой аномалии, заключающейся как частные случаи эксцентрискую, истинную и тангенциальную аномалии" (1936) и "Новая форма уравнения Эйлера—Ламберта и ее применение при вычислении орбит" (1924).

В первой из них ставится задача найти новую переменную, с помощью которой координаты в задаче двух тел выражались бы столь же просто, как с помощью истинной или эксцентриской аномалии, но которые менялись бы со временем более равномерно, чем последние, что представляет большее удобство при численном интегрировании (например при изучении движения комет).

Решение этого вопроса оказалось побочным продуктом другой, чисто математической задачи: найти все дробно-линейные преобразования типа

$$x = \frac{a_1 \xi + b_1 \eta + c_1}{a_2 \xi + b_2 \eta + c_2}, \quad y = \frac{a_3 \xi + b_3 \eta + c_3}{a_4 \xi + b_4 \eta + c_4},$$

переводящие эллипс $\xi^2 + \eta^2 - (p - e\xi)^2 = 0$ (уравнение кеплеровой орбиты с началом координат в фокусе) в круг $x^2 + y^2 = 1$. М. Ф. Субботин ограничивается рассмотрением случая $a_1 c_2 - a_2 c_1 = 0$.

Если написать уравнение круга в параметрической форме

$$x = \cos w, \quad y = \sin w,$$

то параметрическое уравнение кеплерова эллипса оказывается возможным свести к одному из следующих:

$$\begin{aligned} \xi &= a \frac{(-ae + A) \cos w' + a - eA}{a \cos w' + A}, \quad \eta = a \frac{(1 - e^2) \sin w'}{a \cos w' + A}, \\ \xi &= a \frac{(-ae - A) \cos w' + a + eA}{a \cos w' - A}, \quad \eta = a \frac{(e^2 - 1) \sin w'}{a \cos w' - A}, \end{aligned}$$

где a , e — большая полуось и эксцентриситет эллипса, a и A — произвольные параметры преобразования.

Придавая этим параметрам различные значения, мы получим целое множество различных аномалий w . Так, при $\alpha=0$ w и w' оказываются идентичными с эксцентрической аномалией E ; при $\alpha=e$ $w=v$ (истинная аномалия), $w'=C$ (тангенциальная аномалия Каландаро); М. Ф. Субботин предлагает новую аномалию $w=S$, которая получается при $\alpha=e\sqrt{1-e^2}$. Аномалия S меняется со временем более равномерно, чем E , v и C , что иллюстрируется автором таблицами.

В другой из упомянутых работ М. Ф. Субботин предлагает видоизменение известного уравнения Эйлера—Ламберта, которое позволяет настолько просто находить большую полуось орбиты, что оно может стать основой для нового метода определения элементов по двум положениям, отличным от общепринятого метода Гаусса, основанного на вычислении отношения площади эллиптического сектора к площади соответствующего треугольника. Уравнение Ламберта в форме М. Ф. Субботина имеет следующий вид:

$$\frac{1}{4a} = \frac{\tau}{r+r'} = \frac{e^2}{4a^2},$$

где $\tau = k(t-t_0)$, $r = R + \frac{16R^3e^2}{(t - \sin t - e + t \sin t)^2}$, $\sin \frac{t}{2} = \sqrt{R(1+c)}$, $\sin \frac{t'}{2} = \sqrt{R(1-c)}$, $R = \frac{r+r'}{4a}$, $c = \frac{s}{r+r'}$, r, r' — два гелиоцентрических расстояния в моменты t и t' , s — хорда, соединяющая эти два положения. Автор развивает все формулы, необходимые для вычисления всех элементов после того как большая полуось определится из уравнения Ламберта.

У М. Ф. Субботина имеется также несколько работ по небесной механике, являющихся по преимуществу прикладной характер, где математическая строгость, вопросы сходимости (обычн-таки в том смысле, как она понимается математиками) стоят на втором плане, а главное внимание уделено удобству практического применения предлагаемых методов. Такова довольно значительная по объему работа о вычислении вековых неравенств „Sur le calcul des inegalités seculaires. Première partie. Solution nouvelle du probleme de Gauss" (1941).

Как известно, Гаусс свел вычисление вековых неравенств к решению интегрируемой задачи о движении материальной точки под действием неоднородного эллиптического кольца, которое представляет собой орбиту возмущающей планеты, вдоль которой распределена ее масса таким образом, что плотность кольца обратно пропорциональна скорости возмущающей планеты в соответствующей точке. После Гаусса разные авторы предложили несколько других методов сведения этой задачи к квадратурам. Метод М. Ф. Субботина отличается тем, что решение дается в виде рядов по степени эксцентриситета возмущающей планеты e' . Общим же видом квадратур, так же как и область сходимости полученных рядов, автор не интересуется. Зато полученные им формулы имеют несомненное практическое удобство при малых e' .

К этому же ряду можно отнести несколько небольших статей по различным вопросам практической небесной механики, достаточную характеристику которых дают их заглавия: „О методе Оппольдера решения проблемы Кеплера" (1928), „О вычислении гелиоцентрических координат планет и комет с помощью квадратур" (1932), „О вычислении гелиоцентрических координат комет" (1929), „Определение элементов орбиты планеты или кометы посредством вариации двух гелиоцентрических расстояний" (1922), „Формулы и таблицы для дифференциального исправления кометных орбит" (1937).

В течение целого ряда лет (1927—1938 гг.) М. Ф. Субботин занимается вопросами численного интегрирования, обобщая богатый опыт применения численных методов в небесной механике. В первой работе 1927 г. дается общая классификация и сравнительный анализ методов численного интегрирования. Все методы делятся на разностные и квадратурные, причем предпочтение отдается квадратурным, а среди этих последних — методу Коуаала, как наиболее точному. Во второй статье 1928 г. развивается оригинальный метод численного интегрирования дифференциальных уравнений высших порядков. Кроме того, здесь показывается, как методы численного интегрирования могут быть применены к граничным задачам. В качестве примера приводится решение

такой задачи: „Один конец балки, лежащей на упругом основании, закреплен, другой — свободен. На закрепленном конце действует изгибающий момент M . Определить длину балки так, чтобы прогиб свободного конца был равен нулю". В 1933 г. М. Ф. Субботин развивает квадратурный метод, аналогичный разностному методу В. В. Нумерова (так называемому „методу экстраполирования"). Кроме того, М. Ф. Субботин находит, что метод экстраполирования представляет собой модификацию старого метода Тителена. В работе 1938 г. М. Ф. Субботин дает целую серию формул квадратур, позволяющих находить определенный интеграл с заданной точностью при помощи минимального числа значений подинтегральной функции.

Отметим здесь еще одну работу М. Ф. Субботина, посвящую сугубо прикладной характер, но выполненную тем не менее со всей математической строгостью, — „Упругие колебания при сопротивлении, пропорциональном квадрату скорости". Эта статья написана в трудных условиях 1942 г. в Свердловске по специальному заданию, поставленному перед Государственным астрономическим институтом им. Штернберга. Автор рассматривает нелинейное уравнение упругих колебаний в виде

$$\ddot{x} + b\dot{x}^2 \operatorname{sgn} \dot{x} + x = 0$$

и устанавливает, что движение всегда, каков бы ни был коэффициент сопротивления b , носит характер затухающих колебаний. Таким образом, движение типа Ae^{2kt} , характерные для линейных колебаний, здесь невозможны. Тут же приводятся удобные для пользования формулы, ряды и таблицы для вычисления амплитуд и частот этих колебаний.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ ТРУДОВ М. Ф. СУББОТИНА

I. Математика

1. Об определении особых точек аналитических функций. *Мат. сб.*, 1916, т. XXX, вып. 3.
2. Sur les points singuliers de certaines equations differentielles. *Bull. sci. math.*, 1916, 2 série, t. XI, vol. II.
3. О форме коэффициентов степенных разложений алгебраических функций. *Изв. Донецк. политехн. инст.*, 1919, г. VII.
4. Численное интегрирование дифференциальных уравнений (статья первая). *Бюлл. Среднеа. гос. ун-ва.*, 1927, № 16; 1928, № 17.
5. Sur les propriétés-limites du module des fonctions entières d'ordre fini. *Math. ann.*, 1931, Bd. 104, He. 3.
6. О численном интегрировании дифференциальных уравнений. *Изв. АН СССР, Отд. мат. и естеств. наук*, 1933, сер. 7, № 7.

II. Теория ошибок и ее астрономические и геодезические применения

1. On the Law of Frequency of Error. *Mat. сб.*, 1923, т. 31, вып. 2.
2. On the Solar Rotation Period from Greenwich Sunspot Measures 1886—1909. *Astr. Nachr.*, 1923, Bd. 218, № 5209.
3. Об отсчитывании кругов при помощи микроscopes. *Бюлл. Среднеа. гос. ун-ва.*, 1925, № 9.
4. Quelques remarques sur la mesure de bases au moyen de l'appareil Jäderin. *Astr. Nachr.*, 1927, Bd. 229, № 5489.

III. Небесная механика

1. Determination of the Elements of the Orbit of a Planet or Comet by Means of the Variation of Two Geocentric Distances. *Monthly Not. R. Astr. Soc.*, 1922, vol. LXXXII.
2. On the Application of Lambert's Theorem to the Determination of Orbits. *Monthly Not. R. Astr. Soc.*, 1922, vol. LXXXII.
3. Новая форма уравнения Эйлера—Ламберта и ее применение при вычислении орбит. *Русск. астр. журн.*, 1924, т. 1, вып. 1.
4. Sur la méthode de Th. v. Oppolzer pour la solution du problème de Kepler. *Astr. журн.*, 1928, т. V, вып. 4.
5. Sur le calcul des coordonnées héliocentriques des comètes. *Astr. Nachr.*, 1929, Bd. 234, № 5606.
6. Sur le calcul des coordonnées héliocentriques des planètes et des comètes au moyen des quadratures. *Цирк. Гл. астр. обсерв.*, в Пулковке, 1932, № 1.
7. Sur le problème des deux corps de masses variables. *Astr. журн.*, 1936, т. XIII, вып. 6.

8. О новой аномалии, заключающейся как частные случаи эксцентрическую, истинную и тангенциальную аномалии. ДАН СССР, 1936, т. IV (XIII), 4 (108).
9. О новой аномалии, по отношению к которой употребляемые в небесной механике аномалии являются частными случаями. Тр. Астр. обсерв. ЛГУ, 1937, т. 7.
10. Формулы и таблицы для дифференциального исправления кометных орбит. Тр. Астр. обсерв. ЛГУ, 1937, т. 7.
11. О некоторых свойствах движения в задаче и тел. ДАН СССР, 1940, т. XXVII, № 5.
12. Sur le calcul des inégalités séculaires. Première partie. Solution nouvelle du problème de Gauss. Астр. журн., 1941, т. XVIII, вып. 1.
13. Об одном способе ускорения сходимости тригонометрических рядов, имеющих основное значение для небесной механики. ДАН СССР, 1943, т. XL, № 8.
14. Улучшение сходимости основных разложений теории возмущенного движения. Булл. ИТА, 1947, т. IV, № 1 (54).
15. Tables relatives aux développements de la fonction perturbatrice obtenues par la transformation linéaire et la transformation de Legendre. Булл. ИТА, 1947, т. IV, № 1 (54).

IV. Отдельные монографии

1. Формулы и таблицы для вычисления орбит и эфемерид. Ташкентск. Астр. обсерв., 1929.
2. Курс небесной механики, т. I. Изд. 1-е, А.—М., 1933, изд. 2-е, А.—М., 1941.
3. Курс небесной механики, т. II, А.—М., 1937.
4. Курс небесной механики, т. III, А.—М., 1949.
5. Вспомогательные таблицы для вычисления орбит и эфемерид. Приложение к «Курсу небесной механики», А., 1941.

V. Астрометрия

1. К вопросу об однородности собственных движений фундаментального каталога Boss's. Булл. Среднеа. гос. ун-ва, 1925, № 10.
2. A Catalogue of the Photographic Magnitudes of 194 Stars in Messier 67. Русск. астр. журн., 1925, т. II, вып. 3.
3. A Proposal for a New Method of Improving the Fundamental Star-Places and the Determining the Constant of Aberration. Astr. Nachr., 1925, Bd. 224, № 5362.
4. Результаты обработки наблюдений над качеством изображений звезд в г. Кисловодске. Русск. астр. журн., 1926, т. III, вып. 1.
5. Proper Motions of 1186 Stars of the Cluster N. G. C. 7654 (M 52) and the Surrounding Region (First Catalogue). Тр. Среднеа. гос. ун-ва, 1927, сер. Va, вып. 1.
6. Observations of the Transits of Mercury on 1924 May 7—8 and 1927 November 10 Made of the Tashkent Observatory. Тр. Ташкентск. астр. обсерв., 1928, т. 1.
7. Partial Eclipse of the Sun, June 29, 1927, Observed at the Tashkent Observatory. Тр. Ташкентск. Астр. Обсерв., 1928, т. 1.
8. On the Determination of the Equinox Corrections from Observations of the Minor Planets. Цирк. Га. астр. обсерв. в Пулково, 1932, № 3.
9. Некоторые соображения по вопросу о построении фундаментального каталога. Астр. журн., 1937, XIV, вып. 3.
10. К вопросу об ориентировке фундаментального каталога слабых звезд. Уч. зап. Казанск. гос. ун-ва, 1940, т. 100, кн. 4, Астрономия, № XXIX.
11. О деятельности Института теоретической астрономии АН СССР в области астрономии. Тр. 10-й Всес. астр. конф., Пулково, 1952.
12. Решения IX Генеральной Ассамблеи Международного Астрономического Союза. Астрономический ежегодник СССР. Тр. 12-й Астр. конф. СССР, Пулково, 1955.

VI. История астрономии. Популярные статьи

1. Изменяемость широт. Природа, 1930, вып. 3.
2. Основные методы современной небесной механики. Мироздание, 1934, т. 23, № 1.
3. Астрономические работы Лагранжа. Жозеф-Луи-Лагранж, 1736—1936. Сб. ст. к 200-летию со дня рождения. М.—А., 1937.
4. Теоретическая астрономия. В кн.: Астрономия в СССР за тридцать лет. 1917—1947. М., 1948. Перевод на кит. яз.: Теоретическая астрономия в СССР за тридцать лет. Acta Astronomica Sinica, vol. VIII, № 1, 1955.
5. Небесная механика. БСЭ, изд. 1-е, т. 41.
6. Орбиты. БСЭ, изд. 1-е, т. 43.
7. Ежегодник астрономические. БСЭ, изд. 2-е, т. 15.
8. Коперник. БСЭ, изд. 2-е, т. 22.
9. Небесная механика. БСЭ, изд. 2-е, т. 29.
10. Орбиты небесных светил. БСЭ, изд. 2-е, т. 31.
11. Плутоны. БСЭ, изд. 2-е, т. 38.
12. Птолемей. БСЭ, изд. 2-е, т. 35.

13. Сфера действия тяготения. БСЭ, изд. 2-е, т. 41.
14. Таблицы математические. БСЭ, изд. 2-е, т. 42.
15. Теоретическая астрономия. БСЭ, изд. 2-е, т. 42.
16. Фигуры равновесия. БСЭ, изд. 2-е, т. 44.
17. Эфемериды. БСЭ, изд. 2-е, т. 49.
18. Эфемеридное время. БСЭ, изд. 2-е, т. 49.
19. К четвержеюлетию со дня смерти Николая Коперника. Природа, 1943, № 5.
20. Происхождение и возраст Земли. Гостехиздат, М.—А., 1945; Воениздат, М., 1947; изд. 2-е, перераб., Гостехиздат, 1950. Переводы: So wurde die Erde. Wien, 1947; Pochodzenie i wiek ziemi. Warszawa, 1946, 1950; Происход и возраст на Землята. София, 1946, 1951; A föld keletkezése és kora. Budapest, 1950; Vznik a starí zeme. Praha, 1952; Mavratiln vnyk jalka. Helsinki, 1946.
21. Работы Мухаммеда Насираддина по теории движения Солнца и планет. Изв. Акад. наук УзССР, 1952, № 5.
22. «Астрономический ежегодник СССР» и основные задачи эфемеридной астрономии. Булл. ИТА, 1953, т. V, № 8(71).
23. Теория относительности и небесная механика. Астр. журн., 1956, т. XXXIII, вып. 2.
24. Деятельность К. Ф. Гаусса в области астрономии и геодезии. Вопр. ист. естеств. и техн., 1956, вып. 1. Перевод: Das Wissenschaftliche Erbe von Carl-Friedrich Gauß und seine Arbeiten auf dem Gebiete der Astronomie. Wiss. Ann., 1956, Hft. 8.
25. Астрономические и геодезические работы Гаусса. Карл-Фридрих Гаусс. Сб. «100 лет со дня смерти (1855—1955)». М., 1956.
26. Работы Ари Пуанкаре в области небесной механики. Вопр. ист. естеств. и техн., 1956, вып. 2.
27. Леонард Эйлер и астрономические проблемы его времени. Сб. «Леонард Эйлер. К 250-летию со дня рождения». М., 1958.
28. Астрономические работы Леонарда Эйлера. Сб. «Леонард Эйлер. К 250-летию со дня рождения». М., 1958.
29. Институт Теоретической астрономии. Изд. АН СССР, М.—А., 1958.

VII. Таблицы и другие работы прикладного характера

1. О таблицах функций, применяемых в астрономических вычислениях. Изв. АН СССР, Отд. техн. наук, 1938, № 6.
2. Многозначные таблицы логарифмов. М.—А., 1940.
3. Упругие колебания при сопротивлении, пропорциональном квадрату скорости. Изв. АН СССР, Отд. техн. наук, 1944, № 1—2.

Поступило в Редакцию
19 апреля 1953 г.

8
муо
5
части
3
ЛГУ
1
Абтр
7
ля
1
т. IV
] Писа

хиди

Сред
1925
Соп
астр
1
(Fig)
кент
Астр
Гл.
1
вмп
уни
Вее
еже

роя
Пе
vol

254

БОЛЛЕТЕНЬ ИНСТИТУТА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ АСТРОНОМИИ,
том VII, № 3 (86)

Утверждено к печати
Институтом теоретической астрономии
Академии наук СССР

Технический редактор В. Т. Бочавер
Корректор А. А. Смольевский

Сдано в набор 20/Х 1958 г. Подготовлено к печати 7/И
1959 г. РИСО АН СССР № 44*—14 В. Формат бумаги
84х108/16. Бум. л. 20. Печ. л. 5 ш 82 усл. печ. л.
Уч.-изд. л. 8,98 Изд. № 883. Тип. зак. № 838.
М-21805 Тираж 1000 Цена 6 р. 30 к.

Ленинградское отделение Издательства Академии
наук СССР Ленинград, В-164, Менделеевская
лин., д. 1

1-я тип. издательства Академии наук СССР
Ленинград, В-34, 9 лин. д. 12

СОДЕРЖАНИЕ

ИСПРАВЛЕНИЯ И ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
202	Подпись под рис. 1	1 см.;	4 мм;
203	Подпись под рис. 2	1 см.;	4 мм;
204	Подпись под рис. 3	1 см.	4 мм;
204	Подпись под рис. За	7 см.	6 мм;
224	22 снизу	20 декабря	30 декабря
230	14 сверху	$\delta x = \frac{x}{n}$	$\delta x = -\frac{x}{n}$
230	15 "	$\delta y = \frac{y}{n}$	$\delta y = -\frac{y}{n}$
230	16 "	$\delta z = \frac{z}{n}$	$\delta z = -\frac{z}{n}$
249	17 "	3) $\lim_{r \rightarrow 0} r = 0$; $\lim_{r \rightarrow \infty} r = \infty$.	3) $\lim_{r \rightarrow 0} r = 0$; $\lim_{r \rightarrow \infty} r = \infty$.

Бюллетень ИТА, № 3 (86)

БЮЛЛЕТЕНЬ ИНСТИТУТА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ АСТРОНОМИИ,

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Н. С. Самойлова-Яхонтова. Малые планеты (1957)	177
Г. А. Чеботарев и А. И. Божкова. Исследование движения двух тройцев численными методами	186
Г. А. Чеботарев и М. С. Волков. Движение Пятрола в поле тяжести Солнца и протоянуса	202
Ш. У. Кан. Комета 1951 X Аркда	208
Х. К. Раудсар. Исследование движения кометы Неувинна-1 за 1931—1948 гг.	221
Г. А. Мерман. Очерк математических работ Михаила Федоровича Субботина (к 65-летию со дня рождения)	233

6 p. 30 к.

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ
РЕСПУБЛИК

БЮЛЛЕТЕНЬ ИНСТИТУТА
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ АСТРОНОМИИ

Том VII, № 4 (87)



ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА 1959 ЛЕНИНГРАД

Директор Института теоретической астрономии чл.-корр. АН СССР *М. Ф. Субботин*
 Ответственный редактор проф. *Г. А. Чеботарев*

Бюллетень Института Теоретической Астрономии

Т. VII

1959

№ 4 (87)

Об оценке погрешности численного интегрирования уравнений небесной механики

В. Ф. Мячин

Данная статья налагает результат применения некоторой общей теории оценки погрешности численного интегрирования дифференциальных уравнений, предложенной профессором С. М. Лозинским, с учетом случайного характера ошибки округления к уравнениям невозмущенного движения небесной механики. При этом, в частности, показывается, что новая теория дает качественное подтверждение известного результата Брауэра, утверждающего, что при достаточно большом числе k шагов интегрирования погрешность в координатах эллиптического движения имеет порядок роста $\frac{3}{k^2}$.

ON THE ESTIMATION OF ERRORS BY NUMERICAL INTEGRATION OF THE EQUATIONS OF CELESTIAL MECHANICS, by *V. F. Myachin*. — Results are presented of an application of a general theory for estimation of numerical integration errors to the differential equations of undisturbed motion of celestial bodies. The theory is mostly based on that proposed by Prof. S. M. Lozinsky but with the regard on the random character of rounding errors. The theory confirms qualitatively the well-known Brouwer's affirmation that after a sufficient large number k of numerical integration steps being performed the error in the coordinates of elliptical motion increases like $\frac{3}{k^2}$.

Введение

Рассмотрим систему уравнений возмущенного движения:

$$\ddot{x} = -K^2 \frac{x}{r^3} + R_x,$$

$$\ddot{y} = -K^2 \frac{y}{r^3} + R_y,$$

$$\ddot{z} = -K^2 \frac{z}{r^3} + R_z, \quad (A)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Как известно, наиболее распространенным методом приближенного решения таких уравнений является численное интегрирование; известно также, что применение какой-либо формулы численного интегрирования неизбежно приводит к накоплению погрешности в вычисленном приближенном решении, которая создается двумя причинами:

- 1) употреблением в интегральных формулах конечного числа членов;
 - 2) ошибками начальных данных и округлением на каждом шаге интегрирования.
- В настоящее время мы не располагаем строгими, практически приемлемыми оценками погрешности численного интегрирования дифференциальных уравнений; однако существуют так называемые нестрогие оценки, полученные путем нестрогих рассуждений.

Так, Ньюком (Newcomb, 1898) рассматривал погрешности при численном интегрировании всякого дифференциального уравнения как результат суммирования ошибок округления на каждом шаге (по аналогии с погрешностью приближенного вычисления определенного интеграла); при этом, считая эти ошибки независимыми случайными величинами (в смысле теории вероятности), он пришел к утверждению, что накопление погрешности после k шагов численного интегрирования имеет порядок $k^{\frac{3}{2}}$ для уравнений второго порядка и $k^{\frac{1}{2}}$ для уравнений первого порядка.

Применяя это утверждение к оценке накопления ошибок округления в методе специальных возмущений, можно было бы сделать вывод о преимуществе получения возмущений в элементах по сравнению с вычислением их методом Коуэлла или Энке (т. е. в координатах), поскольку в первом случае возмущения получаются как результат однократного интегрирования для всех элементов, исключая среднюю долготу, которая требует двойного интегрирования, и, следовательно, только в этом элементе происходит серьезное накопление погрешности; если же возмущения вычисляются методом Коуэлла или Энке, то для каждой координаты будет уравнение второго порядка, и ожидаемая погрешность в каждой координате будет иметь порядок $k^{\frac{3}{2}}$.

Однако Брауэр (Brauer, 1937) показал, что вышеупомянутый вывод является неправильным и что для эллиптического движения накопление ошибок в координатах эквивалентно погрешности в средней долготе, пропорциональной $k^{\frac{1}{2}}$, и погрешностям других элементов, пропорциональным $k^{\frac{3}{2}}$; и, следовательно, для кругового движения, где средняя долгота является постоянной величиной, погрешность в координатах при интегрировании методом Коуэлла или Энке пропорциональна $k^{\frac{3}{2}}$. При этом Брауэр впервые обратил внимание на существенную разницу между приближенным вычислением определенного интеграла и численным интегрированием дифференциальных уравнений, которая заключается в том, что в последнем случае при вычислении каждого табличного значения используется результат предварительного интегрирования, так что погрешность в этом случае нельзя рассматривать как результат простого суммирования ошибок на каждом шаге.

Однако благодаря нестрогости рассуждений результат Брауэра с количественной стороны является грубым: он не отражает, в частности, экспериментально известного факта, состоящего в том, что погрешность имеет колебательный характер; более того, при достаточно большом числе шагов интегрирования формулы дают занижение, т. е. истинная погрешность превосходит предсказанную.

В последнее время профессор С. М. Лозинский предложил ряд общих теорем для оценки погрешности численного интегрирования систем дифференциальных уравнений. Настоящая статья излагает результат применения к системе (А) так называемой «дискретизованной оценки»¹ Лозинского, несколько видоизмененной и приспособленной к интересующей нас задаче. При этом показывается, что если, следуя Ньюкому и Брауэру, рассматривать ошибки округления как независимые случайные величины, то для накопления погрешности в координатах эллиптического движения указанная оценка дает порядок $k^{\frac{3}{2}}$, а для кругового движения — порядок $k^{\frac{1}{2}}$.

Названный метод позволяет учесть не только влияние ошибок округления на погрешность в координатах, но также и эффект, даваемый ошибками начальных данных и отбрасыванием остаточного члена в интегральных формулах. Кроме того, имеется возможность следить за изменением погрешности отдельно в каждой координате. Изложение ведется на примере метода Коуэлла.

¹ В настоящей работе эта оценка и печать не опубликована. С разрешения автора мы заимствовали ее из курса лекций «Приближенное решение дифференциальных уравнений», читанного С. М. Лозинским в Ленинградском университете в 1955—1957 гг.

§ 1. Некоторые вспомогательные сведения о матрицах и о системах линейных дифференциальных уравнений

Пусть дана прямоугольная матрица:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$$a_{ij} := \{A\}_{ij}; \quad A := \|a_{ij}\|.$$

Матрица, состоящая из одного столбца, называется вектором. Пусть \bar{x} — вектор с компонентами $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$.

