

INFORMATION REPORT INFORMATION REPORT

CENTRAL INTELLIGENCE AGENCY

This material contains information affecting the National Defense of the United States within the meaning of the Espionage Laws, Title 18, U.S.C. Secs. 793 and 794, the transmission or revelation of which in any manner to an unauthorized person is prohibited by law.

PROCESSING COPY

50X1-HUM

C-O-N-F-I-D-E-N-T-I-A-L

COUNTRY	USSR	REPORT	
SUBJECT	Publications of the USSR Academy of Science	DATE DISTR.	16 July 1957
	re: 1. <i>Bulletin of the Institute of Theoretical Astronomy.</i>	NO. PAGES	1
	2. <i>Stratigraphic Significance of pollen of Gymnospermaeic Cenozoic deposits in the Pavlodarsk, Irtysh, and Aral regions.</i>	REQUIREMENT NO.	RD
DATE OF INFO.		REFERENCES	50X1-HUM
PLACE & DATE ACQ.			<i>Reel # 190</i>

SOURCE EVALUATIONS ARE DEFINITIVE. APPRAISAL OF CONTENT IS TENTATIVE.

unclassified Russian language 50X1-HUM

Soviet publications published in 1957 by the USSR Academy of Science :

1. Byulleten Instituta Teoreticheskoy Astronomii (Bulletin of the Institute of Theoretical Astronomy) Volume 6, Number 7, and Volume 6, Number 8.
2. Stratigraficheskoye Znachenie Pyl'tsy Golosemennykh Kaynozoyskikh Otlozheniy Pavlodarskogo Priirtyshya i Severnogo Priaralya (Stratigraphic Significance of Pollen of Gymnospermaeic Cenozoic Deposits in the Pavlodarsk Irtysh and the northern Aral regions) by E.D. Zaklinskaya. 50X1-HUM

STATE	<input checked="" type="checkbox"/> ARMY	<input checked="" type="checkbox"/> NAVY	<input checked="" type="checkbox"/> AIR	<input checked="" type="checkbox"/> FBI	AEC				
-------	--	--	---	---	-----	--	--	--	--

(Note: Washington distribution indicated by "X"; Field distribution by "#")

INFORMATION REPORT INFORMATION REPORT

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ  
РЕСПУБЛИК

БЮЛЛЕТЕНЬ ИНСТИТУТА  
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ АСТРОНОМИИ

Том VI, № 7 (80)

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР  
МОСКВА 1957 ЛЕНИНГРАД

Директор Института теоретической астрономии чл.-корр. АН СССР *М. Ф. Субботин*  
Ответственный редактор проф. *Г. А. Чеботарев*

# Бюллетень Института Теоретической Астрономии

Т. VI

1957

№ 7 (80)

## Малые планеты

(1955)

Н. С. Самойлова-Яхонтова

Результаты наблюдательной и эфемеридной работы по малым планетам и краткий обзор литературы за 1955 г.  
MINOR PLANETS 1955, by N. S. Samoilova-Yakhontova. — Summary on Minor Planets work during 1955.

В августе 1955 г. вышел из печати сборник эфемерид малых планет на 1956 г. (десятый год издания), составленный по образцу прошлых лет. В соответствии с пожеланиями, высказанными членами Комиссии № 20 на съезде Международного астрономического союза в Риме, и с решением комиссии Астросовета по терминологии названия малых планет в „Эфемеридах“ даны и впредь будут даваться в латинской транскрипции.

Планетным центром в Цинциннати выпущено в 1955 г. 159 планетных циркуляров от 1167 до 1326 номера (Minor Planet Circulars, 1955). В них опубликованы предварительные обозначения 27 планет, открытых в 1953 г.: 1953 CN, EM, FN<sub>1</sub>, JN, KB, OM, ON, TE<sub>3</sub>, TG<sub>3</sub>, VG<sub>3</sub>, VQ<sub>3</sub>, XB<sub>1</sub>, YD—YJ; обозначения 203 планет, открытых в 1954 г.: 1954 AK—AM, ET—EV, GK, HH, JP—JT, KK—KM, NQ—NS, OE, PE—PN, QK—QT, RO, RP, SB—SZ, SA<sub>1</sub>—SL<sub>1</sub>, TA—TQ, UA—UZ, UA<sub>1</sub>—UZ<sub>1</sub>, UA<sub>2</sub>—UY<sub>2</sub>, WA—WP, XB—XO, YA—YE и 257 планет, открытых до ноября 1955 г.: 1955 AA<sub>1</sub>, BA—BM, CA—CB, DA—DQ, EA—EP, GA—GB, HA—HO, KA—KC, MA—MP, NA, OA—OE, QA—QZ, QA<sub>1</sub>—QN<sub>1</sub>, RA—RZ, RA<sub>1</sub>—RF<sub>1</sub>, SA—SZ, SA<sub>1</sub>—SY<sub>1</sub>, TA—TQ, UA—UZ, UA<sub>1</sub>—UQ. В общей сложности в 1953 г. было открыто 503 планеты, а в 1954 г. — 379 планет.

Попрежнему очень мало планет, наблюдавшихся несколько раз. Так, в 1954 г. наблюдались:

311 планет один раз (82 %),

52 планеты два раза (14%),

16 планет не меньше трех раз (4%).

Только для четырех планет, открытых в 1954 г. (1954 AC, DE, ER, HC), и для трех, открытых в 1955 г. (1955 BG, FC, FG), удалось определить эллиптические элементы. Кроме того, определены 44 системы элементов, открытых ранее (в 1904—1953 гг.); из них 32 системы сотрудниками Астрономического вычислительного института в Гейдельберге (Nachrichtenblatt der Astronomischen Zentralstelle, 1955).

10 планет, список которых приведен в таблице, получили окончательные номера. Большой части этих планет оказалось возможным присвоить постоянные номера в результате отождествления различных объектов, наблюдавшихся в разные оппозиции, отделенные часто большими промежутками времени. Благодаря такому отождествлению удалось получить элементы, улучшенные по наблюдениям в нескольких оппозициях. Так, например, планета (1615) 1950 BW оказалась планетой, открытой еще в 1926 г. С. И. Белявским и получившей тогда обозначение 1926 TO; она была вторично открыта в 1948 г. и получила номер 1948 TG, и наконец, третий раз

в 1951 г., когда удалось определить ее эллиптические элементы, а затем отождествить с открытыми ранее планетками и произвести улучшение элементов. Планета (1610) 1928 RT была открыта П. Ф. Шайн. Ее удалось отождествить с планетой 1938 WN и определить элементы по двум оппозициям.

Список планет, получивших постоянные номера в 1955 г.

№ планеты	Предварительные обозначения	Кто открыл	Место наблюдения	Кто вычислил элементы	Где опубликованы элементы
1606	1950 RH	L. Boyer	Alger	S. Böhm	MPC 1186 87.
1607	1950 RA	E. Johnson	Johannesburg	P. Scanzio	MPC 1210.
1608	1951 RZ	C. Rogati	La Plata	P. Scanzio	MPC 1211.
1609	1951 NL	E. Johnson	Johannesburg	H. Hironaka, T. Takase	MPC 1227.
1610	1928 RT	П. Ф. Шайн	Симеиз	S. Böhm	MPC 1244.
1611	1950 DJ	K. Reinmuth	Heidelberg	S. Böhm	MPC 1247 48.
1612	1950 BJ	K. Reinmuth	Heidelberg	S. Böhm	MPC 1281.
1613	1950 SD	S. Arend	Uccle	S. Böhm	MPC 1281 82.
1614	1952 HA	A. Schmilt	Uccle	S. Böhm	MPC 1282.
1615	1950 BW	—	G. Link (Indiana Un.)	S. Böhm	MPC 1325.

(1606) 1950 RH — 1928 RL — 1937 TS — 1937 VO; (1609) 1951 NL — 1934 JB — 1947 WB впервые открыта в 1934 г. в Симеизе Г. Н. Неуйминым; (1610) 1928 RT — 1938 WN; (1612) 1950 BJ — 1939 CD; (1613) 1950 SD — 1929 CL — 1941 SK; (1614) 1952 HA — 1928 SA — 1931 EA; (1615) 1950 BW — 1926 TO — 1948 TG впервые открыта С. И. Белавским в Симеизе.

Продолжалась и даже несколько оживилась работа по улучшению элементов нумерованных планет. В 1955 г. опубликовано 49 систем новых элементов, из них 25 систем определены в СССР (Бартенева, 1955а, 1955б; Каулина, Синова и Диркикс, 1955; Ханнина и Бартенева, 1955; Шмакова, 1955). Часть этих элементов помещена в «Эфемериды на 1956 г.», часть войдет уже в «Эфемериды на 1957 г.».

В 1955 г. вновь наблюдалась планета 515 Athalia, которая была вторично открыта в 1953 г. после того, как в течение 50 лет она считалась утерянной. Ее элементы теперь улучшены П. Муном по наблюдениям в трех оппозициях и могут считаться вполне надежными (MPC, № 1283).

На старых планетках, полученных на обсерватории Макдональда в 1951 г. по плану Г. Кайпера обозрения астероидов, были обнаружены два новых троянца, получивших предварительные обозначения 1951XJ и 1951XK. Однако каждый из них наблюдался только по два раза, и потому могли быть определены только круговые орбиты.

Восьмь планет получили в истекшем году названия. Из них планеты 1379 Lomopolova, 1403 Idelsonia и 1484 Postema были открыты Г. Н. Неуйминым, дано получили постоянные номера, но до сих пор не имели названий (MPC, № 1252).

В 1955 г. начались систематические наблюдения ярких планет, избранных для определения постоянных каталога слабых звезд (Самойлова-Яковлева, 1955а). Наблюдения ведутся на обсерваториях Пулковской, Киевской (АН УССР), Ташкентской, Московскокой и на ряде зарубежных обсерваторий: обсерватории в Бугаресте, Копенгагене, Ла-Плата, Лейдене, Сант-Яго да Чиле, Сиднее. Весьма интенсивно ведется наблюдение планеты 51 Немуса. Долгосрочные точные эфемериды этой планеты регулярно публикует П. Наур (Naur, 1955).

На Иельской обсерватории проводится окончательная дискуссия наблюдений первых четырех планет. Проводятся измерения планеток и определение точных положений остальных 12-ти планет программы А. Брауера (Yale Observatory, 1955).

Продолжается также обработка программ Г. Кайпера (Yale Observatory, 1955). Макдональда по программе Г. Кайпера обозрения астероидов. Положения планет по этим снимкам определял при помощи сконструированной им машины Г. Ванбисбрёк, получивший 871 положение (Yerkes and McDonald Observatories, 1955).

В Ежегоднике Британской астрономической ассоциации на каждый год приводятся данные относительно покрытия звезд яркими малыми планетками (Taylor, 1955a). Была сделана попытка наблюдать покрытие (Nicholson a. Cragg, 1955): 22 декабря 1954 г. на обсерватории Паломар были сделаны с помощью 100-дюймового рефлектора два снимка Весты около предсказанного момента покрытия. Однако покрытие не произошло: Веста прошла на 1,8 севернее звезды BD + 19°945. Покрытие могло быть видимо в юго-западной Канаде. На 1956 г. предсказано только одно покрытие звезд Вестой, видимое в Антарктике, 28 июня 1955 г. Паллада пройдет перед туманностью M15 в Персеусе (Taylor, 1955a).

Г. Тейлор, занимающийся предвычислениями покрытий звезд малыми планетками, опубликовал описание применяемого им полуграфического метода предвычисления покрытий (Taylor, 1955b).

Теоретических работ по малым планеткам в истекшем году вышло очень мало. Г. М. Баженов (1955) исследовал разложение в тригонометрические ряды выражений вида  $(1 - 2b \cos z + b^2)^{-1/2}$ , в которых  $b$  — четное число, и установил достаточно тесные границы для коэффициентов этих разложений, вывел приближенные выражения для коэффициентов Лапласа  $b_n^2$ , причем для оценки абсолютной погрешности коэффициентов, вычисленных по этим формулам, даны простые графики. Ему удалось установить границы для максимальных значений остаточных членов разложений. Для оценки остаточного члена разложения при различных  $b$  также предложены графики, с помощью которых можно решить и обратный вопрос: сколькими членами нужно ограничиться, чтобы максимальная величина остаточного члена не превосходила допустимой ошибки. Полученные результаты применены для разложения в ряд величин, обратной кубу расстояния между планетками, и иллюстрируются на примере малой планеты 244 Сита.

Г. А. Чеботарев и А. И. Божкова с помощью методики, разработанной одним из авторов (Чеботарев Г. А. Була. ИТА, 4, 10, 1951), построили приближенную теорию движения малых планет троянской группы (Чеботарев, Божкова, 1955). Численным методом построено периодическое решение Лагранжа в ограниченной эллиптической задаче трех тел и составлены аналитические выражения для возмущений элементов в окрестности этого периодического решения. Методика применена к планете 588 Ахиллес.

В самом конце 1954 г. появилась работа Е. Рабе (Rabe, 1954), посвященная вопросу происхождения троянцев. Несколько лет тому назад Г. Кайпер (G. Kuiper) высказал гипотезу, что троянцы — бывшие спутники Юпитера, выброшенные из системы Юпитера вследствие уменьшения его первоначальной массы. Для проверки этой гипотезы и приближенной оценки возможной массы протопланеты Е. Рабе рассматривает плоскую круговую ограниченную задачу трех тел, считая массу Юпитера переменной. С уменьшением массы Юпитера постоянная Якоби  $C(t)$  непрерывно уменьшается, так же как и скорость тела малой массы  $V$ . Если тело малой массы вначале двигалось на небольшом расстоянии от Юпитера, то уменьшение  $V$  вызывает расширение его орбиты, т. е. удаление от Юпитера, а одновременное уменьшение  $C$  вызывает стремление тела к одному из центров либрации  $L_4$  или  $L_5$  — точкам абсолютного минимума  $C$ , т. е. происходит превращение спутника в троянца. Не исключена возможность возникновения при некоторых специальных начальных условиях также орбит, подобных орбите Гидальго. Воспользовавшись даже численными результатами Тюринга, полученными в его приближенной теории троянцев, Е. Рабе подсчитал, что масса протопланеты должна была быть приблизительно в 20 раз больше современной массы Юпитера, чтобы при ее уменьшении до нынешнего состояния спутник мог превратиться в троянца.

Ш. Кайат (Cailliate, 1955a, 1955b, 1955c) продолжал работать над построением приближенной аналитической теории планеты 335 Роберта, суточное движение которой близко к соосеренности 1:3. Сравнение с наблюдениями в 4 оппозициях 1947—1953 гг. показало, что наблюдения представляются с ошибками до 121 по прямому восхождению. Автор выдвинул гипотезу, что причиной таких расхождений может быть слаб-

жение двух астероидов (Cailliate, 1955d) и исследовал обстоятельства сближения астероидов, принимая, что массы их порядка  $10^{22}$  г. Показано, что под тесным сближением следует понимать приближение астероидов на расстояние  $r \leq 10^4$  а. е. Получено выражение для возмущений координат и скоростей астероида, испытывающего тесное сближение. Однако влияние сближения оказалось совершенно ничтожным, и во всяком случае объяснить наблюдаемые расхождения теории с наблюдениями этим невозможно. Добавление в разложениях пертурбационной функции долгопериодических членов порядка 4-ой степени эксцентриситета несколько уменьшило невязки.

Фотометрические наблюдения малых планет продолжались на 82-дюймовом рефлекторе обсерватории Макдональда. На Морской обсерватории в Вашингтоне производились исследования полярности Цереры, Паллады и Ириды (Provin, 1955).

На обсерватории Киевского университета закончена работа по определению показателя цвета 56 астероидов (Салдакова, 1955). Фотографирование производилось одновременно двумя камерами с объективами  $f = 17$  ( $D = 10$  см,  $F = 50$  см) без фильтров и с желтым фильтром, установленным перед объективом. Звездные величины приводились к международной системе. Всего произведено 172 наблюдения. Показатели цвета, определенные в среднем с ошибкой  $\pm 0.05$  имеют большую дисперсию; они лежат в пределах от  $0.36$  до  $1.54$ , среднее значение равно  $0.730$ . Короткопериодические колебания блеска планет не связаны с изменениями цвета. Это говорит в пользу того, что колебания блеска обуславливаются неправильностями формы астероидов, а не их пылинностью. Для 11 малых планет определены коэффициенты фаз в фотографических и визуальных лучах. Для трех планет — 9, 27 и 115 — коэффициенты фаз в фотографических лучах значительно больше, чем в визуальных; для остальных — различие в пределах ошибок наблюдений. Присоединение к киевским наблюдениям приведенных в ту же систему наблюдений других авторов — Финера, Рехта, Райеса позволило сделать несколько общих выводов: 1) показатели цвета не обнаруживают явной зависимости от элементов орбиты  $a$ ,  $i$  и  $q$ ; 2) существует связь между показателями цвета и размерами планеты — чем меньше планета, тем она краснее.

## ЛИТЕРАТУРА

- Баженов Г. М. 1955. Исследование разложений в тригонометрические ряды выражений вида  $(1 - 2k \cos \alpha + k^2)^{-1}$ , в которых  $k$  — целое число. Бюлл. ИТА, 6, 174.  
 Бартечева О. Н. 1955а. Новые элементы планеты 7 Ириды. Астр. ц. АН СССР, 163.  
 Бартечева О. Н. 1955б. Новые элементы малой планеты 260 Губерта. Бюлл. ИТА, 6, 2175.  
 Божан Н. А. 1955. Интегрирование трансферной функции малых планет на стено-электронных машинах. Бюлл. ИТА, 6, 3176.  
 Бугославская Е. Я., Т. П. Пережогина. 1955а. Фотографические наблюдения яриды малых планет. Астр. ц. АН СССР, 159.  
 Бугославская Е. Я., Т. П. Пережогина. 1955б. Фотографические наблюдения малых планет на 380 мм астрографе Московской обсерватории. Астр. ц. АН СССР, 159.  
 Булдогов Ф. Ф. 1955. Точные положения малых планет по фотографическим наблюдениям в Пулков. Изв. ГАО, 20, 1.  
 Гаврилов И. В., И. Г. Жданова, А. Б. Остигина, А. П. Сидорова. 1955. Точные положения малых планет Цереры, Губерта, Астории, Немозуса. Астр. ц. АН СССР, 158.  
 Гамадья Н. В. 1955. Точные положения малых планет Цереры, Юноны и Астории по фотографическим наблюдениям. Изв. ГАО, 20, 1.  
 Дубинко А. Е. 1955. О зависимости зависимости при обработке астрофотографий. Астр. ц. АН СССР, 162.  
 Кузнецов З. В., С. С. Прокоп, М. Дирякин. 1955. Элементы орбит и эфемерид малых планет. Астр. ц. АН СССР, 156.  
 Корсагина Э. В. 1955. Наблюдения малых планет на Горной обсерватории Астрофизического инст. АН Казахской ССР. Астр. ц. АН СССР, 164.  
 Кошкин Е. К., Ю. С. Подрядчик. 1955. Наблюдения малых планет на Вильямсовской астрономической обсерватории В. Г. У. Астр. ц. АН СССР, 156.  
 Раудсаар Х. К. Наблюдения малых планет на Тартуской астрономической обсерватории Академии наук Эст. ССР. Астр. ц. АН СССР, 163.  
 Самойлова-Яковлева Н. С. 1955а. Наблюдения малых планет для определения постоянных каталога слабых звезд. Тр. 11-й астр. конф. СССР, А., 1955, 78.  
 Самойлова-Яковлева Н. С. 1955б. Обзор работ по малым планетам за 1953 г. Бюлл. ИТА, 6, 1174.