Мы будем обозначать:

$$\bar{x} := \{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}\}; \quad x^{(i)} := \{\bar{x}\}^{(i)}.$$

Через $|\bar{x}|$ будем обозначать вектор, определенный равенством $|\bar{x}|^{(i)} := |\{x^{(i)}\}|$.

Наконец, введем норму вектора x , обозначаемую через $\|\bar{x}\|$ и определяемую равенством

$$\|\bar{x}\| := \max_{i=1, \dots, n} |x^{(i)}|.$$

Вектор будем рассматривать как частный случай матрицы.

Для данной матрицы A обозначим через \hat{A} матрицу, определенную равенством

$$(\hat{A})_{ij} := (A)_{ji};$$

она называется транспонированной.

Транспонированный вектор есть матрица, состоящая из одной строки:

$$\bar{x} := [x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}].$$

Матрица, имеющая одинаковое число строк и столбцов, называется квадратной. У квадратной матрицы элементы $\{A\}_{ii}$ образуют главную диагональ.

Действие над матрицами:

1. Сложение двух матриц. По определению:

$$(A+B)_{ij} := (A)_{ij} + (B)_{ij}.$$

2. Умножение матрицы A на число λ . По определению:

$$(\lambda A)_{ij} := \lambda (A)_{ij}.$$

3. Перемножение матриц. Пусть матрица A имеет n столбцов, а матрица B — n строк; тогда по определению:

$$(AB)_{ij} := \sum_{m=1}^n (A)_{im} (B)_{mj}.$$

Если число столбцов A не равно числу строк B , то произведение AB не определено. Умножение матриц обладает свойством ассоциативности, а умножение и сложение — свойством дистрибутивности:

$$(AB)C = A(BC),$$

$$C(A+B) = CA + CB,$$

если все обозначенные произведения определены.

Операция умножения матриц, вообще говоря, не обладает свойством коммутативности:
 $AB \neq BA$.

Например, для вектора $\bar{x} \equiv (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})$ и транспонированного вектора \bar{x}^T имеем:

$$\bar{x}\bar{x}^T = x^{(1)2} + x^{(2)2} + \dots + x^{(n)2},$$

но

$$\bar{x}\bar{x}^T = \begin{pmatrix} x^{(1)2} & x^{(1)}x^{(2)} & \dots & x^{(1)}x^{(n)} \\ x^{(2)}x^{(1)} & x^{(2)2} & \dots & x^{(2)}x^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^{(n)}x^{(1)} & x^{(n)}x^{(2)} & \dots & x^{(n)2} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

4. Транспонирование произведения двух матриц:

$$(\overline{AB})^T = \overline{B^T A^T}. \quad (2)$$

5. Дифференцирование матриц. Пусть $A(t)$ — матрица, представляющая функцию скалярного аргумента t ; тогда по определению:

$$(\dot{A}(t))_{ij} = \frac{d}{dt} (A(t))_{ij}.$$

6. Интегрирование. По определению:

$$\left\{ \int_a^t A(t') dt' \right\}_{ij} = \int_a^t (A(t'))_{ij} dt'.$$

Далее будем говорить только о квадратных матрицах. Матрица, все элементы которой есть нули, называется нулевой и обозначается 0 . Матрица, у которой элементы на главной диагонали равны единице, а все остальные — нулю, называется единичной и обозначается I .

$$I = \begin{bmatrix} 1, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & 1, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots, & 1 \end{bmatrix}$$

Для любой матрицы A имеет место

$$AI = IA = A.$$

Матрица S , обладающая свойством

$$\overline{SS} = I,$$

называется ортогональной.

Рассмотрим теперь систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{y}^{(j)} = \sum_{i=1}^n p_{ij}(t) y^{(i)}.$$

Вводя вектор

$$\bar{y} \equiv (y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)})$$

и матрицу

$$P(t) \equiv \| p_{ij}(t) \|,$$

перепишем эту систему в виде

$$\dot{\bar{y}} = P(t)\bar{y}. \quad (3)$$

Введем в рассмотрение матрицы порядка n $U(t_0, t)$, $V(t_0, t)$, определенные условиями:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= P(t)U, & U(t_0, t_0) &= I, & \dot{U}(t_0, t_0) &= 0, \\ \dot{V} &= P(t)V, & V(t_0, t_0) &= 0, & \dot{V}(t_0, t_0) &= I, \end{aligned} \quad (4)$$

которые называются соответственно первым и вторым фундаментальными решениями системы (3). Столбцы этих матриц представляют $2n$ линейно независимых решений, которыми обладает система (3).

Зная фундаментальные решения системы (3), можно решить неоднородную задачу:

$$\dot{z} = P(t)z + \tau(t), \quad z(t_0) = z_0, \quad \dot{z}(t_0) = \dot{z}_0.$$

Ее решение имеет вид

$$z(t) = U(t_0, t)z_0 + V(t_0, t)\dot{z}_0 + \int_{t_0}^t U(t, \xi)\tau(\xi)d\xi. \quad (5)$$

Имеет место следующая зависимость между фундаментальными решениями:

$$V(t_0, t) = \int_{t_0}^t U(t, \xi)d\xi$$

или

$$U(t_0, t) = -\frac{d}{dt_0} V(t_0, t). \quad (6)$$

Для доказательства этих соотношений достаточно непосредственно убедиться в том, что выражение, стоящее в правой части первого из написанных равенств, удовлетворяет второй группе условий (4).

§ 2. Остаточный член метода Коулла

Рассмотрим векторную функцию

$$\bar{G}(z) \equiv (G^{(1)}(z), G^{(2)}(z), \dots, G^{(n)}(z))$$

скалярного аргумента z и введем для нее следующие разности:

$$\bar{G}_{\frac{1}{2}}^{(j)} \equiv G^{(j)}(1) - G^{(j)}(0), \quad \bar{G}_{\frac{3}{2}}^{(j)} \equiv G^{(j)}\left(\frac{1}{2}\right) - G^{(j)}\left(-\frac{1}{2}\right), \quad \bar{G}_{\frac{5}{2}}^{(j)} \equiv G^{(j)}\left(\frac{3}{2}\right) - G^{(j)}\left(-\frac{3}{2}\right), \dots;$$

$$\bar{G}_0^{(j)} \equiv \frac{1}{2} \left(\bar{G}_{\frac{1}{2}}^{(j)} + \bar{G}_{\frac{3}{2}}^{(j)} \right) \quad (j = 1, 3, 5 \dots). \quad (7)$$

Имеет место интерполяционная формула Стирлинга

$$\bar{G}(z) = \bar{G}(0) + \sum_{j=1}^{2n-1} A_{2j}(z) \bar{G}_{\frac{j}{2}}^{(j)} + \bar{R}, \quad (8)$$

где

$$A_{2j}(z) \equiv \frac{z^2(z^2-1)(z^2-4)\dots[z^2-(j-1)^2]}{(2j)!},$$

$$A_{2j-1}(z) \equiv 2j \frac{A_{2j}(z)}{z} \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Если функция $\bar{G}(z)$ имеет производную порядка $2\nu+3$, то остаточный член \bar{R} может быть записан в виде

$$\bar{R} = A_{2\nu+2} \frac{d^{2\nu+2} \bar{G}(z_1)}{dz^{2\nu+2}} + A_{2\nu+3} \frac{d^{2\nu+3} \bar{G}(z_2)}{dz^{2\nu+3}}, \quad (9)$$

$$|\zeta_i| \leq \nu + 1.$$

Примечание: Для каждой скалярной функции, входящей в состав $\bar{G}(z)$, величина ζ_i принимают, вообще говоря, различные значения.

Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}^{(j)} = F^{(j)}(t, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \quad (j=1, 2, \dots, n).$$

Вводя векторы

$$x \equiv (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}), \quad F \equiv (F^{(1)}, F^{(2)}, \dots, F^{(n)}),$$

перепишем ее в виде

$$\dot{x} = F(t, x). \quad (10)$$

Обозначим через $\bar{x}(t)$ некоторое решение системы (10), через h — шаг численного интегрирования и положим для краткости

$$\begin{aligned} \bar{F}(t, \bar{x}(t)) &\equiv \bar{f}(t), \quad t_0 + kh \equiv t_k, \\ \bar{x}(t_k) &\equiv \bar{x}_k, \quad \bar{x}_{k+1} - 2\bar{x}_k + \bar{x}_{k-1} \equiv \Delta^2 \bar{x}_k. \end{aligned}$$

Тогда последовательное интегрирование системы (10) дает

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) - \bar{x}_k &= \int_{t_k}^t \bar{f}(t') dt', \\ \bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k - h\dot{\bar{x}}_k &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \bar{f}(t') dt' - \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1} - t') \bar{f}(t') dt' = h^2 \int_0^1 (1-z) \bar{f}(t_k + hz) dz. \end{aligned} \quad (11)$$

Записывая аналогичное соотношение для точек t_{k-1}, t_k и складывая его с равенством (11), находим окончательно

$$\Delta^2 \bar{x}_k = h^2 \int_0^1 (1-z) \bar{G}(z) dz, \quad (12)$$

где положено

$$\bar{G}(z) \equiv \bar{f}(t_k + hz) + \bar{f}(t_k - hz). \quad (13)$$

Вводим теперь для функции $\bar{f}(t)$ разности, аналогичные (7):

$$\begin{aligned} \bar{f}_k &\equiv \bar{f}(t_k), \\ \bar{f}_{k+\frac{1}{2}}^{(1)} &\equiv \bar{f}_{k+1} - \bar{f}_k \\ \bar{f}_{k+\frac{1}{2}}^{(2)} &\equiv \bar{f}_{k+\frac{1}{2}}^{(1)} - \bar{f}_{k-\frac{1}{2}}^{(1)} \\ &\dots \\ \bar{f}_k^{(j)} &\equiv \frac{1}{2} \left(\bar{f}_{k-\frac{1}{2}}^{(j-1)} + \bar{f}_{k+\frac{1}{2}}^{(j-1)} \right) \quad (j=1, 3, 5 \dots) \end{aligned}$$

Тогда, замечая, что, согласно (13),

$$G_0^{(2j)} = 2\bar{f}_k^{(2j)}, \quad G_0^{(2j-1)} = 0 \quad (j=1, 2, \dots),$$

и подставляя (8) в (12), находим

$$\Delta^2 \bar{x}_k = h^2 \left[\bar{f}_k + \sum_{j=1}^{\nu} a_{2j} \bar{f}_k^{(2j)} + \bar{q}_k \right], \quad (14)$$

где

$$a_j = 2 \int_0^1 (1-z) A_j(z) dz \quad (j=1, 2, \dots). \quad (15)$$

Если функция $\bar{f}(t)$ имеет непрерывную производную порядка $2\nu+3$, то, согласно (9), остаточный член \bar{q}_k может быть представлен в виде

$$\bar{q}_k = \frac{1}{2} a_{2\nu+2} \frac{d^{2\nu+2} \bar{G}(z_1)}{dz^{2\nu+2}} + \frac{1}{2} a_{2\nu+3} \frac{d^{2\nu+3} \bar{G}(z_2)}{dz^{2\nu+3}}, \quad (16)$$

$$|\zeta_i| \leq \nu + 1.$$

Для того чтобы в этом убедиться, вводим числа $m_i, M_i, i=1, 2, \dots, n$, представляющие соответственно минимум и максимум $(2\nu+3)$ -й производной функции $G^{(i)}(z)$ на интервале $[-\nu-1, \nu+1]$:

$$m_i \leq \frac{d^{2\nu+3} G^{(i)}(z)}{dz^{2\nu+3}} \leq M_i.$$

Далее, замечая, что при $0 \leq z \leq 1$ множитель $(1-z)A_{2\nu+3}(z)$ представляет величину постоянного знака (скажем, положительную), умножаем на него написанное неравенство и интегрируем

$$m_i \leq \frac{\int_0^1 (1-z) A_{2\nu+3}(z) \frac{d^{2\nu+3} G^{(i)}(z)}{dz^{2\nu+3}} dz}{\frac{1}{2} a_{2\nu+3}} \leq M_i.$$

Отсюда, по известному свойству непрерывных функций, заключаем о существовании такой точки ζ_i на интервале $[-\nu-1, \nu+1]$, что

$$\frac{\int_0^1 (1-z) A_{2\nu+3}(z) \frac{d^{2\nu+3} G^{(i)}(z)}{dz^{2\nu+3}} dz}{\frac{1}{2} a_{2\nu+3}} = \frac{d^{2\nu+3} G^{(i)}(\zeta_i)}{dz^{2\nu+3}}.$$

Аналогично производится интегрирование первого слагаемого из (9). При достаточно малом h выражение (16) может быть преобразовано к виду

$$\bar{q}_k \approx a_{2\nu+2} h^{2\nu+2} \frac{d^{2\nu+2} \bar{f}(t_k)}{dt^{2\nu+2}} + a_{2\nu+3} h^{2\nu+3} \frac{d^{2\nu+3} \bar{f}(t_k)}{dt^{2\nu+3}}, \quad (16')$$

$$|\zeta_i| \leq \nu + 1.$$

Равенство (14) представляет метод Коуэлла в разностной форме. Ему соответствует следующий метод квадратур:

$$\dot{\bar{x}}_k = h^2 \left[\bar{f}_k^{(-2)} + a_2 \bar{f}_k + \sum_{j=2}^{\nu} a_{2j} \bar{f}_k^{(2j-2)} + \bar{q}_k \right], \quad (17)$$

где

$$\Delta^2 \bar{f}_k^{(-2)} \equiv \bar{f}_k, \quad \Delta^2 \bar{q}_k \equiv \bar{q}_k.$$

Приведем некоторые значения коэффициентов (15):

α_2	$\frac{1}{12}$	α_3	$-\frac{7}{180}$
α_4	$-\frac{1}{240}$	α_5	$\frac{37}{5040}$
α_6	$\frac{31}{60480}$	α_7	$-\frac{199}{129600}$
α_8	$-\frac{289}{362880}$	α_9	$\frac{1}{3024}$

§ 3. Ошибки округления и невязка в методе Коуэлла

Если в точных равенствах (14), (17) отбросить остаточные члены \bar{q}_k, \bar{q}'_k , заменить все \bar{x}_k их приближенными значениями и произвести необходимое округление, то мы получим соответствующие расчетные формулы Коуэлла: разностный метод и метод квадратур.

Предположим, что система (10) с начальными данными

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0, \quad \bar{x}'(t_0) = \bar{x}'_0 \quad (18)$$

интегрируется по методу квадратур с шагом h (в пределах интервала существования искомого решения), и пусть в результате интегрирования мы получим таблицу величин

$$\dots, \bar{X}_{-2}, \bar{X}_{-1}, \bar{X}_0, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k, \dots \quad (19)$$

соответствующих моментам времени

$$\dots, t_{-2}, t_{-1}, t_0, t_1, \dots, t_k, \dots$$

так, что

$$\bar{X}_k \approx \bar{x}(t_k) \equiv \bar{x}_k$$

Введем в рассмотрение величину τ_k , определяемую равенством

$$\tau_k \equiv \Delta^2 \bar{X}_k - \bar{\Phi}_k - \sum_{j=1}^k \alpha_j^* \bar{\Phi}_k^{(j)} \quad (k=0, 1, \dots), \quad (20)$$

где положено

$$\bar{\Phi}(t, \bar{x}) \equiv h^2 F(t, \bar{x}), \quad \bar{\Phi}_k \equiv \bar{\Phi}(t_k, \bar{X}_k), \quad \bar{\Phi}_k^{(j)} \equiv \Delta^j \bar{\Phi}_k \quad \text{и т. д.}$$

Величина τ_k называется невязкой метода квадратур.

Если система (10) проинтегрирована разностным методом, то величину τ_k , определяемая равенством (20), называется невязкой разностного метода.

Невязка создается главным образом за счет ошибок округления на каждом шаге численного интегрирования.

При рассмотрении вопроса о вычислении невязки ограничимся простейшим случаем формулы (17):

$$\bar{x}_k = h^2 \left[\bar{f}'_k + \frac{1}{12} \bar{f}''_k + \bar{q}'_k \right] \quad (21)$$

Если отвлечься от ошибок округления, то вычисления по методу, соответствующему точному равенству (21), могут быть представлены в виде следующей схемы.

1. Задаемся приближенными значениями начальных данных (18) \bar{X}_0, \bar{X}'_0 и вписываем их в таблицу величин (19); вычисляем $\bar{\Phi}_0, \bar{\Phi}_{-1}$, а также величины

$$\bar{\Phi}_0^{(-2)} \equiv \bar{X}_0 - \frac{1}{12} \bar{\Phi}_0,$$

$$\bar{\Phi}_{-1}^{(-1)} \equiv \bar{X}_0 - \bar{X}_{-1} - \frac{1}{12} (\bar{\Phi}_0 - \bar{\Phi}_{-1}).$$

2. По известным $\bar{\Phi}_0, \bar{\Phi}_{-1}$ экстраполируем (предсказываем) величину $\bar{\Phi}_{1,0}$, вычисляем $\bar{\Phi}_1^{(-2)}$ по формуле

$$\bar{\Phi}_1^{(-2)} \equiv \bar{\Phi}_0^{(-2)} + \frac{\bar{\Phi}_0 - \bar{\Phi}_{-1}}{h} + \bar{\Phi}_0$$

и полагаем

$$\bar{X}_{1,0} \equiv \bar{\Phi}_1^{(-2)} + \frac{1}{12} \bar{\Phi}_{1,0}$$

3. Вычисляем

$$\bar{\Phi}(t_1, \bar{X}_{1,0}) \equiv \bar{\Phi}_{1,1}$$

и полагаем

$$\bar{X}_{1,1} \equiv \bar{\Phi}_1^{(-2)} + \frac{1}{12} \bar{\Phi}_{1,1}$$

4. Вычисляем

$$\bar{\Phi}(t_1, \bar{X}_{1,1}) \equiv \bar{\Phi}_{1,2}$$

и составляем разность

$$\bar{\Phi}_{1,1} - \bar{\Phi}_{1,2} \equiv \lambda_1;$$

если окажется

$$\|\lambda_1\| \leq \lambda,$$

где λ — некоторое наперед заданное число, то на этом процесс итераций на первом шаге интегрирования прекращаем и величину $\bar{X}_{1,1}$ вписываем в таблицу величин (19) в качестве \bar{X}_1 . Если же написанное выше неравенство не выполняется, то, повторяя действия, аналогичные изложенным в 3, строим последовательные приближения:

$$\bar{X}_{1,2}, \bar{X}_{1,3}, \dots, \bar{X}_{1,l}$$

до тех пор, пока не удовлетворится неравенство

$$\|\bar{\Phi}(t_1, \bar{X}_{1,l-1}) - \bar{\Phi}(t_1, \bar{X}_{1,l})\| \equiv \|\lambda_l\| \leq \lambda;$$

тогда вектор $\bar{X}_{1,l}$ вписываем в таблицу величин (19) в качестве \bar{X}_1 .

5. Если в таблицу величин (19) уже вписаны все \bar{X}_j до $j=k-1$ включительно, то для вычисления \bar{X}_k находим величину $\bar{\Phi}_k^{(-2)}$, определяемую равенствами

$$\bar{\Phi}_k^{(-2)} \equiv \bar{\Phi}_0^{(-2)} + k \frac{\bar{\Phi}_0 - \bar{\Phi}_{-1}}{h} + \sum_{j=0}^{k-1} (k-j) \bar{\Phi}_j \quad (22)$$

или

$$\Delta^2 \bar{\Phi}_k^{(-2)} \equiv \bar{\Phi}_{k-1} \quad (22')$$

экстраполируем величину $\bar{\Phi}_{k,0}$ и строим последовательные приближения по формулам

$$\bar{X}_{k,l} \equiv \bar{\Phi}_k^{(-2)} + \frac{1}{12} \bar{\Phi}_{k,l} \quad (23)$$

$$\bar{\Phi}(t_k, \bar{X}_{k,l}) \equiv \bar{\Phi}_{k,l+1}, \quad l=0, 1, \dots$$

Итерации производятся до тех пор, пока не произойдет выполнение неравенства

$$\|\bar{\Phi}_{k,l} - \bar{\Phi}_{k,l+1}\| \equiv \|\lambda_k\| \leq \lambda. \quad (23')$$

Таким образом, если все \bar{X}_k из (19) получаются в результате l приближений на k шаге, т. е. если

$$\bar{X}_k = \bar{X}_{k,l} \quad (k=1, 2, \dots),$$

то для них необходимо выполняется условие (23').

Величина λ_k называется собственной невязкой метода (21).

Предположим теперь, что все $\bar{\Phi}_{k,l}, \bar{\Psi}_k$ вычисляются с ошибками $\bar{\rho}_{k,l}, \bar{\rho}_k$, подчиненными неравенствам

$$\begin{aligned} \|\bar{\rho}_{k,l}\| &\leq \rho & (k \geq 1, l \geq 1), \\ \|\bar{\rho}_k\| &\leq \rho & (k \geq 1), \end{aligned}$$

где ρ — фиксированное число. Это порождает в величинах $\bar{\Phi}_k^{(k-2)}$ ошибки $\bar{\rho}'_k$, которые, согласно (22) и (22'), удовлетворяют соотношениям

$$\Delta^2 \bar{\rho}'_k = \bar{\rho}_k \quad (k \geq 2). \quad (24)$$

Предположим далее, что при вычислении $\bar{X}_{k,l}, \bar{X}_k$ вводятся ошибки округления $\bar{\mu}_{k,l}, \bar{\mu}_k$, удовлетворяющие неравенствам

$$\begin{aligned} \|\bar{\mu}_{k,l}\| &\leq \mu & (k \geq 1, l \geq 1), \\ \|\bar{\mu}_k\| &\leq \mu & (k \geq 1), \end{aligned}$$

где μ — фиксированное число (например, если все $\bar{X}_{k,l}, \bar{X}_k$ вычисляются с z знаками после запятой, то следует положить $\mu = \frac{1}{2} 10^{-z}$).

С учетом введенных выше ошибок равенство (23) и условие (23') должны быть переписаны в виде

$$\bar{X}_{k,l} = \bar{\Phi}_k^{(k-2)} + \bar{\rho}'_k + \frac{1}{12} \bar{\Phi}_{k,l} + \text{ош.} \left(\frac{1}{12} \bar{\Phi}_{k,l} \right) + \bar{\mu}_{k,l} \quad (k \geq 1); \quad (25)$$

$$\|\bar{\Phi}_{k,l} - \bar{\Phi}_{k,l+1} - \bar{\rho}_{k,l} - \bar{\rho}_{k,l+1}\| \equiv \|\bar{\rho}_k\| \leq \rho. \quad (25')$$

Переходя теперь к вычислению невязки

$$\bar{\epsilon}_k = \Delta^2 \bar{X}_k - \bar{\Phi}_k - \frac{1}{12} \Delta^2 \bar{\Phi}_k,$$

вводим вспомогательную величину

$$\bar{\epsilon}'_k \equiv \bar{X}_k - \bar{\Phi}_k^{(k-2)} - \frac{1}{12} \bar{\Phi}_k \quad (k \geq 1); \quad (*)$$

тогда, согласно (25), (25'), находим

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}'_k &= \bar{\rho}'_k + \text{ош.} \left(\frac{1}{12} \bar{\Phi}_k \right) + \bar{\rho}_k + \frac{1}{12} (\bar{\Phi}_k - \bar{\Phi}_{k,l+1}) + \bar{\rho}_{k,l+1} + \text{ош.} \left(\frac{1}{12} \bar{\Phi}_k \right) + \\ &+ \bar{\rho}_k + \frac{1}{12} \bar{\rho}_k \quad (k \geq 1). \end{aligned}$$

Отсюда, замечая, что

$$\bar{\epsilon}'_k = \Delta^2 \bar{\epsilon}'_k, \quad (**)$$

и применяя оператор Δ^2 к обеим частям написанного выше равенства, с помощью (24) находим окончательно

$$\bar{\epsilon}'_k = \bar{\rho}_k + \frac{1}{12} \Delta^2 \bar{\rho}'_k + \text{ош.} \left(\frac{1}{12} \Delta^2 \bar{\Phi}_k + \Delta^2 \bar{\rho}_k + \frac{1}{12} \Delta^2 \bar{\rho}_k \right) \quad (k \geq 2), \quad (26)$$

где положено

$$\bar{\rho}'_k \equiv \bar{\rho}_{k,l+1}$$

Примечание. Если воспользоваться определением $\bar{\Phi}_k^{(k-2)}$ и ввести еще

$$\bar{\Phi}_{k-1}^{(k-2)} \equiv \bar{\Phi}_k^{(k-2)} - \bar{\Phi}_k^{(k-1)},$$

то равенство (*) при $k=0, -1$ дает

$$\bar{\epsilon}'_0 = \bar{\epsilon}'_{-1} = 0.$$

Отсюда, согласно (**), легко показать, что формула (26) может быть сохранена и при $k=0, 1$, если при этом за $\bar{\rho}'_0, \bar{\rho}'_{-1}$ принять величину $\bar{\rho}_0, \bar{\rho}_{-1}$, а также положить

$$\bar{\rho}_0 = \bar{\rho}_{-1} = 0, \quad \bar{\rho}'_0 = \bar{\rho}'_{-1} = 0$$

и в выражении ош. $\left(\frac{1}{12} \right) \Delta^2 \bar{\rho}_k$ считать

$$\bar{\rho}_0 = \bar{\rho}_{-1} = 0.$$

Если интегрирование системы (10) производится разностным методом, соответствующим точной формуле

$$\Delta^2 \bar{x}_k = h^2 \left(\bar{f}_k + \frac{1}{12} \Delta^2 \bar{f}_k + \bar{q}_k \right),$$

то, повторяя с соответствующими изменениями все изложенные выше рассуждения, мы приходим к следующему выражению для невязки $\bar{\epsilon}_k$:

$$\bar{\epsilon}_k = \bar{\rho}_k + \frac{1}{12} \Delta^2 \bar{\rho}'_k + \text{ош.} \left(\frac{1}{12} \Delta^2 \bar{\Phi}_k + \bar{\rho}'_k + \frac{1}{12} \Delta^2 \bar{\rho}'_k \right) \quad (k \geq 0), \quad (26')$$

где через $\bar{\rho}'_k$ обозначены ошибки округления для $\Delta^2 \bar{X}_k$, подчиненные условию

$$\|\bar{\rho}'_k\| \leq \mu \quad (k \geq 0),$$

а все остальные величины имеют прежний смысл.

Далее мы будем пользоваться выражениями (26), (26') в качестве приближенных значений для невязки $\bar{\epsilon}_k$, определяемой равенством (20).

Примечание. Величинами $\bar{\rho}_k$ определены как ошибки, возникающие при вычислении векторов $\bar{\Phi}_k$, если в последних компонентах векторов \bar{X}_k считать точными числами. Следуя Ньюкому и Брауэру, мы будем рассматривать эти ошибки как независимые ошибки округления.

§ 4. Линеаризованная оценка погрешности метода Коузала

Предположим, что моментам времени $\dots, t_{-2}, t_{-1}, t_0, t_1, \dots, t_k, \dots$ соответствуют величины (19), полученные численным интегрированием системы (10) с начальными данными (18) по методу Коузала. Это означает, что названные величины удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\Delta^2 \bar{x}_k = h^2 \left[\bar{F}_k + \sum_{j=1}^k z_{2,j} \bar{F}_k^{(2,j)} \right] + \bar{\epsilon}_k \quad (k \geq 0), \quad (27)$$

где положено

$$\bar{F}_k \equiv F(t_k, \bar{x}_k), \quad \bar{F}_k^{(2)} \equiv \Delta^2 \bar{F}_k \text{ и т. д.,}$$

а через $\bar{\epsilon}_k$ обозначена невязка, вычисляемая по формулам (26) или (26').

Обозначая через $\bar{x}(t)$ точное решение системы (10) с начальными данными (18) и полагая $\bar{x}(t_k) \equiv \bar{x}_k$, вводим следующие определения:

а) погрешность приближенного решения \bar{x}_k (или погрешность метода Коузала)

$$\bar{x}_k - \bar{x}_k \equiv \bar{\epsilon}_k \equiv \bar{\epsilon}_k^{(1)}, \bar{\epsilon}_k^{(2)}, \dots, \bar{\epsilon}_k^{(n)}; \quad (28)$$

б) матрицу Якоби $J(t, \bar{x})$ системы (10)

$$\{J(t, \bar{x})\}_{ij} \equiv \frac{\partial F^{(i)}(t, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})}{\partial x^{(j)}}$$

(здесь \bar{x} представляет совокупность независимых координат);

в) матрицу Якоби на искомом точном решении

$$J(t) \equiv J(t, \bar{x}(t));$$

г) наконец, полагаем

$$Q_k \equiv \int_0^1 J(t_k, \bar{x}_k + z\bar{\epsilon}_k) dz$$

Величины Q_k определены лишь при условии, что отрезки L_k , соединяющие точки (t_k, \bar{x}_k) и (t_k, X_k) $(n-1)$ -мерного пространства, содержатся в области определения решения $\bar{x}(t)$.

Вычитая теперь (14) из (27) и пользуясь очевидным тождеством

$$F_k - \bar{f}_k \equiv Q_k \delta_{k,p}$$

находим

$$\frac{\Delta^2 \delta_k}{h^2} = Q_k \delta_k + \sum_{j=1}^n \alpha_{2j} \Delta^{2j} (Q_k \delta_k) + \frac{\bar{x}_k}{h^2} - \bar{q}_k \quad (k \geq 0), \quad (29)$$

где Δ^{2j} — оператор центральной разности порядка $2j$.

Равенство (29) называется уравнением ошибок.

Имея целью упростить задачу, заменим это уравнение приближенно следующим:

$$\frac{\Delta^2 \delta_k}{h^2} = J(t_k) \delta_k + \frac{\bar{x}_k}{h^2} - \bar{q}_k; \quad (29')$$

равенство (29') называется линеаризованным уравнением ошибок (Лозинский).

Введем в рассмотрение фундаментальные решения $U(t_0, t)$, $V(t_0, t)$ системы $\ddot{y} = f(t, y)$, определенные условиями типа (4). Тогда общее решение уравнения (29') по аналогии с (5) приближенно может быть записано в виде

$$\delta_k \approx \delta_{k,0} + \delta_{k,\tau} + \delta_{k,\varphi} \quad (k \geq 1), \quad (30)$$

где положено

$$\delta_{k,0} \equiv U(t_0, t_k) \delta_0 + \frac{V(t_0, t_k)}{h} (\delta_0 - \delta_{-1}), \quad (31)$$

$$\delta_{k,\tau} \equiv \sum_{m=0}^{k-1} V(t_m, t_k) \frac{\bar{x}_m}{h}, \quad (32)$$

$$\delta_{k,\varphi} \equiv \sum_{m=0}^{k-1} V(t_m, t_k) \bar{q}_m h. \quad (33)$$

Всякая оценка по абсолютной величине правой части равенства (30) называется линеаризованной оценкой погрешности методов (14) или (17).

Величина $\delta_{k,0}$ представляет погрешность, создаваемую ошибками

$$\delta_0 = X_0 - \bar{x}_0, \quad \delta_{-1} = X_{-1} - \bar{x}_{-1}$$

в начальных данных (18), и называется погрешностью начального смещения.

Величина $\delta_{k,\tau}$ создается в результате округления на каждом шаге (а также за счет собственной невязки метода интегрирования) и называется погрешностью округления.

Наконец, величина $\delta_{k,\varphi}$ представляет результат отбрасывания остаточного члена в интегральных формулах (14), (17) и называется погрешностью квадратур.

Подставляя (16') в (33) и заменяя приближенно сумму интегралом, найдем оценку для погрешности квадратур

$$\begin{aligned} |\delta_{k,\varphi}| \leq & \left| \alpha_{2\nu+2} h^{2\nu+2} \int_{t_0}^{t_k} V(\xi, t_k) \frac{d^{2\nu+2} f(\xi)}{d\xi^{2\nu+2}} d\xi \right| + \\ & + \left| \alpha_{2\nu+3} h^{2\nu+3} (\nu+1) h^{2\nu+1} \int_{t_0}^{t_k} \left| V(\xi, t_k) \frac{d^{2\nu+1} f(\xi)}{d\xi^{2\nu+1}} \right| d\xi, \end{aligned} \quad (34)$$

или, пренебрегая при достаточно малом h вторым слагаемым (16')

$$\delta_{k,\varphi} \approx -\alpha_{2\nu+2} h^{2\nu+2} \int_{t_0}^{t_k} V(\xi, t_k) \frac{d^{2\nu+2} f(\xi)}{d\xi^{2\nu+2}} \cdot d\xi. \quad (34')$$

Обычно на практике величины $\delta_{k,\varphi}^{(0)} \equiv (\delta_{k,\varphi})^{(0)}$ ограничены по абсолютной величине $|\delta_{k,\varphi}^{(0)}| \leq \tau$.

Переходя в (32) к абсолютным величинам и заменяя все $|\delta_{k,\varphi}^{(0)}|$ на τ , получим оценку погрешности округления в форме Лозинского

$$|\delta_{k,\tau}^{(0)}| \leq \frac{\tau}{h^2} N_k^{(0)}, \quad (35)$$

где

$$N_k^{(0)} \equiv \int_{t_0}^{t_k} \sum_{j=1}^n |v_{ij}(\xi, t_k)| d\xi.$$

Согласно (26), (26'), в методе квадратур за τ следует принять величину

$$\tau = \frac{4}{3} \rho + 4 \text{ ош.} \left(\frac{1}{12} \right) M + 4\mu + \frac{1}{3} \lambda,$$

а в случае разностного метода — величину

$$\tau = \frac{4}{3} \rho + 4 \text{ ош.} \left(\frac{1}{12} \right) M + \mu' + \frac{1}{3} \lambda,$$

где положено

$$M \equiv \max [h^2 |F^{(0)}(t_m, \bar{X}_m)|] \approx \max [h^2 |F^{(0)}(t_m, \bar{x}_m)|], \quad 1 \leq i \leq n, \quad 0 \leq m \leq k.$$

Оценку (35) можно несколько улучшить, если воспользоваться следующим тождеством:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{k-1} V(t_m, t_k) \Delta^2 \delta_m & \equiv V(t_0, t_k) \delta_{-1} + [V(t_1, t_k) - 2V(t_0, t_k)] \delta_0 + \\ & + \sum_{m=1}^{k-2} \Delta^2 V(t_m, t_k) \delta_m + [V(t_{k-2}, t_k) - 2V(t_{k-1}, t_k)] \delta_{k-1} + V(t_{k-1}, t_k) \delta_k, \end{aligned} \quad (*)$$

где δ_m — произвольные векторные величины. Вводя обозначение

$$V^m(\xi, t) \equiv \frac{\partial^2 V(\xi, t)}{\partial \xi^2}$$

и используя соотношения

$$\begin{aligned} \Delta^2 V(t_m, t_k) & \equiv V(t_{m-1}, t_k) - 2V(t_m, t_k) + V(t_{m+1}, t_k) \approx h^2 V^m(t_m, t_k), \\ V^m(t_k, t_k) & = 0, \quad V(t_{k-1}, t_k) \approx h V^m(t_{k-1}, t_k), \end{aligned}$$

легко выводимые из (3), (4), (6), перепишем тождество (*) в виде

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{k-1} V(t_m, t_k) \Delta^2 \delta_m & \approx V(t_0, t_k) \delta_{-1} + [V(t_1, t_k) - 2V(t_0, t_k)] \delta_0 + \\ & + h^2 \sum_{m=1}^{k-2} V^m(t_m, t_k) \delta_m + h \delta_k. \end{aligned} \quad (**)$$

Подставим теперь (26) в (32) и результат подстановки запишем в виде

$$\delta_{k,\tau}^{\pm} \equiv \delta_{k,\tau}^{\pm} + \delta_{k,\tau}^{\pm} + \delta_{k,\tau}^{\pm} + \delta_{k,\tau}^{\pm} + \delta_{k,\tau}^{\pm} \quad (36)$$

где положено

$$\delta_{k,\tau}^{\pm} \equiv \sum_{m=0}^{k-1} V(t_m, t_k) \frac{\delta_m^{\pm}}{h},$$

$$\delta_{k,\mu}^{\pm} \equiv \sum_{m=0}^{k-1} V(t_m, t_k) \Delta^2 \frac{\delta_m^{\pm}}{h},$$

Положим в тождестве (36) $\delta_m^{\pm} = \bar{\delta}_m^{\pm}$ и произведем с его помощью оценку $|\delta_{k,\tau}^{\pm}|$, заменяя все $|\delta_m^{\pm}|$ их максимальными значениями μ ; тогда получим

$$|\delta_{k,\tau}^{\pm}| \leq \mu(1 + P_k^{(1)}),$$

где

$$P_k^{(1)} \equiv \int_{t_0}^{t_k} \sum_{j=1}^k |u_{k,j}^{\pm}(\xi, t_k)| d\xi.$$

Аналогично производится оценка слагаемых $\delta_{k,\mu}^{\pm}$, $\delta_{k,\phi}^{\pm}$, $\delta_{k,\lambda}^{\pm}$ из (36); при этом обнаруживается, что (по крайней мере для уравнений небесной механики) все эти слагаемые, отличаясь от члена $\delta_{k,\tau}^{\pm}$ малым множителем h^2 , представляют в сравнении с ним малые величины, так что оценка (35) для метода квадратур может быть переписана в виде

$$|\delta_{k,\tau}^{\pm}| \approx |\delta_{k,\tau}^{\pm}| \leq \frac{\mu}{h^2} N_k^{(1)}. \quad (38)$$

Если речь идет об оценке погрешности округления в разностном методе Коуэлла, то, подставляя (26) в (32) и рассуждая так же, как в предыдущем случае, можно показать, что здесь главными членами будут величины $\delta_{k,\tau}^{\pm}$

$$\delta_{k,\tau}^{\pm} \equiv \sum_{m=0}^{k-1} V(t_m, t_k) \frac{\delta_m^{\pm}}{h}, \quad (37)$$

а слагаемые $\delta_{k,\mu}^{\pm}$, $\delta_{k,\phi}^{\pm}$, $\delta_{k,\lambda}^{\pm}$ будут давать по отношению к ним незначительные поправки, так что оценка (35) может быть заменена следующей:

$$|\delta_{k,\tau}^{\pm}| \approx |\delta_{k,\tau}^{\pm}| + \delta_{k,\mu}^{\pm} \leq \frac{\mu}{h^2} N_k^{(1)}. \quad (38')$$

Итак, зная фундаментальные решения $U(t_0, t)$, $V(t_0, t)$ системы $\ddot{y} = J(t)y$ и пользуясь оценками (34'), (38) или (34') и (38'), мы можем, согласно (30), оценить погрешность (28) при интегрировании системы (10) методом (17) или (14):

$$|\delta_k| \leq |\delta_{k,\tau}| + |\delta_{k,\mu}| + |\delta_{k,\phi}| + |\delta_{k,\lambda}|.$$

Примечание. При интегрировании уравнений небесной механики вычисления ведутся всегда с достаточно большим количеством разностей в интегральных формулах и с достаточной точностью и начальными данными, так что в правой части написанного выше неравенства для первых слагаемых практически не влияют на оценку погрешности δ_k , и это неравенство с учетом (38), (38') может быть переписано в виде

$$|\delta_k^{(1)}| \leq \frac{\mu}{h^2} N_k^{(1)} \quad (39)$$

(для метода квадратур) и

$$|\delta_k^{(1)}| \leq \frac{\mu}{h^2} N_k^{(1)} \quad (39')$$

(для разностного метода), где величинами $N_k^{(1)}$ взяты из (35).

Оценки (39), (39') можно улучшить, если, как это принято в небесной механике, ошибки округления $\delta_k^{(1)}$, $\delta_k^{(2)}$ рассматривать как независимые случайные величины в смысле теории вероятности (см. приложение в конце § 3).

§ 5. Об условиях применимости нормального закона распределения вероятностей к оценке погрешности округления

Некоторая вещественная переменная ξ называется стохастически определенной случайной величиной (или просто „случайной величиной“), если при любом фиксированном x известна вероятность неравенства $\xi < x$, которую мы будем обозначать через $\varphi(x)$; при изменении x от $-\infty$ до $+\infty$ получим функцию $\varphi(x)$, которая называется законом распределения или функцией распределения случайной величины ξ .

Соотношение случайной величины ξ с ее функцией распределения $\varphi(x)$ записывается следующим образом:

$$P(\xi < x) = \varphi(x).$$

Под знаком P можно переходить к эквивалентным неравенствам, не меняя их вероятности.

Аксиомы вероятности налагают на функцию распределения всякой случайной величины некоторые ограничения:

1) $\varphi(x)$ монотонно возрастает при $-\infty < x < +\infty$;

2) $\varphi(-\infty) = 0$, $\varphi(+\infty) = 1$ и т. д.

Зная функцию распределения случайной величины ξ , можно для заданных чисел x_1 , x_2 найти вероятность неравенства $x_1 < \xi < x_2$ по формуле

$$P(x_1 < \xi < x_2) = \varphi(x_2) - \varphi(x_1),$$

откуда, в частности, следует

$$P(|\xi| < x) = \varphi(x) - \varphi(-x). \quad (40)$$

Случайная величина ζ , имеющая функцию распределения $G(z) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$, называется нормальной, а функция $G(z)$ — нормальным законом распределения вероятностей. Согласно (40), для нормальной случайной величины ζ имеем

$$P(|\zeta| < z) = \Phi(z) \equiv \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{1}{2}z^2} dz. \quad (41)$$

Приведем некоторые значения функции $\Phi(z)$:

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0.03	0.0239	0.674	0.5000
0.1	0.0798	1.0	0.6826
0.2	0.1586	1.5	0.8650
0.3	0.2360	2.0	0.9544
0.4	0.3108	3.0	0.9973
0.5	0.3830	4.0	0.9999

Для случайной величины ξ , функция распределения которой имеет непрерывную производную $p(x)$, вводятся следующие определения:

1) математическое ожидание

$$m \xi \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x) dx \equiv a;$$

2) дисперсия

$$D(\xi) \equiv \text{мо}(\xi - a)^2 \equiv b;$$

3) третий абсолютный центральный момент

$$\text{мо}|\xi - a|^3 \equiv c.$$

Если λ — постоянное число, то

$$\text{мо} \lambda \xi = \lambda \text{мо} \xi, \quad D(\lambda, \xi) = \lambda^2 D(\xi).$$

Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ называются независимыми в совокупности, если вероятность неравенства $\xi_m < x$ при любом фиксированном m не зависит от того, какие значения принимают остальные случайные величины.

Центральная предельная теорема теории вероятности

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ — некоторые независимые в совокупности случайные величины, обладающие математическими ожиданиями $\text{мо} \xi_m \equiv a_m$, дисперсиями b_m и третьими абсолютными центральными моментами c_m ($1 \leq m \leq k$).

Тогда закон распределения величины

$$\chi_k \equiv \frac{\sum_{m=1}^k (\xi_m - a_m)}{\sqrt{B_k}},$$

где $B_k \equiv \sum_{m=1}^k b_m$ стремится к нормальному закону $G(z)$ при $k \rightarrow \infty$, если выполнено следующее условие Ляпунова:

$$\psi_k \equiv \frac{\sum_{m=1}^k c_m}{B_k^{3/2}} \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Заключение теоремы означает, что

$$P\left(\frac{\sum_{m=1}^k (\xi_m - a_m)}{\sqrt{B_k}} < z\right) \approx G(z),$$

или, согласно (41),

$$P\left(\left|\frac{\sum_{m=1}^k (\xi_m - a_m)}{\sqrt{B_k}}\right| < z \sqrt{B_k}\right) \approx \Phi(z).$$

Возвращаясь теперь к обозначениям § 4, будем рассматривать ошибки округления $\rho_m^{(d)}$ из (37) как независимые случайные величины, имеющие одинаковые функции распределения

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 0 \text{ при } x < -\rho, \\ \varphi(x) &= \frac{x + \rho}{2\rho} \text{ при } -\rho \leq x \leq \rho, \\ \varphi(x) &= 1 \text{ при } x > \rho \end{aligned}$$

(равномерное распределение случайной величины).

Число ρ , фигурирующее в определении $\varphi(x)$, необходимо удовлетворяет неравенствам

$$|\rho_m^{(d)}| \leq \rho. \quad (43)$$

Применяя сформулированную теорему к случайной величине $\delta_{k,p}^{(d)}$, находим последовательно

$$\text{мо} \rho_m^{(d)} = 0, \quad D(\rho_m^{(d)}) = \frac{\rho^2}{3}, \quad 0 \leq m \leq k-1;$$

$$B_k^{(d)} = \frac{1}{3} \frac{\rho^2}{h^2} \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{j=1}^n v_{ij}^2(t_m, t_k) \approx \frac{1}{3} \frac{\rho^2}{h^2} N_k^{(d)},$$

где положено

$$N_k^{(d)} \equiv \int_{t_0}^{t_k} \sum_{j=1}^n v_{ij}^2(\xi, t_k) d\xi. \quad (44)$$

Сформулированная выше теорема приводит к следующему утверждению. Если выполнено условие

$$\psi_k \equiv \frac{\sum_{j=1}^n \int_{t_0}^{t_k} |v_{ij}^3(\xi, t_k)| d\xi}{(N_k^{(d)})^{3/2}} \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty, \quad (*)$$

то к погрешности округления $\delta_{k,p}^{(d)}$ применим нормальный закон распределения вероятностей

$$P(|\delta_{k,p}^{(d)}| < z \sqrt{B_k^{(d)}}) = \Phi(z). \quad (45)$$

Примечание. Во всех случаях, которые нам встретятся в дальнейшем, условие (*) окажется выполненным, и мы на нем более не будем останавливаться.

Введем в рассмотрение коэффициент завышения формулы (45) $\eta \equiv \frac{z \sqrt{B_k^{(d)}}}{|\delta_{k,p}^{(d)}|}$, который представляет собой случайную величину

$$P(\eta < y) = P\left(\frac{z}{y} \sqrt{B_k^{(d)}} < |\delta_{k,p}^{(d)}|\right) = 1 - \Phi\left(\frac{z}{y}\right).$$

Величина d , определяемая равенством $d \equiv P(\eta < 1) = 1 - \Phi(z)$, представляет вероятность завышения и должна рассматриваться как дефект формулы (45) при данном z . Наибольший интерес представляет величина

$$\rho(y) \equiv P(1 < \eta < y) = \Phi(z) - \Phi\left(\frac{z}{y}\right), \quad (46)$$

которая характеризует вероятность „чистого“ завышения, даваемого формулой (45).

При $z=3$ формула (45) дает

$$|\delta_{k,p}^{(d)}| < \frac{z \sqrt{3}}{h^2} \sqrt{N_k^{(d)}} \quad (47)$$

с вероятностью 0.9973, где величины $\rho, N_k^{(d)}$ определяются согласно (43), (44).

С учетом замечания, сделанного в конце § 4, можно написать следующую вероятностную оценку для погрешности метода квадратур (17):

$$|\delta_k^{(d)}| < \frac{z \sqrt{3}}{h^2} \sqrt{N_k^{(d)}} = \epsilon_k^{(d)}. \quad (48)$$

Вероятность занижения будет $d=0.0027$.
С помощью (42), (46) можно устанавливать границы „чистого“ завышения, даваемые формулами (47) или (48), и вероятности их осуществления.

y	$p(y)$
6	0.6143
10	0.7613
30	0.9175
100	0.9734

Так, например, согласно приведенным данным, можно утверждать, что с вероятностью 0.7613 формула (47) дает „чистое“ завышение менее чем в 10 раз.

Примечание. Повторяя все изложенные выше рассуждения, мы можем написать вероятностную оценку для слагаемых $\delta_{x,p}$, $\delta_{x,y}$ из (36), если ошибки $\mu_{x,p}^{(0)}$, $\mu_{x,y}^{(0)}$ считать независимыми случайными величинами и воспользоваться тождеством (*) из § 4 (при этом получаются малые поправки к правым частям неравенств (47)), а также оценку члена (37), если независимыми величинами считать ошибки $\mu_{x,p}^{(0)}$, при этом, делая оценку (37) совместно с (37), мы получим приближенную оценку погрешности округления для разностного метода (14)

$$|\delta_{x,p}^{(0)} + \delta_{x,y}^{(0)}| \leq \frac{\sqrt{p^2 + y^2} \sqrt{3}}{h^2} \cdot \sqrt{N_k^{(0)}}$$

которую, согласно замечанию в конце § 4, можно распространить и на погрешность δ_x .

§ 6. Оценка погрешности численного интегрирования задачи двух тел (эллиптическое движение)

Рассмотрим систему уравнений невозмущенного движения

$$\ddot{x} + \frac{K^2 x}{r^3} = 0, \quad \ddot{y} + \frac{K^2 y}{r^3} = 0, \quad \ddot{z} + \frac{K^2 z}{r^3} = 0, \quad (49)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

и предположим, что она интегрируется методом квадратур. Общее решение системы (49) имеет вид

$$\begin{aligned} x &= a [P_x (\cos E - e) + \sqrt{1-e^2} Q_x \sin E], \\ y &= a [P_y (\cos E - e) + \sqrt{1-e^2} Q_y \sin E], \\ z &= a [P_z (\cos E - e) + \sqrt{1-e^2} Q_z \sin E], \end{aligned} \quad (50)$$

где

$$E - e \sin E = n(t - T), \quad n \equiv Ka^{-\frac{3}{2}}$$

Здесь через $P_x, P_y, P_z, Q_x, Q_y, Q_z$ обозначены проективные коэффициенты (Субботин, 1941).

Введем векторы

$$\begin{aligned} \dot{x} &\equiv (x, y, z) \equiv (x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}), \\ \dot{x}^*(t) &\equiv (a(\cos E - e), a\sqrt{1-e^2} \sin E, 0) \end{aligned} \quad (50)$$

и ортогональную матрицу

$$S \equiv \|s_{ij}\| \equiv \begin{pmatrix} P_x & Q_x & \pm \sqrt{1-P_x^2-Q_x^2} \\ P_y & Q_y & \pm \sqrt{1-P_y^2-Q_y^2} \\ P_z & Q_z & \pm \sqrt{1-P_z^2-Q_z^2} \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Знаки в третьем столбце матрицы S выбираются таким образом, чтобы выполнялось условие ортогональности

$$SS^T = I. \quad (52)$$

Тогда формула (50) может быть переписана в виде

$$x(t) = S \dot{x}^*(t). \quad (53)$$

В обозначениях § 4 находим

$$J(t, \dot{x}) = \frac{K^2}{r^3} \begin{pmatrix} 3x^2 - r^2 & 3xy & 3xz \\ 3xy & 3y^2 - r^2 & 3yz \\ 3xz & 3yz & 3z^2 - r^2 \end{pmatrix}.$$

Желая упростить выкладки при вычислении фундаментальных решений $U(t_0, t)$, $V(t_0, t)$ системы

$$\dot{y} = J(t)y,$$

введем в рассмотрение матрицу

$$J^*(t) \equiv J(t, x^*(t))$$

и фундаментальные решения $U^*(t_0, t)$, $V^*(t_0, t)$ системы

$$\dot{y}^* = J^*(t)y^*.$$

Тогда, согласно (1), (2), (52), (53), находим последовательно

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{K^2}{r^5(t)} [3x(t)\dot{x}(t) - r^2(t)I] = SJ^*(t)\dot{S}; \\ U(t_0, t) &= SU^*(t_0, t)\dot{S}, \\ V(t_0, t) &= SV^*(t_0, t)\dot{S}. \end{aligned} \quad (54)$$

Для доказательства соотношений (54) достаточно, используя (53), непосредственно убедиться в том, что их правые части удовлетворяют условиям типа (4).