- Самойлова-Яковлева Н. С. 1955а. Малые планеты 1954 г. Бюлл. ИТА, 6, 3176.  
 Салдакова Е. В. 1955. О показателях цвета малых планет. Астр. ц. АН СССР, 163.  
 Скляр Ю. А. 1955. Наблюдения малых планет на астрономической обсерватории СГУ им. Н. Г. Чернышевского в 1954 г. Астр. ц. АН СССР, 160.  
 Ханина Ф. Б. 1955. Формулы и таблицы для интерполирования оскобых координат и вычисления компонент скорости. Бюлл. ИТА, 6, 2175.  
 Ханина Ф. Б. и О. Н. Бартечева. 1955. Исправление орбит 16 малых планет. Бюлл. ИТА, 6, 2175.  
 Хо Тьен-киен и Лю Пяо-лин. 1955. Новые элементы планеты 497 Ива. Астр. ц. АН СССР, 157.  
 Чеботарев Г. А. и А. И. Божкова. 1955. Теория движения малых планет трассской группы. Бюлл. ИТА, 6, 1177.  
 Чжан Юн-чжэ. 1955а. Улучшенная орбита планеты 415 Палатта. Астр. ц. АН СССР, 157.  
 Чжан Юн-чжэ. 1955б. Новая малая планета P01. Астр. ц. АН СССР, 163.  
 Школов М. Я. 1955. Ассоциативное возмущение и новые элементы планет 386, 417, 430 и 735. Бюлл. ИТА, 6, 1174.  
 Эфемериды малых планет на 1956 г. 1955. Изд. АН СССР, А.  
 Cailliate Ch. 1955a. Theorie des asteroïdes caracteristiques (III). Application à une comensurableité d'ordre deux. Etude de (335) Roberta. J. O., 38, 4.  
 Cailliate Ch. 1955b. Ephemeride de l'asteroïde (377) Campanula. J. O., 38, 4.  
 Cailliate Ch. 1955c. Complément à l'étude de (335) Roberta. J. O., 38, 11.  
 Cailliate Ch. 1955d. Sur la possibilité de perturbations mutuelles entre deux asteroïdes. J. O., 38, 11.  
 Chang Y. C., et al. 1955. Photographic observations of the Positions of Minor Planets at the Purple Mountain Observatory (1954). Acta Astr. Sinica, 3, 1.  
 Chang Y. C., et al. 1955a. A new asteroid observed at the Purple Mountain Observatory. Acta Astr. Sinica, 3, 1.  
 Chang Y. C., et al. 1955b. The improved orbit and the opposition ephemeris for 1956 of the new asteroid 1011. Acta Astr. Sinica, 3, 2.  
 Gonzalez-Aboin J. M. 1955. Nueva orbita del asteroïde 1572 Horemann. Rev. geofis., 14, 54.  
 Hirose H., K. Teraoka. 1955. Photographic Observations made with the Iwasaki Astrogaph. (31). Tokyo Astr. Bull. Ser., No. 75.  
 Ho Tien-chen, et al. 1955. The improved Orbit of the Minor Planet (497) Iva. Acta Astr. Sinica, 3, 1.  
 Kikuchi E. E. 1955. Verlesserte Bahnelemente für den Kleinen Planeten (1221) Amor. A. N., 282, 2.  
 Lüde H. von. 1955. Über einen speziellen Fall des Dreikörperproblems. A. N., 282, 1.  
 Matsch W. 1955. Beobachtungen von Planetoiden und Kometen 1954. A. N., 282, 5.  
 Minor Planet Circulars. 1955. NX 1167—1329.  
 Nachrichtenblatt d. Astr. Zentralstelle 1955. Jahrg. 9, NN 10—11.  
 Nakano S., H. Yasuda, et al. 1955. Meridian Observations of the Right Ascension of Minor Planets during the Year 1954. Tokyo Astr. Bull. Ser. Series, No. 73.  
 Nam P. 1955. Asteroïde 51 Nemausa. U. A. I. Circolo, 1522.  
 Nicholson, S. B., et al. 1955. Position of Vesta. Publ. A. S. P., 67, N 395.  
 Patrubek A., et al. 1955. Observations of Minor Planets at Skalatic Pisek II. Bull. Astr. Inst. Czechoslovakia, 6, 5.  
 Pascual M. de. 1955. Rectificación de la orbita del asteroïde 1547 (1929 CZ). Rev. geofis., 14, 54.  
 Pelt G. 1955. Photographic Position of Minor Planets and of comet 1955a observed in 1952 and 1953. Bull. Astr. Inst. Netherlands, 12, 460.  
 Provin S. S. 1955. Preliminary Observations of the Polarization of Asteroids (abstract). Publ. A. S. P., 67, N 395.  
 Purgathofer A. 1955. 165 Positionen des Kleinen Planeten 51 Nemausa. Mitteilungen d. Universitäts-Sternw. Wien, 7, 17.  
 Raabe F. 1954. The Triangulation of Escaped Satellites of Jupiter. A. J., 59, N 11.  
 Schubert J. 1955. Verbesserung der Bahn des kleinen Planeten 1453 Fennia. A. N., 282, 5.  
 Taylor G. E. 1955a. Occultations of stars by Minor Planets. Handbook B. Astr. Ass. 1956.  
 Taylor G. E. 1955b. The Prediction of Occultations of Stars by Minor Planets. Journ. B. Astr. Ass., 65, 2.  
 Wan Lai, Chow Tsou-Gui, et al. 1955. Photographic observations of the Positions of Minor Planets at the Z6-S6 Observatory (1954). Acta Astr. Sinica, 3, 1.  
 Wan Lai, Chow Tsou-Gui, et al. 1955. Photographic observations of the Positions of Minor Planets at the Z6-S6 Observatory Acta Astr. Sinica, 3, 2.  
 Wilson R., Jr. 1955. Convenient procedure for computing preliminary planetary ephemerides. Publ. A. S. P., 67, N 395.  
 Yale Observatory Report 1955. A. J., 60, 1231.  
 Verkes and McDonald Observatories Report 1955. A. J., 60, 2.

Получено в Редакцию  
24 апреля 1956 г.

**Разложение пертурбационной функции в ряд Фурье относительно наклонности**

**Часть III. Разложение пертурбационной функции в ряд по степеням приращения эксцентриситета**

*Н. Б. Еленевская*

В настоящей III части работы получены разложения пертурбационной функции в ограничено-круговой задаче трех тел, приходящие и в тех случаях, когда обычные разложения по степеням эксцентриситетов перестают сходиться. Для получения этих разложений использован обычный метод аналитического продолжения. Разложения ведутся по степеням разности  $e - e_0$ , где  $e_0$  — некоторое начальное значение эксцентриситета.

ENTWICKLUNG DER STÖRUNGSFUNKTION IN EINE FOURIER-REIHE BEZÜGLICH DER NEIGUNG. III TEIL. ENTWICKLUNG DER STÖRUNGSFUNKTION IN EINE REIHE NACH DEN POTENZEN DES EXZENTRIZITÄTSZUWACHSES, von N. B. Jelenewskaja. — Im gegenwärtigen III Teil der vorliegenden Abhandlung werden die Entwicklungen der Störungsfunktion im kreisförmigen eingeschobenen Dreikörperproblem erhalten, die auch in Fällen, wo gewöhnliche Entwicklungen nach den Potenzen der Exzentrizitäten nicht konvergieren, brauchbar sind. Bei der Ausführung dieser Entwicklungen wurde übliche Methode der analytischen Fortsetzung benutzt. Die Entwicklungen sind nach den Potenzen der Differenz ( $e - e_0$ ) dargestellt, wo  $e_0$  einen Anfangswert der Exzentrizität bedeutet.

**Введение**

Во II части данной работы нами были получены некоторые разложения пертурбационной функции в кратные ряды. Основным отличием этих разложений от всех опубликованных до сих пор разложений пертурбационной функции является то, что по всем угловым элементам, в частности и по наклонности, пертурбационная функция разлагается нами в тригонометрический ряд. Коэффициентами этого ряда являются некоторые функции эксцентриситета  $e$ .

Для фактического пользования этими рядами, например при интегрировании уравнений Лагранжа, упомянутые функции эксцентриситета в свою очередь должны быть разложены в ряд по степеням  $e$ . Такие разложения также были выполнены во II части настоящей работы.

После перегруппировки членов наших рядов преобразуются в степенные ряды по эксцентриситету  $e$  и отношению полуосей  $a$ , коэффициентами при которых в нашем случае будут тригонометрические полиномы по кратным всех угловым элементам; взаимной наклонности орбит  $i$ , разности долгот возмущающей точки и долготы узла возмущаемой точки  $\Omega = I_1 - \Omega$ , расстояния перигелия оскулирующей орбиты от узла  $\omega$  и эксцентрисической или средней аномалии возмущаемой точки.

Такая перегруппировка членов является возможной, разумеется, только в области абсолютной сходимости упомянутых разложений по степеням эксцентриситета, т. е. при  $e$  меньше предела Адамса ( $e < 0.6627...$ ). Для больших значений эксцентриситета, равно как и для значений эксцентриситета больших единицы, разложение в степенной ряд по эксцентриситету является невозможным.

В этой части работы мы попытаемся дать более общие разложения, годные для любых  $e$  (как больших, так и меньших единицы). Для этого мы будем пользоваться

не рядами Маклорена по степеням  $e$ , а более общими рядами Тейлора по степеням приращения эксцентриситета  $(e - e_0)$ , где  $e_0$  некоторое фиксированное значение эксцентриситета, которое мы будем считать в окончательном разложении вещественным и положительным, а в промежуточных преобразованиях, вообще говоря, комплексным аргументом.

О геометрическом значении  $e_0$  будет подробнее сказано в § 4. Полученные таким образом ряды для любого  $e$ , отличного от единицы, будут иметь конечный, отличный от нуля радиус сходимости. Этот радиус будет убывать от 0.6627... до нуля, когда  $e_0$  изменится от нуля до единицы, и возрастать от нуля до бесконечности, когда  $e_0$  изменится от единицы до бесконечности.

**§ 1. Предварительный анализ. Разложение обратной величины радиуса-вектора в ряд Лорана по степеням  $z = z_1 + iz_2$  для случая  $e$  больше единицы**

Во II части работы мы рассмотрели разложение функции

$$\frac{1}{(1 - \epsilon \cos y)^2} \quad (3.1)$$

в ряд Фурье. Коэффициенты этого разложения мы определяли как некоторые специальные функции:

$$J_n^*(z, \epsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos ny}{1 - \epsilon \cos y} dy. \quad (3.2)$$

В предварительном анализе, во II части, мы рассматривали эти функции при целых  $n$  и  $\epsilon$  в диапазоне параметра  $\epsilon$  по модулю меньшего единицы. В этой части мы рассмотрим разложение функции (3.1) для случая  $\epsilon > 1$ .<sup>9</sup> Величину  $y$  мы будем рассматривать, как и прежде, комплексной, а затем подробнее остановимся на случае, когда  $y$  чисто мнимая величина. Этот последний случай имеет для нас практическую важность, так как он имеет место при движении точки по гиперболе. Если  $\epsilon > 1$ , то мы не можем пользоваться разложением функции (3.1) в ряд Фурье, так как при  $y$  действительном эта функция обращается в бесконечность при  $\cos y = \frac{1}{\epsilon}$ , а при  $y$  чисто мнимым функция (3.1) не является периодической.

Попытаемся разложить эту функцию в ряд Лорана по степеням величин  $z = z_1 + iz_2$ , где  $i = \sqrt{-1}$ , а  $z$  — основание натуральных логарифмов.

Пусть  $y = E$ , где  $E$  — эксцентрисическая аномалия, а  $\epsilon = e$ ,  $e$  — эксцентриситет кеплерова движения. Будем считать  $E$  и  $e$  комплексными:

$$E = x + iy, \quad e = \zeta + i\eta. \quad (3.3)$$

Введен угол эксцентриситета  $\varphi$  и его вещественную и мнимую части  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  формулой:

$$e = \sin \varphi = \sin(\varphi_1 + i\varphi_2) = \sin \varphi_1 \operatorname{ch} \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \operatorname{sh} \varphi_2. \quad (3.4)$$

Отсюда видно, что при  $\varphi_2 = 0$   $e = \sin \varphi_1$ ,  $e < 1$ , при  $\varphi_1 = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 = 0, \quad e = i \operatorname{sh} \varphi_2 \\ \varphi_1 = \pi, \quad e = -i \operatorname{sh} \varphi_2 \end{aligned} \right\} 0 \leq e < \infty,$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \quad e = \operatorname{ch} \varphi_2 \\ \varphi_1 = \frac{3\pi}{2}, \quad e = -\operatorname{ch} \varphi_2 \end{aligned} \right\} |e| < 1. \quad (3.5)$$

<sup>9</sup> Более общий случай, когда  $-\infty < \epsilon < +\infty$ , рассмотрен в работе (Еленевская, 1949).

Заменим в формуле (3.1) тригонометрические функции через показательные и сделаем замену переменного, положив  $z = e^{i\theta}$ . Тогда будет:

$$\frac{1}{(1 - e \cos \theta)^2} = \frac{(-1)^2 z^2}{e^2 \left[ z^2 - \frac{2}{e} z + 1 \right]^2} \quad (3.6)$$

Положим

$$\frac{1}{2} \theta = \theta_1 + i \frac{\theta_2}{2} = \psi \quad (3.7)$$

После элементарных преобразований находим:

$$\psi = \frac{\sin \theta_1 + i \operatorname{sh} \frac{\theta_2}{2}}{\cos \theta_1 + \operatorname{ch} \frac{\theta_2}{2}}, \quad \frac{1}{2} = \frac{\sin \theta_1 - i \operatorname{sh} \frac{\theta_2}{2}}{\cos \theta_1 - \operatorname{ch} \frac{\theta_2}{2}} \quad (3.8)$$

Тогда равенство (3.6) можно будет переписать в виде:

$$\frac{1}{(1 - e \cos \theta)^2} = \frac{(-1)^2 z^2}{e^2 \left[ z^2 - \frac{2}{e} z + 1 \right]^2} \quad (3.9)$$

Найдем особые точки этой функции. Приравняв нулю знаменатель, находим его корни:

$$z_1 = \frac{1}{e}, \quad z_2 = \frac{1}{e}$$

Перепишем формулу (3.9) в виде:

$$\frac{1}{(1 - e \cos \theta)^2} = \frac{(-1)^2 z^2}{e^2 (z - \frac{1}{e})^2} \quad (3.10)$$

Преобразование  $z^{1/2} = e^{i\theta/2} = z$ , как известно, переводит отрезок действительной оси  $0 \leq x \leq 2\pi$  в окружность с центром в точке  $z = 0$  и радиусом  $r = 1$ .

Пологая  $z_1 = \frac{1}{e}$  и  $z_2 = \frac{1}{e}$ , получим:

$$z_1 = e^{i\theta} z^{1/2} = e^{i\theta} (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) = \frac{\sin \theta_1 + i \operatorname{sh} \frac{\theta_2}{2}}{\cos \theta_1 + \operatorname{ch} \frac{\theta_2}{2}} \quad (3.11)$$

или, разделяя действительную и мнимую части,

$$e^{i\theta} \cos \theta_1 = \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1 + \operatorname{ch} \frac{\theta_2}{2}}, \quad e^{i\theta} \sin \theta_1 = \frac{\operatorname{sh} \frac{\theta_2}{2}}{\cos \theta_1 + \operatorname{ch} \frac{\theta_2}{2}} \quad (3.12)$$

Аналогично, полагая  $z_2 = \frac{1}{e}$ , получим

$$e^{i\theta} \cos \theta_2 = \frac{\sin \theta_2}{\cos \theta_2 - \operatorname{ch} \frac{\theta_2}{2}}, \quad e^{i\theta} \sin \theta_2 = \frac{-\operatorname{sh} \frac{\theta_2}{2}}{\cos \theta_2 - \operatorname{ch} \frac{\theta_2}{2}} \quad (3.13)$$

Отсюда получаем координаты особых точек:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta_1 &= \frac{\operatorname{sh} \frac{\theta_2}{2}}{\sin \theta_1}, & e^{i\theta_1} &= \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_1 + \operatorname{sh}^2 \frac{\theta_2}{2}}}{\cos \theta_1 + \operatorname{ch} \frac{\theta_2}{2}}, \\ \operatorname{tg} \theta_2 &= -\frac{\operatorname{sh} \frac{\theta_2}{2}}{\sin \theta_2}, & e^{i\theta_2} &= \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_2 + \operatorname{sh}^2 \frac{\theta_2}{2}}}{\cos \theta_2 - \operatorname{ch} \frac{\theta_2}{2}}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Пологая теперь эксцентриситет  $e$  действительным, будем иметь:

а) для  $|e| < 1$  особые точки (рис. 1) определяются по (3.15), поскольку  $x_1 = x_2 = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{e}, & x_2 &= \frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{e}, \\ y_1 &= -y_2 = \ln \frac{e}{1 - \sqrt{1 - e^2}}; \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

б) для  $|e| > 1$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \theta_1 &= \operatorname{sh} \theta_2 = \sqrt{e^2 - 1}, & \operatorname{tg} \theta_2 &= -\operatorname{sh} \theta_2 = -\sqrt{e^2 - 1}, \\ e^{i\theta_1} &= e^{i\theta_2} = \frac{\operatorname{ch} \theta_2}{\operatorname{ch} \theta_2} = 1, & y_1 &= y_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

(как указывалось, в этом случае  $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$  или  $\theta_2 = \frac{3\pi}{2}$ )

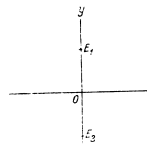


Рис. 1.

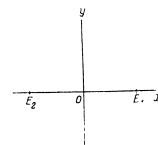


Рис. 2.

или

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= e^{i\theta} = e^{i \operatorname{arctg} \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{e}} = \frac{1 + i\sqrt{1 - e^2}}{e}, \\ z_2 &= e^{i\theta} = e^{-i \operatorname{arctg} \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{e}} = \frac{1 - i\sqrt{1 - e^2}}{e}. \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Особые точки будут расположены на оси  $x$  симметрично относительно начала координат (рис. 2).

Если рассматривать расположение особых точек в плоскости  $z = u + iv$ , то будем иметь следующие:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) Для } |e| < 1 \\ z &= re^{i\theta} = e^{i\theta} e^{\theta} = u + iv, \\ v_1 &= v_2 = 0, & x &= \varphi = \operatorname{arctg} \frac{v}{u}, \\ r_1 &= \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{e}, & r_2 &= \frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{e}. \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

При  $e \rightarrow 0$ ,  $r_1 \rightarrow 0$ ,  $r_2 \rightarrow \infty$ ;

при  $e \rightarrow 1$ ,  $r_1 \rightarrow r_2 \rightarrow 1$ .

В плоскости  $z$  получим следующую картину (рис. 3), т. е. для  $|e| < 1$  и  $\frac{1}{e}$  всегда действительным и расположены на оси  $u$  на расстоянии  $\frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{e}$  и  $\frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{e}$ .

В кольце  $\frac{1}{e} < r < \frac{1}{e}$  функция  $\frac{1}{(1 - e \cos \theta)^2}$  аналитическая и может быть разложена в ряд Лорана по степеням  $z$ . При  $e = 0$  внутренняя окружность  $z = \frac{1}{e}$  стягивается



в точку, а внешняя  $z = \frac{1}{\epsilon}$  уходит в бесконечность и ряд сходится во всей плоскости. При  $\epsilon = 1$  обе особые точки попадают на окружность единичного радиуса.  
 б) Посмотрим, как будут расположены особые точки в случае  $|\epsilon| > 1$ .  
 В этом случае

$$\left. \begin{aligned} z_1 = e^{i\beta} = \frac{1 + i\sqrt{\epsilon^2 - 1}}{\epsilon}, \quad z_2 = e^{-i\beta} = \frac{1 - i\sqrt{\epsilon^2 - 1}}{\epsilon}, \\ z_1 = x_1 = \arctg \sqrt{\epsilon^2 - 1}, \quad z_2 = x_2 = -\arctg \sqrt{\epsilon^2 - 1}, \\ r_1 = r_2 = 1. \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Лорановское кольцо стягивается в линию, как показано на рис. 4. Разложение в ряд Лорана оказывается невозможным: в этом случае мы будем иметь два различных разложения. Внутри окружности единичного радиуса функция

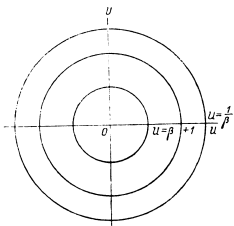


Рис. 3.

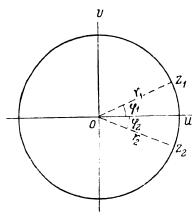


Рис. 4.

$$\frac{1}{(1 - \epsilon \cos E)^2} = \frac{(-1)^{2n}}{\epsilon^{2n}} \cdot \frac{z^{2n}}{(z^2 - \frac{2}{\epsilon}z + 1)^2} \quad (3.20)$$

может быть разложена в сходящийся ряд Маклорена по положительным степеням  $z$ , а вне этой окружности эта же функция разлагается в сходящийся ряд по отрицательным степеням  $z$ . В этом случае, т. е. когда  $\epsilon$  действительно и по модулю больше единицы, функция  $\frac{1}{1 - \epsilon \cos E}$  будет непрерывной для любого  $x, y \neq 0$  ( $z = u + iy = e^{i\beta} = \epsilon e^{i\alpha}$ ), причем  $r = \frac{1}{\epsilon}$ , где  $r$  — радиус-вектор, и  $a$  — большая полуось орбиты возмущенного тела. Для  $E$  действительного функция  $\frac{1}{1 - \epsilon \cos E}$  имеет разрыв непрерывности в точке  $E = \arccos \frac{1}{\epsilon}$ .