Матрица $J^*(t)$ имеет вид

$$J^*(t) = \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ B & C & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} A &= n^2 \frac{(3-e^2) \cos^2 E - 4e \cos E + (3e^2 - 1)}{(1-e \cos E)^3}, \\ B &= n^2 \frac{3\sqrt{1-e^2} (\sin E \cos E - e \sin E)}{(1-e \cos E)^3}, \\ C &= n^2 \frac{(2e^2 - 3) \cos^2 E + 2e \cos E + (2-3e^2)}{(1-e \cos E)^3}, \\ D &= n^2 \frac{-1}{(1-e \cos E)^3}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} v_{1,3}^*(t_0, t) &= 0, & v_{2,3}^*(t_0, t) &= 0, \\ v_{3,1}^*(t_0, t) &= 0, & v_{3,2}^*(t_0, t) &= 0, \end{aligned}$$

а величины $v_{1,1}^*$, $v_{1,2}^*$, $v_{2,1}^*$, $v_{2,2}^*$, $v_{3,3}^*$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} v_{1,j}^* &= Av_{1,j}^* + Bv_{2,j}^* \\ v_{2,j}^* &= Bv_{1,j}^* + Cv_{2,j}^* \quad (j=1, 2), \\ v_{3,3}^* &= Dv_{3,3}^* \end{aligned}$$

Решение этих уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} v_{1,1}^*(t_0, t) &= \frac{1}{n(1-e \cos E)(1-e \cos E_0)} \{ [(1-e^2) \sin E \cos E + e \sin E] \times \\ &\times \cos^2 E_0 + [(e^2-1) \cos^2 E + (e^2-e) \cos E + 2(1-e^2)] \cos E_0 \sin E_0 + \\ &+ [(e-e^2) \sin E \cos E + 2(e^2+1) \sin E] \cos E_0 + [-e \cos^2 E - \\ &- 2(e^2-1) \cos E + 5e \sin E_0 + [-2(1-e^2) \sin E \cos E - 5e \sin E] - \\ &- 3 \sin E \sin E_0 (E-E_0)]; \\ v_{1,2}^*(t_0, t) &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{n(1-e \cos E)(1-e \cos E_0)} \{ [\cos^2 E + e \cos E - 2] \cos^2 E_0 + \\ &+ [\sin E \cos E + e \sin E] \sin E_0 \cos E_0 + [-e \cos^2 E + 2 \cos E - e] \cos E_0 + \\ &+ [-e \sin E \cos E + 2 \sin E] \sin E_0 + [\cos^2 E + e \cos E - 2] + \\ &+ 3 \sin E \cos E_0 (E-E_0)]; \\ v_{2,1}^*(t_0, t) &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{n(1-e \cos E)(1-e \cos E_0)} \{ [-\cos^2 E + e \cos E - 1] \cos^2 E_0 + \\ &+ [-\sin E \cos E + e \sin E] \sin E_0 \cos E_0 + [-e \cos^2 E - 2 \cos E - e] \cos E_0 + \\ &+ [-e \sin E \cos E - 2 \sin E] \sin E_0 + [2 \cos^2 E + e \cos E - 2] + \\ &+ 3 \cos E \sin E_0 (E-E_0)]; \\ v_{2,2}^*(t_0, t) &= \frac{1}{n(1-e \cos E)(1-e \cos E_0)} \{ [\sin E \cos E - e \sin E] \cos^2 E_0 + \\ &+ [-\cos^2 E + (e^2+e) \cos E - 1] \sin E_0 \cos E_0 + [-(e^2+e) \sin E \cos E + 2 \sin E] \cos E_0 + \\ &+ [e \cos^2 E - 2 \cos E - e] \sin E_0 + [\sin E \cos E - e \sin E] - 3(1-e^2) \cos E \cos E_0 (E-E_0); \\ v_{3,3}^*(t_0, t) &= \frac{1}{n} [\sin E \cos E_0 + (-\cos E + e) \sin E_0 - e \sin E]. \end{aligned}$$

Справедливость равенств (55) устанавливается путем непосредственной подстановки их правых частей в написанные выше уравнения и проверки соответствующих начальных условий [см. (4)]. Здесь через E_0 обозначено начальное значение аномалии

$$E_0 - e \sin E_0 = n(t_0 - T).$$

Переходя теперь к определению матрицы $U^*(t_0, t)$, имеем, согласно (6),

$$\begin{aligned} u_{1,1}^*(t_0, t) &= \frac{1}{(1-e \cos E)(1-e \cos E_0)} \{ 3 \sin E (\cos E_0 - e) (E - E_0) + \dots \}, \\ u_{1,2}^*(t_0, t) &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e \cos E)(1-e \cos E_0)} \{ 3 \sin E \sin E_0 (E - E_0) + \dots \}, \\ u_{2,1}^*(t_0, t) &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e \cos E)(1-e \cos E_0)} \{ -3 \cos E (\cos E_0 - e) (E - E_0) + \dots \}, \\ u_{2,2}^*(t_0, t) &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e \cos E)(1-e \cos E_0)} \{ -3(1-e^2) \sin E_0 \cos E (E - E_0) + \dots \}, \\ u_{3,3}^*(t_0, t) &= \dots \end{aligned}$$

где точками обозначены периодические члены, которые для нас не имеют значения.

Соотношения (54) дают

$$\begin{aligned} v_{i,j}(t_0, t) &= v_{1,1}^*(t_0, t) s_{i,1} s_{j,1} + v_{1,2}^*(t_0, t) s_{i,1} s_{j,2} + v_{2,1}^*(t_0, t) s_{i,2} s_{j,1} + \\ &+ v_{2,2}^*(t_0, t) s_{i,2} s_{j,2} + v_{3,3}^*(t_0, t) s_{i,3} s_{j,3} \end{aligned}$$

и аналогичное равенство для $u_{i,j}(t_0, t)$, откуда, вводя величины

$$\begin{aligned} \delta_k^{(i)} &\equiv s_{i,1} \sin E_k - \sqrt{1-e^2} s_{i,2} \cos E_k, \\ \delta_k^{(i)} &\equiv s_{i,1} (\cos E_k - e) + \sqrt{1-e^2} s_{i,2} \sin E_k \quad (i=1, 2, 3), \end{aligned}$$

где

$$E_k - e \sin E_k \equiv n(t_k - T),$$

согласно (55), (56), находим с точностью до вековых членов

$$\begin{aligned} v_{i,j}(t_0, t_k) &= \frac{-3\delta_k^{(i)} \delta_k^{(j)}}{n(1-e \cos E_k)(1-e \cos E_0)} (E_k - E_0), \\ u_{i,j}(t_0, t_k) &= \frac{3\delta_k^{(i)} \delta_k^{(j)}}{(1-e \cos E_k)(1-e \cos E_0)} (E_k - E_0). \end{aligned} \quad (57)$$

Подставляя (57) в (31), получим выражение для погрешности начального смещения

$$\begin{aligned} \delta_{k,0}^{(i)} &\approx \frac{3\delta_k^{(i)}}{(1-e \cos E_k)(1-e \cos E_0)} \left[\gamma_0^{(i)} \delta_0^{(i)} + \gamma_0^{(i)} \delta_0^{(i)} + \gamma_0^{(i)} \delta_0^{(i)} \right] (E_k - E_0) + \\ &+ \frac{-3\delta_k^{(i)}}{n(1-e \cos E_k)(1-e \cos E_0)} \left[\delta_0^{(i)} (\delta_0^{(i)} - \delta_0^{(i)}) + \delta_0^{(i)} (\delta_0^{(i)} - \delta_0^{(i)}) + \delta_0^{(i)} (\delta_0^{(i)} - \delta_0^{(i)}) \right] (E_k - E_0). \end{aligned}$$

Равенство (34') с учетом соотношений (53), (54) дает оценку для погрешности квадратур

$$\delta_{k,q} \approx -2\alpha_{2+2q} \int_{t_0}^{t_k} V^*(\xi, t_k) \frac{d^{2q+1} \xi}{d\xi^{2q+1}} d\xi.$$

Отсюда с помощью (50') и (55) находим с точностью до вековых членов (для простоты формулы выписываются при $e=0$)

$$\delta_{k,q}^{(i)} \approx \pm 2\alpha_{2+2q} \delta_k^{(i)} (n t_k)^{2q+2} (E_k - E_0).$$

Переходим теперь к вычислению величин $M_k^{(i)}$, определенных равенствами (44) и фигурирующих в оценке погрешности округления (47). Для этого замечаем, что названные величины образуют главную диагональ матрицы $V\bar{V}$, которая, согласно (54), может быть представлена в виде

$$V\bar{V} = S V^* \bar{V}^* \bar{S}.$$

Отсюда, вводя обозначения

$$\begin{aligned} N_k^{*(i,j)} &\equiv \int_{t_0}^{t_k} |v_{1,1}^*(\xi, t_k) v_{j,1}^*(\xi, t_k) + v_{1,2}^*(\xi, t_k) v_{j,2}^*(\xi, t_k)| d\xi \quad (i=1, 2, j=1, 2), \\ N_k^{*(3,3)} &\equiv \int_{t_0}^{t_k} v_{3,3}^*(\xi, t_k) d\xi, \end{aligned}$$

находим

$$N_k^{(i)} = N_k^{*(1,1)} s_{i,1}^2 + 2N_k^{*(1,2)} s_{i,1} s_{i,2} + N_k^{*(2,2)} s_{i,2}^2 + N_k^{*(3,3)} s_{i,3}^2 \quad (i=1, 2, 3). \quad (58)$$

Элементарные вычисления, согласно (55), приводят к следующим выражениям для величин $N_k^{*(i,j)}$ (которые для простоты выписаны при $e=0$):

$$\begin{aligned}
 N_k^{*(1,1)} &= \frac{1}{n^3} \left\{ 3 \sin^2 E_k (E_k - E_0)^2 + 6 \sin E_k \cos E_k (E_k - E_0)^2 + \right. \\
 &+ \left[\frac{13}{2} + \frac{15}{2} \sin^2 E_k + 12 \sin^2 E_k \cos(E_k - E_0) + 12 \sin E_k \sin E_0 \right] (E_k - E_0) + \\
 &+ \left[24 \cos^2 E_k \sin(E_k - E_0) - 32 \sin(E_k - E_0) + 3(\sin E_k \cos E_k - \sin E_0 \cos E_0) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3}{4} (\sin^2 E_k + 1) \sin 2(E_k - E_0) \right] \left. \right\}, \\
 N_k^{*(1,2)} &= \frac{1}{n^3} \left\{ -3 \sin E_k \cos E_k (E_k - E_0)^2 - 3(\cos^2 E_k - \sin^2 E_0)(E_k - E_0)^2 + \right. \\
 &+ \left[-\frac{15}{2} \sin E_k \cos E_k - 12 \sin E_k \cos E_k \cos(E_k - E_0) - 6(\sin E_k \cos E_0 + \sin E_0 \cos E_k) \right] \times \\
 &\quad \times (E_k - E_0) + \left[24 \sin E_k \cos E_k \sin(E_k - E_0) - \frac{3}{2}(\cos^2 E_k - \sin^2 E_k) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{2}(\cos^2 E_0 - \sin^2 E_0) + \frac{3}{4} \sin E_k \cos E_k \sin 2(E_k - E_0) \right] \left. \right\}, \\
 N_k^{*(2,2)} &= \frac{1}{n^3} \left\{ 3 \cos^2 E_k (E_k - E_0)^2 - 6 \sin E_k \cos E_k (E_k - E_0)^2 + \right. \\
 &+ \left[\frac{13}{2} + \frac{15}{2} \cos^2 E_k + 12 \cos^2 E_k \cos(E_k - E_0) + 12 \cos E_k \cos E_0 \right] (E_k - E_0) + \\
 &+ \left[24 \sin^2 E_k \sin(E_k - E_0) - 32 \sin(E_k - E_0) - 3(\sin E_k \cos E_k - \sin E_0 \cos E_0) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3}{4}(\cos^2 E_k + 1) \sin 2(E_k - E_0) \right] \left. \right\}, \\
 N_k^{*(3,3)} &= \frac{1}{n^3} \left\{ \frac{1}{2} (E_k - E_0) - \frac{1}{2} \sin(E_k - E_0) \cos(E_k - E_0) \right\}.
 \end{aligned}$$

Отсюда, воспользовавшись величинами

$$\begin{aligned}
 \alpha_k^{(i)} &= s_{i,1} \sin E_k - s_{i,2} \cos E_k \\
 \gamma_k^{(i)} &= s_{i,1} \cos E_k + s_{i,2} \sin E_k \quad (i=1, 2, 3),
 \end{aligned}$$

из (58) находим

$$\begin{aligned}
 N_k^{(i)} &= \frac{1}{n^3} \left\{ 3\alpha_k^{(i)2} (E_k - E_0)^2 + 6\alpha_k^{(i)} \gamma_k^{(i)} (E_k - E_0) + \left[\frac{13}{2} - 6s_{i,2}^2 + \frac{15}{2} \alpha_k^{(i)2} + 12\alpha_k^{(i)2} \cos(E_k - E_0) \right. \right. \\
 &+ \left. \left. + 12\alpha_k^{(i)} \gamma_k^{(i)} \right] (E_k - E_0) + \left[-8(1 - s_{i,2}^2) \sin(E_k - E_0) - 24\alpha_k^{(i)2} \sin(E_k - E_0) + \right. \right. \\
 &+ \left. \left. + 3(\alpha_k^{(i)} \gamma_k^{(i)} - \alpha_k^{(i)} \gamma_k^{(i)}) + \left(-\frac{3}{4} \alpha_k^{(i)2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} s_{i,2}^2 \right) \sin 2(E_k - E_0) \right] \right\} \quad (i=1, 2, 3). \quad (59)
 \end{aligned}$$

При $e \neq 0$ равенства (59) должны быть заменены следующими (при $s_{i,3} = 0$):

$$\begin{aligned}
 N_k^{(i)} &= \frac{1}{n^3 (1 - e \cos E_0)^2} \left\{ 3\alpha_k^{(i)2} (E_k - E_0)^2 + [6\alpha_k^{(i)} \gamma_k^{(i)} - 3e \sin E_k \alpha_k^{(i)2} - 9e \sin E_0 \alpha_k^{(i)2}] (E_k - E_0)^2 + \right. \\
 &+ \frac{1}{1 - e^2} \left[\frac{3}{2} e^2 (1 - e^2) \alpha_k^{(i)2} \cos 2E_0 + (1 - e^2) [24(\cos E_k + e) \alpha_k^{(i)2} - \right. \\
 &\quad \left. - 12 \sin E_k \alpha_k^{(i)} \gamma_k^{(i)} \cos E_0 + (1 - e^2) [6(e^2 + 4) \sin E_k \alpha_k^{(i)2} + \right. \\
 &\quad \left. + 12 \cos E_k \alpha_k^{(i)} \gamma_k^{(i)} \sin E_0 + [2e^2 \cos^2 E_k + 5e \cos E_k + \left(\frac{13}{2} - \frac{7}{2} e^2 \right) \gamma_k^{(i)2} + \right. \\
 &\quad \left. + (e^4 - 9e^2) \cos^2 E_k + (4e - 8e^2) \cos E_k + \left(-\frac{3}{2} e^4 - \frac{1}{2} e^2 + 14 \right) \alpha_k^{(i)2} + \right. \\
 &\quad \left. + [8e^2 \sin E_k \cos E_k + (8e^2 + 4e) \sin E_k] \alpha_k^{(i)} \gamma_k^{(i)} \right] (E_k - E_0) + [\dots] \left. \right\}, \quad (60)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \alpha_k^{(i)} &\equiv s_{i,1} \sin E_k - \sqrt{1 - e^2} s_{i,2} \cos E_k, \\
 \gamma_k^{(i)} &\equiv [(1 + e^2) \cos E_k - 2e] s_{i,1} + \sqrt{1 - e^2} s_{i,2} \sin E_k.
 \end{aligned}$$

Здесь точками обозначены периодические члены, по величине мало отличающиеся от соответствующих членов из (59).

Обращение уравнения Кеплера [см. (50)] дает

$$E = M + e \sin M + \frac{1}{2} e^2 \sin 2M + \dots,$$

где

$$M \equiv n(t - T);$$

отсюда

$$E_k - E_0 = knh + 2e \sin \frac{knh}{2} \cos \frac{M_0 + M_k}{2} + e^2 \sin knh \cos M_0 + M_k + \dots$$

Если k соответствует целому числу оборотов, то

$$E_k - E_0 = knh.$$

При достаточно большом значении knh и при $\alpha_k^{(i)} \neq 0$ формулы (47), (60) дают следующее приближенное выражение погрешности округления:

$$|\delta_{k,i}^{(i)}| < \alpha_k^{(i)} \approx \frac{3e |\alpha_k^{(i)}|}{(1 - \cos E_k)} k^{\frac{3}{2}}, \quad (61)$$

где

$$\alpha_k^{(i)} \equiv s_{i,1} \sin E_k - \sqrt{1 - e^2} s_{i,2} \cos E_k.$$

Можно сопоставить этот результат с известной оценкой Ньюкома, которая в наших обозначениях может быть записана в виде

$$\|\delta_{k,i}\| < 0.225 \rho k^{\frac{3}{2}}.$$

С точки зрения теории, изложенной в § 5, вероятность такого неравенства будет равна 0.1780 [см. (42) и (46)].

Если воспользоваться оценкой погрешности округления в форме (35), то получим следующий результат:

$$|\delta_{k,i}^{(i)}| < \alpha_k^{(i)} \approx \frac{3}{2} \sqrt{3e} |\alpha_k^{(i)}| k^2. \quad (62)$$

Примечание 1. Рассмотрим случай кругового движения, описываемого уравнениями $s^{(i)} + n^2 s^{(i)} = 0 \quad (i=1, 2, 3),$

$$\sum_{i=1}^3 s^{(i)2} = r^2 = \text{const},$$

где $n^2 = \text{const}$.

Предположим, что эта система интегрируется методом Коуэлла. Общее решение системы имеет вид $s^{(i)} = (s_{i,1} \cos nt + s_{i,2} \sin nt) \quad (i=1, 2, 3).$

Вычисляя оценку погрешности численного интегрирования этой системы по формулам (47), находим последовательно

$$v_{i,j}(t_0, t) = \frac{\sin n(t - t_0)}{n}, \quad v_{i,j}(t_0, t) \equiv 0, \quad i \neq j;$$

$$|\delta_{k,i}^{(i)}| < \alpha_k^{(i)} \equiv \frac{\sqrt{\frac{3}{2} e}}{\frac{(nh)^{\frac{3}{2}}}{2}} \sqrt{knh - \frac{1}{2} \sin 2knh} \approx \frac{\sqrt{\frac{3}{2} e}}{nh} k^{\frac{1}{2}}.$$

Этот результат предсказан Браузером.

Примечание 2. Рассмотрим одновременно уравнения возмущенного и невозмущенного движений

$$\begin{aligned} \ddot{x}_* + \frac{K^2 x_*}{r_*^3} &= R, \\ \ddot{x} + \frac{K^2 x}{r^3} &= 0, \end{aligned}$$

где R — возмущающая функция. Обозначим соответственно через \bar{X}_* , \bar{X} результаты интегрирования этих систем методом Ковалы с одинаковыми начальными данными. Тогда вследствие малой величины возмущающей функции R можно приближенно положить $\bar{X}_* - x_* \approx \bar{X} - x$ и оценивать погрешность численного интегрирования системы возмущенного движения по формулам § 6. (Эта гипотеза высказана С. М. Лозинским).

ЛИТЕРАТУРА

Субботин М. Ф. 1941. Курс небесной механики, 1, ОГИЗ, Л.—М.
 Вегер Д. 1937. On the Accumulation of errors in numerical integration. A. J., 66, 1072.
 Newcomb S. 1938. On the Limitation of the Period during which special Perturbations can be used in Planetary Theory. A. N., 148, 3548.

Поступило в Редакцию
 28 июля 1958 г.

Бюллетень Института Теоретической Астрономии

Т. VII

1959

№ 4 (87)

О накопления ошибок при численном интегрировании в некоторых задачах небесной механики

А. С. Социлина

Излагаются результаты применения оценок погрешностей в численном интегрировании (Мячин, 1959) к численным примерам.

ON ACCUMULATION OF ERRORS IN NUMERICAL INTEGRATION IN SOME PROBLEMS OF CELESTIAL MECHANICS, by A. S. Sochilina. — The results of the application of the estimation of errors in numerical integration (Myachin, 1959) to the numerical examples have been given.

За последнее время в связи с быстрым развитием вычислительной техники методы численного интегрирования при решении задачи n тел стали наиболее эффективными. Такие колоссальные по объему вычислений работы, как „Coordinates of the Five Outer Planets 1653—2060“, „Coordinates of Four Minor Planets 1940—1960“ и другие, выполнены методами численного интегрирования. Однако накопление ошибок при интегрировании существенно снижает достоинства численных методов.

Погрешность возникает за счет ограниченной точности в вычислительной машине (ошибки округления), за счет неучтенных разностей в формулах интегрирования, а также за счет неточного значения исходных данных.

Ошибки за счет неучтенных разностей можно свести к минимуму соответствующим выбором интервала и количеством членов в формуле интегрирования. Учет ошибок в исходных данных не представляет большого труда: если начальные данные вычислены с той точностью, с которой проводятся вычисления, то их можно рассматривать как ошибки округления на первом шаге интегрирования.

В большинстве случаев важно знать зависимость между числом шагов и количеством пропадающих разрядов для того, чтобы заранее обеспечить необходимую точность или установить, с какой погрешностью получены те или другие величины.

С этой целью В. Ф. Мячиным (1959) выведены формулы для оценки накопления ошибок округления при численном интегрировании уравнения движения задачи двух тел.

Если в этих формулах пренебречь эксцентриситетом e , то, обозначая через $\delta_k^{(i)}$ истинную погрешность на k -м шаге, мы можем записать их в следующем виде:

$$|\delta_k^{(i)}| < \epsilon_k^{(i)} \quad (k=1, 2, 3, \dots; i=1, 2, 3),$$

где k — номер шага, i — номер координаты (x, y, z) ,

$$\epsilon_k^{(i)} = \frac{\epsilon \sqrt{3}}{(nh)^{1/2}} \sqrt{N^{(i)}(E_0)},$$

$$\begin{aligned} N^{(0)} \equiv & 3\sigma_k^{(12)}(E_k - E_0)^3 + 6\sigma_k^{(11)}(E_k - E_0)^2 + \left[\frac{13}{2} - 6s_k^2 + \frac{15}{2}\sigma_k^{(12)} + 12\sigma_k^{(12)} \cos(E_k - E_0) + \right. \\ & \left. - 12\sigma_k^{(20)} \right] (E_k - E_0) + \left[-8(1 - s_k^2) \sin(E_k - E_0) - 24\sigma_k^{(12)} \sin(E_k - E_0) + \right. \\ & \left. + 3(\sigma_k^{(11)} - \sigma_k^{(10)}) + \left(-\frac{3}{4}\sigma_k^{(12)} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}s_k^2 \right) \sin 2(E_k - E_0) \right], \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} s_k^{(1)} &= s_{i,1} \sin E_k - s_{i,2} \cos E_k, \\ \gamma_k^{(1)} &= s_{i,1} \cos E_k + s_{i,2} \sin E_k, \end{aligned}$$

$s_{i,1}, s_{i,2}, s_{i,3}$ — проективные коэффициенты (в общепринятых обозначениях P, Q, R), i — сугубое движение тела, h — шаг интегрирования, E_k — эксцентрическая аномалия (в данном случае средняя, так как $e=0$), ρ — максимальная ошибка округления при вычислении правых частей уравнений на каждом шаге.

В таком виде формулы использованы нами для количественного сравнения погрешности $\delta_k^{(1)}$, получающейся при численном интегрировании, с предсказанной $\delta_k^{(2)}$.

1. Проведем указанное сравнение на примерах, специально вычисленных для этой цели (примеры вычислялись на электронной машине БЭСМ АН СССР). Решается задача плоского невозмущенного движения с различными начальными данными (элементами орбиты). Величина интервала интегрирования и элементы подобраны таким образом, что на одном обороте делается ровно сто шагов. Всего вычислено три примера, в каждом из них 1100 шагов; начальные условия определены следующими элементами:

	I пример	II пример	III пример
M_0	0°	0°	0°
e	0.04825380	0.04825380	0.2
a	2997128376	648°	648°
Шаг интегрирования h	43955258794	20°	20°

Интегрирование проводилось квадратурным методом Коуэлла с учетом четвертых разностей

$$\bar{X} = \bar{f}^{(3)} + \frac{1}{12} \bar{f} - \frac{1}{240} \bar{f}^{(5)} - \frac{31}{60480} \bar{f}^{(7)},$$

где

$$\bar{f} = -h^2 k^2 \frac{d^2 X}{dt^2},$$

\bar{X} — вектор с компонентами X, Y, Z .

Результаты интегрирования

$$\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_k, \dots$$

Сравнивались с величинами

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k, \dots$$

вычисленными заранее по формулам эллиптического движения в шестом десятичном знаке, и разность

$$\bar{x}_k - \bar{X}_k = \delta_k$$

была принята за чистое накопление ошибок округления, поскольку влияние высших разностей в формуле интегрирования, в данном случае $\bar{f}^{(7)}$, учтено с максимальной точностью $\left(\frac{31}{22899600} \bar{f}^{(7)} < 1 \cdot 10^{-11}\right)$.

В дальнейшем эти ошибки также не будем принимать во внимание, так как во всех рассматриваемых работах их влияние лежит за пределом той точности, с которой проводятся вычисления.

За ошибку округления ρ принята величина $0.5 \cdot 10^{-9}$, т. е. точность, с которой вычислялась f на каждом шаге. Можно заметить, что формулы (1) значительно упростятся, если вычислять оценки для точек $E_k - E_0$, кратных $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$. В нашем же случае, благодаря тому, что решалась задача плоского движения

($s_{11} = s_{22} = 1, s_{12} = s_{21} = 0$) и интегрирование начато из точки перигелия ($E_0 = 0$), формулы (1) упрощаются еще больше, а именно

$$\delta_k^{(1)} < \delta_k^{(2)} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rho \sqrt{N^{(k)}(E_k)} \quad (i=1, 2; k=1, 2, 3 \dots),$$

$$N^{(1)}(E_k) = \frac{13}{2} E_k, \quad N^{(2)}(E_k) = 3E_k^2 + 38E_k \quad \text{при } E_k = 2m\pi, \quad (m=1, 2, \dots)$$

$$N^{(1)}(E_k) = 3E_k^2 + 14E_k - 32, \quad N^{(2)}(E_k) = \frac{13}{2} E_k - 8 \quad \text{при } E_k = \left(2m + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad (2)$$

$$N^{(1)}(E_k) = \frac{13}{2} E_k, \quad N^{(2)}(E_k) = 3E_k^2 - 10E_k \quad \text{при } E_k = (2m+1)\pi,$$

$$N^{(1)}(E_k) = 3E_k^2 + 14E_k + 32, \quad N^{(2)}(E_k) = \frac{13}{2} E_k + 8 \quad \text{при } E_k = \left(2m + \frac{3}{2}\right)\pi.$$

Начиная с $k > 200$, отношение $\frac{E_k}{E_k^2}$ становится порядка $\frac{1}{100}$, поэтому, пренебрегая первой степенью E_k по сравнению с E_k^2 , и полагая $E_k = nhk$, получим

$$\begin{aligned} \delta_k^{(1)} &= 70.3\rho k^{\frac{1}{2}}, \quad \delta_k^{(2)} = 3\rho k^{\frac{3}{2}} \quad \text{при } E_k = m\pi, \\ \delta_k^{(1)} &= 3\rho k^{\frac{3}{2}}, \quad \delta_k^{(2)} = 70.3\rho k^{\frac{1}{2}} \quad \text{при } E_k = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi. \end{aligned} \quad (3)$$

Заметим, что для всех трех рассматриваемых примеров $\delta_k^{(2)}$ получаются одинаковые. Это обусловлено тем, что произведение nh во всех примерах одно и то же $\left(\frac{\pi}{50}\right)$, а также тем, что влияние эксцентриситета исключено в приведенных формулах.

Однако эксцентриситет не очень сильно искажает результат. При $k > 200$ формула оценки (Мячин, 1959) записывается в виде

$$\delta_k = 3\rho |c_k| \frac{k^{\frac{3}{2}}}{1 - e \cos E_k}.$$

В табл. 1 приведены вычисленные $|\delta_k^{(1)}|$ и предсказанные погрешности $\delta_k^{(2)}$. В 1-й графе помещена средняя аномалия для всех трех «планет», во 2-й — соответствующее число шагов интегрирования, в 3-й графе — истинная погрешность $\delta_k^{(1)}$ и $\delta_k^{(2)}$ для примеров I—III; 9-я и 10-я графы содержат величины $\delta_k^{(1)}$ и $\delta_k^{(2)}$, дающие оценку погрешности во всех трех примерах. Величины $\delta_k^{(1)}$, $\delta_k^{(2)}$ выражены в единицах шестого десятичного знака.

Сравнивая 3-ю, 5-ю и 7-ю графы с 9-й или 4-ю, 6-ю, 8-ю с 10-й, мы сможем судить о качестве полученной оценки. Следует обратить внимание, что оценка отражает колебательный характер накопления ошибок.

2. С точки зрения накопления ошибок оказалось интересным рассмотреть координаты Урана, Сатурна, Юпитера, полученные А. К. Куликовым при интегрировании VIII спутника Юпитера за период с 24 I 1930 по 28 VIII 1965. Интегрирование проведено на электронной вычислительной машине БЭСМ с шагом в 10 дней (всего 1300 шагов). Координаты планет получены в совместном интегрировании системы 9 уравнений, причем исходные координаты взяты из „Astronomical Papers“ (1951).

Поскольку координаты планет, опубликованные в „Astronomical Papers“ в 1951 г., вычислены с большой точностью (решена совместно система уравнений движения

Таблица 1

Аномалия	Число шагов	I пример		II пример		III пример		Оценка	
		$\delta_k^{(1)}$	$\delta_k^{(2)}$	$\delta_k^{(1)}$	$\delta_k^{(2)}$	$\delta_k^{(1)}$	$\delta_k^{(2)}$	$\epsilon_k^{(1)}$	$\epsilon_k^{(2)}$
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
90	26	0	0	0	0	0	0	0	0
180	51	1	1	0	0	0	0	0	0
270	76	3	0	0	0	0	0	0	0
360	101	0	5	0	0	0	-1	0	1.5
450	126	3	2	0	0	0	0	0	0
540	151	0	3	0	0	1	3	0	0
630	176	6	0	0	0	0	0	4	0
720	201	0	7	0	0	0	1	0	4
810	226	6	0	+1	0	1	0	5	0
900	251	0	5	0	0	0	5	0	6
990	276	7	0	0	0	0	0	7	0
1080	301	0	9	0	0	0	0	8	0
1170	326	7	0	0	-1	+3	0	9	1
1260	351	0	5	0	-2	0	-6	1	10
1350	376	-7	-1	1	-1	-2	-3	11	1
1440	401	0	-11	0	-1	0	-1	1	12
1530	426	8	-1	-1	-1	-1	2	13	2
1620	451	1	5	0	-2	0	4	1	14
1710	476	-8	-1	1	-1	-2	-3	15	2
1800	501	0	-10	0	-1	0	-8	1	16
1890	526	6	-2	-1	-1	3	1	18	2
1980	551	0	3	0	-2	0	-2	19	0
2070	576	-6	-1	0	-2	-7	-1	21	0
2160	601	0	7	0	-1	0	-14	2	22
2250	626	1	-2	-1	1	7	1	24	2
2340	651	-1	-1	0	-1	0	-2	2	25
2430	676	-1	-1	-1	+1	-10	-1	26	2
2520	701	0	-3	0	-3	0	-21	2	27
2610	726	-2	-3	2	-1	12	-1	28	2
2700	751	2	-7	0	1	0	5	2	30
2790	776	4	-2	-4	-1	-15	-1	31	2
2880	801	0	2	0	-7	0	-29	2	33
2970	826	-6	-4	6	-1	16	-1	35	2
3060	851	2	-11	0	4	0	8	3	36
3150	876	9	-2	-8	-1	-20	0	38	3
3240	901	0	7	0	-12	0	-35	3	40
3330	926	-11	-3	9	-1	20	-1	42	3
3420	951	-2	-16	0	9	0	12	3	44
3510	976	14	0	-13	-1	-25	1	46	3
3600	1001	0	12	0	-19	0	-44	3	48
3690	1226	-15	-4	18	-1	36	-1	50	3
3780	1051	-2	-21	0	15	0	16	3	52
3870	1076	19	-2	-20	0	-31	2	53	3
3960	1101	0	17	0	-26	0	-53	3	54

5 внешних планет, причем вычисления проведены с 14 разрядами), то они и были приняты за точное решение X_k , а разность $X_k - \bar{X}_k$ — за истинную погрешность в оцененных координатах. Сравнение сделано в пятом десятичном знаке. Результаты приведены в табл. 2.

Для оценки этой погрешности по формулам В. Ф. Мячина надо установить ошибку, с которой делаются вычисления на одном шаге. В данном случае, кроме ошибки округления ($\rho = 0.5 \cdot 10^{-9}$), при вычислении правых частей уравнений будет существовать ошибка за счет неучтенных возмущений от Нептуна и Плутона. Величины возмущений достигают $1 \cdot 10^{-9}$, т. е. превышают вычислительную ошибку. Наибольшему влиянию возмущений из трех планет подвергается Уран, так как за исследуемый промежуток времени Уран успевает сделать только по обороту, и суммарное возмущение между Юпитером и Плутоном имеет постоянный знак в течение значительного отрезка вре-

Таблица 2

Аномалия E_k	Число шагов	$X_k - \bar{X}_k$	Ошибки округления	Ошибки неучтенных возмущений	$Y_k - \bar{Y}_k$	Ошибки округления	Ошибки неучтенных возмущений	$Z_k - \bar{Z}_k$	Ошибки округления	Ошибки неучтенных возмущений
Юпитер										
135	90	0	0.1	1	0	0.1	0	0	0.0	
180	144	0	0.2	1	0	0.3	5	0	0.1	2
225	198	-2	0.4	15	0	0.1	0	0	0.8	
270	252	-3	0.5	15	-1	0.3	3	0	0.15	1
315	306	-2	0.5	7	-3	0.8	-1	0	0.3	
360	360	+1	0.5	7	-3	1.1	31	-1	0.5	16
405	414	+2	1.3	7	-2	0.6	0	0	0.3	
450	468	+3	1.6	56	0	0.6	11	0	0.5	
495	522	+1	0.9	16	2	1.5	77	0	0.8	53
540	576	-2	0.7	16	2	1.8	77	0	0.6	
585	630	-3	2.1	120	-1	1.0	24	0	0.5	8
630	684	-6	2.6	120	-1	0.8	24	0	1.1	
675	738	-4	1.4	720	-8	3.0	147	-2	1.3	63
720	792	0	1.1	32	-8	3.0	147	-4	0.8	
765	846	5	3.4	4	-4	1.6	42	0	1.3	13
810	900	5	4.0	207	4	1.2	42	2	1.5	
855	954	2	2.2	51	4	3.8	239	2	1.9	103
900	1008	-1	1.4	51	4	4.3	239	2	1.9	
945	1066	-5	4.6	319	-2	0.7	65	-1	0.2	20
990	1120	-8	5.4	319	-2	1.5	65	-1	2.0	
1035	1174	-5	3.0	76	-10	5.0	353	-4	2.5	152
1080	1228	-4	4.5	76	-10	5.0	353	-4	2.5	
1125	1272	+8	6.1	76	-6	3.6	353	-3	2.2	
Сатурн										
225	120	+1	0.2	0.6	0	0.4	0	0	0.2	6
270	256	+3	0.6	0.6	-1	1.0	16	0	0.4	
315	392	+9	1.4	72	-1	1.1	4	-1	0.4	1.4
360	528	+19	1.4	72	+6	0.9	4	+1	1.0	
405	664	+16	1.2	6.4	-20	2.4	154	+7	1.4	64
450	800	+1	1.2	6.4	+22	3.4	154	+9	1.4	
495	936	-9	4.0	299	-12	2.6	15	-5	1.2	6
540	1072	-17	6.2	299	-9	1.4	15	-4	0.6	
Уран										
225	213	+2	3.3	7	-1	4.1	8	-1	2.0	7
270	587	+14	2.5	60	-7	1.5	12	-3	1.0	4
315	970	+31	5.2	188	-23	4.8	150	-11	4.8	47

мени, в то время как Сатурн делает 1.5 оборота, а Юпитер — 3.5 и соответственно возмущения от Нептуна и Плутона имеют периодический характер. Для оценки погрешности за счет ошибок округления воспользуемся формулами (1) (результаты приведены в табл. 2 в графах 4, 7, 10). Для оценки погрешности за счет неучтенных возмущений пользоваться этими формулами нельзя, так как возмущения не подчиняются закону случайных ошибок, а при выводе (1) использован вероятностный закон распределения случайных ошибок. Единственно приемлемой формулой в этом случае может быть следующая (Мячин, 1959):

$$|\delta_k^{(i)}| < \delta_k^{(i)0} \approx \frac{3}{2} \sqrt{3} \rho |\delta_k^{(i)0}| k^2 \quad (i=1, 2, 3; k=1, 2, 3 \dots), \quad (4)$$

где за ρ принимаем погрешность на одном шаге за счет неучтенных возмущений, а $\delta_k^{(i)0}$ имеет то же значение, что и в (1).

При вычислении по формулам (4) за ρ взято максимальное возмущение от Нептуна и Плутона для всех трех планет, т. е. $1 \cdot 10^{-9}$, что, конечно, дает сильное завышение для Юпитера и Сатурна (табл. 2, графы 5, 8, 11).

3. Дадим еще один пример. Попытаемся оценить погрешность за счет ошибок округления в координатах больших планет, опубликованных в „Astronomical Papers“ в 1951 г. Оценку сделаем по грубой формуле, полученной из (1) при следующих допущениях: пренебрегаем E_k^2 и E_k^3 по сравнению с E_k^1 , σ_k^i полагаем равными 1. Тогда (1) будет иметь вид

$$|\delta_k^i| < \delta_k^{i0} \approx 3\rho k^2. \quad (5)$$

Если за ρ взять $1 \cdot 10^{-11}$, то после 1000 шагов интегрирования, что соответствует промежутку времени в данном случае больше, чем 100 лет, погрешность в координатах планет будет равна примерно $1 \cdot 10^{-9}$, т. е. опубликованные координаты больших планет свободны от погрешности ошибок округления.

Таким образом, приведенные выше примеры показывают, что формулы, выведенные В. Ф. Мячиным для оценки погрешностей за счет ошибок округления, вполне пригодны для практического использования.

Оценка (1) отражает колебательный характер погрешности и дает сравнительно небольшое завышение (как правило, менее чем в 10 раз). При этом обнаруживается, что после 1000 шагов интегрирования в искомой величине пропадает за счет ошибок округления не более 5 разрядов.

Что же касается погрешности, создаваемой неучтенными возмущениями (табл. 2), то использованную для них оценку (4) следует считать неудовлетворительной, поскольку она не учитывает накоперемного характера возмущений. Эта оценка дает практически приемлемый результат лишь в том случае, когда на всем интервале интегрирования или на его большей части возмущения представляют величины постоянного знака.

ЛИТЕРАТУРА

- Мячин В. Ф. 1959. Об оценке погрешности численного интегрирования уравнений небесной механики. *Бюлл. ИТА*, 7, 4(87).
 Eckert W. U., D. Brouwer, C. M. Clemence. 1951. *Coordinates of the Five Outer Planets* 1653—2060. *Astr. Pap.*, 12.

Поступило в Редакцию
 28 июня 1958 г.

Бюллетень Института Теоретической Астрономии

т. VII

1959

№ 4 (87)

Временные захваты в задаче трех тел

В. Ф. Проскурин и Л. И. Румянцев

Показана возможность прихода к Солнцу комет из бесконечности и их движения в течение некоторого времени по эллиптической орбите.

TEMPORARY CAPTURES IN THE PROBLEM OF THREE BODIES, by V. F. Proskurin and L. I. Rumyantsev. — The possibility of an approach to the Sun of Comets coming from the Universe and of their motion in an elliptical orbit for some time is shown.

Начало теории захвата положено академиком О. Ю. Шмидтом (1947).¹ Являясь одним из основных моментов взгляда О. Ю. Шмидта на происхождение Солнечной системы, эта теория представляет и самостоятельный интерес для небесной механики. Долгое время полагали, что явления, именуемые теперь как захват, в задаче трех тел невозможны. Суть этого явления в следующем.

Если к некоторому телу приближается другое с гиперболической скоростью и под влиянием третьего, движущегося также по гиперболе, изменяет свою скорость на эллиптическую относительно первого тела, то можно констатировать захват. Однако если к некоторому телу, вокруг которого вращается другое по эллиптической орбите, приближается с гиперболической скоростью третье и под влиянием второго тела начинает двигаться по эллипсу относительно первого, то также следует констатировать захват.

В этой схеме, согласно исследованиям Шази (Шагу, 1929), захват невозможен. Строго показано, что приближающееся по гиперболе к двум движущимся относительно друг друга по эллипсу телам третье, с вероятностью, равной единице, рано или поздно уйдет от них по гиперболической орбите. Однако невозможность захвата на бесконечном интервале времени в ту или другую сторону не исключает возможности захвата на некотором ограниченном и достаточно большом интервале времени. Поэтому нам кажется целесообразным изучать такие захваты, которые состоят в том, что к некоторому телу, вокруг которого вращается другое по эллиптической орбите, приближается с гиперболической скоростью третье и под влиянием второго тела некоторое (достаточно большое) время движется по эллиптической орбите относительно первого.

Рассматриваемая нами задача не сводится лишь к построению новой схемы захвата, но имеет некоторое отношение к теории происхождения и эволюции кометных орбит, а также к другим вопросам.

Чтобы дать пример интересующего нас случая захвата, были выбраны по возможности реальные условия Солнечной системы. За начало координат принято Солнце с массой, равной единице. В качестве тела, движущегося вокруг Солнца, принят Юпитер с его массой. Элементы Юпитера, а также координаты и необходимые вели-

¹ Изучению явления захвата посвящены работы О. А. Сизовой (1952), Г. Е. Храповицкой (1953), Г. Ф. Хизьин (1951) и особенно глубокие исследования, проведенные в Институте теоретической астрономии АН СССР Г. А. Мерманом (1952, 1953а, 1953б, 1953в, 1954а, 1954б).

чины ваяты из статьи В. Ф. Прокураина и Т. И. Машинской (1951). Другие планеты не принимались во внимание. Траектория третьего тела (частицы P нулевой массы) определена из решения уравнений ее движения методом численного интегрирования. Нет надобности говорить здесь о том, как это делается, ввиду наличия обстоятельных описаний этого процесса (Субботин, 1937). Однако выбор начальных условий интегрирования следует осветить достаточно полно.

Пусть x, y — координаты частицы P (плоская задача), x_1, y_1, t — координаты и масса Юпитера J . Система координат гелиоцентрическая; основная плоскость — плоскость движения Юпитера вокруг Солнца. Из приведенного рисунка видно, что, например, на линии SI можно выбрать достаточно близко к I точку P , в которой эксцентриситет траектории частицы относительно Солнца будет параболическим.

Точка P является, очевидно, границей между эллиптической траекторией частицы и гиперболической траекторией. Интегрирование уравнений движения частицы по замкнутой траектории, если двигаться от P в разные стороны.



В точке P для частицы выполняется соотношение

$$v^2 = \frac{2k^2}{r_1 - a},$$

где v — скорость относительно Солнца, $r_1 - a = SP$,

r_1 — радиус-вектор Юпитера, k — гауссова постоянная.

Если теперь положить произвольно $\alpha = 0.151748$,

а $r_1 = 4.951748$ (Юпитер в перигее), то, принимая во

внимание значение k , получим $v = 1.1103907 \cdot 10^{-2}$.

Из всех возможных направлений скорости выберем те, которые не противоречат тесному сближению ча- стиды с Юпитером, поскольку без сближения захват невозможен. Направим скорость под углом $\alpha = 40^\circ$ к оси Sx в сторону движения Юпитера вокруг Солнца. В этом случае начальные условия задачи для Юпитера будут

$$x_1 = 4.951748, \quad y_1 = 0.000000,$$

а для частицы

$$x = 4.800000, \quad y = 0.000000; \\ \dot{x} = 0.8506086 \cdot 10^{-2}, \quad \dot{y} = 0.7137454 \cdot 10^{-2}.$$

Результаты интегрирования назад приведены в табл. 1, где в 1-й и 4-й графах дано время, выраженное в единицах, равных 10.8314699 средних суток, а в остальных — гелиоцентрические координаты спутника в астрономических единицах.

Интегрирование выполнено на интервале времени, равном $4252 \cdot 10.8314699$ суток или же почти 96.8 лет. В конце этого значительного промежутка времени такие эле- менты орбиты, как большая полуось и эксцентриситет, практически не меняются.

Так, при $t = 3868$ и $t = 4156$ большая полуось равна соответственно 72.38 и 72.44, а эксцентриситет равен 0.9591 и 0.9610, поэтому интегрирование назад дает явно эллиптическую орбиту частицы P вокруг Солнца. Полагая, что дальнейшее движение частицы такое же, как в задаче двух тел, определим суточное движение по формуле

$$n = \frac{2\pi}{T}. \quad \text{Для } t = 41156 \text{ это дает } n = 5.7755.$$

Уместен вопрос: будет ли в дальнейшем движение эллиптическим? Очевидно, будет до нового тесного сближения с Юпитером. Но это произойдет при истечении очень большого интервала времени, что следует из сопоставления средних движений частицы и Юпитера. Действительно, имеем $n_1 = 299.713$, $n = 5.7755$, откуда

$$\frac{n_1}{n} = 51 + \frac{1}{1 + 21 + \dots}$$

Таблица 1

t	x	y	t	x	y
0.00	4.800000	0.000000	44	-0.453921	-2.895862
0.25	4.780667	-0.023033	45	-0.605979	-2.894974
0.50	4.761310	-0.046065	46	-0.757225	-2.894083
0.75	4.741915	-0.069096	47	-0.907486	-2.893169
1.00	4.722471	-0.092123	48	-1.056605	-2.892509
1.25	4.702909	-0.115148	49	-1.204441	-2.892863
1.50	4.683403	-0.138169	50	-1.350872	-2.894685
1.75	4.663767	-0.161187	52	-1.639101	-2.785499
2.00	4.644055	-0.184199	54	-1.920617	-2.728762
2.25	4.624268	-0.207207	56	-2.194966	-2.659769
2.50	4.604398	-0.230210	58	-2.461896	-2.581760
2.75	4.584444	-0.253207	60	-2.721305	-2.495842
3.00	4.564403	-0.276193	62	-2.973213	-2.403029
3.5	4.524051	-0.322151	64	-3.217736	-2.304232
4.0	4.483325	-0.368073	66	-3.455054	-2.200261
4.5	4.442211	-0.413966	68	-3.685392	-2.091835
5.0	4.400696	-0.459821	70	-3.909005	-1.979581
5.5	4.358769	-0.505611	72	-4.126165	-1.864050
6.0	4.316419	-0.551356	74	-4.337150	-1.745722
6.5	4.273636	-0.597071	76	-4.542241	-1.624014
7.0	4.230411	-0.642661	78	-4.741712	-1.502288
7.5	4.186734	-0.688108	80	-4.935830	-1.377860
8.0	4.142597	-0.733516	82	-5.124853	-1.252004
8.5	4.097991	-0.778988	84	-5.309027	-1.124958
9.0	4.052907	-0.824345	86	-5.488585	-0.996928
9.5	4.007337	-0.869590	88	-5.663751	-0.868095
10.0	3.961274	-0.914635	90	-5.834783	-0.738616
11	3.867631	-1.004390	92	-6.001730	-0.608628
12	3.771916	-1.093625	94	-6.164927	-0.478251
13	3.674066	-1.182230	96	-6.324501	-0.347587
14	3.574021	-1.270119	98	-6.480617	-0.216729
15	3.471723	-1.357198	100	-6.633429	-0.085756
16	3.367116	-1.443365	102	-6.783082	-0.045261
17	3.260147	-1.528511	104	-6.929715	0.176263
18	3.151673	-1.612538	106	-7.073456	0.307195
19	3.038933	-1.695260	108	-7.214427	0.438011
20	2.924606	-1.776604	110	-7.352741	0.566669
21	2.807756	-1.856407	112	-7.488556	0.693135
22	2.688359	-1.934519	114	-7.621823	0.818275
23	2.566402	-2.010780	116	-7.752789	0.959364
24	2.441881	-2.085026	118	-7.881493	1.184077
25	2.314807	-2.157084	120	-8.008021	1.218492
26	2.185203	-2.226977	122	-8.132452	1.347593
27	2.053108	-2.293923	124	-8.254865	1.476363
28	1.918575	-2.358338	126	-8.375329	1.604788
29	1.781678	-2.420504	128	-8.493915	1.732856
30	1.642507	-2.480245	130	-8.610686	1.860558
31	1.501171	-2.533377	132	-8.725704	1.987885
32	1.357798	-2.589064	134	-8.839028	2.114830
33	1.212537	-2.637084	136	-8.950712	2.241386
34	1.065552	-2.677479	140	-9.169372	2.493312
35	0.917024	-2.717927	144	-9.382076	2.743633
36	0.767151	-2.754378	148	-9.589180	2.992332
37	0.616141	-2.786739	152	-9.791015	3.239399
38	0.464213	-2.814941	156	-9.987860	3.484832
39	0.311594	-2.838935	160	-10.180003	3.728619
40	0.158511	-2.858700	164	-10.367686	3.970819
41	-0.005195	-2.874237	168	-10.551140	4.211394
42	-0.148128	-2.885574	172	-10.730574	4.450877
43	-0.301237	-2.892758	176	-10.906183	4.687784

Таблица 1 (продолжение)

t	x	y	t	x	y
180	-11.078149	4.923636	908	-24.789364	35.063447
184	-11.246638	5.137953	924	-24.951771	35.576228
188	-11.411806	5.390757	956	-25.265087	36.591058
192	-11.573797	5.621059	988	-25.572824	37.591750
196	-11.732749	5.851912	1020	-25.867626	38.578408
204	-12.042024	6.307283	1052	-26.151728	39.551035
212	-12.340549	6.757053	1084	-26.426254	40.503664
220	-12.629130	7.201404	1116	-26.690155	41.454420
228	-12.908484	7.640511	1148	-26.950155	42.385633
236	-13.179251	8.074548	1180	-27.204497	43.303927
244	-13.442002	8.503677	1212	-27.444860	44.210248
252	-13.697251	8.928059	1244	-27.686605	45.105681
260	-13.945466	9.347843	1276	-27.920666	45.991185
268	-14.187067	9.763174	1308	-28.148710	46.867394
276	-14.422441	10.174190	1340	-28.370367	47.734577
284	-14.651940	10.581022	1372	-28.585380	48.592728
292	-14.875886	10.983794	1404	-28.793176	49.441671
300	-15.094577	11.382628	1436	-28.995378	50.281154
308	-15.308288	11.777637	1468	-29.191815	51.110920
316	-15.517273	12.168933	1500	-29.380514	51.920781
324	-15.721767	12.556620	1532	-29.565178	52.740727
332	-15.921988	12.940892	1564	-29.745604	53.532239
340	-16.118140	13.321578	1596	-29.922504	55.115284
348	-16.310413	13.699044	1628	-30.096281	56.660124
356	-16.498984	14.073293	1660	-30.266916	58.179278
364	-16.684017	14.444416	1692	-30.434034	59.671981
372	-16.865666	14.812502	1724	-30.597126	60.407572
380	-17.044074	15.177635	1756	-30.755740	61.135394
396	-17.391688	15.899379	1788	-30.909592	61.855658
412	-17.727813	16.610290	1820	-31.058604	62.567963
428	-18.053269	17.310266	1852	-31.202295	63.272793
444	-18.368759	18.001957	1884	-31.342828	63.970286
460	-18.674885	18.685766	1916	-31.47916	64.662898
476	-18.972169	19.365838	1948	-31.611855	65.349742
492	-19.261056	20.021571	1980	-31.742354	66.031775
508	-19.541981	20.678811	2012	-31.870929	66.707009
524	-19.815980	21.327362	2044	-31.997713	67.381427
540	-20.081300	21.968991	2076	-32.122426	68.046501
556	-20.340354	22.603430	2108	-32.244542	68.709870
572	-20.592737	23.230887	2140	-32.363510	69.365125
588	-20.838732	23.851545	2172	-32.478905	70.013935
604	-21.078611	24.465570	2204	-32.590968	70.656145
620	-21.312637	25.073113	2236	-32.700000	71.291886
636	-21.541065	25.674313	2268	-32.806241	71.921637
652	-21.764150	26.269299	2300	-32.910101	72.546146
668	-21.982142	26.858197	2332	-33.011855	73.166194
684	-22.195290	27.441128	2364	-33.111855	73.782305
700	-22.403872	28.019220	2396	-33.209642	74.394765
716	-22.608045	28.592602	2428	-33.286845	75.003391
732	-22.808142	29.155416	2460	-33.357642	75.607893
748	-23.004369	29.715819	2492	-33.427628	76.208785
764	-23.196948	30.270982	2524	-33.496822	76.807197
780	-23.386081	30.821095	2556	-33.559822	77.393240
796	-23.571942	31.366357	2588	-33.616092	77.977193
812	-23.754674	31.906977	2620	-33.666286	78.558504
828	-23.934358	32.443158	2652	-33.712986	79.136957
844	-24.111147	32.975194	2684	-33.756642	79.712697
860	-24.285007	33.502957	2716	-33.796642	80.285404
876	-24.455989	34.026893	2748	-33.833002	80.855404
892	-24.624106	35.547025	2780	-34.101307	81.422697

Таблица 1 (продолжение)

t	x	y	t	x	y
2812	-34.237976	79.694756	3548	-35.347850	91.711855
2844	-31.305470	80.258487	3580	-35.376932	92.187836
2876	-34.372069	80.818822	3612	-35.405968	92.659959
2908	-34.437226	81.376123	3644	-35.435028	93.138979
2940	-34.500350	81.930409	3676	-35.463755	93.595548
2972	-34.560979	82.481434	3708	-35.491628	94.060007
3004	-34.618848	83.028799	3740	-35.519798	94.522354
3036	-34.673893	83.572000	3772	-35.548234	94.982322
3068	-34.726304	84.110701	3804	-35.564477	95.439494
3100	-34.776423	84.644409	3836	-35.580280	95.893986
3132	-34.824816	85.172969	3900	-35.617701	96.789433
3164	-34.872140	85.696471	3964	-35.632224	97.230383
3196	-34.918980	86.215366	3996	-35.646128	97.668249
3228	-34.965619	86.730531	4038	-35.659984	98.101658
3260	-35.011918	87.242548	4070	-35.674047	98.531904
3292	-35.057396	87.751927	4102	-35.688230	98.959719
3324	-35.101459	88.258843	4134	-35.701980	99.385609
3356	-35.143500	88.763157	4166	-35.715816	99.809734
3388	-35.183202	89.264515	4198	-35.728516	100.231938
3420	-35.220378	89.762472	4230	-35.739463	100.651861
3452	-35.255074	90.256546	4262	-35.749555	101.069034
3484	-35.287551	90.746301	4294	-35.758819	101.482925
3516	-35.318871	91.231429	4326		

Таблица 2

32t	x	y	32t	x	y
0	4.800000	0.000000	48	4.918136	0.137911
8	4.819300	0.023033	50	4.923487	0.143565
16	4.838685	0.046064	52	4.928898	0.149161
24	4.858112	0.069090	54	4.934305	0.154647
32	4.877691	0.092101	55	4.937679	0.157308
36	4.887581	0.103593	55	4.940755	0.159896
40	4.897576	0.115071	56	4.943952	0.162387
44	4.907730	0.126517	57	4.947288	0.164717
46	4.919893	0.132225			

Подходящими дробями булут $51, 52, 2183, \dots$, поэтому ближайшие встречи Юпитера с частицей произойдут через 51, 52, 2183, ... оборота вокруг Солнца, что соответствует периоду в 605, 617, 25895, ... лет. Для 1, 1, 42, ... оборотов частицы требуется соответственно 616, 25895, ... лет.