Рассмотрим случай, когда  $\frac{1}{\epsilon}$  действительно. В этом случае (при действительном  $\epsilon > 1$ )  $\frac{1}{1 - \epsilon \cos E}$  будет непрерывной функцией, когда  $\cos E$  действителен и больше единицы. Пусть  $E$  комплексное:  $E = x + iy$ ; тогда

$$\cos E = \cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y.$$

Следовательно,  $\sin x \operatorname{sh} y = 0$ .  
 Когда  $\operatorname{sh} y = 0$ ,  $\cos E = \cos x \leq 1$ . Этот случай мы сейчас не рассматриваем.  
 Когда  $\sin x = 0$ ,  $\cos E = \operatorname{ch} y \geq 1$ . В этом случае  $x = k\pi$ ,  $E = k\pi + iy$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  т. е.  $E$  будет бесконечнозначной функцией  $x$ .

Однако в функцию  $\frac{1}{1 - \epsilon \cos E}$  она входит только под знаком косинуса, поэтому  $\frac{1}{1 - \epsilon \cos E}$  определяется однозначно. Следовательно, мы, не нарушая общности, можем положить  $E = iu$ , считая  $u$  действительным. В этом случае формула (3.6) примет вид:

$$f(u) = \frac{1}{(1 - \epsilon \operatorname{ch} u)^2} = \frac{(-1)^{2n}}{\epsilon^{2n}} \cdot \frac{z^{2n}}{(z^2 - \frac{2}{\epsilon}z + 1)^2}, \quad z = e^u. \quad (3.21)$$

Внутри окружности единичного радиуса, т. е. для  $z < 1$ , искомое разложение будет иметь вид:

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n (\operatorname{ch} nu + \operatorname{sh} nu). \quad (3.22)$$

Вне окружности, т. е. для  $z > 1$ , получим разложение

$$f(u) = \frac{1}{(1 - \epsilon \operatorname{ch} u)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n (\operatorname{ch} nu - \operatorname{sh} nu). \quad (3.23)$$

Однако оба эти ряда можно объединить в один, если заметить, что когда  $z$  меняется от нуля до единицы, то  $u$  пробегает все значения от минус бесконечности до нуля; когда же  $z$  растет от единицы до бесконечности,  $u$  меняется от нуля до плюс бесконечности. Замечая также, что  $f(u)$  четная функция аргумента  $u$ , получим:

$$f(-u) = f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n (\operatorname{ch} nu - \operatorname{sh} nu). \quad (3.24)$$

При этом в формуле (3.24) всегда берется положительное значение  $u$ . Ряд (3.24) будет сходиться для всех положительных значений  $u$ , кроме  $u = 0$ . Однако для случая  $u = 0$ ,  $f(u)$  обращается в  $\frac{1}{(1 - \epsilon)^2}$ . Таким образом,  $f(u)$  будет определено для любого  $u$  в интервале  $0 \leq u < \infty$ .

### § 2. Предварительный анализ. Коэффициенты разложения

Как показано в предыдущем параграфе, коэффициенты разложения (3.22) будут тождественны соответствующим коэффициентам разложения (3.23)  $P_n = Q_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(z, c) dz$ . Следовательно, мы можем вычислить либо коэффициенты  $P_n$ , как коэффициенты ряда Маклорена по формуле:

$$P_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{(z - \frac{1}{\epsilon})^2 z^{n+1}}, \quad (3.25)$$

либо коэффициенты  $Q_n$ , как коэффициенты ряда Лорана:

$$Q_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z^{n+1} dz}{(z - \frac{1}{\epsilon})^2 (z - \frac{1}{\epsilon})^2}. \quad (3.26)$$

В первом случае коэффициент  $P_n$  будет равен вычету подынтегральной функции относительно точки  $z=0$  (полюс порядка  $n-z+1$ ), интегрирование ведется по замкнутому контуру, заключенному внутри окружности единичного радиуса. Во втором случае  $Q_n$  равняется сумме вычетов относительно особых точек  $z=\zeta$  и  $z=\frac{1}{\zeta}$  (полюса порядка 2). За контур интегрирования может быть принят любой замкнутый контур, заключающий внутри себя точки  $z=\zeta$  и  $z=\frac{1}{\zeta}$ . Первый способ, естественно, будет проще, однако второй способ представляет интерес как распространение теории функций  $J_n^*(z, e)$  на случай  $e$  большего единицы. Поэтому рассмотрим его отдельно.

Положим

$$J_n(z, e) = \frac{(-1)^{2n}}{2\pi i e^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}} z} \int_{\gamma} \frac{z^{n+1}}{(z-\zeta)^2(z-\frac{1}{\zeta})^2} dz = \frac{(-1)^{2n}}{e^{\frac{1}{2}}} (c_{-1} + c_{-2}), \quad (3.27)$$

где  $c_{-1}$  и  $c_{-2}$  соответствующие вычеты подынтегральной функции относительно точек  $z=\zeta$  и  $z=\frac{1}{\zeta}$ .

Коэффициенты разложения функции

$$\frac{1}{(1-e \cos E)z} = \frac{(-1)^{2n}}{e^{\frac{1}{2}}} \frac{z^n}{(z^2-1+\frac{2}{e})z+1}$$

по степеням  $z$  будут иметь различные аналитические выражения для  $e < 1$  и  $e > 1$ . Это обычное явление в случае, когда дробное кольцо стягивается в линию.

В общем случае, т. е. когда  $e$  комплексное, коэффициенты этого разложения будут даваться формулой:

$$J_n(z, e) = \frac{(-1)^{2n}}{e^{\frac{1}{2}} z} \int_{\gamma} \frac{z^{n+1}}{(z-\zeta)^2(z-\frac{1}{\zeta})^2} dz = J_n(z, e) + J_n^*(z, e), \quad (3.28)$$

где

$$J_n^*(z, e) = \frac{(-1)^{2n}}{e^{\frac{1}{2}}} C_{-1} \quad \text{и} \quad J_n^*(z, e) = \frac{(-1)^{2n}}{e^{\frac{1}{2}}} C_{-2}.$$

Очевидно, для  $e < 1$ ,  $J_n = J_n^*$  (см. Еленевская, 1953, где подробно развита теория функций  $J_n^*(z, e)$ ). В этом случае внутри контура интегрирования попадает только точка  $z=\zeta$  и  $J_n^*(z, e) = 0$ .

Найдем конечные выражения для  $J_n^*(z, e)$  и  $J_n^*(z, e)$ .

Согласно теории вычетов

$$\begin{aligned} C_{-1} &= \frac{1}{(z-1)^2} \lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[ \frac{z^{n+1}}{(z-\frac{1}{\zeta})^2} \right] = \\ &= \frac{(-1)^n}{[(z-1)^2]^{n-1}} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(z-1)^{j-2} \dots (z-2)^{j-2}}{j!} (n+z-1)(n+z-2) \dots \\ &\quad \dots (n+z-\gamma)(2z-\gamma-2)! \frac{z^{n+1-2j}}{(1-\frac{1}{\zeta})^{2j-1}}; \quad (3.29) \\ C_{-2} &= \frac{1}{(z-1)^2} \lim_{z \rightarrow \frac{1}{\zeta}} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[ \frac{z^{n+1}}{(z-\zeta)^2} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(-1)^n}{[(z-1)^2]^{n-1}} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^{j+1} (z-1)(z-2) \dots (z-\gamma)}{j!} (n+z-1)(n+z-2) \dots \\ &\quad \dots (n+z-\gamma)(2z-\gamma-2)! \frac{z^{n+1-2j}}{(1-\frac{1}{\zeta})^{2j-1}}; \quad (3.30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_n^*(z, e) &= \frac{2^n}{e^{\frac{1}{2}} [(z-1)^2]^{n-1}} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(z-1)(z-2) \dots (z-\gamma)}{j!} (n+z-1)(n+z-2) \dots \\ &\quad \dots (n+z-\gamma)(2z-\gamma-2)! \frac{z^{n+1-2j}}{(1-\frac{1}{\zeta})^{2j-1}}; \quad (3.31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_n^*(z, e) &= \frac{2^n}{e^{\frac{1}{2}} [(z-1)^2]^{n-1}} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^{j+1} (z-1)(z-2) \dots (z-\gamma)}{j!} (n+z-1)(n+z-2) \dots \\ &\quad \dots (n+z-\gamma)(2z-\gamma-2)! \frac{z^{n+1-2j}}{(1-\frac{1}{\zeta})^{2j-1}}. \quad (3.32) \end{aligned}$$

Таким образом, выражение для функции  $J_n^*(z, e)$ , рассматриваемой как функция  $\zeta$ , будет тем же самым, как в случае  $e < 1$ . Различие будет только в том, что в случае  $|e| > 1$ ,  $\zeta$  будет комплексным и, следовательно, такими же будут функции  $J_n^*(z, e)$ .

Из самого построения этих функций и из того, что в случае  $e > 1$  и  $E = i\pi$ ,  $\zeta$  и  $\frac{1}{\zeta}$  являются величинами комплексными сопряженными следует, что функции  $J_n^*(z, e)$  и  $J_n^*(z, e)$  также будут комплексными сопряженными функциями  $e$ .

Функция  $J_n(z, e) = J_n^*(z, e) + J_n^*(z, e)$  как сумма двух комплексных сопряженных будет величиной действительной.

Непосредственно из формулы (3.21) видно, что

$$f(u) = \frac{(-1)^{2n}}{e^{\frac{1}{2}}} \frac{z^n}{(z^2 - \frac{2}{e}z + 1)^n}$$

имеет в точке  $z=0$  нуль порядка  $n$ . Следовательно, ее разложение будет начинаться с члена  $z^n$ . Поэтому  $J_n(z, e)$  обращается в нуль для всех  $n < z$ , хотя каждая из функций  $J_n^*(z, e)$  и  $J_n^*(z, e)$  в отдельности этим свойством не обладает.

В заключение дадим определение функций  $J_n^*(z, e)$  и  $J_n^*(z, e)$  для  $0 \leq |e| < \infty$ .

Мы определили раньше функцию  $J_n^*(z, e)$  в форме определенного интеграла

$$J_n^*(z, e) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos nE}{(1 - e \cos E)^n} dE. \quad (3.33)$$

Это определение будет справедливо для  $|e| < 1$  ( $e$  может быть, вообще говоря, комплексным). Для  $|e| > 1$  это определение уже не будет годиться, так как для  $|e| > 1$  определенный интеграл (3.33) будет иметь, как функция  $e$ , совершенно другое аналитическое выражение, определяемое формулами (3.26), (3.28) и (3.32). Мы можем дать теперь другое определение функций  $J_n^*(z, e)$  как функций эксцентриситета  $e$  или, что то же, как функций  $\zeta$ , где  $\zeta = \text{tg } \frac{\varphi}{2}$  ( $e = \sin \varphi$ ), которое будет справедливым для любого  $e$  или  $\zeta$ .

Определим  $J_n^*(z, e)$  как вычет функции

$$\frac{(-1)^{n+1} z^{n+1}}{e^2(z-\frac{1}{2})^2(z-\frac{1}{3})^2}$$

относительно особой точки  $z = \frac{1}{2}$ :

$$J_n^*(z, e) = \frac{(-1)^{n+1} z^{n+1}}{2e^2} \int_{\gamma} \frac{z^{n+1}}{(z-\frac{1}{2})^2(z-\frac{1}{3})^2} dz. \quad (3.34)$$

Контур интегрирования  $C_1$  выбирается так, чтобы внутри его заключалась единственная особая точка  $z = \frac{1}{2}$ . Это всегда можно сделать, так как особые точки нашей функции  $z = \frac{1}{2}$  и  $z = \frac{1}{3}$  суть изолированные особые точки (полоса порядка 2) и могут совпадать для единственного значения  $e$ , именно для  $e=1$ . В точке  $e=1$  функция  $\frac{1}{(1-e \cos E)^2}$  имеет точку разветвления и будет неоднозначной.

Определив функцию  $J_n^*(z, e)$  выражением (3.34), мы получим аналогично для функций  $J_n^*(z, e)$ , которая будет комплексной, сопряженной с  $J_n^*(z, e)$ , выражение:

$$J_n^*(z, e) = \frac{(-1)^{n+1} z^{n+1}}{2ie^2} \int_{\gamma} \frac{z^{n+1}}{(z-\frac{1}{2})^2(z-\frac{1}{3})^2} dz. \quad (3.35)$$

Контур  $C_2$  выбирается так, чтобы внутри его попадала только особая точка  $z = \frac{1}{3}$ . Можно легко вывести для функций  $J_n^*(z, e)$  те же рекуррентные соотношения, что и для функций  $J_n^*(z, e)$ . Введем некоторые из них. Напишем  $J_n^*(z, e)$  в виде:

$$J_n^*(z, e) = \frac{1}{2e} \int_{-\pi \leq E < \pi} \frac{\cos nE}{(1 - e \cos E)^2} dE, \quad (3.36)$$

$\pi_1$  и  $\pi_2$  сколь угодно мал.

Продифференцировав под знаком интеграла по параметру  $e$ , получим

$$\frac{d}{de} J_n^*(z, e) = \frac{1}{2} [J_{n-1}^*(z+1, e) + J_{n+1}^*(z+1, e)]. \quad (3.37)$$

Умножим правую и левую части выражения (3.36) на  $e$  и снова продифференцируем обе части по  $e$ . Мы получим

$$\frac{d}{de} J_n^*(z, e) = \frac{1}{2} [J_n^*(z+1, e) - J_n^*(z, e)]. \quad (3.38)$$

Исключая из (3.37) и (3.38)  $\frac{d}{de} J_n^*(z, e)$ , получим

$$J_n^*(z, e) = J_n^*(z+1, e) - \frac{e}{2} [J_{n-1}^*(z+1, e) + J_{n+1}^*(z+1, e)]. \quad (3.39)$$

Написав конечные выражения  $J_n^*(z, e)$  для индексов  $n-1, n, n+1$  с помощью формулы (3.31), находим еще одно рекуррентное соотношение:

$$n J_n^*(z, e) = \frac{2e}{2} [J_{n-1}^*(z+1, e) - J_{n+1}^*(z+1, e)]. \quad (3.40)$$

И, наконец, исключая  $J_n^*(z, e)$  из уравнений (3.39) и (3.40), получим

$$n J_n^*(z+1, e) = \frac{e}{2} [(n+1) J_{n-1}^*(z+1, e) - (n-2) J_{n+1}^*(z+1, e)]. \quad (3.41)$$

Исходя из этих формул, легко показать, аналогично тому, как это делалось во второй части, что функции  $J_n^*(z, e)$  удовлетворяют тому же дифференциальному уравнению типа Фукса, что и функции  $J_n^*(z, e)$ . Это уравнение имеет вид:

$$e^2 \frac{d^2}{dz^2} J_n^*(z, e) + e \frac{2(z+1)e^2-1}{e^2-1} \frac{d}{dz} J_n^*(z, e) + \frac{z(z+1)e^2+n^2}{e^2-1} J_n^*(z, e) = 0. \quad (3.42)$$

Напишем это уравнение в виде:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x) y = 0, \quad (3.43)$$

где

$$P(x) = \frac{2(z+1)e^2-1}{e^2-1}, \quad Q(x) = \frac{z(z+1)e^2+n^2}{e^2-1}. \quad (3.44)$$

Как указывалось во второй части, функция  $J_n^*(z, e)$  будет одним из правильных интегралов этого уравнения. Очевидно, что функция  $J_n^*(z, e)$  также будет правильным интегралом того же уравнения. А так как  $J_n^*(z, e)$  и  $J_n^*(z, e)$  независимы, то мы можем написать общий интеграл этого уравнения в виде:

$$J = C_1 J_n^*(z, e) + C_2 J_n^*(z, e), \quad (3.45)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  суть произвольные постоянные. Очевидно, что функция

$$J_n(z, e) = J_n^*(z, e) + J_n^*(z, e)$$

будет также интегралом этого уравнения и будет удовлетворять тем же рекуррентным соотношениям.

Дадим в заключение выражение для  $J_n(z, e)$  наиболее удобное для практического употребления. Определяя  $J_n(z, e)$  по формуле (3.25) как вычет подинтегральной функции относительно точки  $z=0$ , будем иметь

$$J_n(z, e) = \frac{(-1)^{n+1} z^{n+1}}{e^2(n-2)!} \sum_{\lambda=0}^n (-1)^\lambda \frac{(n-\lambda)(n-\lambda-1)\dots(\lambda+1)}{(n-2-2\lambda)!} z(z+1)\dots(n-\lambda-1) \frac{e^2}{2e^2}, \quad (3.46)$$

где  $\lambda_1 = \frac{n-2}{2}$  или  $\lambda_1 = \frac{n-2-1}{2}$ , в зависимости от того, какое из этих двух чисел целое.

Как видно из формулы (3.46) для случая  $|e| > 1$ ,  $J_n(z, e)$  будет не только алгебраической, но и рациональной функцией эксцентриситета, и представляет собой многочлен, расположенный по отрицательным степеням  $e$ .

§ 3. Разложение функции  $\Psi_n(e)$  по степеням приращения эксцентриситета для случая эллиптического движения

Для того, чтобы получить разложение главной части пертурбационной функции  $\frac{1}{r_j}$  по степеням приращения эксцентриситета  $(e - e_0)$  в случае эллиптического движения, нам нужно разложить по этим приращениям функции  $\Psi_n(e) = F_n(e) + \Phi_n(e)$  и  $\cos nE$ . Разложение для функции  $\Psi_n(e)$  получается чрезвычайно просто. Из формулы (2.58) и (2.68) второй части мы имеем:

$$F_n(e) = \sum_{s=0}^p \sum_{l=0}^s G_s^{(n)} e^{2s-1} J_n'(k+p-\lambda, e),$$

$$\Phi_n(e) = n \sqrt{1-e^2} \sum_{s=0}^{p-1} \sum_{l=0}^s G_s^{(n)} \frac{e^{2s-p}}{(k+p-\lambda-1)} J_n'(k+p-\lambda-1, e), \quad (3.47)$$

где  $G_s^{(n)}$  есть числовой коэффициент, определяемый формулой (2.57) и (2.69) II части. Суммирование по  $\lambda$  ведется до  $\delta$ , где  $\delta$  принимает значения:

$$\delta = \frac{3p-2\tau}{2} \text{ или } \delta = \frac{3p-2\tau-1}{2}, \text{ если } \tau > \frac{p}{2} \text{ или } \tau > \frac{p-1}{2}$$

и  $\delta = p$ , если  $\tau \leq \frac{p}{2}$  или  $\tau \leq \frac{p-1}{2}$ .  $p = -k, (-k+2), \dots, k$ .

х как и прежде обозначает

$$k + 2l + 1, \quad k = 0, +1, +2, \dots, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

Разложим функцию  $\Psi_n(e)$  в ряд Тейлора:

$$\Psi_n(e) = \Psi_n(e_0) + (e - e_0) \Psi_n'(e_0) + \frac{(e - e_0)^2}{2!} \Psi_n''(e_0) + \dots + \frac{(e - e_0)^k}{k!} \Psi_n^{(k)}(e_0) + \dots \quad (3.48)$$

Коэффициент общего члена в формуле (3.48) равен  $s$ -той производной от функции  $\Psi_n(e)$  при  $e = e_0$ .

$$\Psi_n^{(s)}(e_0) = \frac{d^s}{de_0^s} \left[ \sum_{l=0}^p \sum_{k=0}^l G_k^{(n)} e_0^{2k-p} J_n'(p+k-\lambda, e_0) + n \sqrt{1-e_0^2} \sum_{l=0}^{p-1} \sum_{k=0}^l G_k^{(n)} \frac{e_0^{2k-p}}{(k+p-\lambda-1)} J_n'(k+p-\lambda-1, e_0) \right] =$$

$$= \sum_{l=0}^p \sum_{k=0}^l G_k^{(n)} \frac{d^s}{de_0^s} [e_0^{2k-p} J_n'(p+k-\lambda, e_0)] +$$

$$+ n \sum_{l=0}^{p-1} \sum_{k=0}^l G_k^{(n)} \frac{1}{k+p-\lambda-1} \cdot \frac{d^s}{de_0^s} [\sqrt{1-e_0^2} e_0^{2k-p} J_n'(k+p-\lambda-1, e_0)]. \quad (3.49)$$

Производная от функции  $e_0^{2k-p} J_n'(k+p-\lambda, e_0)$  может быть получена либо при помощи ряда

$$\frac{d^s}{de_0^s} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(p+k-\lambda)(p+k-\lambda+1) \dots (p+k-\lambda+n+2s-1)}{(n+s)! \sqrt{1-2e_0^2}} \cdot e_0^{2k+2s-p} =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(p+k-\lambda)(p+k-\lambda+1) \dots (p+k-\lambda+n+2s-1)}{(n+s)! \sqrt{1-2e_0^2}} (n+2s+2s-p)(n+2s+$$

$$+2s-p-1) \dots (n+2s+2s-p-s_1+1) e_0^{2k+2s-p-s_1}, \quad (3.50)$$

либо в конечном виде

$$\frac{d^s}{de_0^s} [e_0^{2k-p} J_n'(p+k-\lambda, e_0)] =$$

$$= \frac{e_0^{2k-p}}{[(p+k-\lambda-1)!]^2} \sum_{l=0}^{p+k-\lambda-1} \frac{(p+k-\lambda-1)(p+k-\lambda-2) \dots (p+k-\lambda-l)}{l!} \times$$

$$\times (n+p+k-\lambda-1)(n+p+k-\lambda-2) \dots (n+p+k-\lambda-l) \cdot 2^{s+l} \times$$

$$\times (2p+2k-2s-l-2)! \frac{[1-\sqrt{1-e_0^2}]^{n+p+k-l-1}}{[\sqrt{1-e_0^2}]^{2p+2k-2s-l-1}}. \quad (3.51)$$

Подставим теперь выражение  $\Psi_n(e)$ , даваемое формулой (3.48) в разложение главной части пертурбационной функции. Мы получим искомое разложение  $\frac{1}{r_j}$  в виде ряда по степеням  $(e - e_0)$  и кратным эксцентрисической аномалии  $E$  в виде:

$$\frac{1}{r_j} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b_{kl}^{(n)} \sum_{r=0}^k A_{rj}^{(n)} \sum_{s=0}^{\infty} \Psi_n^{(s)}(e_0) \frac{(e - e_0)^s}{s!} \cos nE \cdot \cos(p\sigma + q\bar{\omega} + r\tau). \quad (3.52)$$

Здесь  $b_{kl}^{(n)}$  есть  $l$ -тый член коэффициента Лапласа  $b_l^k$ ,  $a$  — большая полуось оскулирующей орбиты,  $A_{rj}^{(n)}$  те же коэффициенты, которые фигурировали в I и II частях настоящей работы, т. е. коэффициенты Фурье в разложении  $\cos k\theta$  по кратным углам элементов  $\tau, \omega, \bar{\omega}, i$ .

Во II части нами было получено разложение главной части пертурбационной функции по степеням эксцентриситета и косинусам углов кратных эксцентрисической аномалии. Там было указано, что оно может иметь самостоятельное значение, т. е. может применяться в тех же задачах небесной механики, в которых применяется разложение по кратным средней аномалии, например, при вычислении возмущений. Разложение по эксцентрисической аномалии может иметь даже некоторое преимущество, потому что, хотя затем и придется определять  $E$  как функцию средней аномалии  $M$  при помощи рядов, но зато структура разложения  $\frac{1}{r_j}$  по эксцентрисической аномалии значительно проще, чем структура аналогичных разложений по средней аномалии. В данном случае при разложении величин  $\frac{1}{r_j}$  по степеням приращения эксцентриситета  $(e - e_0)$ , это преимущество в значительной мере уменьшается за счет того, что мы получаем уже не многочлен по  $\cos nE$ , а бесконечный ряд. Для практических приложений неудобно использовать разложение  $\frac{1}{r_j}$  в виде (3.52), в котором имеется двойная

зависимость от эксцентриситета как через посредство  $\cos nE$ , так и прямо через посредство  $(e - e_0)$ . Поэтому в следующем параграфе мы займемся разложением  $\cos nE$  по степеням  $(e - e_0)$ .

§ 4. Разложение  $\cos nE$  по степеням приращения эксцентриситета  $(e - e_0)$

Чтобы получить разложение  $\cos nE$  по степеням  $(e - e_0)$ ,<sup>1</sup> воспользуемся рядом Лагранжа. Как известно, ряд Лагранжа для уравнения

$$y = x + \varepsilon \varphi(y) \quad (3.53)$$

даст разложение по степеням малого параметра  $\varepsilon$  того корня уравнения (3.53), который обращается в  $x$  при  $\varepsilon = 0$ .

Связь между эксцентрисической и средней аномалиями дается, как известно, уравнением Кеплера:

$$E = M + e \sin E. \quad (3.54)$$

При помощи уравнения Кеплера получаются разложения в ряд Лагранжа по степеням  $e$  эксцентрисической аномалии  $E$  и ее функций.

Чтобы получить разложение эксцентрисической аномалии  $E$  и ее функций по степеням приращения эксцентриситета  $(e - e_0)$ , рассмотрим два эллиптических движения. Одно из этих движений будет движением по эллипсу, имеющему эксцентриситет  $e$ , большую полуось  $a$  и момент прохождения через перигелий  $\tau$ , а другое — движением по эллипсу, имеющему ту же полуось  $a$  и тот же момент прохождения через перигелий  $\tau$ , а эксцентриситет  $e_0$ . Назовем первое движение, соответствующее элементам  $(a, e, \tau)$ , основным, а движение, определяемое элементами  $(a, e_0, \tau)$ , — смежным движением. У этих двух движений, очевидно, одновременные значения средних аномалий будут одинаковы, а одновременные значения эксцентрисических аномалий будут различны.

Напишем два уравнения Кеплера для обоих движений:

$$\begin{aligned} E &= M + e \sin E, \\ E_0 &= M + e_0 \sin E_0. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Образум разность

$$E - E_0 = e \sin E - e_0 \sin E_0. \quad (3.56)$$

Прибавляя и вычитая в правой части величину  $e_0 \sin E$  и вводя обозначения

$$\begin{aligned} \psi(E) &= \frac{\sin E - \sin E_0}{E - E_0}, \\ \Phi(E) &= \frac{\sin E}{1 - e_0 \psi(E)}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

приведем уравнение (3.56) к виду:

$$E = E_0 + (e - e_0) \Phi(E). \quad (3.58)$$

Пользуясь рядом Лагранжа, мы получим разложение по степеням малого параметра  $(e - e_0)$  того корня уравнения (3.58), который обращается в  $E_0$  при  $e = e_0$ .

Ряд Лагранжа для уравнения (3.53) имеет вид:

$$\begin{aligned} f(y) &= f(x) + \varepsilon \varphi(x) f'(x) + \frac{\varepsilon^2}{2!} \frac{d}{dx} [\varphi^2(x) f'(x)] + \dots + \\ &+ \frac{\varepsilon^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} [\varphi^k(x) f'(x)] + \dots \end{aligned} \quad (3.59)$$

<sup>1</sup> В этом параграфе при получении уравнения, связывающего величину  $E$  и  $(e - e_0)$ , мы используем метод Н. А. Моссева (1936), при помощи которого и получим первые члены разложения в ряд Лагранжа величин  $E$ ,  $\sin E$ ,  $\cos E$ .

Чтобы получить разложение по степеням  $(e - e_0)$  корня уравнения (3.58), положим

$$y = E, \quad x = E_0, \quad \varepsilon = (e - e_0),$$

$$f(y) = \cos nE, \quad f(x) = \cos nE_0, \quad \varphi(x) = \psi(E_0) = \frac{\sin E_0}{1 - e_0 \cos E_0}.$$

Ряд Лагранжа в этом случае будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \cos nE &= \cos nE_0 - n(e - e_0) \frac{\sin E_0}{(1 - e_0 \cos E_0)} \sin nE_0 - n \frac{(e - e_0)^2}{2!} \frac{d}{dE_0} \left[ \frac{\sin^2 E_0 \sin nE}{(1 - e_0 \cos E_0)^2} \right] - \\ &- \dots - n \frac{(e - e_0)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{d^{k-2}}{dE_0^{k-2}} \left[ \frac{\sin^{k-1} E_0 \cdot \sin nE_0}{(1 - e_0 \cos E_0)^{k-1}} \right] - \dots \end{aligned} \quad (3.60)$$

Мы хотим получить разложение для  $\cos nE$  по степеням  $(e - e_0)$  и в ряд Фурье по кратным  $E_0$ . Для этого разложим предварительно величины, стоящие в квадратных скобках, в правой части формулы (3.60), в ряд Фурье по синусам и косинусам углов кратных  $E_0$ .

Рассмотрим величину

$$\frac{\sin^k E_0 \cdot \sin nE_0}{(1 - e_0 \cos E_0)^k}. \quad (3.61)$$

Это периодическая функция  $E_0$ , удовлетворяющая условиям Дирихле. Она будет четной функцией  $E_0$ , в случае если  $k$  нечетное, для  $k$  четного она будет нечетной функцией  $E_0$ . Следовательно, выражение (3.61) может быть разложено в ряд Фурье, в первом случае по косинусам, а во втором — по синусам  $E_0$ . Коэффициенты этих разложений, как ясно из самого вида функции (3.61), будут некоторыми комбинациями функций  $J_n^*(z, e)$ .

Для  $k$  нечетного мы получим разложение:

$$\frac{\sin^k E_0 \cdot \sin nE_0}{(1 - e_0 \cos E_0)^k} = (-1)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} J_{\nu, *}(e, e_0) \cdot \cos \nu E_0. \quad (3.62)$$

Для  $k$  четного будем иметь:

$$\frac{\sin^k E_0 \cdot \sin nE_0}{(1 - e_0 \cos E_0)^k} = (-1)^{\frac{k}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} J_{\nu, *}(e, e_0) \cdot \sin \nu E_0. \quad (3.63)$$

Величинами  $J_{\nu, *}(e, e_0)$  и  $\tilde{J}_{\nu, *}(e, e_0)$  как коэффициенты ряда Фурье определяются формулами:

$$\begin{aligned} J_{\nu, *}(e, e_0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^k E_0 \cdot \sin nE_0 \sin \nu E_0}{(1 - e_0 \cos E_0)^k} dE_0 = \\ &= \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{2^k - 2} \sum_{\lambda=0}^{\frac{\nu}{2}} (-1)^\lambda \frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-\lambda+1)}{\lambda!} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\sigma-2\lambda) E_0 \cdot \sin nE_0 \cdot \sin \nu E_0}{(1 - e_0 \cos E_0)^k} dE_0 = \\ &= \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{2^k} \sum_{\lambda=0}^{\frac{\nu}{2}} (-1)^\lambda \frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-\lambda+1)}{\lambda!} \int_0^{2\pi} \frac{[\sin(n+\sigma-2\lambda) E_0 + \sin(n-\sigma+2\lambda) E_0]}{(1 - e_0 \cos E_0)^k} \sin \nu E_0 dE_0 = \\ &= \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{2^k + 2} \sum_{\lambda=0}^{\frac{\nu}{2}} (-1)^\lambda \frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-\lambda+1)}{\lambda!} \int_0^{2\pi} [\cos(\mu - n - \sigma + 2\lambda) E_0 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\cos(\mu+n+\sigma-2\lambda)E_0 + \cos(\mu-n+\sigma-2\lambda)E_0 - \cos(\mu+n-\sigma+2\lambda)E_0 \left[ \frac{dE_0}{(1-e_0 \cos E_0)^2} \right] = \\
 & = \frac{(-1)^{\frac{\sigma}{2}}}{2^{\frac{\sigma}{2}}} \sum_{\lambda=0}^{\frac{\sigma}{2}} (-1)^{\lambda} \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-\lambda+1)}{\lambda!} [J_{\mu-n+\sigma+2\lambda}(\sigma, e_0) - J_{\mu+n+\sigma+2\lambda}(\sigma, e_0) + \\
 & + J_{\mu-n+\sigma-2\lambda}(\sigma, e_0) - J_{\mu+n+\sigma-2\lambda}(\sigma, e_0)]. \quad (3.64)
 \end{aligned}$$

Если обозначить

$$J_{\lambda}^{+}(\sigma, e_0) = \frac{1}{2^{\frac{\sigma}{2}}} \sum_{\lambda=0}^{\frac{\sigma}{2}} \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-\lambda+1)}{\lambda!} J_{\mu+2\lambda}(\sigma, e_0)$$

и

$$J_{\lambda}^{-}(\sigma, e_0) = \frac{1}{2^{\frac{\sigma}{2}}} \sum_{\lambda=0}^{\frac{\sigma}{2}} \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-\lambda+1)}{\lambda!} J_{\mu-2\lambda}(\sigma, e_0), \quad (3.65)$$

то

$$I_{\mu, \sigma}(\sigma, e_0) = (-1)^{\frac{\sigma}{2}} [J_{\mu-n+\sigma}^{+}(\sigma, e_0) - J_{\mu+n+\sigma}^{-}(\sigma, e_0) + J_{\mu-n+\sigma}^{-}(\sigma, e_0) - J_{\mu+n+\sigma}^{+}(\sigma, e_0)]. \quad (3.66)$$

Каждая из величин, стоящих в квадратных скобках, зависит от трех индексов:  $\mu+n, \sigma, e_0$  или  $\mu-n, \sigma, e_0$ , поэтому для них могут быть составлены таблицы с тремя входами.

Совершенно аналогично получаем:

$$I_{\mu, \sigma}(\sigma, e_0) = (-1)^{\frac{\sigma-1}{2}} [J_{\mu-n+\sigma-1}^{+}(\sigma, e_0) + J_{\mu+n+\sigma-1}^{-}(\sigma, e_0) - J_{\mu-n+\sigma-1}^{-}(\sigma, e_0) - J_{\mu+n+\sigma-1}^{+}(\sigma, e_0)]. \quad (3.67)$$

Взяв теперь  $(\sigma-1)$ -ую производную от функции (3.61) по  $E_0$  получим для  $\sigma$  четного:

$$\frac{d^{\sigma-1}}{dE_0^{\sigma-1}} \left[ \frac{\sin^{\sigma} E_0 \sin nE_0}{(1-e_0 \cos E_0)^{\sigma}} \right] = \sum_{\lambda=0}^{\frac{\sigma-1}{2}} (-1)^{\frac{\sigma-1}{2}-\lambda} I_{\mu, \sigma}(\sigma, e_0) \gamma^{\lambda-1} \cos \gamma E_0, \quad (3.68, a)$$

и для  $\sigma$  нечетного:

$$\frac{d^{\sigma-1}}{dE_0^{\sigma-1}} \left[ \frac{\sin^{\sigma} E_0 \sin nE_0}{(1-e_0 \cos E_0)^{\sigma}} \right] = \sum_{\lambda=0}^{\frac{\sigma-1}{2}} (-1)^{\frac{\sigma-1}{2}-\lambda} I_{\mu, \sigma}(\sigma, e_0) \gamma^{\lambda-1} \cos \gamma E_0. \quad (3.68, b)$$

Подставляя разложения (3.68, a) и (3.68, b) в формулу (3.60), получим разложение  $\cos nE$  в виде:

$$\cos nE = \cos nE_0 + \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} \frac{(e-e_0)^{\mu}}{\mu!} \sum_{\lambda=0}^{\infty} u^{\lambda-1} I_{\mu, \sigma}(\sigma, e_0) \cos \gamma E_0. \quad (3.69)$$

$I_{\mu, \sigma}(\sigma, e_0)$  для  $\sigma$  четного определяется формулой (3.68, a), а для  $\sigma$  нечетного — формулой (3.68, b).

### § 5. Разложение главной части пертурбационной функции по степеням $(e-e_0)$ в случае эллиптического движения

Подставим теперь разложение  $\cos nE$  по степеням  $(e-e_0)$  в формулу (3.52) для разложения  $\frac{1}{r}$ . Это даст нам

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{r} &= \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b_{k,l}^{(k)} \sum_{r, \nu, \tau=-k}^k A_{r,\nu}^{(k)} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{d^s}{dE_0^s} \Psi_{\nu, \tau}(e_0) \frac{(e-e_0)^s}{s!} \times \\
 & \times \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(e-e_0)^{\mu}}{\mu!} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \gamma^{\lambda-1} I_{\mu, \sigma}(e_0) \cos \gamma E_0 \cos(p\omega + q\Omega + r\tau). \quad (3.70)
 \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$\frac{d^{\mu-1}}{s! \mu! \sigma!} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{d^{\nu}}{dE_0^{\nu}} \Psi_{\nu, \tau}(e_0) I_{\mu, \sigma}(e_0) = \gamma_{\mu, \sigma, \tau, s}(e_0). \quad (3.71)$$

Вернем суммы по  $s$  и  $\tau$  и перегруппируем члены. Мы получим:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\tau=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (e-e_0)^{s+\tau} \gamma_{\mu, \sigma, \tau, s}(e_0) = \\
 & = \sum_{r=0}^{\infty} (e-e_0)^r [\gamma_{\mu, \sigma, 0, r}(e_0) + (e-e_0) \gamma_{\mu, \sigma, 1, r}(e_0) + (e-e_0)^2 \gamma_{\mu, \sigma, 2, r}(e_0) + \dots] = \\
 & = [\gamma_{\mu, \sigma, 0, 0}(e_0) + (e-e_0) \gamma_{\mu, \sigma, 0, 1}(e_0) + (e-e_0)^2 \gamma_{\mu, \sigma, 0, 2}(e_0) + \dots] + \\
 & + [(e-e_0) \gamma_{\mu, \sigma, 1, 0}(e_0) + (e-e_0)^2 \gamma_{\mu, \sigma, 1, 1}(e_0) + (e-e_0)^3 \gamma_{\mu, \sigma, 1, 2}(e_0) + \dots] + \\
 & + [(e-e_0)^2 \gamma_{\mu, \sigma, 2, 0}(e_0) + (e-e_0)^3 \gamma_{\mu, \sigma, 2, 1}(e_0) + (e-e_0)^4 \gamma_{\mu, \sigma, 2, 2}(e_0) + \dots] + \\
 & + \dots + \dots + \dots = \\
 & = \gamma_{\mu, \sigma, 0, 0}(e_0) + (e-e_0) [\gamma_{\mu, \sigma, 1, 0}(e_0) + \gamma_{\mu, \sigma, 0, 1}(e_0)] + (e-e_0)^2 [\gamma_{\mu, \sigma, 2, 0}(e_0) + \gamma_{\mu, \sigma, 1, 1}(e_0) + \\
 & + \gamma_{\mu, \sigma, 0, 2}(e_0)] + \dots = \sum_{s=0}^{\infty} (e-e_0)^s \sum_{\tau=0}^s \gamma_{\mu, \sigma, s-\tau, \tau}(e_0). \quad (3.72)
 \end{aligned}$$

Подставляя теперь выражение (3.72) в формулу (3.70), получим окончательно

$$\frac{1}{r} = \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b_{k,l}^{(k)} \sum_{r, \nu, \tau=-k}^k A_{r,\nu}^{(k)} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \Omega_{\nu, \tau}(e_0) (e-e_0)^s \cos(\mu E_0 + p\omega + q\Omega + r\tau), \quad (3.73)$$

где положено

$$\Omega_{\nu, \tau}(e_0) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=0}^s \gamma_{\nu, \sigma, s-t, t}(e_0). \quad (3.74)$$

### § 6. Разложение главной части пертурбационной функции в ряд Фурье по аргументам $(\sigma+\omega)$ , $\Omega$ , $i$ в случае гиперболического движения

Рассмотрим теперь задачу разложения пертурбационной функции в случае гиперболического движения.

Пертурбационная функция определяется формулой:

$$R = k^2 m \left( \frac{1}{r_j} - \frac{r \cos \theta}{a_j^2} \right), \quad (3.75)$$

Ее главная часть имеет вид

$$\frac{1}{r_j} = (a_j^2 + r^2 - 2a_j r \cos \theta)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.76)$$

где  $a_j$  — расстояние от Солнца до Юпитера,  $r$  — радиус-вектор возмущаемой точки,  $\theta$  — угол, образованный направлением из Солнца на Юпитер и астероид,  $m_j$  — масса Юпитера.