Очевидно, первая подходящая дробь исключает такое сближение, поскольку налицо разность в 11 лет между моментами 605 и 616 лет. Через 616—617 лет сближение более вероятно, но взаимное расстояние будет, однако, велико для тесного сближения. По-видимому, частица P в течение нескольких тысяч лет будет двигаться по эллиптической орбите вокруг Солнца.

Моменты времени и координаты частицы при ее движении вперед даны в табл. 2. Вычисления, произведенные для $t=1,75$ по координатам и скоростям, показывают, что траектория является гиперболой с большой полуосью, равной —13.1 а. е.,

Рассматривая Луну как абсолютно твердое тело, вращающееся вокруг оси, проходящей через его центр тяжести, Эйлер вывел дифференциальные уравнения этого движения:

$$\frac{dp}{dt} + \alpha q r = 3M\alpha R^{-2}yz,$$

$$\frac{dq}{dt} - \beta p r = -3M\beta R^{-2}xz,$$

$$\frac{dr}{dt} + \gamma p q = 3M\gamma R^{-2}xy,$$

где α, β, γ — функции главных моментов инерции Луны A, B, C :
 $\alpha = \frac{C-B}{A}, \beta = \frac{C-A}{B}, \gamma = \frac{B-A}{C}$, причем $A < B < C$;

M — масса Земли;

R — расстояние Земля—Луна;

x, y, z — координаты центра тяжести Луны по осям.

p, q, r — компоненты угловой скорости Луны по осям.

Между углами Эйлера и компонентами угловой скорости Луны существует зависимость, которую можно в матричной форме записать так:

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \theta & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \psi \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}.$$

Отсюда с достаточной степенью приближения можно получить следующее дифференциальное уравнение физической либрации в долготе:

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} + 0.9853M\gamma\tau = M\gamma \sum H_i \sin h_i,$$

где $M = 3M$,

$$h_i = k_1^{(i)}g + k_2^{(i)}g' + k_3^{(i)}\omega + k_4^{(i)}\omega', \quad k_1^{(i)}, k_2^{(i)}, k_3^{(i)}, k_4^{(i)} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

g — средняя аномалия Луны,

g' — средняя аномалия Солнца,

ω — расстояние лунного перигея от восходящего узла лунной орбиты,

ω' — расстояние солнечного перигея от восходящего узла лунной орбиты.

Коэффициенты H_i вычислены Козелом (Koziel, 1949). Для физической либрации в узле и наклонности можно вывести два аналогичных линейных дифференциальных уравнения второго порядка с правой частью; вывод их дается у Хайна (Haup, 1902). Интегрирование их дает выражения для трех компонентов вынужденной физической либрации в виде некоторых известных функций времени, а именно в виде суммы большого числа тригонометрических членов и трех волн свободной либрации, содержащих шесть произвольных постоянных интегрирования, которые подлежат определению из наблюдений. Период членов свободной либрации и амплитуда вынужденной либрации зависят от так называемого параметра физической либрации f , связанного с главными моментами инерции Луны соотношением

$$f = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{C-B}{C-A} \cdot \frac{B}{A}.$$

Параметр f был впервые введен Бесселем. Определение параметра f на основании наблюдений занимает важное место в проблеме физической либрации. Помимо с этой величиной приходится определять еще 5 неизвестных: h_1, β — селенографическую долготу и широту кратера, т. е. долготу и широту кратера, считаемые относительно экватора и нулевого меридиана Луны; h — его радиус-вектор; I — среднюю наклонность лунного экватора к эклиптике; R_0 — угловой радиус Луны на среднем расстоянии Луны от Земли. Эти шесть величин называются постоянными физической либрации. Для пол-

ного решения задачи о вращении Луны к этим шести неизвестным следует добавить еще шесть произвольных постоянных интегрирования, определяющих свободную либрацию. Однако определить все двенадцать постоянных из наблюдений Луны очень трудно, тем более, что амплитуда физической либрации очень мала: по своей величине она находится на грани наблюдательной возможности инструментов. Поэтому при определении постоянных физической либрации до сих пор задачу упрощали, пренебрегая существованием свободной либрации. Задача, стоявшая перед нами, состояла в том, чтобы проверить, действительно ли амплитуда свободной либрации так мала по сравнению с амплитудой вынужденной либрации, чтобы можно было ею пренебрегать. До сих пор, если свободную либрацию и определяли, то делали это, анализируя остаточные уклонения в условиях уравнений.

В этой работе мы попытаемся определить амплитуду и фазу свободной физической либрации в долготу одновременно с постоянными физической либрации, простоты ради отбросив от существования свободной физической либрации в узле и в наклонности. Конечно, в связи с этим мы сможем получить только приближенное значение искомых величин. Выражение для физической либрации в долготу имеет вид

$$\tau = a \sin(A \cdot t - t \sqrt{0.9853 M \gamma}) - \sum \frac{M \gamma H_i \sin h_i}{h_i^2 - 0.9853 M \gamma}. \quad (1)$$

Первый член есть свободная либрация в долготу, а второй — вынужденная, a и A — амплитуда и фаза свободной либрации в долготу; t — время, выраженное в средних солнечных сутках; h_i — среднее суточное движение аргумента h_i .

Рассматривая сумму $\sum \frac{M \gamma H_i \sin h_i}{h_i^2 - 0.9853 M \gamma}$, можно заметить, что не только членами с большими H_i играют заметную роль в выражении для τ , но также и те члены, у которых знаменатель $h_i^2 - 0.9853 M \gamma$ близок к нулю. К таким относится член с аргументом $h = 2\omega$. Вблизи $f = 0.662$ коэффициент при $\sin 2\omega$ становится бесконечно большим.

Главная трудность задачи заключается в том, что период свободной либрации очень близок к периоду члена вынужденной либрации с аргументом 2ω , который равен 1095 суткам. Для того чтобы эти две волны можно было отделить друг от друга, необходимо иметь ряд наблюдений, охватывающий значительный отрезок времени. Так или иначе приходится отделить друг от друга.

Приведем таблицу периода P свободной либрации в зависимости от f (табл. 1), где показано также, какой промежуток времени T должны охватывать ряды наблюдений, чтобы волны свободной либрации и члена, зависящего от $\sin 2\omega$, разошлись на полпериода.

Следует отметить, что обработка различных рядов наблюдений дает для f значения, близкие к критическому значению, равному 0.662. Встречаются почти одинаково часто значения f , больше и меньше критического.

И. В. Белькович (1949) впервые обратил внимание на тот факт, что неизвестное f не может быть найдено из решения системы линейных уравнений поправкой, так как вблизи точки разрыва малому приращению f соответствует весьма большое приращение волны физической либрации. Для устранения этой трудности он предложил не включать поправку к f в число неизвестных задачи, определяемых по способу наименьших квадратов, а, полагая для f различные фиксированные значения, определять из способа

Таблица 1

f	P (в сутках)	T (в годах)
0.58	982	13
0.60	1007	17
0.62	1033	25
0.71	1183	20
0.73	1226	14
0.75	1274	10.5

наименьших квадратов остальные пять неизвестных. Наилучшее значение f , по его мнению, то, которое приводит к наименьшему значению суммы квадратов остаточных уклонений.

В результате своей работы Белькович обнаружил, что эта сумма квадратов имеет два минимума, один из которых соответствует значению f меньше критического, а другой — значению f больше критического. Из своих наблюдений он получил значения, равные 0.60 и 0.71, а из наблюдений А. А. Яковкина — 0.62 и 0.71.

К. Козел также предлагал задавать ряд значений f и находить соответственно каждому f значения остальных постоянных физической либрации. В качестве наиболее вероятнейших значений f он получил также два значения: 0.60 и 0.71. К. Козел первый заметил, что окончательное значение f должно всегда лежать по ту сторону от критического, по которую было взято f исходное.

Попытки определить свободную либрацию в долготе Луны совершались неоднократно. А. А. Яковкин (1925, 1939, 1945) использовал для этой цели ряд наблюдений Т. Банахевича (1910—1915 гг.) и ряд своих наблюдений (1916—1931 гг.). При обработке этих наблюдений А. А. Яковкин сначала составлял условные уравнения в долготу и широте, не учитывая свободной либрации, так, как если бы ее не было вовсе. Затем, решив нормальные уравнения, он получал значения постоянных физической либрации. С полученным значением f А. А. Яковкин находил период свободной либрации, а фазу и амплитуду свободной либрации он определял, производя гармонический анализ уклонений ψ в долготных уравнениях. В результате А. А. Яковкин получил такие выражения для свободной либрации в долготу:

$$\varphi_0 = 35' \sin [121^\circ + 0.288(t - 2412000.0)];$$

из ряда А. А. Яковкина (1916—1926 гг.)

$$\varphi_0 = 29' \sin [213^\circ + 0.282(t - 2422228.0)];$$

из ряда А. А. Яковкина (1926—1931 гг.)

$$\varphi_0 = 31' \sin [174^\circ + 0.30(t - 2421000.0)].$$

Этот же метод определения свободной либрации в долготу был использован позднее И. В. Бельковичем. Помимо своего ряда, он взял еще ряд Гартвига (1890—1915 гг.), а также ряды Т. Банахевича (1910—1915 гг.) и А. А. Яковкина (1916—1931 гг.).

И. В. Белькович получил для свободной физической либрации в долготу значения:

$$\varphi_0 = 11' \sin [95^\circ + 0.3041(t - 2412000.0)];$$

из ряда Т. Банахевича

$$\varphi_0 = 40' \sin [219^\circ + 0.3041(t - 2412000.0)];$$

из ряда А. А. Яковкина

$$\varphi_0 = 31' \sin [310^\circ + 0.3041(t - 2412000.0)];$$

из ряда И. В. Бельковича

$$\varphi_0 = 13' \sin [59^\circ + 0.3041(t - 2412000.0)].$$

Эти результаты оставляют вопрос о существовании свободной либрации открытым. Хотя амплитуды из первых трех рядов определяются как будто бы надежно, но начальные фазы не согласуются между собой. Можно заметить прогрессивный сдвиг фаз от одного ряда к другому.

А. А. Нефедьев (1951) на основе своих наблюдений, проведенных в 1938—1945 гг., определил обычным методом свободную либрацию в долготу и получил, что $\varphi_0 = 21' \sin [259^\circ + 0.2988(t - t_0)]$ (t_0 приведено к начальной эпохе $t_0 = 2411458.0$).

Недостаток всех упомянутых выше работ заключается в том, что амплитуду и фазу свободной либрации находят не одновременно с остальными неизвестными, как следо-

вало бы делать, а после нахождения постоянных физической либрации. Незаконность такого приема очевидна.

А. А. Яковкин (1954) предложил новый способ для определения свободной либрации в долготу. Этот способ позволяет избежать двузначности в определении f .

Замечая, что фазы свободной либрации, вычисленные из различных рядов наблюдений, приведенных в одной начальной эпохе, противоречат друг другу, и объясняя это тем, что было принято неверное значение периода свободной либрации, т. е. сначала Козел рекомендует изменить порядок вычисления физической либрации, т. е. сначала определить период свободной либрации, для которого начальные фазы свободной либрации лучше всего согласуются между собой, а затем, когда такой период известен, решить лучше члены вынужденной либрации, амплитуды которых зависят от f . После этого, исключив из имеющихся рядов наблюдений вынужденную либрацию, А. А. Яковкин из решения долготных уравнений находит амплитуду и фазу свободной либрации. Применит этот способ к рядам Т. Банахевича (1910—1915 гг.), А. А. Яковкина (1916—1931 гг.), И. В. Бельковича (1932—1942 гг.) и А. А. Нефедьева (1938—1945 гг.), А. А. Яковкин получил следующие средние взвешенные значения: $A = 208^\circ \pm 7^\circ$, $a = 52^\circ \pm 10'$.

Этот метод также не вполне законен, поскольку и он не дает возможности одновременно определять все неизвестные задачи. Джеффрис выражает сомнение в том, временно определять все неизвестные задачи. Джеффрис действительно представляет собой свободу, обнаруженная А. А. Яковкиным, действительно представляет собой свободу, которую либрацию. По его мнению, она может быть волной вынужденной либрации с аргументом 2ω . Он даже скорее склоняется ко второму, потому что он считает, что для свободной либрации требовалась бы большая согласованность в начальных фазах, чем это получилось у А. А. Яковкина. Кроме того, Джеффрис считает, что используемые А. А. Яковкиным ряды были слишком коротки для того, чтобы можно было правильно оценить амплитуду свободной либрации.

Во всех вышеупомянутых работах геодезические наблюдения Луны обрабатывались в два этапа. Сначала находились вспомогательные неизвестные задачи, в качестве которых брались поправки координат кратера Мэстинга А на диске, а затем уже, в втором этапе, находились собственно неизвестные, т. е. постоянные физической либрации. Таким образом, искомые величины непосредственно не связывались с измерениями, что ставило вычислителей перед значительными трудностями.

Т. Банахевич предложил новый, так называемый краковичный метод обработки наблюдений Луны. К. Козел разработал дальше этот метод и применил его при обработке дерптского ряда Гартвига.

Новый метод дает возможность избежать определения промежуточных неизвестных ботке дерптского ряда Гартвига. Новый метод дает возможность связать искомые величины с измерениями. В нашей работе мы будем пользоваться этим методом. Формулы К. Козела, данные им в краковичной форме, мы несколько преобразуем в соответствии с поставленной перед нами задачей и представим в обычной матричной форме.

Следуя методу И. В. Бельковича, мы будем брать ряд последовательных значений f , а именно будем брать значения f , равные 0.58, 0.60, 0.62, 0.71, 0.73, 0.75. Эти значения расположены симметрично относительно критического значения $f_k = 0.662$.

Для каждого из выбранных значений f будем получать систему условных уравнений. В качестве наиболее вероятнейших значений f будем считать те, которым соответствует минимальное значение суммы квадратов остаточных ошибок [10]. Для каждого выбранного значения f можно вычислить t по формулам, которые приведены ниже, а зная t , определить период свободной либрации P .

§ 1. Исходные данные и поправки

В этой работе используются два ряда наблюдений. Один из них выполнен Гартвигом в 1884—1885 гг. в Дерпте (ныне Тарту). Наблюдения велся на дерптском геодезическом инструменте. Другой ряд наблюдений выполнен А. А. Нефедьевым в Казани в 1938—1945 гг. на геодезическом инструменте Энгельгартовской обсерватории.

Нами были выбраны именно эти ряды потому, что, во-первых, они разделены значительным промежутком времени, что имеет очень большое значение, как уже указывалось выше, а, во-вторых, ряд Гартвига, хотя и достаточно старый, в то же время обработан К. Козелом современным методом, ряд же А. А. Нефедьева является самым последним из числа известных и опубликованных.

В обоих случаях наблюдался кратер Мёстинг А. Еще Бессель в 1839 г. предложил для определения либрации измерять с помощью гелиометра расстояния и позиционные углы точек края диска Луны, приблизительно равноотстоящих друг от друга относительно кратера Мёстинг А. Ряд Гартвига содержит 36 вечеров или, как мы их еще называем, 36 наблюдений. Наблюдения каждого вечера, кроме вечера № 26, состоят из наведений на 7—14 крайних точек. Ряд А. А. Нефедьева содержит 143 вечера. Каждый вечер, кроме вечеров №№ 37, 93, содержит наведения на 5—7 точек.

А. А. Нефедьев сам из числа своих наблюдений отбросил как ненадежные следующие шесть наблюдений: №№ 1, 3, 21, 61, 94, 96. Кроме того, из ряда А. А. Нефедьева нами были выброшены еще 14 наблюдений, именно наблюдения №№ 4, 8, 9, 12, 13, 14, 16, 33, 36, 84, 88, 114, 116, 140 (нумерация А. А. Нефедьева), ибо, как указывал А. А. Нефедьев, они были сделаны при неблагоприятных условиях. В процессе вычисления пришлось из наблюдений А. А. Нефедьева отбросить еще наблюдения №№ 52, 62, 63, 64, 65, так как они давали слишком большие уклонения.

В результате были использованы только 123 наблюдения А. А. Нефедьева. Наблюдения Гартвига, выполненные очень тщательно, использовались все.

Ряд Гартвига, как указывалось выше, был обработан К. Козелом. Ряд А. А. Нефедьева был обработан им самим (Нефедьев, 1951).

Кроме инструментальных поправок, как К. Козелом, так и А. А. Нефедьевым были введены еще следующие поправки в наблюдения.

- 1) за измеренные расстояния s ;
- 2) за дифференциальную рефракцию,
- 3) за движение кратера по диску Луны,
- 4) за изменение видимого радиуса Луны,
- 4) за неравенства лунного края.

- В позиционные углы p :
- 1) за дифференциальную рефракцию,
- 2) за движение кратера по диску Луны.

Одновременно вычислялись геоцентрический радиус Луны и ее горизонтальный экваториальный параллакс. Были получены также топоцентрические экваториальные координаты Луны. Для этого использовались формулы

$$\operatorname{tg}(\alpha'_\epsilon - \alpha_\epsilon) = -\frac{m \sin \tau}{1 - m \cos \tau}, \quad (2)$$

$$\operatorname{tg}(\delta'_\epsilon - \delta_\epsilon) = -\frac{g \sin(G - \delta_\epsilon)}{1 - g \cos(G - \delta_\epsilon)}, \quad (3)$$

$$\sin R'_\epsilon = \sin R_\epsilon \frac{\sin(G - \delta'_\epsilon)}{\sin(G - \delta_\epsilon)}, \quad (4)$$

где

$$m = \rho \cos \varphi' \cdot \sin \pi_\epsilon \sec \delta_\epsilon, \\ \operatorname{tg} G = \frac{\operatorname{tg} \varphi' \cdot \cos \frac{1}{2}(\alpha'_\epsilon - \alpha_\epsilon)}{\cos \left[\tau - \frac{1}{2}(\alpha'_\epsilon - \alpha_\epsilon) \right]}, \\ g = \rho \cdot \sin \varphi' \cdot \sin \pi_\epsilon \operatorname{cosec} G, \\ \sin R_\epsilon = \frac{\sin R_0}{\sin \pi_0} \cdot \sin \pi_\epsilon. \quad (5)$$

Здесь введены следующие обозначения:
 α_ϵ и δ_ϵ — геоцентрические экваториальные координаты Луны;
 α'_ϵ и δ'_ϵ — топоцентрические экваториальные координаты Луны;
 π_ϵ — горизонтальный экваториальный параллакс Луны от Земли;
 π_0 — тот же параллакс на среднем расстоянии Луны от Земли;
 τ — геоцентрический часовой угол Луны;
 R_ϵ — геоцентрический угловой радиус Луны от Земли;
 R_0 — тот же радиус на среднем расстоянии Луны от Земли;
 R'_ϵ — топоцентрический угловой радиус Луны.

Значения постоянных приняты следующие:
 1) геоцентрическая широта обсерваторий:

	Энгельгартовская обсерватория	Обсерватория Тарту
$\operatorname{tg} \varphi'$	1.46375	1.61332

2) $\pi_0 = 57'2''.70$,
 $R_0 = 15'32''.58$.
 Значения всех этих постоянных даны в соответствии с „Астрономическим Ежегодником СССР“.

Для наших вычислений были использованы таблицы значений δ'_ϵ , α'_ϵ , π_ϵ , R'_ϵ , которые даны в работах К. Козела и А. А. Нефедьева.

Кроме того, использовались таблицы местного звездного времени, средней долготы восходящего узла лунной орбиты, таблицы нутации, истинной наклонности земного экватора к эклиптике, а также таблицы значений g , g' , ω и ω' , данные К. Козелом для моментов наблюдений Гартвига.

Что же касается средней долготы Луны, значения которой для моментов наблюдений дает К. Козел, то нами в эти значения были внесены поправки согласно указанию Шрутки-Рехтенштамма (Schrutka-Rechtenstamm, 1956).

Дело в том, что в 1884—1885 гг., когда Гартвигом производились свои наблюдения, в Nautical Almanac использовались таблицы Луны Ганзена. Ньюком ввел поправки к лунной теории Ганзена. Эти поправки стали вводиться в лунные эфемериды с 1883 г., но сначала только в α и δ Луны, а не в долготу. Этого не учел К. Козел.

Поэтому необходимо было ввести в среднюю долготу Луны поправку Ньюкома, которая имеет вид

$$\Delta l = -34''.07 - 36''.69T - 3''.76T^2,$$

где T — время в юлианских столетиях от 1900.0. Эта поправка составляет от $-28''$ до $-43''$.

Что же касается значений средней долготы Луны, средней долготы узла лунной орбиты, значений g , g' , ω , ω' , а также звездного местного времени для моментов наблюдений Нефедьева, то все они были нами перечислены.

§ 2. Применение матриц к решению сферических многоугольников

В дальнейшем нам придется пользоваться формулами для решения сферических треугольников и многоугольников, основанных на приложении матричного исчисления к задачам сферической астрономии. Эти формулы были выведены Ванакевичем (Vanacek, 1927) в краковской форме. Основы преобразования координат с помощью матриц даны у Г. М. Баженова (1949), в частности им дано понятие матрицы вращения. Матрица даны у Г. М. Баженова (1949), в частности им дано понятие матрицы вращения. При решении задач, в которых приходится рассматривать вращение системы координат вокруг ее осей, удобно пользоваться матрицами, так как матрицы, вообще говоря, выражают преобразование одной системы координат в другую. Так, если система x', y', z' получена из системы x, y, z путем поворота ее вокруг оси x на

угол n , то для того, чтобы от системы x, y, z перейти к системе x', y', z' достаточно матрицу преобразуемых координат умножить слева на матрицу

$$p(n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos n & \sin n \\ 0 & -\sin n & \cos n \end{pmatrix};$$

в результате мы получим

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = p(n) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Таким же образом при повороте системы x, y, z вокруг оси y на угол n мы получим

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = q(n) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

где

$$q(n) = \begin{pmatrix} \cos n & 0 & \sin n \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin n & 0 & \cos n \end{pmatrix}.$$

При повороте системы x, y, z вокруг оси z на угол n , имеем

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = r(n) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

где

$$r(n) = \begin{pmatrix} \cos n & \sin n & 0 \\ -\sin n & \cos n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $p(n)$, $q(n)$, $r(n)$ называются матрицами вращения.

Все задачи, связанные с преобразованием координат, можно свести к действию над матрицами вращения.

Матричная форма записи выгодна тем, что она дает возможность составлять компактные и удобные схемы для вычислений. Вычисления с матрицами допускают контроль, который заключается в том, что в матрице вращения, а также в матрице, полученной от перемножения нескольких матриц вращения, сумма квадратов элементов любого столбца или строки равна единице, а сумма произведений соответствующих элементов двух любых столбцов или строк равна нулю.

Они обладают и другими свойствами, которые облегчают вычисления; в частности, нетрудно вывести формулу, которой мы воспользуемся в дальнейшем:

$$r(-90^\circ) p(n) r(90^\circ) = q(-n). \quad (6)$$

Задача преобразования координат равносильна задаче о решении сферического многоугольника. Рассмотрим общий случай решения сферического многоугольника.

Пусть $ABCDE$ — сферический пятиугольник (рис. 1). Возьмем систему прямоугольных координат с началом в центре сферы O . Ось z направлена по OE , ось y лежит в плоскости OEA под углом 90° к оси z ; ось x — перпендикулярна двум остальным.

Повернем систему координат x, y, z вокруг оси x на угол a . Новая система координат x', y', z' будет связана со старой соотношением

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = p(a) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Теперь новую систему повернем вокруг оси z' на угол a . Получившаяся таким образом система x'', y'', z'' будет связана с первоначальной соотношением

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = r(a) p(a) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Эту систему повернем вокруг оси x'' на угол b и т. д. до тех пор, пока мы не совершим полного обхода по периметру пятиугольника и пока система координат не займет первоначального положения.

В результате мы получим

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r(\varepsilon) p(\varepsilon) r(\delta) p(\delta) r(\gamma) p(\gamma) r(\beta) p(\beta) r(\alpha) p(\alpha) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ — дополнительные углы к углам A, B, C, D, E . Из равенства (7) получим

$$E = r(\varepsilon) p(\varepsilon) r(\delta) p(\delta) r(\gamma) p(\gamma) r(\beta) p(\beta) r(\alpha) p(\alpha), \quad (8)$$

где E — единичная матрица.

Так как $p(n) p(-n) = E$ в силу определения матриц вращения, то один или несколько первых множителей правой части (8) могут быть перенесены в левую часть с изменением порядка сомножителей и с заменой их аргументов на обратные, например:

$$r(-\delta) p(-\delta) r(-\varepsilon) = p(\delta) r(\gamma) p(\gamma) r(\beta) p(\beta) r(\alpha) p(\alpha). \quad (9)$$

Формулы (8) и (9) дают нам связь между сторонами и углами сферического многоугольника. Этими соотношениями мы воспользуемся ниже.

§ 3. Сравнение наблюдений с результатами вычислений

Наблюдения Гартвига и А. А. Нефедьева дают расстояния s от кратера Мёстинг А до точек края лунного диска и позиционные углы этих расстояний p . Наблюдения значения p и s , включающие все поправки, о которых говорилось выше, напечатаны в табл. 18 К. Ковалева и в табл. 18 А. А. Нефедьева. Эти таблицы будут служить отправным пунктом нашей работы.