Разлагая  $\frac{1}{r_j}$  в ряд Фурье по  $\cos k\theta$ , получим

$$\frac{1}{r_j} = \frac{1}{2r} \sum_{k=0}^{\infty} B_k^{(j)} \cos k\theta, \quad r > a_j, \quad (3.77)$$

$$\frac{1}{r_j} = \frac{1}{2a_j} \sum_{k=0}^{\infty} B_k^{(j)} \cos k\theta, \quad r < a_j,$$

где  $B_k^{(j)}$ , так же как во II части, представляют собой однородные функции относительно  $a_j$  и  $r$ , образующиеся в соответствующие коэффициенты Лапласа, если положить  $r = a$ . Они определяются формулой:

$$\frac{1}{2} B_k^{(j)} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k+2l+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2k+2l)} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2l} (a)^{k+2l}, \quad (3.78)$$

$$a = \frac{a_j}{r}, \quad a_j < r \quad \text{или} \quad a = \frac{r}{a_j}, \quad a_j > r.$$

$\cos \theta$ , являющийся стороной сферического треугольника  $\Omega P J$ , определяется формулой:

$$\cos \theta = \cos(v + \omega) \cos(l_j - \Omega) + \sin(v + \omega) \sin(l_j - \Omega) \cos i,$$

см. рис. 5.

Разлагая  $\cos k\theta$  в трехкратный ряд Фурье по аргументам  $v + \omega$ ,  $\Omega = l_j - \Omega$ ,  $i$ , будем иметь

$$\cos k\theta = \sum_{p, q, r=-k}^k A_{pqr}^{(k)} \cos[p(v + \omega) + q\Omega + r i] \quad (3.79)$$

или

$$\cos k\theta = \sum_{p, q, r=-k}^k A_{pqr}^{(k)} [\cos p v \cos(p\omega + q\Omega + r i) - \sin p v \sin(p\omega + q\Omega + r i)]. \quad (3.80)$$

Разложения, полученные до сих пор и определяемые формулами (3.77) и (3.80), тождественным аналогичным разложениям эллиптического движения. Чтобы получить далее выражения для  $\cos k\theta$  и  $\frac{1}{r_j}$  через величину  $u$ , являющуюся для гиперболического движения аналогом эксцентриситетной аномалии, нужно получить разложения для величин  $\frac{\sin p v}{2k+2q+1}$  и  $\frac{\cos p v}{2k+2q+1}$  по кратным  $u$ .  $r = \frac{r}{a}$ ,  $a$  — большая полуось орбиты возмущаемого тела,  $r$  — радиус вектор возмущаемой точки.

§ 7. Разложение произведения степени радиуса вектора на косинус угла кратного истинной аномалии в случае гиперболического движения

Если мы заменим в уравнении эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  на  $iy$ , то получим уравнение гиперболы. Мы можем формально удовлетворить этому уравнению таким же способом, как в случае движения эллиптического, т. е. положив:

$$x = -a(\cos E - e), \quad y = -a\sqrt{1-e^2} \sin E \quad (3.81)$$

или

$$x = a - (\cos E - e), \quad y = a\sqrt{1-e^2} \sin E.$$

Так как в этом случае  $e > 1$ , то  $\sin E$  будет чисто мнимой величиной, а  $\cos E$  останется действительным ( $x$  и  $y$  мы считаем действительными).  $E$  в этом случае

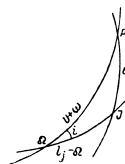


Рис. 5.

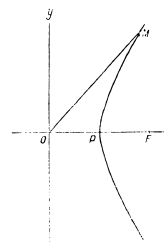


Рис. 6.

может быть комплексным:  $E = k\pi + iu$ . Давая  $k$  все возможные целочисленные значения,  $k = 0, 1, 2, \dots$  мы будем получать наложенные друг на друга гиперболы. А так как  $u = \ln(x + y)$ ,  $x$  и  $y$  здесь прямоугольные координаты точки  $M$ , то как в уравнение (3.81)  $E$  входит только под знаком тригонометрических функций,  $x$  и  $y$  определяются однозначно. Мы можем поэтому положить  $k=0$  и считать  $E=iu$ , где  $i$  действительно.

Геометрически  $i$  представляет собой площадь гиперболического сектора  $OMP$  равнобочной гиперболы с центром в начале координат (рис. 6). В этом случае по величине  $u = \ln(x + y)$ ,  $x$  и  $y$  здесь прямоугольные координаты точки  $M$ .

Формулы для координат гиперболического движения мы могли бы получить, не прибегая к указанной выше замене переменного  $E=iu$ . Но, не говоря уже о том, что геометрический путь сложнее, мы всегда в этой работе предпочитаем аналитический метод как более строгий.

Подставляя  $E=iu$  в уравнение (3.81), получим:

а) для ветви гиперболы вогнутой к Солнцу

$$\cos u = \frac{\cosh u - e}{1 - e \cosh u}, \quad \sin u = -\sqrt{e^2 - 1} \frac{\sinh u}{1 - e \cosh u}, \quad (3.82)$$

$$\frac{r}{a} = -1 + e \cosh u;$$

б) для ветви гиперболы выпуклой к Солнцу

$$\cos v = \frac{\text{ch } u + 1}{1 + e \text{ch } u}, \quad \sin v = \sqrt{e^2 - 1} \frac{\text{sh } u}{1 + e \text{ch } u}, \quad (3.83)$$

$$\frac{r}{a} = 1 + e \text{ch } u.$$

Рассмотрим сначала случай вогнутой к Солнцу ветви гиперболы. Подставив выражение для радиуса-вектора  $r$  в формулу (3.78), получим

$$\frac{1}{2} B^{(p)} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k+2l+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2k+2l)} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2l} \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{k+2l} \frac{(-1)^k}{(1 - e \text{ch } u)^{k+2l}}. \quad (3.84)$$

Тогда

$$\frac{1}{r^2} = \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \sum_{l=0}^{\infty} b_{k,l}^{(p)} \sum_{j=0}^k A_{j,p}^{(p)} \frac{\cos p v \cos (p\omega + q\sqrt{e^2-1} + \tau) - \sin p v \sin (p\omega + q\sqrt{e^2-1} + \tau)}{(1 - e \text{ch } u)^{k+2l+1}}. \quad (3.85, a)$$

Итак, нам надо получить разложение для величины

$$\frac{\cos p v}{(1 - e \text{ch } u)^k} \cdot \frac{\sin p v}{(1 - e \text{ch } u)^k}, \quad \chi = k + 2l + 1. \quad (3.85, b)$$

По формулам Эйлера имеем для величины  $\cos p v$  и  $\sin p v$

$$\cos p v = \sum_{m=0}^{\chi} (-1)^m \frac{2^{\chi-2m-1} p(p-m-1)(p-m-2) \dots (p-2m+1) \cos^{p-2m} v,}{m!}$$

$$\sin p v = \sum_{m=0}^{\chi} (-1)^m \frac{2^{\chi-2m-1} (p-m-1)(p-m-2) \dots (p-2m) \cos^{p-2m-1} v \cdot \sin v,}{m!} \quad (3.86)$$

$$x_1 = \frac{p-1}{2} \text{ или } x_1 = \frac{p-1}{2},$$

$$x_2 = \frac{p-1}{2} \text{ или } x_2 = \frac{p-2}{2}.$$

Подставляя в формулу (3.86) значения  $\cos^{p-2m} v$  и  $\sin v$  из формулы (3.82), получим

$$\frac{\cos p v}{(1 - e \text{ch } u)^k} = \sum_{m=0}^{\chi} (-1)^m \frac{2^{\chi-2m-1} p(p-m-1)(p-m-2) \dots (p-2m+1)}{m!} \cdot \frac{(\text{ch } u - e)^{p-2m}}{(1 - e \text{ch } u)^{k+p-2m}}, \quad (3.87)$$

и

$$\frac{\sin p v}{(1 - e \text{ch } u)^k} = \sum_{m=0}^{\chi} (-1)^m \frac{2^{\chi-2m-1} (p-m-1)(p-m-2) \dots (p-2m)}{m!} \cdot \frac{(\text{ch } u - e)^{p-2m-1}}{(1 - e \text{ch } u)^{k+p-2m}} \text{sh } u. \quad (3.88)$$

Разлагая величину  $\frac{(\text{ch } u - e)^{p-2m}}{(1 - e \text{ch } u)^{k+p-2m}}$  на элементарные дроби, получим

$$\frac{\cos p v}{(1 - e \text{ch } u)^k} = \sum_{m=0}^{\chi} (-1)^m \frac{2^{\chi-2m-1} p(p-m-1)(p-m-2) \dots (p-2m+1)}{m!} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{\chi-2m} (-1)^j \frac{(p-2m)(p-2m-1) \dots (p-2m-j+1)(1 - e^2)^{p-2m-j}}{j! e^{2j} (1 - e \text{ch } u)^{k+p-2m-j}} \quad (3.89)$$

и

$$\frac{\sin p v}{(1 - e \text{ch } u)^k} = -\sqrt{e^2 - 1} \sum_{m=0}^{\chi} (-1)^m \frac{2^{\chi-2m-1} (p-m-1)(p-m-2) \dots (p-2m)}{m!} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{p-2m-1} (-1)^j \frac{(p-2m-1)(p-2m-2) \dots (p-2m-j)(1 - e^2)^{p-2m-j-1}}{j! e^{2j} (1 - e \text{ch } u)^{k+p-2m-j}} \cdot \text{sh } u. \quad (3.90)$$

Величина  $\frac{1}{(1 - e \text{ch } u)^{k+p-2m-j}}$ , как было рассмотрено в § 1, может быть разложена в ряд по степеням  $z$ , где  $z = e^{-u}$ . Это разложение будет иметь вид:

$$\frac{1}{(1 - e \text{ch } u)^{k+p-2m-j}} = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(\chi + p - 2m - j, e) (\text{ch } nu - \text{sh } nu). \quad (3.91)$$

Следовательно,

$$\frac{\cos p v}{(1 - e \text{ch } u)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{F}_n(e) (\text{ch } nu - \text{sh } nu), \quad (3.92)$$

где  $\bar{F}_n(e) = \sum_{m=0}^{\chi} (-1)^m \frac{2^{\chi-2m-1} p(p-m-1)(p-m-2) \dots (p-2m+1)}{m!} \times$

$$F_n(e) = \sum_{m=0}^{\chi} (-1)^m \frac{2^{\chi-2m-1} p(p-m-1)(p-m-2) \dots (p-2m+1)}{m!} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{p-2m-1} (-1)^j \frac{(p-2m)(p-2m-1) \dots (p-2m-j+1)(1 - e^2)^{p-2m-j}}{j! e^{2j} (1 - e \text{ch } u)^{k+p-2m-j}} J_n(p-2m + \chi - j, e). \quad (3.93)$$

Что касается величины  $\frac{\text{sh } u}{(1 - e \text{ch } u)^k}$ , то очевидно, что она также может быть разложена в ряд по степеням  $z$ . Этот ряд может быть получен либо при помощи методов, аналогичных методам второй части, либо непосредственным умножением ряда (3.92) на  $\text{sh } u$ . Этот ряд будет сходиться в той же области  $|z| < 1$  или  $0 \leq u < \infty$ . В области  $|z| > 1$  получим разложение по отрицательным степеням  $z$ . Оба эти разложения так же, как разложение для  $\frac{1}{(1 - e \text{ch } u)^k}$ , можно объединить в одно:

$$\frac{\text{sh } u}{(1 - e \text{ch } u)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(e) (\text{ch } nu - \text{sh } nu), \quad (3.94)$$

где  $\bar{F}_n = \chi - 1$ , а вместо  $u$  берется его абсолютное значение.

Коэффициенты  $Q_n(n)$  ряда (3.94) проще всего можно получить, заметив, что

$$\frac{\text{sh } u}{(1 - e \text{ch } u)^k} = \frac{1}{e} \cdot \frac{d}{du} \left[ \frac{1}{(1 - e \text{ch } u)^{k-1}} \right] \frac{1}{(e-1)}. \quad (3.95)$$

Получив разложение для величины  $\frac{1}{(1 - e \text{ch } u)^{k-1}}$

$$\frac{1}{(1 - e \text{ch } u)^{k-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(\chi - 1, e) (\text{ch } nu - \text{sh } nu) \quad (3.96, a)$$



и пролиференцировав его почленно, получим<sup>1</sup>

$$\frac{sh u}{(1 - e ch u)^2} = -\frac{\alpha}{e(\alpha - 1)} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{J}_n(\alpha - 1, e) (ch nu - sh nu). \quad (3.96, 6)$$

Полагая  $\alpha = x + p - 2m - j$  и подставляя разложение (3.96, 6) в формулу (3.90), получим разложение для  $\frac{sh pu}{(1 - e ch u)^2}$ :

$$\frac{sh pu}{(1 - e ch u)^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{\Phi}_m(e) (ch nu - sh nu), \quad (3.97)$$

где  $\bar{\Phi}_m(e)$  определяется формулой:

$$\bar{\Phi}_m(e) = n \sqrt{e^2 - 1} \sum_{j=0}^{p-2m-1} (-1)^j \frac{2^{p-2m-1} (p-m-1)(p-m-2) \dots (p-2m)}{m!} \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{p-2m-1} \frac{(-1)^j (p-2m-1)(p-2m-2) \dots (p-2m-j)}{j!(p-2m-x-j-1) e^{p-2m}} (1 - e^2)^{p-2m-j-1} \bar{J}_n(x+p-2m-j-1, e). \quad (3.98)$$

Таким образом, разложение (3.97) для  $\frac{sh pu}{(1 - e ch u)^2}$  будет отличаться от разложения (3.92) для  $\frac{cos pu}{(1 - e ch u)^2}$  в случае гиперболического движения только коэффициентом при соответствующей степени  $z^n = (ch nu - sh nu)$ , который является функцией эксцентриситета.

§ 8. Разложение главной части пертурбационной функции по степеням приращения эксцентриситета для случая движения по вогнутой к Солнцу ветви гипербол

Мы имеем

$$\frac{cos k \theta}{(1 - e ch u)^2} = \sum_{p, q, r=0}^k A_{pqr}^{(k)} [\cos pu \cos(p\omega + q\bar{\omega} + r\tau) - \sin pu \sin(p\omega + q\bar{\omega} + r\tau)] \frac{1}{(1 - e ch u)^2}. \quad (3.99)$$

Подставляя теперь вместо  $\frac{cos pu}{(1 - e ch u)^2}$  и  $\frac{sin pu}{(1 - e ch u)^2}$  их разложения, получим

$$\frac{cos k \theta}{(1 - e ch u)^2} = \sum_{p, q, r=0}^k A_{pqr}^{(k)} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{\Phi}_m(e) (ch nu - sh nu) \cos(p\omega + q\bar{\omega} + r\tau) -$$

$$- \bar{\Phi}_m(e) (ch nu - sh nu) \sin(p\omega + q\bar{\omega} + r\tau). \quad (3.100)$$

Подставив разложение для  $\frac{cos k \theta}{(1 - e ch u)^2}$  в формулу для  $\frac{1}{r_j}$  пертурбационной функции, будем иметь

$$\frac{1}{r_j} = \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \sum_{l=0}^k b_{kl}^{(j)} \sum_{p, q, r=0}^k A_{pqr}^{(k)} \sum_{m=0}^{\infty} [\bar{\Phi}_m(e) \cos(p\omega + q\bar{\omega} + r\tau) -$$

$$- \bar{\Phi}_m(e) \sin(p\omega + q\bar{\omega} + r\tau)] \cdot (ch nu - sh nu). \quad (3.101)$$

<sup>1</sup> Операция дифференцирования ряда (3.96, а) по  $u$  является законной, так как  $\frac{d}{du} = e \frac{d}{de}$ , а отсюда ясно, что ряд (3.96, а) является степенным, который, как известно, можно почленно дифференцировать всюду в области его сходимости.

Теперь нам остается, так же как в случае эллиптического движения, разложить функции  $\bar{F}_n(e)$  и  $\bar{\Phi}_n(e)$ ,  $sh nu$  и  $ch nu$  по степеням разности эксцентриситета. Разложение для функций  $\bar{F}_n(e)$  и  $\bar{\Phi}_n(e)$  получается так же, как и для эллипса. Имено:

$$\bar{F}_n(e) = \bar{F}_n(e_0) + (e - e_0) \bar{F}'_n(e_0) + \frac{(e - e_0)^2}{2!} \bar{F}''_n(e_0) + \dots \quad (3.102)$$

где

$$\bar{F}_n^{(k)}(e_0) = \frac{d^k}{de_0^k} \sum_{j=0}^{p-2m-1} (-1)^j \frac{2^{p-2m-1} p(p-m-1)(p-m-2) \dots (p-2m+1)}{m!} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{p-2m-1} (-1)^j \frac{(p-2m)(p-2m-1) \dots (p-2m-j+1)}{j! e_0^{p-2m}} (1 - e_0)^{p-2m-j-1} \bar{J}_n(p-2m+x-j, e_0), \quad (3.103)$$

$$x_1 = \frac{p}{2} \text{ или } x_1 = \frac{p-1}{2}.$$

Разложение для  $\bar{\Phi}_n(e)$  будет иметь вид:

$$\bar{\Phi}_n(e) = \bar{\Phi}_n(e_0) + (e - e_0) \bar{\Phi}'_n(e_0) + \frac{(e - e_0)^2}{2!} \bar{\Phi}''_n(e_0) + \dots \quad (3.104)$$

$$\bar{F}_n^{(k)}(e_0) = \frac{d^k}{de_0^k} n \sqrt{e_0^2 - 1} \sum_{m=0}^{p-2m-1} (-1)^m \frac{2^{p-2m-1} (p-m-1)(p-m-2) \dots (p-2m)}{m! e_0^{p-2m}} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{p-2m-1} (-1)^j \frac{(p-2m-1)(p-2m-2) \dots (p-2m-j)}{j!(p-2m+x-j-1)} (1 - e_0^2)^{p-2m-j-1} \bar{J}_n(x+p-2m-j-1, e_0),$$

$$x_2 = \frac{p-1}{2} \text{ или } x_2 = \frac{p-2}{2}.$$

Разложения для  $ch nu$  и  $sh nu$  получаются также аналогично разложениям  $cos nE$  и  $sin nE$  в эллиптическом движении. Имено, напомним два аналога уравнения Кеплера в гиперболическом движении, для основного и смежного движений.

$$u = -M + e sh u, \quad u_0 = -M + e_0 sh u_0, \quad M = ka^{-1}(t - t_0).$$

Обозвав разность и введя обозначения

$$\Psi(u) = \frac{sh u - sh u_0}{u - u_0}, \quad (3.105)$$

$$\Phi(u) = \frac{sh u}{1 - e_0 \Psi(u)}, \quad (3.106)$$

получим

$$u = u_0 + (e - e_0) \Phi(u). \quad (3.107)$$

Ряд Лагранжа для разложения  $ch nu$  по степеням  $(e - e_0)$  в этом случае будет иметь вид:

$$ch nu = ch nu_0 + n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(e - e_0)^m}{m!} \frac{d^{m-1}}{de_0^{m-1}} \left[ \frac{sh' u_0 sh nu_0}{(1 - e_0 ch u_0)^2} \right]. \quad (3.108)$$

Для разложения  $sh \lambda u$  ряд Лагранжа будет:

$$sh \lambda u = sh \lambda u_0 + n \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(e - e_0)^\lambda}{e^\lambda} \frac{d^{\lambda-1}}{du_0^{\lambda-1}} \left[ \frac{sh^2 u_0 \operatorname{ch} n u_0}{(1 - e_0 \operatorname{ch} u_0)^\lambda} \right]. \quad (3.109)$$

Чтобы получить разложение главной части пертурбационной функции по степеням  $(e - e_0)$ , коэффициентами которых будут ряды синусов и косинусов углов кратных  $u$ , мы разложим сначала величины

$$\frac{sh^2 u_0 \cdot sh n u_0}{(1 - e_0 \operatorname{ch} u_0)^\lambda} \text{ и } \frac{sh^2 u_0 \cdot \operatorname{ch} n u_0}{(1 - e_0 \operatorname{ch} u_0)^\lambda}$$

в ряды по степеням  $z = e^{-u}$ , а затем возьмем от этих рядов соответствующие производные. Эти ряды будут такого же типа, как и ряды, полученные в § 7 и будут сходиться для всех  $0 \leq u < \infty$ . Для получения таких разложений выразим сначала  $sh^2 u$  через гиперболические синусы и косинусы кратных углов. Эти выражения могут быть написаны в виде:

$$sh^2 u_0 = \frac{1}{2^{2-1}} \sum_{\lambda=0}^{\frac{\sigma}{2}} \frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-\lambda+1)}{\lambda!} \operatorname{ch}(\sigma-2\lambda) u_0 \quad (3.110)$$

для  $\sigma$  четного, причем последний член суммы в уравнении (3.110) должен быть разделен на два. Для  $\sigma$  нечетного  $sh^2 u_0$  может быть выражен через гиперболические синусы углов кратных по формуле:

$$sh^2 u_0 = \frac{1}{2^{2-1}} \sum_{\lambda=0}^{\frac{\sigma-1}{2}} \frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-\lambda+1)}{\lambda!} sh(\sigma-2\lambda) u_0. \quad (3.111)$$

Разложение величины  $\frac{1}{(1 - e_0 \operatorname{ch} u_0)^\lambda}$ , согласно результатам § 7, может быть получено в виде:

$$\frac{1}{(1 - e_0 \operatorname{ch} u_0)^\lambda} = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \tilde{J}_\sigma(\sigma, e_0) (\operatorname{ch} \lambda u_0 - sh \lambda u_0). \quad (3.112)$$

Тогда, разложение для

$$\frac{sh^2 u_0 \cdot sh n u_0}{(1 - e_0 \operatorname{ch} u_0)^\lambda}$$

будет иметь следующий вид.