Взяв из таблиц значения p , мы вычислим s и сравним вычисленные s_2 с наблюдаемыми s_0 , данными в таблицах, построив всю нашу работу на анализе разностей $s_0 - s_2$.

Вычисляя s_2 , мы будем брать в качестве первого приближения следующие значения постоянных физической либрации:

$$\begin{aligned} i_0 &= -5^\circ 10' 7'', \\ \beta_0 &= -3^\circ 11' 2'', \\ h &= 15' 33'' 4, \\ l &= 1^\circ 32' 20''. \end{aligned}$$

Есть основания предполагать, что истинные значения этих величин не намного отличаются от выбранных нами. Здесь λ_0, β_0 — селенографические долготы и широты кратера. В качестве R_0 будем брать упомянутое уже значение $R_0 = 15'32''.58$. В дальнейшем мы постараемся эти значения уточнить.

При вычислении s_e мы будем учитывать влияние вынужденной физической либрации в долготу. Таким образом, при фиксированном значении f можно будет считать, что разность $s_0 - s_e$ обязана своим происхождением неверно принятым λ_0, β_0, I и R_0 , а также неучтенной свободной либрации в долготу Луны.

В дальнейшем мы составим условные уравнения, которые будут связывать поправки к $\lambda_0, \beta_0, I, R_0$ и элементы свободной физической либрации в долготу, с одной стороны, и измеренные величины s — другой.

Рассмотрим рис. 2. Здесь x, y — система ортогональных координат с началом в центре лунного диска. Ось y направлена вдоль часового круга к северу, ось x —

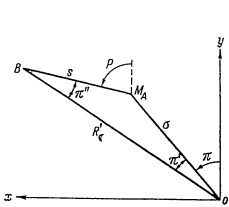


Рис. 2.

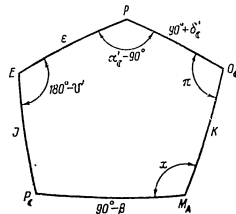


Рис. 3.

в направлении отсчета прямых восхождений, M_A — кратер Мёстинг А, B — точка, лежащая на краю лунного диска.

Положение кратера на диске определяется двумя координатами: угловым расстоянием кратера от центра диска π и позиционным углом кратера λ . Если мы будем знать эти координаты, то легко сможем вычислить s_e .

Рассмотрим теперь пятиугольник, расположенный на небесной сфере, центр которой совпадает с центром Луны (рис. 3).

Вершины пятиугольника лежат в следующих точках:
 P — северный полюс мира,
 E — северный полюс эклиптики,
 P_C — проекция северного полюса Луны на сферу,
 M_A — проекция кратера Мёстинг А на сферу,
 O_C — проекция точки наблюдения на сферу (эта точка противоположна видимому центру лунного диска); ее экваториальные координаты равны $180^\circ + \alpha'_e$ и $-\beta'_e$.

Обозначим через λ, β селенографические координаты кратера, через K — угловое расстояние от видимого центра лунного диска до кратера, через ε — истинную наклонность земного экватора к эклиптике. Тогда для сторон нашего пятиугольника мы получим следующие выражения:

$$PE = \varepsilon, \quad EP_C = I, \quad P_C M_A = 90^\circ - \beta, \quad M_A O_C = K,$$

$$O_C P = 90^\circ - (-\beta'_e) = 90^\circ + \beta'_e.$$

Что же касается углов пятиугольника, то они равны:

$$\angle O_C = \pi, \quad \angle P = 90^\circ + (180^\circ + \alpha'_e) = 270^\circ + \alpha'_e,$$

$$\angle E = 180^\circ - \beta', \quad \angle P_C = \beta' - I - \lambda - 90^\circ,$$

$$\angle M_A = x.$$

Величины $\beta' = 180^\circ + \Omega'$ и I'_e взяты с учетом поправки за нутацию в долготу, которая была вычислена пользуясь Nautical Almanac, причем поправки для наблюдений Гартвига были вычислены К. Коэлом и приведены им в его работе, откуда мы их и взяли, а поправки для наблюдений А. А. Нефедьева мы вычисляли сами.

Таким образом

$$\beta' = \beta + N,$$

$$I'_e = I_e + N,$$

где N — поправка за нутацию в долготу.

В значения средних долгот Луны для наблюдений Гартвига вводились, кроме того, поправки Ньюкома, как мы на это уже указывали выше.

Применяя к пятиугольнику формулу (8), получим

$$E = r(180^\circ - x) p(90^\circ - \beta) r(-\beta' + I'_e + \lambda - 90^\circ) p(I) r(\beta') p(\varepsilon) r(-90^\circ - \alpha'_e) \times \\ \times p(90^\circ + \beta'_e) r(180^\circ - \pi) p(K).$$

Учитывая формулы (6) и (9), это можно записать так:

$$q(\beta'_e) r(\alpha'_e) p(-\varepsilon) r(-\beta') p(-I) r(\beta' - I'_e) r(90^\circ - \lambda) p(\beta - 90^\circ) r(x - 180^\circ) = \\ = q(-90^\circ) r(90^\circ - \pi) p(K).$$

Отсюда получается

$$\begin{pmatrix} -\cos K \\ \sin K \sin \pi \\ \sin K \cos \pi \end{pmatrix} = q(\beta'_e) r(\alpha'_e) p(-\varepsilon) r(-\beta') p(-I) r(\beta' - I'_e) \begin{pmatrix} -\cos \beta \cos \lambda \\ -\cos \beta \sin \lambda \\ \sin \beta \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Значения ε — истинной наклонности земного экватора к эклиптике — также брались из Nautical Almanac.

Равенство (10) можем сокращенно записать так:

$$\begin{pmatrix} -\cos K \\ \sin K \sin \pi \\ \sin K \cos \pi \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} -\cos \beta \cos \lambda \\ -\cos \beta \sin \lambda \\ \sin \beta \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = q(\beta'_e) r(\alpha'_e) p(-\varepsilon) r(-\beta') p(-I) r(\beta' - I'_e).$$

Ниже мы увидим, что шесть элементов матрицы A входят в качестве коэффициентов в условные уравнения задачи.

Все величины, стоящие в правой части равенства (11), мы будем брать с точностью до $1''$. Эта точность вполне достаточна для нашей цели, так как всякую величину на поверхности Луны мы видим с Земли под углом, в 220 раз меньшим, чем из центра Луны, и таким образом $1''$ селеноцентрическая соответствует меньше, чем 0.005 геоцентрической.

Так как при измерениях лунного диска нас интересует геоцентрическая точность до 0'01, то, следовательно, достаточно вычислять π и K с точностью до 1".

Величины λ и β , входящие в правую часть равенства (11), находятся таким образом:

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda,$$

$$\beta = \beta_0 + \Delta\beta,$$

где λ_0 и β_0 , как уже указывалось, есть приближенное значение селенографических долготы и широты кратера, а $\Delta\lambda$ и $\Delta\beta$ — поправки к этим приближенным координатам, учитывающие влияние вынужденной физической либрации.

$\Delta\lambda$ и $\Delta\beta$ вычислялись по формулам, данным Хайном (Haup, 1920):

$$\Delta\lambda = -\rho \operatorname{tg} \beta_0 \cos(g + \omega + \lambda_0) - f \operatorname{tg} \beta_0 \sin(g + \omega + \lambda_0) + \tau, \quad (12)$$

$$\Delta\beta = \rho \sin(g + \omega + \lambda_0) - f \cos(g + \omega + \lambda_0).$$

Выражение для τ уже приводилось нами раньше [см. формулу (1)]. В этом выражении мы брали только ту часть его, которая представляет вынужденную либрацию. При этом нас интересовали только те члены вынужденной либрации, коэффициенты которых не меньше, чем 0'5. К. Козел в своей работе приводит таблицу членов вынужденной либрации, вычисленных им для значений f , равных 0.5; 0.6; 0.7; 0.73; 0.8.

Так как мы ведем вычисления для значений f , равных 0.58; 0.60; 0.62; 0.71; 0.73; 0.75, то коэффициенты членов вынужденной либрации, соответствующие нашим выбранным значениям f , мы получили, интерполируя значения коэффициентов, приводимых К. Козелом. Исключение представляют только коэффициенты при $\sin g'$ и $\sin 2\omega$. Коэффициенты при $\sin g'$ по своей численной величине превосходят коэффициенты всех остальных членов вынужденной либрации. Эти коэффициенты мы, не доверяя линейному интерполированию, вычислили сами по точной формуле для всех выбранных нами значений f . Впрочем, эти коэффициенты, вычисленные таким образом, отличаются от коэффициентов, полученных путем интерполирования, очень не намного, самое большее на 0'3—0'4. Коэффициент при $\sin 2\omega$, как уже отмечалось, терпит разрыв при $f_0 = 0.662$. Поэтому для нахождения значений этого коэффициента, соответствующих различным f , нельзя было применять линейное интерполирование. Коэффициенты этого члена мы также находили по точной формуле. Таким образом, и для нахождения коэффициентов при $\sin g'$, и для нахождения коэффициентов при $\sin 2\omega$ использовалась следующая формула:

$$\tau = \sum \frac{M^i H_i \sin h_i}{h_i^2 - 0.9853M^i},$$

где в первом случае мы брали h_i равным g' , а во втором — 2ω .

Значения коэффициентов H_i брались нами из табл. 5, приводимой К. Козелом в его работе (Kozel, 1949).

Значения h_i по данным Брауна (Brown, 1919) равны

$$\frac{dg'}{dt} = 0.01720197, \quad \frac{d\omega}{dt} = 0.00286859,$$

следовательно

$$\frac{d(2\omega)}{dt} = 0.00573718.$$

Для каждого интересующего нас значения f мы находили сначала β по формуле

$$\beta = 0.0006328 - 0.00000293f.$$

После того как β было найдено, мы находили τ по формуле

$$\tau = \beta(1-f).$$

В результате мы получили следующую таблицу для членов вынужденной физической либрации в долготу $\tau_{\text{мин}}$ (табл. 2).

Итак, вынужденная либрация в долготу представлена суммой синусов, аргументы которых заключены в 1-й графе таблицы, а коэффициенты, стоящие перед синусами, — в графах 2—7.

Далее нам необходимо получить выражения для физической либрации в узле и в наклонности, причем мы считаем, что свободная либрация в узле и в наклонности отсутствует.

Для этой цели мы берем выражения для I_0 и для ρ , данные Хайном (Haup, 1920) для значений f , равных 0.5; 0.6; 0.7; 0.8, и интерполируем коэффициенты всех членов, входящих в I_0 и в ρ , соответственно выбранным нами значениям f . При этом мы опять берем только те члены, коэффициенты при которых не меньше, чем 0'5. Исключение представляют только члены с аргументом 2ω .

Коэффициент при $\sin 2\omega$ в выражении для I_0 и коэффициент при $\cos 2\omega$ в выражении для ρ ввиду их важности берем с точностью до 0'1, но так как они очень малы (меньше, чем 0'5), то мы находим их путем линейного интерполирования. В табл. 3 и 4 даны члены вынужденной либрации в узле и наклонности соответственно.

Таблица 2

Arg (sin)	f=0.58	f=0.60	f=0.62	f=0.71	f=0.73	f=0.75
g'	-19'1	-18'3	-17'5	-14'1	-12'9	-11'5
2ω	-0.5	-0.5	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2
$g' + 2\omega$	-107.2	-101.3	-95.5	-70.5	-65.1	-59.9
$2g' - 2\omega$	-12.5	-15.8	-22.2	+14.6	+9.6	+6.9
$g' + \omega - \omega'$	-2.2	-2.1	-2.0	-1.6	-1.4	-1.2
$g' + 2\omega - 2\omega'$	+4.2	+3.9	+3.7	+2.8	+2.5	+2.2
$g' + \omega - \omega'$	-1.1	-1.0	-0.9	-0.7	-0.6	-0.6
$g' + 2\omega - 2\omega'$	-11.6	-11.0	-10.4	-7.8	-7.3	-6.7
$g' - 2g' + 2\omega - 2\omega'$	-4.7	-4.5	-4.3	-3.4	-3.0	-2.6
$2g' - 2g' + 2\omega - 2\omega'$	-0.7	-0.7	-0.7	-0.5	-0.4	-0.4
$g' - 2g' + 2\omega - 2\omega'$	+7.5	+7.5	+7.5	+7.6	+7.6	+7.6

Таблица 3

Arg (cos)	f=0.58	f=0.60	f=0.62	f=0.71	f=0.73	f=0.75
g'	-94'1	-95'6	-97'1	-104'1	-105'6	-107'1
2ω	+0.3	+0.2	+0.1	-0.2	-0.3	-0.4
$g' + 2\omega$	+17.9	+20.2	+22.6	+33.1	+35.4	+37.6
$2g' + 2\omega$	-11.1	-11.1	-11.1	-11.1	-11.1	-11.1
$3g' + 2\omega$	-0.6	-0.6	-0.6	-0.6	-0.6	-0.6
$2g' - 2\omega$	-3.2	-3.2	-3.2	-3.3	-3.3	-3.4
$g' - 2g' + 2\omega - 2\omega'$	-2.1	-2.1	-2.1	-2.3	-2.4	-2.4

Таблица 4

Arg (sin)	f=0.58	f=0.60	f=0.62	f=0.71	f=0.73	f=0.75
g'	-96'0	-97'5	-99'1	-106'1	-107'6	-109'1
2ω	+0.3	+0.2	+0.1	-0.2	-0.3	-0.4
$g' + 2\omega$	+17.9	+20.2	+22.6	+33.1	+35.4	+37.6
$2g' + 2\omega$	-11.1	-11.1	-11.1	-11.1	-11.1	-11.1
$3g' + 2\omega$	-0.6	-0.6	-0.6	-0.6	-0.6	-0.6
$2g' - 2\omega$	+3.2	+3.2	+3.2	+3.3	+3.3	+3.3
$g' - 2g' + 2\omega - 2\omega'$	-2.1	-2.1	-2.1	-2.3	-2.4	-2.4

Таблица 5

	f=0.58	f=0.60	f=0.62	f=0.71	f=0.73	f=0.75
sin g	-19°	-18°	-18°	-14°	-13°	-12°
sin g'	+107	+101	+96	+71	+65	+60
sin 2ω	-13	-16	-22	+14	+10	+7
sin (-2g' + 2ω - 2ω')	-12	-11	-10	-8	-7	-7
sin (-g' + ω - ω')	+4	+4	+4	0	0	0
sin Ω	+8	+8	+8	+8	+8	+8
cos (ω + λ ₀)	-5	-5	-5	-6	-6	-6
sin (ω - 2g' + 2ω - 2ω')	-5	-4	-4	0	0	0

Таблица 6

	f=0.58	f=0.60	f=0.62	f=0.71	f=0.73	f=0.75
sin (ω - λ ₀)	-18°	-20°	-23°	-33°	-35°	-37°
sin (g + ω - λ ₀)	+11	+11	+11	+11	+11	+11
sin (ω + λ ₀)	-95	-97	-98	-105	-107	-108

Теперь, когда вычислены значения τ, β и ρ для выбранных нами f, подставим эти найденные значения в формулу (12) и получим величины Δλ и Δβ (табл. 5, 6). В выражениях Δλ и Δβ мы будем оставлять только те члены, коэффициенты которых больше, чем 3", что соответствует геоцентрической точности 0'01.

Взяв теперь значения g, g', ω, ω' и Ω' для среднего момента наблюдения, мы вычислим Δλ и Δβ.

Таким образом, для каждого наблюдения были получены 6 значений Δλ (по числу выбранных значений f) и 6 значений Δβ.

Зная Δλ и Δβ, мы находим λ = λ₀ + Δλ и β = β₀ + Δβ. Теперь по формуле (11) можно вычислить K и π. Остается определить σ, и тогда полярные координаты кратера на диске будут известны. Мы обозначали через h геоцентрический радиус-вектор кратера на среднем расстоянии Луна-Земля. Если обозначим через h̄ геоцентрический радиус-вектор кратера на любом расстоянии Луны от Земли, то, аналогично формуле (5), будем иметь

$$\sin \bar{h} = \frac{\sin h}{\sin \pi_0} \cdot \sin \pi_0.$$

Топоцентрический радиус-вектор кратера обозначим через H'. В таком случае, аналогично выражению (4), получим

$$\sin H' = \frac{\sin(G - \delta'_c)}{\sin(G - \delta_c)} \cdot \sin \bar{h},$$

или

$$\sin H' = \frac{\sin(G - \delta'_c)}{\sin(G - \delta_c)} \cdot \frac{\sin h}{\sin \pi_0} \cdot \sin \pi_0. \quad (13)$$

Взяв для h значение 15'33", мы вычислим sin H' для каждого наблюдения, после чего найдем σ.

Рассмотрим плоский треугольник с вершинами в точках: наблюдатель, кратер, центр Луны (рис. 4).

Очевидно, что, согласно принятым ранее обозначениям, $\angle M_A O H = K$, $\angle M_A H O = \sigma$, Δ — расстояние от наблюдателя до центра Луны, r — линейный радиус-вектор кратера. Внешний угол при вершине треугольника M_A обозначим через S. Из треугольника OHM_A имеем соотношение

$$\sin S = \frac{\sin \sigma}{\Delta},$$

но $\frac{r}{\Delta} = \sin H'$; следовательно,

$$\sin S = \frac{\sin \sigma}{\sin H'}.$$

Но из рис. 4 видно, что $S = \sigma + K$, поэтому

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{\sin H' \sin K}{1 - \sin H' \cos K}. \quad (14)$$

Все величины, входящие в правую часть (14), нам известны. Итак, мы нашли полярные координаты кратера на диске σ и π. Все вычисления в процессе нахождения π и σ производились нами с точностью до шестого десятичного знака, с мы получали с точностью до 1", а σ — с точностью до 0'01.

Рассмотрим вновь рис. 2. Обозначая

$$\begin{aligned} \angle M_A B O &= \pi', \\ \angle M_A O B &= \pi'', \end{aligned}$$

мы видим, что

$$\begin{aligned} p &= \pi + \pi' + \pi'', \\ \angle B M_A O &= 180^\circ - (p - \pi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{R'_c}{\sin [180^\circ - (p - \pi)]} &= \frac{\sigma}{\sin \pi''}, \\ R'_c \sin \pi'' &= \sigma \sin (p - \pi), \\ R'_c &= \sigma \cos \pi'' + \sigma \cos \pi'. \end{aligned} \quad (15)$$

Вычислив π и σ и взяв из таблиц R'_c, мы получим

$$\sin \pi'' = \frac{\sigma \sin (p - \pi)}{R'_c}.$$

Отсюда найдем π'', затем получим π' = p - π - π''. Следовательно,

$$s_2 = (R'_c - \sigma \cos \pi'') \sec \pi'', \quad (16)$$

и, наконец,

$$s_0 - s_1 = s_0 - (R'_c - \sigma \cos \pi'') \sec \pi''. \quad (17)$$

Эти вычисления мы вели при помощи счетно-аналитических машин, которые не дают возможности получить значения секанса путем выборки из таблиц. Поэтому, в целях удобства и экономии времени, мы умножили обе части равенства (17) на cos π''

$$(s_0 - s_1) \cos \pi'' = s_0 \cos \pi'' - R'_c + \sigma \cos \pi''. \quad (18)$$

Значения $\cos \pi''$ очень близки к 1. Поэтому можно сравнить полученные нами значения $(s_0 - s_2) \cos \pi''$ со значениями $(s_0 - s_2)$, данными в работе К. Козела. Легко видеть, что наши значения $(s_0 - s_2) \cos \pi''$ и значения $(s_0 - s_2)$, данные К. Козелом, расходятся довольно значительно. Эти расхождения объясняются прежде всего тем, что значения π , полученные нами, отличаются от значений π , полученных К. Козелом, вследствие того, что в среднюю долготу Луны нами была введена поправка Ньюкома.

Некоторую роль в происхождении различия между π сыграло и то обстоятельство, что мы вели вычисления с шестью десятичными знаками, а К. Козел — с четырьмя. Это различие в π скажется главным образом на величине $\cos \pi''$, которая в формуле (18) умножается на σ . Если σ мало, то даже значительное расхождение в $\cos \pi''$ у нас и у К. Козела может мало сказаться на $(s_0 - s_2) \cos \pi''$, и Δs будет мало. Но если σ не мало, то и Δs будет большим.

Таким образом, величина Δs зависит от разности величин π , полученных нами и К. Козелом, и прямо пропорциональна величине σ . При этом уже не играет особой роли то, что наши σ несколько отличаются от σ , данных К. Козелом, так как эта разность очень мала по сравнению с самой величиной σ .

Различия в величинах π , полученных нами и К. Козелом, почти не сказываются на величине π'' , синус которого находится путем умножения $\sin(p - \pi)$ на $\frac{\sigma}{R_{\epsilon}}$, а эта поправка в большинстве случаев мала.

После того как были получены величины $(s_0 - s_2) \cos \pi''$, некоторые наблюдения пришлось выкинуть, и именно те, для которых получилось $(s_0 - s_2) \cos \pi'' > 3''$.

§ 4. Составление условных уравнений

После того как мы получили разность $(s_0 - s_2) \cos \pi''$, составим такие условные уравнения, которые свяжут между собой измеренные и искомые величины. Рассмотрим небесную сферу, центр которой совпадает с положением наблюдателя. Пусть O (рис. 5) есть проекция на небесную сферу центра лунного диска, а M_A — проекция кратера Мэстинг А. Тогда σ и π — известные нам полярные координаты кратера на диске. Координаты x, y кратера на диске связаны с его полярными координатами, как это видно из рис. 5, такими соотношениями:

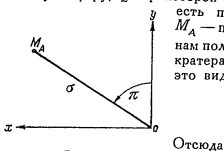


Рис. 5.

$$\begin{aligned} x &= \sigma \sin \pi, \\ y &= \sigma \cos \pi. \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \Delta x &= \sin \pi \Delta \sigma + \sigma \cos \pi \Delta \pi, \\ \Delta y &= \cos \pi \Delta \sigma - \sigma \sin \pi \Delta \pi. \end{aligned} \quad (20)$$

В предыдущей главе [см. (16)] мы получили

$$R_{\epsilon}'' = s \cos \pi'' + \sigma \cos \pi'.$$

Варируя это равенство и замечая, что

$$s \sin \pi'' = \sigma \sin \pi',$$

получим

$$\Delta R_{\epsilon}'' = \cos \pi'' \Delta s - \sigma \sin \pi' (\Delta \pi'' + \Delta \pi') + \cos \pi' \Delta \sigma.$$

Но мы уже видели в (15), что

$$\pi' + \pi'' = p - \pi.$$

Поэтому, принимая во внимание значения $\Delta \pi$ и Δs , полученные из (20), получим

$$\Delta R_{\epsilon}'' = \sin(\pi + \pi'') \Delta x - \cos(\pi + \pi'') \Delta y = \cos \pi'' \Delta s. \quad (21)$$

Уравнение (21) назовем, следуя К. Козелу, „малым наблюдаемым уравнением“. Каждое наведение дает нам одно такое уравнение для одного определенного значения параметра f .

Для каждого вечера наблюдения получим систему этих уравнений, причем число уравнений в системе равно числу наведений в наблюдении. Каждому значению f будет соответствовать одна такая система.

Если сравнить между собой уравнения (21), полученные для одного и того же наведения, но при разных значениях f , то видим, что эти уравнения отличаются друг от друга только величиной разности $s_0 - s_2$. Из системы условных уравнений (21) для каждого вечера наблюдения в отдельности мы должны получить по способу наименьших квадратов вспомогательные неизвестные $\Delta x, \Delta y$ и $\Delta R_{\epsilon}''$. Так как уравнения (21) не разрешены относительно невязок Δs , а имеют множитель $\cos \pi''$, то, строго говоря, эти уравнения должны быть преобразованы путем деления на этот множитель прежде, чем образовывать из них нормальные системы.

Беря условные уравнения в форме (21), мы тем самым как бы вводим веса. Однако, так как множитель $\cos \pi''$ очень близок к единице, то происходящая от этого ошибка будет очень незначительной.

Сравнивая разности $s_0 - s_2$, полученные из обоих рядов наблюдений, можно видеть, что те из них, которые выведены из наблюдений А. А. Нефедьева, значительно превосходят те, которые получены из наблюдений Гартвига. Это можно объяснить тем, что наблюдения А. А. Нефедьева по качеству уступают наблюдениям Гартвига. А. А. Нефедьев сам указывает на то, что многие наблюдения были произведены при плохих атмосферных условиях. Ввиду этого наблюдениям Гартвига мы придали больший вес, чем наблюдениям А. А. Нефедьева. Всем наблюдениям А. А. Нефедьева был приписан вес $p=1$. Тем наблюдениям Гартвига, которым К. Козел придавал вес $p=1$, мы придавали вес, равный 2, а тем наблюдениям Гартвига, которым Козел придавал вес $p=2$, мы придавали вес, равный 4. Учитывая условные уравнения, связывающие каждого вечера наблюдений мы получили систему условных уравнений, связывающих каждого вечера наблюдений $s_0 - s_2$. Из этих вспомогательных неизвестных $\Delta x, \Delta y, \Delta R_{\epsilon}''$ с поправками наблюдений $s_0 - s_2$. Из этих уравнений можно по способу наименьших квадратов найти значения промежуточных неизвестных задачи $\Delta x, \Delta y, \Delta R_{\epsilon}''$. Эти величины мы, однако, находить не будем, а постараемся посредством их связать искомые величины, с одной стороны, и измеренные, с другой.

Изменим несколько обозначения и рассмотрим в общем случае вопрос об уравнениях вычислений для вывода постоянных физический либрации. Рассмотрим группу уравнений k -го вечера наблюдений, связывающих вспомогательные неизвестные x_1, x_2, x_3 с измеренными величинами l_i (i — номер наведения):

$$T_{1i} x_1 + T_{2i} x_2 + T_{3i} x_3 = l_i. \quad (22)$$

Из этих уравнений мы можем по способу наименьших квадратов определить все вспомогательные неизвестные x_1, x_2, x_3 для каждого отдельного вечера. Для этой цели мы должны по известным правилам составить для каждого отдельного вечера систему нормальных уравнений, которую мы запишем в матричной форме

$$RX = L,$$

и решить ее.

Для решения, пользуясь методом Т. Банахевича, разобьем матрицу

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

на произведение двух треугольных взаимно транспонированных матриц. Эта операция, по Т. Банахевичу, носит название „извлечения квадратного корня из матрицы“.

$$\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} \quad (24)$$

или

$$C^*CX = L. \quad (25)$$

Это разложение всегда возможно и притом единственным образом. Обозначим

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \quad (26)$$

или

$$CX = Z. \quad (27)$$

Величины z_1, z_2, z_3 нетрудно вычислить по формуле (26). Тогда решение системы (24) примет вид

$$\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

или

$$C^*Z = L. \quad (29)$$

Напомним, что подобного рода вычисления мы должны выполнять по отдельности для каждого вечера наблюдений.