а) Для случая, когда  $\sigma$  четное, будет:

$$\begin{aligned} \frac{sh^2 u_0 \cdot sh n u_0}{(1 - e_0 \operatorname{ch} u_0)^\lambda} &= \frac{1}{2^{2-1}} \sum_{\sigma=0}^{\frac{\sigma}{2}} \frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-\lambda+1)}{\lambda!} \operatorname{ch}(\sigma-2\lambda) u_0 \cdot sh n u_0 \times \\ &\times \sum_{\sigma=0}^{\infty} \tilde{J}_\sigma(\sigma, e_0) (\operatorname{ch} \lambda u_0 - sh \lambda u_0) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2^{2-1}} \sum_{\lambda=0}^{\frac{\sigma}{2}} \frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-\lambda+1)}{\lambda!} \sum_{\sigma=0}^{\infty} \tilde{J}_\sigma(\sigma, e_0) (\operatorname{ch} \lambda u_0 - sh \lambda u_0) [sh(\sigma-2\lambda) u_0 + sh(n-\sigma+2\lambda) u_0] = \\ &= \frac{1}{2^2} \sum_{\lambda=0}^{\frac{\sigma}{2}} \frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-\lambda+1)}{\lambda!} \sum_{\sigma=0}^{\infty} \tilde{J}_\sigma(\sigma, e_0) \{ -[\operatorname{ch}(z+n+\sigma-2\lambda) u_0 - sh(z+n+\sigma-2\lambda) u_0] + \\ &\quad + [\operatorname{ch}(z-n-\sigma+2\lambda) u_0 - sh(z-n-\sigma+2\lambda) u_0] - \\ &\quad - [\operatorname{ch}(z+n-\sigma+2\lambda) u_0 - sh(z+n-\sigma+2\lambda) u_0] + \\ &\quad + [\operatorname{ch}(z-n+\sigma-2\lambda) u_0 - sh(z-n+\sigma-2\lambda) u_0] \}. \quad (3.113) \end{aligned}$$

Положим теперь  $z+n+\sigma = \mu$  и соберем члены с одинаковыми кратностями  $u_0$ , мы получим:

$$\begin{aligned} \frac{sh^2 u_0 \cdot sh n u_0}{(1 - e_0 \operatorname{ch} u_0)^\lambda} &= \frac{1}{2^{2-1}} \sum_{\lambda=0}^{\frac{\sigma}{2}} \frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-\lambda+1)}{\lambda!} \times \sum_{\mu=0}^{\infty} [-\tilde{J}_{\mu-n-\sigma+2\lambda}(\sigma, e_0) + \\ &+ \tilde{J}_{\mu-n-\sigma-2\lambda}(\sigma, e_0) - \tilde{J}_{\mu-n+\sigma-2\lambda}(\sigma, e_0) + \tilde{J}_{\mu-n+\sigma+2\lambda}(\sigma, e_0)] \times (\operatorname{ch} \mu u_0 - sh \mu u_0). \quad (3.114) \end{aligned}$$

Полагая, наконец,

$$\begin{aligned} \tilde{J}_\sigma^{(+)}(\sigma, e_0) &= \frac{1}{2^2} \sum_{\lambda=0}^{\frac{\sigma}{2}} \frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-\lambda+1)}{\lambda!} \tilde{J}_{\sigma+2\lambda}(\sigma, e_0), \\ \tilde{J}_\sigma^{(-)}(\sigma, e_0) &= \frac{1}{2^2} \sum_{\lambda=0}^{\frac{\sigma}{2}} \frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-\lambda+1)}{\lambda!} \tilde{J}_{\sigma-2\lambda}(\sigma, e_0), \end{aligned} \quad (3.115)$$

мы получим:

$$\begin{aligned} \frac{sh^2 u_0 \cdot sh n u_0}{(1 - e_0 \operatorname{ch} u_0)^\lambda} &= \sum_{\mu=0}^{\infty} [\tilde{J}_{\mu-n+\sigma}^{(-)}(\sigma, e_0) - \tilde{J}_{\mu-n-\sigma}^{(+)}(\sigma, e_0) - \tilde{J}_{\mu-n+\sigma}^{(+)}(\sigma, e_0) + \tilde{J}_{\mu-n-\sigma}^{(-)}(\sigma, e_0)] \times \\ &\quad \times (\operatorname{ch} \mu u_0 - sh \mu u_0). \quad (3.116) \end{aligned}$$

б) Для случая, когда  $\sigma$  нечетное.

В этом случае сумма синусов в формуле (3.113) заменится через равенство косинусов, перед суммой будет знак минус, и разложение для

$$\frac{sh^2 u_0 \cdot sh n u_0}{(1 - e_0 \operatorname{ch} u_0)^\lambda}$$

будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{sh^2 u_0 \cdot sh n u_0}{(1 - e_0 \operatorname{ch} u_0)^\lambda} &= - \sum_{\mu=0}^{\infty} [\tilde{J}_{\mu-n+\sigma}^{(+)}(\sigma, e_0) + \tilde{J}_{\mu-n-\sigma}^{(-)}(\sigma, e_0) - \tilde{J}_{\mu-n+\sigma}^{(-)}(\sigma, e_0) - \tilde{J}_{\mu-n-\sigma}^{(+)}(\sigma, e_0)] \times \\ &\quad \times (\operatorname{ch} \mu u_0 - sh \mu u_0). \quad (3.117) \end{aligned}$$

Возьмем теперь производную по  $u_0$  порядка  $(\sigma - 1)$  от выражений (3.116) и (3.117). Мы будем иметь:

$$\frac{d^{\sigma-1}}{du_0^{\sigma-1}} \left[ \frac{\text{sh}^2 u_0 \text{sh} nu_0}{(1 - e_0 \text{ch} u_0)^2} \right] = - \sum_{\mu=0}^{\infty} \mu^{\sigma-1} [J_{\mu+\mu+\sigma}^{(+)}(\sigma, e_0) + J_{\mu-\mu-\sigma}^{(+)}(\sigma, e_0) - J_{\mu+\mu-\sigma}^{(-)}(\sigma, e_0) - J_{\mu-\mu+\sigma}^{(-)}(\sigma, e_0)] \times (\text{ch} \mu u_0 - \text{sh} \mu u_0). \quad (3.118)$$

когда  $\sigma$  четное, и

$$\frac{d^{\sigma-1}}{du_0^{\sigma-1}} \left[ \frac{\text{sh}^2 u_0 \text{sh} nu_0}{(1 - e_0 \text{ch} u_0)^2} \right] = - \sum_{\mu=0}^{\infty} \mu^{\sigma-1} [J_{\mu+\mu+\sigma}^{(+)}(\sigma, e_0) - J_{\mu-\mu-\sigma}^{(+)}(\sigma, e_0) - J_{\mu+\mu-\sigma}^{(-)}(\sigma, e_0) + J_{\mu-\mu+\sigma}^{(-)}(\sigma, e_0)] \times (\text{ch} \mu u_0 - \text{sh} \mu u_0), \quad (3.119)$$

когда  $\sigma$  нечетное.

Аналогичным путем мы можем получить разложения для величин

$$\frac{\text{sh}^2 u_0 \cdot \text{ch} nu_0}{(1 - e_0 \text{ch} u_0)^2}.$$

Они будут иметь форму:

$$\frac{\text{sh}^2 u_0 \text{ch} nu_0}{(1 - e_0 \text{ch} u_0)^2} = \sum_{\mu=0}^{\infty} [J_{\mu+\mu+\sigma}^{(+)}(\sigma, e_0) + J_{\mu-\mu-\sigma}^{(+)}(\sigma, e_0) - J_{\mu+\mu-\sigma}^{(-)}(\sigma, e_0) + J_{\mu-\mu+\sigma}^{(-)}(\sigma, e_0)] \times (\text{ch} \mu u_0 - \text{sh} \mu u_0) \quad (3.120)$$

для  $\sigma$  четного и

$$\frac{\text{sh}^2 u_0 \text{ch} nu_0}{(1 - e_0 \text{ch} u_0)^2} = - \sum_{\mu=0}^{\infty} [J_{\mu+\mu+\sigma}^{(+)}(\sigma, e_0) - J_{\mu-\mu-\sigma}^{(+)}(\sigma, e_0) + J_{\mu+\mu-\sigma}^{(-)}(\sigma, e_0) - J_{\mu-\mu+\sigma}^{(-)}(\sigma, e_0)] \times (\text{ch} \mu u_0 - \text{sh} \mu u_0) \quad (3.121)$$

для  $\sigma$  нечетного.

Дифференцируя ряды (3.120) и (3.121) по  $u$  и  $(\sigma - 1)$  раз, получим:

$$\frac{d^{\sigma-1}}{du_0^{\sigma-1}} \left[ \frac{\text{sh}^2 u_0 \text{ch} nu_0}{(1 - e_0 \text{ch} u_0)^2} \right] = - \sum_{\mu=0}^{\infty} \mu^{\sigma-1} [J_{\mu+\mu+\sigma}^{(+)}(\sigma, e_0) + J_{\mu-\mu-\sigma}^{(+)}(\sigma, e_0) + J_{\mu+\mu-\sigma}^{(-)}(\sigma, e_0) + J_{\mu-\mu+\sigma}^{(-)}(\sigma, e_0)] \times (\text{ch} \mu u_0 - \text{sh} \mu u_0) \quad (3.122)$$

для  $\sigma$  четного и

$$\frac{d^{\sigma-1}}{du_0^{\sigma-1}} \left[ \frac{\text{sh}^2 u_0 \text{ch} nu_0}{(1 - e_0 \text{ch} u_0)^2} \right] = - \sum_{\mu=0}^{\infty} \mu^{\sigma-1} [J_{\mu+\mu+\sigma}^{(+)}(\sigma, e_0) - J_{\mu-\mu-\sigma}^{(+)}(\sigma, e_0) + J_{\mu+\mu-\sigma}^{(-)}(\sigma, e_0) - J_{\mu-\mu+\sigma}^{(-)}(\sigma, e_0)] \times (\text{ch} \mu u_0 - \text{sh} \mu u_0) \quad (3.123)$$

для  $\sigma$  нечетного.

Для получения разложения  $(\text{ch} nu_0 - \text{sh} nu_0)$  по степеням  $(e - e_0)$  и кратным  $u_0$  нам остается только вычесть выражение (3.122) из (3.123) и (3.118) из (3.119).

При вычитании функции  $J_{\mu+\mu+\sigma}^{(+)}(\sigma, e_0)$  и  $J_{\mu-\mu-\sigma}^{(+)}(\sigma, e_0)$  уничтожаются, и мы получим разложение  $(\text{ch} nu_0 - \text{sh} nu_0)$  в виде:

$$(\text{ch} nu_0 - \text{sh} nu_0) = (\text{ch} nu_0 - \text{sh} nu_0) + n \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(e - e_0)^s}{s!} \sum_{\mu=0}^{\infty} J_{\mu+\mu+\sigma}^{(+)}(\sigma, e_0) (\text{ch} \mu u_0 - \text{sh} \mu u_0), \quad (3.124)$$

где положено:

$$J_{\mu, n}^{\pm}(e_0) = \mu^{\sigma-1} [J_{\mu+\mu+\sigma}^{(\pm)}(\sigma, e_0) - J_{\mu-\mu-\sigma}^{(\pm)}(\sigma, e_0)] \quad (3.125)$$

для  $\sigma$  четного

$$J_{\mu, n}^{\pm}(e_0) = \mu^{\sigma-1} [-J_{\mu+\mu+\sigma}^{(\pm)}(\sigma, e_0) + J_{\mu-\mu-\sigma}^{(\pm)}(\sigma, e_0)]$$

для  $\sigma$  нечетного.

При  $\sigma = 0$  будет:

$$J_{\mu, n}^{\pm}(e_0) = \mu^{-1} [J_{\mu+\mu+\sigma}^{(\pm)}(0, e_0) + J_{\mu-\mu-\sigma}^{(\pm)}(0, e_0)], \quad \mu^{-1} = 1.$$

Так как по свойству функции  $J_{\mu, n}^{\pm}(e_0)$

$$J_{\mu+\mu+\sigma}^{(+)}(0, e_0) = J_{\mu-\mu-\sigma}^{(+)}(0, e_0) = \frac{1}{2}$$

для  $\mu = n = \lambda = 0$  и

$$J_{\mu+\mu+\sigma}^{(-)}(0, e_0) = J_{\mu-\mu-\sigma}^{(-)}(0, e_0) = 0$$

для остальных  $\mu, n, \lambda$ , то

$$J_{\mu, n}^{\pm}(0, e_0) = 1,$$

и формула (3.124) может быть написана в виде:

$$(\text{ch} nu - \text{sh} nu) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(e - e_0)^s}{s!} \sum_{\mu=0}^{\infty} J_{\mu, n}^{\pm}(e_0) (\text{ch} \mu u_0 - \text{sh} \mu u_0). \quad (3.126)$$

Подставим теперь выражение (3.126) в формулу (3.101) для разложения главной части пертурбационной функции. Мы получим это разложение в следующей формуле:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} = & \frac{2}{\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+\lambda} \sum_{l=0}^{\infty} b_{k, l}^{(\lambda)} \sum_{p=0}^k A_{p, k}^{(\lambda)} \sum_{r=0}^p \frac{(e - e_0)^r}{s!} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(e - e_0)^{\mu}}{\sigma!} \times \\ & \times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} J_{\mu, n}^{\pm}(e_0) [\text{ch} \mu u_0 - \text{sh} \mu u_0] [F_{\mu, n}^{(\lambda)}(e_0) \cos(p\omega + q\bar{\omega} + r\tau) - \\ & - \Phi_{\mu, n}^{(\lambda)}(e_0) \sin(p\omega + q\bar{\omega} + r\tau)]. \end{aligned} \quad (3.127)$$

Положим

$$\frac{1}{s!} \cdot \frac{1}{\sigma!} \sum_{\mu=0}^{\infty} F_{\mu, n}^{(\lambda)}(e_0) J_{\mu, n}^{\pm}(e_0) = \chi_{\mu, n, s}^{(\lambda)}(e_0),$$

и

$$\frac{1}{s!} \cdot \frac{1}{\sigma!} \sum_{\mu=0}^{\infty} \Phi_{\mu, n}^{(\lambda)}(e_0) J_{\mu, n}^{\pm}(e_0) = \chi_{\mu, n, s}^{(\lambda)}(e_0).$$

Преобразуем двойную сумму по  $s$  и  $\sigma$ .

$$\sum_{s=0}^{\infty} (e - e_0)^s \sum_{\sigma=0}^{\infty} (e - e_0)^{\sigma} [\chi_{\mu, n, s}^{(\lambda)}(e_0) \cos(p\omega + q\bar{\omega} + r\tau) - \chi_{\mu, n, s}^{(\lambda)}(e_0) \sin(p\omega + q\bar{\omega} + r\tau)].$$

Развертывая обе суммы и собирая члены с одинаковыми степенями  $(e - e_0)$ , получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (e - e_0)^k (e - e_0)^n [\chi_{\nu, \nu+k, n}^{(1)}(e_0) \cos(p\omega + q\bar{\omega} + r) - \chi_{\nu, \nu+k, n}^{(2)}(e_0) \sin(p\omega + q\bar{\omega} + r)] = \sum_{k=0}^{\infty} (e - e_0)^k \sum_{n=0}^{\infty} [\chi_{\nu, \nu+k, n}^{(1)}(e_0) \cos(p\omega + q\bar{\omega} + r) - \chi_{\nu, \nu+k, n}^{(2)}(e_0) \sin(p\omega + q\bar{\omega} + r)]. \quad (3.129)$$

Положив

$$\sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\nu, \nu+k, n}^{(1)}(e_0) = \Omega_{\nu, k}^{(1)}(e_0), \quad (3.130)$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\nu, \nu+k, n}^{(2)}(e_0) = \Omega_{\nu, k}^{(2)}(e_0),$$

получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (e - e_0)^k (e - e_0)^n [\chi_{\nu, \nu+k, n}^{(1)}(e_0) \cos(p\omega + q\bar{\omega} + r) - \chi_{\nu, \nu+k, n}^{(2)}(e_0) \sin(p\omega + q\bar{\omega} + r)] = \sum_{k=0}^{\infty} (e - e_0)^k [\Omega_{\nu, k}^{(1)}(e_0) \cos(p\omega + q\bar{\omega} + r) - \Omega_{\nu, k}^{(2)}(e_0) \sin(p\omega + q\bar{\omega} + r)]. \quad (3.131)$$

Подставляя выражение (3.130) в формулу (3.127), получим окончательно:

$$r_j = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{k+l} b_{k,l}^{(j)} \sum_{\nu, \nu+k, l} A_{\nu, \nu+k, l}^{(j)} (e - e_0)^k \times \times \sum_{n=0}^{\infty} (\text{ch } z u_n - \text{sh } z u_n) [\Omega_{\nu, k}^{(1)}(e_0) \cos(p\omega + q\bar{\omega} + r) - \Omega_{\nu, k}^{(2)}(e_0) \sin(p\omega + q\bar{\omega} + r)]. \quad (3.132)$$

Разложения (3.132) получены для случая  $r > a_j$ . Для случая  $a_j > r$  в уравнении (3.132) вместо  $\frac{2}{a}$  будет множитель  $\frac{2}{a}$ , а величина, входящая в формулы (3.85)  $\chi = k - 2l$ .

§ 9. Разложение главной части пертурбационной функции по степеням  $(e - e_0)$  для случая движения по выпуклой к Солнцу ветви гипербол

В случае движения возмущаемой точки по ветви гиперболы, обращенной выпуклостью к Солнцу, т. е. для движения, обусловленного отталкивательной силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния, выражения для косинуса и синуса истинной аномалии даются формулами (3.83)

$$\cos \vartheta = \frac{\text{ch } u + e}{(1 + e \text{ ch } u)}, \quad \sin \vartheta = \sqrt{e^2 - 1} \frac{\text{sh } u}{(1 + e \text{ ch } u)}.$$

Рассмотрим разложение величины  $\frac{1}{(1 + e \text{ ch } u)^2}$  в ряд Лорана. Делая ту же замену переменного, что и для функции  $\frac{1}{(1 - e \text{ ch } u)^2}$ , т. е. полагая  $z = e^{-u}$ , получим:

$$\frac{1}{(1 + e \text{ ch } u)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(e) (\text{ch } nu - \text{sh } nu). \quad (3.133)$$

$P_n(e)$  определяются формулами:

$$P_n(e) = \frac{2^i}{2i\alpha^2} \int_{\beta}^{\alpha} \frac{z^{i-n-1}}{(z^2 + \frac{\beta^2+1}{\beta} z + 1)^2} dz. \quad (3.134)$$

Особые точки подынтегральной функции будут

$$z = -\beta, \quad z = -\frac{1}{\beta}. \quad (3.135)$$

Иначе говоря, коэффициенты этого ряда мы получим, заменив в коэффициентах ряда для вогнутой ветви  $\beta$  и  $-\frac{1}{\beta}$  на  $-e$ . Так как

$$J_n(z, -e) = (-1)^n J_n(z, e), \quad (3.136)$$

то

$$P_n(e) = (-1)^n J_n(z, e). \quad (3.137)$$

Следовательно, разложение для выпуклой к Солнцу ветви гиперболы по кратным аналога эксцентрической аномалии  $u$  будет отличаться от аналогичного разложения для вогнутой к Солнцу ветви только тем, что в соответствующие члены войдет множитель  $(-1)^n$ .