Заметим, что система условных уравнений (22) до некоторой степени равносильна системе (26), так как из той и другой системы мы можем получить систему нормальных уравнений (23), применяя те же арифметические операции. В самом деле, если записать систему (22) сокращенно в матричной форме $\Gamma X = \Lambda$, то нетрудно видеть, что для получения нормальной системы надо предыдущее уравнение умножить слева на Γ^* :

$$\Gamma^*\Gamma X = \Gamma^*\Lambda,$$

аналогичные действия с системой (26) дадут то же самое:

$$C^*CX = C^*Z,$$

так как

$$\Gamma^*\Gamma = C^*C = R, \quad \Gamma^*\Lambda = C^*Z = L.$$

Рассмотрим теперь группу уравнений, связывающих окончательные неизвестные задачи u_1, u_2, \dots, u_7 с промежуточными неизвестными x_1, x_2, x_3 . Для каждого вечера мы можем написать группу из трех таких уравнений с 7 неизвестными:

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{17} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{27} \\ m_{31} & m_{32} & \dots & m_{37} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (30)$$

или

$$MU = X. \quad (31)$$

В уравнения (30) можно подставить значения промежуточных неизвестных x_1, x_2, x_3 , найденных ранее по способу наименьших квадратов, и найти неизвестные u_1, u_2, \dots, u_7 . Именно так поступали в свое время И. В. Белькович, А. А. Нефедьев и др. Такое двукратное уравнение, как правильно заметил К. Козел, незаконно, так как не вводит сумму квадратов остаточных ошибок к минимуму. К. Козел показал, что для правильного решения задачи необходимо решить по способу наименьших квадратов следующую систему:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{17} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{27} \\ m_{31} & m_{32} & \dots & m_{37} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Легко показать, что система условных уравнений (32) действительно равносильна системам (22) и (30). Для этого нам нужно помножить матричное равенство (31) слева на C

$$CMU = CX. \quad (33)$$

В силу (27) равенства (32) и (33) совпадают. Наша задача состоит в том, чтобы вычислить матрицы C и Z , а затем матрицу M . Матрицу R дополним столбцом и строкой свободных членов:

$$R'_\epsilon = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & l_1 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & l_2 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & l_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 & [1] \end{pmatrix}.$$

Далее разобьем матрицу R'_ϵ на произведение двух треугольных матриц. Элементы этих последних матриц вычисляются на основании условия, что произведение их должно давать исходную матрицу. Таким образом, мы сможем записать

$$R'_\epsilon = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & z_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & z_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & z_3 \\ 0 & 0 & 0 & z_4 \end{pmatrix}.$$

Величина z_4 , согласно известной теореме способа наименьших квадратов, представляет собой $\sqrt{[v]}$, поэтому, зная z_4 , мы можем вычислить среднюю ошибку одного наблюдения ϵ . Из найденных значений ϵ вычислим их среднее арифметическое $\bar{\epsilon}$ для каждого дня. Из найденных значений $\bar{\epsilon}$ вычислим их среднее арифметическое $\bar{\epsilon} = 0.34$, для наблюдений ряда в отдельности. Для наблюдений Гартвига мы получили $\bar{\epsilon} = 0.37$, для наблюдений Нефедьева $\bar{\epsilon} = 0.37$. Итак, матрицы C и Z нами найдены. Все элементы этих матриц вычислялись с тремя десятичными знаками. Мы их здесь не приводим за недостатком места.

Теперь получим матрицу

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \dots & m_{17} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & \dots & m_{27} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & \dots & m_{37} \end{pmatrix}.$$

Для этого надо найти зависимость между вспомогательными неизвестными (выше мы их обозначили через x_1, x_2, x_3) и окончательными неизвестными задачи u_1, u_2, \dots, u_7 , мы их обозначили через x_1, x_2, x_3) и окончательными неизвестными значениями $\lambda_0, \beta_0, h, l, R_0$ и которыми являются поправки к принятым приближенным значениям $\lambda_0, \beta_0, h, l, R_0$ и элементами свободной либрации. Записав уравнения (19) в матричной форме, получим

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma \sin \pi \\ \sigma \cos \pi \end{pmatrix}.$$

Вспомнив, что $\operatorname{tg} \sigma = \frac{\sin K' \sin K}{1 - \sin K' \cos K}$, мы будем иметь

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\sin K'}{1 - \sin K' \cos K} \begin{pmatrix} \sin K \sin \pi \\ \sin K \cos \pi \end{pmatrix} = \frac{K'}{\Delta} \begin{pmatrix} \sin K \sin \pi \\ \sin K \cos \pi \end{pmatrix} \quad (34)$$

где $\Delta = 1 - \sin K' \cos K$.

Здесь мы заменили тангенс и синус малых углов самими углами. Из равенства (11) можно получить

$$\begin{pmatrix} \sin K \sin \pi \\ \sin K \cos \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos \beta \cos \lambda \\ -\cos \beta \sin \lambda \\ \sin \beta \end{pmatrix} = \bar{A} \begin{pmatrix} -\cos \beta \cos \lambda \\ -\cos \beta \sin \lambda \\ \sin \beta \end{pmatrix},$$

где

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$$

отсюда

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{K'}{\Delta} \bar{A} \begin{pmatrix} -\cos \beta \cos \lambda \\ -\cos \beta \sin \lambda \\ \sin \beta \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Варьируя (35), получаем

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \frac{K'}{\Delta} \bar{A} \begin{pmatrix} \sin \beta \cos \lambda \\ \sin \beta \sin \lambda \\ \cos \beta \end{pmatrix} \Delta \beta + \frac{K'}{\Delta} \bar{A} \begin{pmatrix} \cos \beta \sin \lambda \\ -\cos \beta \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \Delta \lambda + \\ + \frac{1}{\Delta} \left(1 + \frac{K' \cos K \cos K}{\Delta} \right) \bar{A} \begin{pmatrix} -\cos \beta \cos \lambda \\ -\cos \beta \sin \lambda \\ \sin \beta \end{pmatrix} \Delta K + \frac{K'}{\Delta} \cdot \frac{\partial}{\partial I} \left[\bar{A} \begin{pmatrix} -\cos \beta \cos \lambda \\ -\cos \beta \sin \lambda \\ \sin \beta \end{pmatrix} \right] \Delta I; \quad (36)$$

член $\frac{K' \cos K \cos K}{\Delta}$ мал, поэтому в дальнейшем им пренебрегаем. Кроме того, с достаточным для нашей цели приближением положим $\Delta K' = \Delta h$. Рассмотрим член

$$\frac{\partial}{\partial I} \left[\bar{A} \begin{pmatrix} -\cos \beta \cos \lambda \\ -\cos \beta \sin \lambda \\ \sin \beta \end{pmatrix} \right] \Delta I.$$

Можно показать, что

$$\frac{\partial}{\partial I} \left[\bar{A} \begin{pmatrix} -\cos \beta \cos \lambda \\ -\cos \beta \sin \lambda \\ \sin \beta \end{pmatrix} \right] = \bar{A} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin(\zeta' - I_{\zeta}) \\ 0 & 0 & -\cos(\zeta' - I_{\zeta}) \\ -\sin(\zeta' - I_{\zeta}) & \cos(\zeta' - I_{\zeta}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos \beta \cos \lambda \\ -\cos \beta \sin \lambda \\ \sin \beta \end{pmatrix}.$$

Поэтому равенство (36) примет теперь следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \frac{K'}{\Delta} \bar{A} \begin{pmatrix} \sin \beta \cos \lambda \\ \sin \beta \sin \lambda \\ \cos \beta \end{pmatrix} \Delta \beta + \frac{K'}{\Delta} \bar{A} \begin{pmatrix} \cos \beta \sin \lambda \\ -\cos \beta \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \Delta \lambda + \frac{K'}{\Delta} \bar{A} \begin{pmatrix} -\cos \beta \cos \lambda \\ -\cos \beta \sin \lambda \\ \sin \beta \end{pmatrix} \Delta h + \\ + \frac{K'}{\Delta} \bar{A} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin(\zeta' - I_{\zeta}) \\ 0 & 0 & -\cos(\zeta' - I_{\zeta}) \\ -\sin(\zeta' - I_{\zeta}) & \cos(\zeta' - I_{\zeta}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos \beta \cos \lambda \\ -\cos \beta \sin \lambda \\ \sin \beta \end{pmatrix} \Delta I. \quad (37)$$

Будем считать, что $\Delta \lambda$ складывается из суммы двух величин, а именно:

$$\Delta \lambda = \Delta \lambda_0 + \delta \lambda,$$

где $\Delta \lambda_0$ — поправка к принятому значению селенографической долготы кратера λ_0 , а $\delta \lambda$ — свободная либрация в долготе.

Для $\delta \lambda$ мы имеем такое выражение:

$$\delta \lambda = \alpha \sin(A + \sqrt{0.9853M^2} t).$$

Это же можем записать и в таком виде:

$$\delta \lambda = M \sin pt + N \cos pt.$$

Отсюда

$$\Delta \lambda = \Delta \lambda_0 + M \sin pt + N \cos pt.$$

где $p = \sqrt{0.9853M^2}$.

Таким образом, влияние свободной либрации из координаты кратера выразится следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \frac{K'}{\Delta} \bar{A} \begin{pmatrix} \cos \beta \sin \lambda \\ -\cos \beta \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix} [M \sin pt + N \cos pt].$$

Пользуясь введенными раньше обозначениями для элементов матрицы и заменяя $\Delta \beta$ через $\Delta \beta_0$, можем записать полученное нами в таком виде:

$$\begin{aligned} \Delta x &= m_{11} \Delta \beta_0 + m_{12} \Delta \lambda_0 + m_{13} \Delta h + m_{14} \Delta I + m_{15} M + m_{16} N, \\ \Delta y &= m_{21} \Delta \beta_0 + m_{22} \Delta \lambda_0 + m_{23} \Delta h + m_{24} \Delta I + m_{25} M + m_{26} N. \end{aligned} \quad (38)$$

Введем еще одну искомую величину, а именно ΔR_0 — поправку к принятому значению углового радиуса Луны на среднем расстоянии Луны от Земли. Эта неизвестная величина связана с промежуточной неизвестной ΔR_{ζ} соотношением

$$\Delta R_{\zeta} = \frac{R_{\zeta}}{R_0} \cdot \Delta R_0.$$

Принимая это во внимание и переходя к обозначениям

$$\Delta \beta_0 = u_1, \quad \Delta \lambda_0 = u_2, \quad \Delta h = u_3, \quad \Delta I = u_4, \quad M = u_5, \quad N = u_6, \quad \Delta R_0 = u_7,$$

вместо равенства (38) получим:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{17} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{27} \\ m_{31} & m_{32} & \dots & m_{37} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{pmatrix}, \quad (39)$$

где $m_{21} = m_{22} = m_{23} = m_{24} = m_{25} = 0$, $m_{27} = \frac{R_{\zeta}}{R_0}$.
Теперь, когда матрицы C , M и Z нами вычислены, равенство (32) дает возможность найти окончательные неизвестные задачи. Очевидно, что (32) представляет собой систему условных уравнений, в которой число уравнений равно утроенному числу вечерних наблюдений. Имея 155 наблюдений, мы получили 465 уравнений.

Для того чтобы уравнения приняли более удобный вид, мы ввели вместо наших искомым величин другие, связанные со старыми такими соотношениями:

$$u_1' = \frac{1}{100} u_1 = \frac{1}{100} \Delta \beta_0,$$

$$u_2' = \frac{1}{100} u_2 = \frac{1}{100} \Delta \lambda_0,$$

$$u_3' = u_3 = \Delta h,$$

$$u_4' = \frac{1}{100} u_4 = \frac{1}{100} \Delta I,$$

$$u_5' = \frac{1}{p} u_5 = \frac{1}{p} M,$$

$$u_6' = \frac{1}{p} u_6 = \frac{1}{p} N,$$

$$u_7' = u_7 = \Delta R_0,$$

где p принимает такие последовательные значения для разных значений f :

f	0.58	0.60	0.62	0.71	0.73	0.75
p	63.9450	62.4010	60.8180	53.1190	51.2521	49.3151

Значения элементов матрицы M мы здесь не приводим, так как они заняли бы слишком много места.

§ 5. Решение условных уравнений и выводы

Решая по способу наименьших квадратов полученные выше уравнения (32), мы высчитали коэффициенты и свободные члены нормальных уравнений соответственно каждому выбранному нами значению параметра f (табл. 7).

Для решения этих систем нормальных уравнений и для определения средних ошибок неизвестных использован метод, предложенный С. Г. Маковером (1956), основанный на применении матриц. В результате были получены значения искомым величин вместе с их средними ошибками (табл. 8).

Сумма квадратов остаточных уклонений $[pvv]$, получена путем подстановки найденных значений неизвестных в условные уравнения. $[pvv]_0$ найдено непосредственно из системы нормальных уравнений.

Из табл. 8 видно, что средняя ошибка единицы веса σ_0 получилась довольно большая, гораздо больше, чем та же величина у К. Козла при обработке им наблюдений Гартвига. Это произошло потому, что мы придавали большой вес наблюдениям Гартвига, а это в свою очередь увеличило среднюю ошибку единицы веса. Но при этом средняя ошибка неизвестного σ_x , которая находится по формуле $\sigma_x = \sigma_0 \sqrt{q_x}$, где q_x — весовой коэффициент величины x , остается без изменения, так как при увеличении нами веса наблюдений величина $\sqrt{q_x}$ уменьшается во столько же раз, во сколько увеличивается σ_0 и произведение их остается неизменным. Зная M и N , можно высчитать амплитуду A и фазу A свободной либрации по формулам

$$a = \sqrt{M^2 + N^2},$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{N}{M}.$$

Результаты этих вычислений, приведенные к общепринятой начальной эпохе $t_0 = 2412000$, даны в табл. 9.

Т а б л и ц а 7

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	f
$f = 0.58$							
+171.6837	-4.8782 +176.8594	-27.4722 -27.7056 +18.8941	-10.5724 -2.0345 +11.3120 +69.2862	+1.2995 -21.0897 +1.9232 +1.4041 +43.9931	-0.8107 +17.2460 -4.6141 +0.0855 -1.9958 +28.2755	-0.1352 +64.2832 -27.7188 -42.3857 -62.7315 +1.4939 +1707.7008	+65.2562 +42.7131 -35.6892 -58.6771 -13.7570 -10.9795 +288.6989
$f = 0.60$							
+171.6837	-4.8782 +176.8594	-27.4722 -27.7056 +18.8941	-10.5724 -2.0345 +17.3120 +69.2862	+1.1386 -43.9858 -7.0273 +0.1611 +42.5001	+0.2901 +10.8008 -3.0580 +0.9577 +0.0655 +26.2626	-0.1352 +64.2832 -27.7188 -42.3857 -41.5781 -14.3655 +1707.7008	+62.3303 +40.3644 -35.1955 -57.9757 -15.2340 -10.7886 +285.0338
$f = 0.62$							
+171.6837	-4.8782 +176.8594	-27.4722 -27.7056 +18.8941	-10.5724 -2.0345 +17.3120 +69.2862	+1.4675 -26.5283 +3.3836 +1.5529 +40.4090	-0.3953 +15.8451 -4.7710 +0.5344 +1.9950 +24.9239	-0.1352 +64.2832 -27.7188 -42.3857 -58.7729 -13.0880 +1707.7008	+59.3096 +40.0744 -34.9010 -57.8848 -13.8207 -11.2662 +286.1726
$f = 0.71$							
+171.6837	-4.8782 +176.8594	-27.4531 -27.6844 +18.8864	-10.5724 -2.0345 +17.3074 +69.2862	+1.0062 -22.0088 -35.8558 +4.3890 -0.5080 +25.7451	+0.6026 -22.0088 +2.4912 +0.2704 +0.5344 +24.0569	-0.1352 +64.2832 -27.6472 -42.3857 -11.4452 -37.1090 +1707.7008	+47.1800 +40.0744 -31.7938 -52.3519 -2.8675 +5.8130 +213.1043
$f = 0.73$							
+171.6837	-4.8782 +176.8594	-27.4531 -27.6844 +18.8864	-10.5724 -2.0345 +17.3074 +69.2862	+0.8412 -36.6992 +6.5719 +0.2787 +22.1819	+1.0118 -11.4763 +1.1828 +1.4124 +4.3134 +24.2239	-0.1352 +64.2832 -27.6472 -42.3857 -35.3025 -50.5065 +1707.7008	+43.2478 +18.9369 -31.0059 -51.9104 +5.4887 +4.3844 +209.8860
$f = 0.75$							
+171.6837	-4.8782 +176.8594	-27.4531 -27.6844 +18.8864	-10.5724 -2.0345 +17.3074 +69.2862	+1.0850 -21.8975 +3.6280 +0.4754 +21.0017	+0.9941 -20.8000 +0.8652 +0.4587 +4.3501 +21.9917	-0.1352 +64.2832 -27.4472 -42.3857 -19.2687 -21.3252 +1707.7008	+41.4207 +17.7511 -30.6380 -51.8204 +8.5727 +0.6663 +207.8258

Таблица 8

f	0.58	0.60	0.62	0.71	0.73	0.75
$\Delta\lambda_0$	$+9^\circ \pm 9''$	$+6^\circ \pm 9''$	$+6^\circ \pm 9''$	$-11^\circ \pm 9''$	$+4^\circ \pm 9''$	$-9^\circ \pm 9''$
$\Delta\beta_0$	$+20^\circ \pm 9''$	$+18^\circ \pm 9''$	$+14^\circ \pm 9''$	$+3^\circ \pm 9''$	$0^\circ \pm 9''$	$-2^\circ \pm 9''$
$\Delta\lambda$	-10 ± 0.4	-0.9 ± 0.4	-11 ± 0.4	-14 ± 0.4	-14 ± 0.4	-15 ± 0.4
$\Delta\beta$	$-49^\circ \pm 33''$	$-48^\circ \pm 33''$	$-44^\circ \pm 33''$	$-35^\circ \pm 34''$	$-33^\circ \pm 34''$	$-33^\circ \pm 34''$
ΔR_0	0.13 ± 0.08	0.13 ± 0.06	0.13 ± 0.08	0.10 ± 0.08	0.12 ± 0.09	0.10 ± 0.06
M	$-3^\circ \pm 12''$	$0^\circ \pm 15''$	$+2^\circ \pm 12''$	$+9^\circ \pm 11''$	$+44^\circ \pm 17''$	$+33^\circ \pm 14''$
N	$-38^\circ \pm 16''$	$-28^\circ \pm 16''$	$-38^\circ \pm 17''$	$-5^\circ \pm 15''$	$+20^\circ \pm 13''$	$-1^\circ \pm 15''$
σ_0	1.21	1.21	1.21	1.22	1.21	1.22
$[\rho_{\text{вн}}]$	671.28	672.93	670.33	681.83	669.34	678.86
$[\rho_{\text{вн}}]_2$	671.59	672.89	670.11	681.82	669.68	678.82

σ_0 — средняя ошибка единицы веса.

Таблица 9

f	0.58	0.60	0.62	0.71	0.73	0.75
a	$38^\circ \pm 15''$	$28^\circ \pm 15''$	$38^\circ \pm 16''$	$10^\circ \pm 15''$	$48^\circ \pm 16''$	$33^\circ \pm 14''$
A	$31^\circ \pm 18''$	$6^\circ \pm 28''$	$340^\circ \pm 19''$	$253^\circ \pm 80''$	$270^\circ \pm 17''$	$208^\circ \pm 24''$

Сравнивая между собой значения $[\rho_{\text{вн}}]$, найденные для различных f , можно заметить, что наименьшее значение величина $[\rho_{\text{вн}}]$ принимает при $f=0.62$ и $f=0.73$. Уверенного выбора между этими двумя значениями f сделать нельзя. Как видно из табл. 8, величина $[\rho_{\text{вн}}]$ мало меняется при взятых нами $f < 0.662$. Из этого можно заключить, что вероятнейшее значение f лежит где-то в области 0.58—0.62. Но, с другой стороны, с тем же правом можно считать лежащим вблизи $f=0.73$. Так как при выборе испытуемых значений f мы стараемся ограничиться теми, на которые различные авторы указывали как на наиболее вероятные, то можно предположить, что действительное значение f близко к 0.62 или к 0.73. Табл. 9 показывает, что амплитуда свободной либрации примерно такого же порядка, как амплитуда некоторых вынужденной либрации (табл. 2). Следовательно, при вычислении постоянных физической либрации нельзя пренебрегать свободной либрацией, как это делалось до сих пор. Полученные в табл. 9 значения a и A показывают существование зависимости между величинами a и $[\rho_{\text{вн}}]$, а именно, чем больше величина амплитуды a , тем меньше $[\rho_{\text{вн}}]$. На основании этого можно предположить, что амплитуда свободной либрации может быть близка к $50''$. А. А. Яковкин, применяя для вычисления свободной либрации метод, отличный от нашего, получил для амплитуды свободной либрации значение $a=52''$, а для фазы $A=208^\circ$. Впрочем, результаты А. А. Яковкина не могут считаться надежными, так как и он тоже, как все предыдущие исследователи, не определял совместно все постоянные физической либрации и свободную либрацию из одних общих уравнений. Не подлежит сомнению, что только совместное определение постоянных физической либрации и трех волн свободной либрации сможет дать нам точное решение задачи о вращении Луны. С этой точки зрения и наша работа содержит много недостатков, являясь только первой попыткой решить проблему физической либрации.¹

¹ Во время печатания настоящей статьи появилась работа Ш. Т. Хабидуллиной «Физическая либрация Луны» (Изв. АОЗ, 1958, № 31), содержащая, в частности, подробный вывод некоторых формул, относящихся к теории физической либрации.

В заключение приведем основные результаты наших вычислений (табл. 10)

Таблица 10

f	λ	β	h	l	R_0	a	A
0.58	$-5^\circ 09' 58''$	$-3^\circ 10' 42''$	$15^\circ 32' 4''$	$1^\circ 31' 31''$	$15^\circ 32' 71''$	38°	31°
0.60	$10^\circ 01'$	$44''$	32.5	32	32.71	28	6
0.62	01	48	32.3	36	32.71	38	340
0.71	18	59	32.0	45	32.68	10	253
0.73	03	$11\ 02$	32.0	47	32.70	48	270
0.75	16	04	31.9	47	32.68	33	208

ЛИТЕРАТУРА

Баженов Г. М. 1949. О некоторых приложениях матриц в небесной механике. Булл. ИТА, 4, 4 (57).
 Белькович И. В. 1936. Постоянные физической либрации Луны. Булл. АОЗ, 10.
 Белькович И. В. 1948. К вопросу о значениях моментов инерции Луны. Астр. ц., 81.
 Белькович И. В. 1949. Физическая либрация Луны. Изв. АОЗ, 24.
 Макверт С. Г. 1956. Решение систем нормальных уравнений при помощи матриц. Астр. ж., 33, 3.
 Нефедьев А. А. 1951. Физическая либрация Луны. Изв. АОЗ, 26.
 Хабидуллин Ш. Т. 1955. Об определении параметра f физической либрации Луны. Булл. ИТА, 4, 4 (77).
 Яковкин А. А. 1925. Современное состояние вопроса о физической либрации Луны. Изв. АОЗ, 11, 6, 4 (77).
 Яковкин А. А. 1939. Вращение и фигура Луны, ч. 1. Изв. АОЗ, 21.
 Яковкин А. А. 1945. Вращение и фигура Луны, ч. 2. Изв. АОЗ, 23.
 Яковкин А. А. 1954. Реальность свободной либрации Луны. Труды 10-й Всесоюзной астрометрической конференции. А.
 Яковкин А. А. 1957. Достоверность решения задачи о физической либрации Луны и выбор истинного решения. Астр. ц., 178.
 Banachiewicz T. 1927. La trigonométrie sphérique et les voies nouvelles dans l'astronomie mathématique. Cracow Reprint, 1.
 Banachiewicz T. 1938. Etudes d'analyse pratique. Cracow Reprint, 22.
 Brown E. F. 1919. Tables of the motion of the Moon. London.
 Hahn F. 1902. Selenographische Koordinaten, 1. Leipzig.
 Hahn F. 1920. Die Achsendrehung des Mondes. A. N., 211.
 Jeffreys H. 1957. The Moon's libration and Figure as derived from Hartwig's Dorpat heliometric observations. Acta Astr., Sér. 8, 4.
 Koziel K. 1949. The Moon's libration and Figure as derived from Hartwig's Dorpat heliometric observations. Acta Astr., Sér. 8, 4.
 Schrutka-Rechtenstamm G. 1956. Zur physischen Libration des Mondes. Mitt. der Sternwarte. Wien, 8. Transactions IAU, 1955, 8.

Поступило в Редакцию
5 апреля 1958 г.

БЮЛЛЕТЕНЬ ИНСТИТУТА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ АСТРОНОМИИ
Том VII, № 4 (87)

*Утверждено к печати
Институтом теоретической астрономии
Академии наук СССР*

Технический редактор *В. Т. Бочевар*
Корректор *Н. А. Браилова*

Сдано в набор 21/XI 1958 г. Подписано к печати
24/I 1959 г. РИСО АН СССР № 4⁶ 148. Формат
бум. 84 × 108/16. Бум. л. 2. Печ. л. 4 ш 6,56 усл. в. л.
Уч.-изд. л. 638. Издат. № 909. Тип. зак. № 870.
М-21814. Тираж 1000. Цена 4 р. 90 к.

Ленинградское отделение Издательства АН СССР
Ленинград, В-164, Менделеевская лин., д. 1
Г-я тип. Издательства Академии наук СССР
Ленинград, В-34, 9 лин., д. 12

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
В. Ф. Мячин. Об оценке погрешности численного интегрирования уравнений небесной механики	257
А. С. Сочилина. О накоплении ошибок при численном интегрировании в некоторых задачах небесной механики	281
В. Ф. Проскурин и Л. И. Румянцев. Временные захваты в задаче трех тел	287
М. В. Фридлянд. К вопросу об определении свободной либрации Луны в долготе	293

ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
262	8 сверху	$\ddot{x}^{(i)} = F^{(i)}(t, x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$	$\ddot{x}^{(i)} = F^{(i)}(t, x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$
273	15 сверху	$\gamma_i \equiv \frac{z \sqrt{B_k^{(i)}}}{ v_{k,r}^{(i)} }$	$\gamma_i \equiv \frac{z \sqrt{B_k^{(i)}}}{ v_{k,r}^{(i)} }$
279	11 сверху	$\dots + e^2 \sin knh \cos M_0 + M_k + \dots$	$\dots + e^2 \sin knh \cos (M_0 + M_k) + \dots$

Бюллетень ИТА, т. VII, № 4 (87)