Это разложение будет иметь вид:

$$\frac{1}{r_j} = \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{k+l} b_{k,l}^{(j)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{\nu, \nu+k, l} A_{\nu, \nu+k, l}^{(j)} \times \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e - e_0)^k}{2^k} [F_n(e_0) \cos(p\omega + q\bar{\omega} + r) - \Phi_n(e_0) \sin(p\omega + q\bar{\omega} + r)] (\text{ch } nu - \text{sh } nu). \quad (3.138)$$

Рассмотрим теперь разложение пертурбационной функции для выпуклой к Солнцу ветви по кратным  $u_0$ .

В этом случае аналогом уравнения Кеплера будет уравнение:

$$u = u_0 - (e - e_0) \Phi(u), \quad (3.139)$$

где

$$\Phi(u) = \frac{\text{sh } u}{1 + e_0 \Phi(u)}, \quad \Psi(u) = \frac{\text{sh } u - \text{sh } u_0}{u - u_0}. \quad (3.140)$$

в этом случае ряд Лагранжа для  $\text{ch } nu$  будет иметь вид:

$$\text{ch } nu = \text{ch } nu_0 + n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e - e_0)^k}{2^k} \frac{d^{k-1}}{du_0^{k-1}} \left[ \frac{(-1)^k \text{sh}^k u_0 \text{sh } nu_0}{(1 + e_0 \text{ ch } u_0)^k} \right]. \quad (3.141, a)$$

Для шлн ряд Лагранжа будет:

$$\text{sh } nu = \text{sh } nu_0 + n \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(e - e_0)^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{du_0^{k-1}} \left[ \frac{\text{sh}^k u_0 \text{ch } nu_0}{(1 + e_0 \text{ch } u_0)^k} \right]. \quad (3.141, 6)$$

Разложение величин

$$\frac{\text{sh}^2 u_0 \text{sh } nu_0}{(1 + e_0 \text{ch } u_0)^2}, \quad \frac{\text{sh}^2 u_0 \text{ch } nu_0}{(1 + e_0 \text{ch } u_0)^2}$$

будет отличаться от разложений § 8 только множителем  $(-1)^{k+1}$ , а так как в формулу (3.141, а) и (3.141, 6) уже входит  $(-1)^k$ , а в формулу (3.138) входит  $(-1)^k$ , то разложение для случая выпуклой к Солнцу ветви будет отличаться от аналогичного разложения для вогнутой ветви только множителем в соответствующих членах  $(-1)^k$  и может быть написано в форме:

$$\frac{1}{r_j} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b_{kl}^{(j)} \sum_{p, \nu, \tau, m=0}^{\infty} A_{p\nu\tau}^{(j)} (e - e_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{k+1} [\Psi_{n+1}^{(j)}(e_0) \cos(p\omega + q\bar{\omega} + r\tau) - \Psi_{n+1}^{(j)}(e_0) \sin(p\omega + q\bar{\omega} + r\tau)] (\text{ch } \nu u_0 - \text{sh } \tau u_0), \quad (3.142)$$

где  $\Psi_{n+1}^{(j)}(e_0)$  и  $\Psi_{n+1}^{(j)}(e_0)$  определяются формулами (3.130).

§ 10. Другая форма разложений  $\frac{1}{r_j}$  по степеням  $(e - e_0)$

Для очень малых значений  $u$  и  $e$  близких к единице ряды (3.92) и (3.97) будут сходиться медленно и поэтому практически могут оказаться непригодными. В этом случае мы считаем более удобным или непосредственное разложение величин  $\frac{\text{sh } pu}{(1 - e \text{ch } u)^2}$  и  $\frac{\text{sh } pu}{(1 - e \text{ch } u)^2}$  в ряды Лагранжа по степеням  $(e - e_0)$  или же разложение этих величин по кратным  $u$  и  $e$  в окрестности точки  $z=0$ , а в окрестности точки  $z=1$ . Последние ряды будут сходиться не вдоль всей траектории, а только в некоторой окрестности точки  $z=1$  (перигея). Зависимость радиуса этой окрестности от эксцентриситета исследована нами в одной еще не опубликованной работе.

Ряд Лагранжа для величин  $\frac{\text{sh } pu}{(1 - e \text{ch } u)^2}$  будет иметь вид:

$$\frac{(\text{ch } u - e)^2}{(1 - e \text{ch } u)^2} = \frac{(\text{ch } u_0 - e_0)^2}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^2} + n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(e - e_0)^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{du_0^{k-1}} \left[ (2z + z) \frac{\text{sh}^{k+1} u_0 (\text{ch } u_0 - e_0)^{2k-1}}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{k+2}} \right] + z \frac{\text{sh}^{p-1} u_0 (\text{ch } u_0 - e_0)^{p-1}}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{p+2}} + (z + z) \frac{\text{sh}^{p+1} u_0 (\text{ch } u_0 - e_0)^{p+1}}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{p+2}}.$$

Следовательно, подставляя эти разложения в формулу (3.86), для

$$\frac{\cos pu}{(1 - e \text{ch } u)^2}$$

получим

$$\frac{\cos pu}{(1 - e \text{ch } u)^2} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{2^{p-2m-1} (p-m-1)(p-m-2) \dots (p-2m+1)}{m!} \frac{(\text{ch } u_0 - e_0)^{p-2m}}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{p-2m}} + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{2^{p-2m-1} (p-m-1)(p-m-2) \dots (p-2m+1)}{m!} \left\{ \frac{(\text{ch } u_0 - e_0)^{p-2m}}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{p-2m}} + \right.$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(e - e_0)^\mu}{\mu!} \frac{d^{\mu-1}}{du_0^{\mu-1}} \left[ (2z - 4m + z) \frac{\text{sh}^{p-1} u_0 (\text{ch } u_0 - e_0)^{p-2m-1}}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{p-2m+2}} \right] + z \frac{\text{sh}^{p-1} u_0 (\text{ch } u_0 - e_0)^{p-2m-1}}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{p-2m+2}} + (z + p - 2m) e_0 \frac{\text{sh}^{p+1} u_0 (\text{ch } u_0 - e_0)^{p-2m}}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{p-2m+2}} \left. \right\}. \quad (3.143)$$

Для величин  $\frac{(\text{ch } u - e)^{p-1} \text{sh } u}{(1 - e \text{ch } u)^{p+2}}$  ряд Лагранжа будет:

$$\frac{(\text{ch } u - e)^{p-1} \text{sh } u}{(1 - e \text{ch } u)^{p+2}} = \frac{(\text{ch } u_0 - e_0)^{p-1} \text{sh } u_0}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{p+2}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(e - e_0)^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{du_0^{k-1}} \left[ (2 - z) \frac{\text{sh}^k u_0 (\text{ch } u_0 - e_0)^{p-2}}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{k+2}} \right] + \text{sh}^p u_0 (\text{ch } u_0 - e_0)^{p-2} \left[ \frac{\text{sh}^2 u_0 + (z + z) (\text{ch } u_0 - e_0) \text{ch } u_0}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{p+2}} \right] + (z + z) e_0 \frac{\text{sh}^{p+2} u_0 (\text{ch } u_0 - e_0)^{p-1}}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{p+2}}.$$

Следовательно, разложение для  $\frac{\sin pu}{(1 - e \text{ch } u)^2}$  будет иметь вид:

$$\frac{\sin pu}{(1 - e \text{ch } u)^2} = -\sqrt{e^2 - 1} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{2^{p-2m-1} (p-m-1)(p-m-2) \dots (p-2m)}{m!} \frac{(\text{ch } u_0 - e_0)^{p-2m-1} \text{sh } u_0}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{p-2m}} - \sqrt{e^2 - 1} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{2^{p-2m-1} (p-m-1)(p-m-2) \dots (p-2m)}{m!} \left\{ \frac{(\text{ch } u_0 - e_0)^{p-2m-1} \text{sh } u_0}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{p-2m}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(e - e_0)^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{du_0^{k-1}} \left[ (2 - p + 2m) \frac{\text{sh}^k u_0 (\text{ch } u_0 - e_0)^{p-2m-2}}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{k+2}} \right] + \text{sh}^p u_0 (\text{ch } u_0 - e_0)^{p-2m-2} \left[ \frac{(p-2m) \text{sh}^2 u_0 + (z + p - 2m) (\text{ch } u_0 - e_0)}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{p-2m+2}} \right] \times \right.$$

$$\left. \times (z + p - 2m) e_0 \frac{\text{sh}^{p+2} u_0 (\text{ch } u_0 - e_0)^{p-2m-1}}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{p-2m+2}} \right\}. \quad (3.144)$$

В тех случаях, когда невыгодно разлагать в ряд по степеням  $z = \epsilon^{-1}$  величину  $\frac{1}{(1 - e \text{ch } u)^2}$ , также невыгодно разлагать в ряд по степеням  $z_0 = \epsilon^{-1}$  величину, стоящую в скобках в правых частях уравнений (3.143) и (3.144), так как  $u$  и  $e$  весьма мало отличаются от  $u_0$  и  $e_0$ . В этом случае придется воспользоваться разложением величин  $\frac{\sin pu}{(1 - e \text{ch } u)^2}$  и  $\frac{\cos pu}{(1 - e \text{ch } u)^2}$  в формуле (3.143) и (3.144). Нам кажется, что это не может вызвать особых затруднений ввиду того, что мы всегда можем выбрать  $e_0$  достаточно близким к  $e$ , чтобы ряд (3.143) сходился достаточно быстро. Поэтому в них не придется брать больше трех-четырех произвольных, чтобы вычислить коэффициенты при соответствующих степенях  $(e - e_0)$ . Эти коэффициенты при заданном  $e_0$  будут зависеть от времени через посредство  $u_0$ .

Подставляя разложения (3.143) и (3.144) в ряд для  $\frac{1}{r_j}$ , получим ее разложение в виде:

$$\frac{1}{r_j} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{k+1} b_{kl}^{(j)} \sum_{p, \nu, \tau, m=0}^{\infty} A_{p\nu\tau}^{(j)} (e - e_0)^m \left[ (u_0) \cos(p\omega + q\bar{\omega} + r\tau) + q_2 (u_0) \sin(p\omega + q\bar{\omega} + r\tau) \right], \quad (3.145)$$

где положено

$$f_+(u_0) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{2^{2m-1} p(p-m-1)(p-m-2) \dots (p-2m+1)}{m!} \left\{ \frac{(\text{ch } u_0 - e_0)^{p-2m}}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{p+2m}} + \right.$$

$$+ \frac{1}{sl} \frac{d^{p-1}}{du_0^{p-1}} \left[ (2p-4m+\nu) \frac{\text{sh}^{p+1} u_0 (\text{ch } u_0 - e_0)^{p-2m-1}}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{p+2m+\nu}} + \lambda \frac{(\text{ch } u_0 - e_0)^{p-2m-1} \text{sh}^{p-1} u_0}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{p+2m+\nu+1}} \right] +$$

$$\left. + (\kappa + p - 2m) e_0 \frac{\text{sh}^{p+1} u_0 (\text{ch } u_0 - e_0)^{p-2m}}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{p+2m+\nu+1}} \right\},$$

$$f_-(u_0) = \sqrt{e^2 - 1} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{2^{2m-1} (p-m-1)(p-m-2) \dots (p-2m)}{m!} \left\{ \frac{(\text{ch } u_0 - e_0)^{p-2m-1} \text{sh}^p u_0}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{p+2m}} + \right.$$

$$+ \frac{1}{sl} \frac{d^{p-1}}{du_0^{p-1}} \left[ (2-p+2m) \frac{\text{sh}^p u_0 (\text{ch } u_0 - e_0)^{p-2m-2}}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{p+2m+1}} + \right.$$

$$\left. + (\text{ch } u_0 - e_0)^{p-2m-2} \text{sh}^p u_0 [(p-2m) \text{sh}^2 u_0 + (p-2m+2)(\text{ch } u_0 - e_0) \text{ch } u_0] + \right.$$

$$\left. + (\kappa + p - 2m) \frac{\text{sh}^{p+2} u_0 (\text{ch } u_0 - e_0)^{p-2m-1}}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{p+2m+\nu+1}} \right\}.$$

§ 11. Разложение дополнительной части пертурбационной функции по степеням (e - e\_0)

Рассмотрим теперь разложение дополнительной части пертурбационной функции по степеням приращения эксцентриситета (e - e\_0).  
Для дополнительной части пертурбационной функции в круговой ограниченной задаче трех тел имеет формулу:

$$R_1 = \frac{r \cos \psi}{a_j^2} = \frac{r}{a_j^2} \sum_{p, r, m=1}^{\infty} A_{pr}^{(j)} \cos [p(\psi + \omega) + q\bar{\Omega} + rI].$$

Или а) для эллиптического движения

$$R_1 = \frac{a}{a_j^2} \sum_{p, r, m=1}^{\infty} A_{pr}^{(j)} \sum_{n=0}^{\infty} [F_n(e) + \Phi_n(e)] \cos n E \cos (p\omega + q\bar{\Omega} + rI); \quad (3.146)$$

б) для вогнутой к Солнцу ветви гиперболы

$$R_1 = \frac{a}{a_j^2} \sum_{p, r, m=1}^{\infty} A_{pr}^{(j)} \sum_{n=0}^{\infty} [(ch \alpha - e) \cos (p\omega + q\bar{\Omega} + rI) + \sqrt{e^2 - 1} \text{sh } u \sin (p\omega + q\bar{\Omega} + rI)]. \quad (3.147)$$

Разложив по степеням (e - e\_0) величины cos nE, sh u и ch u, мы получим ряды Лагранжа в виде:

$$R_1 = \frac{a}{a_j^2} \sum_{p, r, m=1}^{\infty} A_{pr}^{(j)} \sum_{n=0}^{\infty} [F_n(e) + \Phi_n(e)] \cdot \left\{ \cos nE_0 - \right.$$

$$- np \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(e - e_0)^m}{m!} \frac{d^{m-1}}{du_0^{m-1}} \left[ \frac{\text{sh}^p E_0 \text{sh } nE_0}{(1 - e_0 \cos E_0)^p} \right] \times \cos (p\omega + q\bar{\Omega} + rI), \quad (3.148)$$

$$p, q = -1, +1, \quad r, n = -1, 0, 1,$$

$$F_{-1}(e) = F_1(e) = \frac{1}{2}, \quad F_0(e) = -e, \quad \Phi_{-1}(e) = -\Phi_1(e) = \sqrt{1 - e^2};$$

б) для вогнутой к Солнцу ветви гиперболы

$$R_1 = \frac{a}{a_j^2} \sum_{p, r, m=1}^{\infty} A_{pr}^{(j)} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \text{ch } nu_0 + n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(e - e_0)^m}{m!} \frac{d^{m-1}}{du_0^{m-1}} \left[ \frac{\text{sh}^p u_0 \text{sh } nu_0}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^p} \right] \times \right.$$

$$\left. \cos (p\omega + q\bar{\Omega} + rI) + \sqrt{e^2 - 1} \left[ \text{sh } nu_0 + np \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(e - e_0)^m}{m!} \frac{d^{m-1}}{du_0^{m-1}} \left[ \frac{\text{sh}^p u_0 \text{ch } nu_0}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^p} \right] \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \sin (p\omega + q\bar{\Omega} + rI) \right] \right]. \quad (3.149)$$

Для выпуклой к Солнцу ветви гиперболы надо в разложении (3.147) перед e, e\_0, \sqrt{e^2 - 1} изменить знаки.

Мы оставляем здесь разложение величины cos nE, ch nu, sh nu в указанной форме. Их разложения по кратным u\_0 (в том случае, когда это целесообразно) получаются из формул (3.148) и (3.149), (3.122) и (3.123), если в них положить l = 1, 1.

Разлагать \sqrt{e^2 - 1} в ряд по степеням (e - e\_0) нецелесообразно.

§ 12. Обзор полученных результатов

Основным результатом, полученным в III части настоящей работы, мы считаем вывод формул для общих членов не применявшихся ранее Тейлоровских рядов по степеням приращения эксцентриситета (e - e\_0) для главной части пертурбационной функции.

Эти ряды являются более общими, чем обычные мажорановские ряды по степеням эксцентриситета, которые получаются из наших рядов, если положить e\_0 = 0. Эти обычные разложения пригодны, кроме того, только для e < 0.6627..., в то время как применяемые нами ряды Тейлора будут годиться (при надлежащем выборе e\_0) для любых e (кроме e = 1) в интервале от 0 до \infty, т. е., в частности, и для гиперболического движения. Кроме того, пользуясь произволом при выборе e\_0, мы можем увеличивать быстроту сходимости наших разложений, выбирая e\_0 достаточно близкими к e.

Как побочный результат этой части можно отметить рассмотрение свойств функций J\_n^\*(z, e) в случае, когда |e| > 1, и, в частности, тот факт, что для случая |e| > 1 и E — чисто мнимого, мы получаем коэффициентами разложения величин \frac{1}{(1 - e \cos E)^p} по степеням z = e^E два вида функций эксцентриситета J\_n^\*(z, e) и J\_n^\*(z, e), которые являются комплексными сопряженными функциями. Каждая из этих функций будет иметь ту же структуру, что и функция J\_n^\*(z, e) для случая |e| < 1 и будет иррациональной функцией, а их сумма J\_n(z, e) будет рациональной функцией эксцентриситета, представляющей собой многочлен, расположенный по степеням \frac{1}{e}.

ЛИТЕРАТУРА

Еленевская Н. Б. 1949. О коэффициентах разложения координат невозмущенного движения в ряд Фурье по кратным эксцентриситетной аномалии. Уч. зап. Ливновск. Гос. ун-та, 15, 4.  
Еленевская Н. Б. 1952. Разложение пертурбационной функции в ряд Фурье относительно inclination, ч. I. Бюлл. ИТА, 5, 2 (65).  
Еленевская Н. Б. 1953. Разложение пертурбационной функции в ряд Фурье относительно inclination, ч. II. Бюлл. ИТА, 5, 5 (66).  
Момсесов Н. А. 1936. Алгебра и небесной механике. Литографированное издание МГУ.  
Субботин М. Ф. 1937. Курс небесной механики. 2. ОНТИ.  
Tisserand F. 1889. Traité de mécanique céleste, I. Paris.  
Поступило в Редакцию  
6 марта 1956 г.

**Разложение пертурбационной функции в ряд Фурье относительно наклонности**

Часть IV. Разложение пертурбационной функции в пространственной ограниченной эллиптической задаче трех точек и в неограниченной задаче  $l$  точек

Н. Б. Еленевская

В настоящей IV части получено разложение по степеням эксцентриситета пертурбационной функции в случае так называемой ограниченной эллиптической задачи, когда возмущаемое тело движется по невозмущенному эллипсу. Разложение проводится двумя методами: Ньютоном и нашим, с применением специальных функций  $J_n^*(x)$ . Полученные разложения содержат наклонность под знаками тригонометрических функций.

Указывается путь получения аналогичных разложений в задаче  $l$  тел.  
 ENTWICKLUNG DER STÖRUNGSFUNKTION IN EINE FOURIERREIHE BEZÜGLICH DER NEIGUNG. IV Teil. ENTWICKLUNG DER STÖRUNGSFUNKTION IM RÄUMLICHEN EINGESCHRÄNKTEN ELLIPTISCHEN DREIKÖRPERPROBLEM UND IM UNERSTRINGIERTEN  $n$ -KÖRPERPROBLEM. — Von N. B. Jelenewskaja. — In dem vorliegenden IV. Teil wird die Entwicklung der Störungsfunction nach den Potenzen der Exzentrizität im räumlichen eingeschränkten, sog. elliptischen Dreikörperproblem für den Fall, wo störender Körper in ungestörter Bahn bewegt, gewonnen. Diese Entwicklung wurde nach zwei Methoden durchgeführt: nach der von Newcomb und der von uns vorgeschlagenen Methode unter Anwendung der Spezialfunktionen  $J_n^*(x, \alpha)$ . Die Bahnneigung geht in die erhaltenen Entwicklungen mittels der trigonometrischen Funktionen ein. Es wird das Ausführungsverfahren für Erhalten analoger Entwicklungen im  $n$ -Körperproblem angedeutet.

**Введение**

В предыдущих частях настоящей работы нами было получено разложение пертурбационной функции в пространственной ограниченной круговой задаче трех точек. Благодаря тому, что по взаимной наклонности разложение велось в тригонометрический, а не в степенной ряд, были получены ряды, сходящиеся для любых значений наклонности, сравнительно простой структуры, так что мы получали возможность писать общие члены этих рядов, чего в классической небесной механике не делалось. Полученное разложение представляет собой кратный ряд по эксцентриситету и отношению больших полуосей, коэффициентами которого являются тригонометрические полные относительно величины: эксцентрисической аномалии  $E$  (или средней аномалии  $M$ ), расстояния перигелия от узла  $\omega$ , величины  $\bar{\Omega} = I_j - \Omega$ , где  $I_j$  — долгота возмущающей точки, а  $\bar{\Omega}$  — расстояние перигелия оскулирующей орбиты от узла и взаимной наклонности орбит  $i$ .

В этой части работы мы хотим дать обобщение этого способа разложения пертурбационной функции на случай эллиптической ограниченной задачи трех точек, а затем — на случай неограниченной задачи  $l$  точек.

Для этого можно идти двумя путями. В первом случае, получив разложение в «дважды круговой» задаче, т. е. когда эксцентриситеты возмущаемой и возмущающей точек  $e$  и  $e_j$  равны нулю, воспользоваться затем методом Ньютома для получения разложений по степеням  $e$  и  $e_j$ . Во втором случае мы не полагаем предварительно

$e = e_j = 0$ , а получаем сразу разложение по некоторым функциям эксцентриситета [функции  $J_n^*(x, \alpha)$ ] и затем преобразовываем полученные ряды в степенные по  $e$  и  $e_j$ . Последний путь кажется нам более удобным, поэтому применение метода Ньютома мы осветим очень кратко и остановимся более подробно на методе функции  $J_n^*(x, \alpha)$ . Несколько это оправдано, будет ясно из последующего изложения.

**§ 1. Применение метода Ньютома к разложению пертурбационной функции в эллиптической задаче трех точек**

Разложения, полученные для «дважды круговой» задачи трех точек, имеют вид:<sup>1</sup>

$$\left(\frac{r}{a}\right)_{00} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k^{(0)} \sum_{p, q, r=-k}^k A_{pqr}^{(k)} \cos p\bar{M} \cos(q\bar{\Omega} + r\bar{i}). \quad (4.1)$$

Здесь положено:  $\Delta$  — взаимное расстояние возмущаемой и возмущающей точек,  $b_k^{(0)}$  — суть коэффициенты Лапласа, нижний индекс которых равен единице,  $A_{pqr}^{(k)}$  — суть некоторые численные коэффициенты:

$$M = M + \omega, \quad \bar{\Omega} = I_j - \bar{\omega}.$$

Применив к разложению (4.1) метод Ньютома в его классической форме, описанной в части I (Еленевская, 1952), а также в работах (Субботин, 1937) и (Newcomb, 1895), где  $r$  — радиус-вектор возмущаемой точки,  $r'$  — радиус-вектор возмущающей точки,  $v$  и  $v_j$  — истинные аномалии.

Если выбрать оси координат так, чтобы ось  $x$  была направлена к перигелию орбиты возмущающей точки (будем в дальнейшем называть ее для простоты Юпитером), то  $v_j = -I_j$ . Тогда

$$\frac{r}{a} = F(\ln \alpha + \bar{i}, \ln \alpha + \bar{i}, M + f, M_j + f_j), \quad (4.2)$$

где

$$f = v - M, \quad f_j = I_j - M_j; \quad \bar{i} = \ln(1 - e \cos E), \quad \bar{i}_j = \ln(1 - e_j \cos E_j).$$

с,  $e_j$ ,  $E$ ,  $E_j$  — суть эксцентриситеты и эксцентрисические аномалии возмущаемой точки и Юпитера.

Разлагая функции (4.2) в ряд Тейлора по степеням малых величин  $f, f_j, \bar{i}, \bar{i}_j$ , получим, пользуясь символической записью, ряд вида:

$$\frac{r}{a} = E^{i_1 + i_2 + i_3 + \dots} F(\ln \alpha, \ln \alpha_j, M, M_j). \quad (4.3)$$

Через  $E$  здесь, как везде, обозначено основание натуральных логарифмов. Выражение (4.3) можно иначе записать в виде:

$$\frac{r}{a} = E^{i_1 + i_2 + i_3 + \dots} E^{i_1 + i_2 + i_3 + \dots} F(\ln \alpha, \ln \alpha_j, M, M_j). \quad (4.4)$$

Т. е. мы сначала символически умножим функцию  $F$  на первый множитель, а затем так же символически умножим результат на второй множитель. Результат первого умножения получим нами в 1 части этой работы в форме:

$$\left(\frac{r}{a}\right)_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p, q, r=-k}^k e^p p_m A_{pqr}^{(k)} \cos[(p+m)M + p\omega + q\bar{\Omega} + r\bar{i}]. \quad (4.5)$$

<sup>1</sup> «Дважды круговой» мы называем такую задачу трех точек, когда эксцентриситеты орбит возмущаемой и возмущающей точек положены равными нулю (Еленевская, 1952).

где  $p_m^*$  есть результат операции, обозначенной символом  $\Pi_m^*$  над коэффициентами Лапласа  $b_{ij}^{(k)}$ , а  $\Pi_m^*$  есть в свою очередь символические полиномы, названные операторами Ньюкома.<sup>1</sup>  $\bar{\Omega} = I_j - \bar{\Omega}$  [в данном случае  $I_j = n_j(t - t_0) = M_j$ ]. Разложение (4.5) можно записать в форме:

$$\left(\frac{\alpha_j}{\Delta}\right) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=-k}^k \lambda_1^s H_{i,s}^*(p, r). \quad (4.6)$$

где  $\lambda_1 = E^{\bar{\Omega}}$ ,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $H_{i,s}^*(p, r)$  — голоморфная функция всех аргументов, кроме  $\bar{\Omega}$ . Умножим символически правую часть уравнения (4.6) на второй множитель в выражении (4.4). Обозначим через  $R_0^{(s)}$  выражение

$$R_0^{(s)} = \sum_{i=0}^s \lambda_1^i H_{i,s}^*(p, r). \quad (4.7)$$

где  $s$  — некоторое фиксированное значение  $k$ . Пусть  $R_0^{(s)}$  — общий член ряда (4.7)

$$R_0^{(s)} = \sum_{i=0}^s \lambda_1^i H_{i,s}^*(p, r). \quad (4.8)$$

Умножая символически  $R_0^{(s)}$  на  $E^{(p_j)^s} \delta_j$ , получим:

$$E^{(p_j)^s} \delta_j R_0^{(s)} = E^{(p_j)^s} \sum_{i=0}^s \lambda_1^i H_{i,s}^*(p, r). \quad (4.9)$$

так как

$$D_j = \frac{\partial}{\partial \Omega} = \sqrt{-1} \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \lambda_1}.$$

Положим  $\gamma_i = E^{\gamma_i - \Omega}$ . Замена теперь в известных разложениях уравнения центра  $I_j - M_j = f_j$  и  $\bar{e}_j = \ln \frac{r}{r_0}$  синусы и косинусы  $M_j$  их выражениями через  $\gamma_i$ , получим разложения этих величин по степеням  $\gamma_i$ . Подставим затем полученные значения  $f_j$  и  $\bar{e}_j$  в функцию  $E^{(p_j)^s} \delta_j R_0^{(s)}$  и разложим эту функцию по степеням  $\gamma_i$  с неопределенными коэффициентами. Приравняв затем коэффициенты в правых и левых частях, получим значения этих коэффициентов в виде символических полиномов  $\Pi_m^*$ .

Итак, член разложения (4.8), содержащий множителем  $I_j^s$ , будет иметь вид:

$$R_{0m}^{(s)} = e_j^s \sum_{m=0}^s \Pi_m^* H_{i,m}^*(p, r). \quad (4.10)$$

Суммируя по  $e_j$  от 0 до  $\infty$ , получим:

$$\frac{\alpha_j}{\Delta} = \sum_{s=0}^{\infty} e_j^s \sum_{m=0}^s \Pi_m^* H_{i,m}^*(p, r). \quad (4.11)$$

Подставляя в разложение (4.11) значение  $H_{i,s}^*$  из формул (4.5), получим:

$$\frac{\alpha_j}{\Delta} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{m=0}^s \sum_{k=0}^s \sum_{l=0}^s \sum_{r=0}^s \sum_{t=0}^s e^{s+k+l+r+t} \Pi_{m+k+l+r+t}^* A_{m+k+l+r+t}^{(k)} \lambda_1^k \cos[(p+m)M + p\omega + r\bar{\Omega} + t\bar{\Omega}] =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{m=0}^s \sum_{k=0}^s \sum_{l=0}^s \sum_{r=0}^s \sum_{t=0}^s e^{s+k+l+r+t} \Pi_{m+k+l+r+t}^* A_{m+k+l+r+t}^{(k)} \cos q(l, \Omega) \cos m'l_j \cos[(p+m)M + p\omega + r\bar{\Omega}] =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{m=0}^s \sum_{k=0}^s \sum_{l=0}^s \sum_{r=0}^s \sum_{t=0}^s e^{s+k+l+r+t} \Pi_{m+k+l+r+t}^* A_{m+k+l+r+t}^{(k)} \cos[(p+m)M + (q+m)M_j + p\omega - q\bar{\Omega} + r\bar{\Omega}].$$

Здесь через  $\Pi_{m+k+l+r+t}^*$  обозначен результат действия на исходный коэффициент  $b_{ij}^{(k)}$  сначала оператора  $\Pi_m^*$ , а затем оператора  $\Pi_{m+k+l+r+t}^*$ . Вычисление операторов  $\Pi_{m+k+l+r+t}^*$  подробно рассмотрено в монографии Б. А. Орлова (1936).

К недостаткам этого способа разложения нужно отнести прежде всего невозможность написания общего члена, потому что мы не знаем общих членов для операторов Ньюкома  $\Pi_{m+k+l+r+t}^*$ .

Работа Б. А. Орлова была написана в 1936 г., а в то время еще не была известна структура общих членов в разложениях уравнения центра  $f$  и  $\ln \frac{r}{r_0}$ , откуда следует невозможность получения общих членов и в операторах Ньюкома.

Общие члены упомянутых разложений получены нами в работах (Еленевская, 1949, 1953).

### § 2. Разложение пертурбационной функции в эллиптической задаче трех точек по функциям $J_n^*(\alpha, e)^2$

Возьмем пертурбационную функцию пространственной ограниченной задачи трех точек в конечном виде:

$$R = k^2 m \left[ \frac{1}{\Delta} - \frac{r \cos \theta}{(r')^2} \right],$$

Здесь  $\Delta$  — взаимное расстояние возмущаемой и возмущающей точек,  $r$  и  $r'$  — радиус-векторы этих точек и  $\theta$  — угол между ними.

Главная часть пертурбационной функции в этом случае определяется формулой:

$$\frac{1}{\Delta} = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta)^{-\frac{1}{2}}, \quad \cos \theta = \cos(v + \omega) \cos(v_j - \bar{\Omega}) + \sin(v + \omega) \sin(v_j - \bar{\Omega}) \cos i. \quad (4.13)$$

Для пространственной круговой ограниченной задачи трех точек, когда  $r_j = a_j$ , нами было получено в части II разложение:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^l A_{k+l-r-s} \sum_{m=0}^{\infty} [F_m(e) + \Phi_m(e)] \cos(nE + p\omega + r\bar{\Omega} + s\bar{\Omega}), \quad (4.14)$$

где  $F_m(e)$  и  $\Phi_m(e)$  некоторые функции эксцентриситета  $e$ , являющиеся линейными комбинациями функций  $J_n^*(\alpha, e)$ .<sup>2</sup> Рассмотрим теперь разложение функции (4.13) в

<sup>1</sup> Подробно о функциях  $J_n^*(\alpha, e)$  сказано в работах (Еленевская, 1949, 1953).  
<sup>2</sup> См. § 5, формула (2.53) и § 6, формула (2.67) (Еленевская, 1953).



эллиптической задаче. Ограничимся случаем, когда отношение  $\frac{r}{r'}$  или  $\frac{r'}{r}$  все время меньше единицы, и обозначим это отношение через  $\bar{r}$ . Тогда  $\frac{1}{\Delta}$  можно написать в виде:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} (1 - 2\bar{r} \cos \theta + \bar{r}^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.15)$$

В данном случае  $\bar{r} = \frac{r'}{r}$  (внешний вариант). Величина, стоящая в скобках в правой части формулы (4.15) будет четной непрерывной периодической функцией  $\theta$ , удовлетворяющей условиям Дирихле. Разлагая ее в ряд Фурье, получим

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{2r} \sum_{l=-\infty}^{\infty} B_l^{(k)} \cos k\theta \quad (4.16)$$

$B_l^{(k)}$  суть однородные функции нулевой степени относительно  $r$ , обращающиеся в известные коэффициенты Лапласа, когда  $r=a$ ,  $r'=a$ . Функции  $B_l^{(k)}$  определяются известными формулами:

$$\frac{1}{2} B_l^{(k)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k+2l-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2k+2l) \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2l} r^{k+l+2m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k+2l-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2k+2l) \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2l} (a)^{k+l+2m} \left( \frac{1-e \cos E_j}{1-e \cos E} \right)^{k+l+2m} \quad (4.17)$$

$$\frac{1}{2} B_l^{(0)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2l} \left( \frac{a}{a} \right)^{2l} \left( \frac{1-e \cos E_j}{1-e \cos E} \right)^{2l} \quad (4.18)$$

Обозначим

$$\left. \begin{aligned} b_{l,l}^{(k)} &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k+2l-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2k+2l) \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2l} \left( \frac{a}{a} \right)^{k+l+2l} \\ b_{l,l}^{(0)} &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2l} \left( \frac{a}{a} \right)^{2l} \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

получим

$$\frac{1}{2} B_l^{(k)} = \sum_{m=0}^{\infty} b_{l,l}^{(k)} \left( \frac{1-e \cos E_j}{1-e \cos E} \right)^{k+l+2m}$$

Разложение  $\frac{1}{\Delta}$  теперь примет вид:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{2r} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b_{l,l}^{(k)} \cos k\theta \left( \frac{1-e \cos E_j}{1-e \cos E} \right)^{k+l+2l} \quad (4.20)$$

Как показано в части II данной работы, разложение величин  $\left( \frac{1-e \cos E_j}{1-e \cos E} \right)^{k+l+2l}$  может быть получено в виде:

$$\frac{\cos k\theta}{(1-e \cos E)^{k+l+2l}} = \sum_{p,q,r,m=-\infty}^{\infty} A_{p,q,r,m}^{(k)} \Psi_r(e) \cos(nE + p\omega + q\bar{\omega} + r\tau) \quad (4.21)$$

Здесь  $\Psi_r(e) = F_r(e) + \Phi_r(e)$ . Подставляя разложение (4.21) в выражение главной части пертурбационной функции  $\frac{1}{\Delta}$  (4.20), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} &= \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b_{l,l}^{(k)} \sum_{p,q,r,m=-\infty}^{\infty} A_{p,q,r,m}^{(k)} \Psi_r(e) \cos(nE + p\omega + q\bar{\omega} + r\tau) (1-e \cos E_j)^{k+l+2l} = \\ &= \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b_{l,l}^{(k)} \sum_{p,q,r,m=-\infty}^{\infty} A_{p,q,r,m}^{(k)} \Psi_r(e) [\cos qv_j \cos(nE + p\omega - q\bar{\omega} + r\tau) - \\ &\quad - \sin qv_j \sin(nE + p\omega - q\bar{\omega} + r\tau)] (1-e \cos E_j)^{k+l+2l} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Выразим величины  $\cos qv_j$  и  $\sin qv_j$  по формулам Эйлера через степени. Мы получим

$$\left. \begin{aligned} \cos qv_j &= \sum_{m=0}^q (-1)^m \frac{2^{q-2m-1} q! (q-m-1)! (q-m-2)! \dots (q-2m+1)!}{m!} \cos^{q-2m} v_j, \\ \sin qv_j &= \sum_{m=0}^{q-1} (-1)^m \frac{2^{q-2m-1} (q-m-1)! (q-m-2)! \dots (q-2m)!}{m!} \cos^{q-2m} v_j \sin v_j, \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

где

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{q}{2} \text{ или } x_1 = \frac{q-1}{2}, \\ x_2 &= \frac{q-2}{2} \text{ или } x_2 = \frac{q-1}{2}, \end{aligned} \right\}$$

в зависимости от того, какое из этих чисел будет целым.

По формулам невозмущенного движения

$$\cos^{q-2m} v_j = \left( \frac{\cos E_j - e_j}{1 - e_j \cos E_j} \right)^{q-2m}; \quad \cos^{q-2m-1} v_j \sin v_j = \sqrt{1 - e_j^2} \frac{(\cos E_j - e_j)^{q-2m-1}}{(1 - e_j \cos E_j)^{q-2m}} \sin nE_j$$

Мы будем здесь поступать так же, как это было сделано во II части. Поэтому нам сейчас необходимо разложить в ряд Фурье величины

$$f(e_j) = \frac{(\cos E_j - e_j)^{q-2m}}{(1 - e_j \cos E_j)^{q-2m-1+1}} \quad (4.24)$$

и

$$g(e_j) = \sqrt{1 - e_j^2} \frac{(\cos E_j - e_j)^{q-2m-1} \sin E_j}{(1 - e_j \cos E_j)^{q-2m-1+1}} \quad (4.25)$$

где  $k = q - 2l + 1$ . Отличие от разложений аналогичных функций в круговой задаче будет состоять только в том, что величина  $x = q - 2m - x + 1$  в данном случае будет отрицательной, и потому в функциях  $J_n(x, e_j)$  аргумент  $x$  будет отрицательным. Как показано в части II, функции  $J_n(x, e)$  от отрицательного аргумента  $x$  представляют собой не бесконечные ряды, а полиномы.

Итак, разложим функции (4.24) и (4.25) в ряды Фурье. Начнем с функции (4.25)

$$f(e_j) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} G_r(q, m', x, e_j) \cos nE_j \quad (4.26)$$

$G_r(q, m', x, e_j)$  как коэффициенты Фурье определяются формулой:

$$G_r(q, m', x, e_j) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{(\cos E_j - e_j)^{q-2m} \cos nE_j}{(1 - e_j \cos E_j)^{q-2m-1+1}} dE_j \quad (4.27)$$

Разложим предварительно величины  $(\cos E_j - e_j)^{q-2m'}$  на элементарные дроби. Мы получим

$$(\cos E_j - e_j)^{q-2m'} = \sum_{s=0}^{q-2m'} (-1)^s \frac{(q-2m')(q-2m'-1)\dots(q-2m'-s+1)}{s! e_j^{s-2m'}} (1 - e_j^2)^{q-2m'-s}. \quad (4.28)$$

Подставляя формулу (4.28) в (4.27), получим

$$G_{m'}(q, m', x, e_j) = \frac{1}{x} \sum_{s=0}^{q-2m'} (-1)^s \frac{(q-2m')(q-2m'-1)\dots(q-2m'-s+1)}{s! e_j^{s-2m'}} (1 - e_j^2)^{q-2m'-s} \int_0^{\pi} \frac{\cos n' E_j dE_j}{(1 - e_j \cos E_j)^2} =$$

$$= \sum_{s=0}^{q-2m'} (-1)^s \frac{(q-2m')(q-2m'-1)\dots(q-2m'-s+1)}{s! e_j^{s-2m'}} (1 - e_j^2)^{q-2m'-s} J_{n'}(x, e_j) \quad (4.29)$$

$$x = q - 2m' - x - s + 1.$$

Аналогично получим разложения для величин

$$\frac{(\cos E_j - e_j)^{q-2m'-1} \sin E_j}{(1 - e_j \cos E_j)^{q-2m'-1}} = \sum_{s=0}^{q-2m'-1} H_{s'}(e_j) \sin n' E_j, \quad (4.30)$$

где

$$H_{s'}(q, m', x, e_j) = \frac{1}{2x} \sum_{r=0}^{q-2m'-1} (-1)^r \frac{(q-2m'-1)(q-2m'-2)\dots(q-2m'-s-r)}{s! e_j^{s-2m'-1}} \int_0^{\pi} \frac{\sin E_j \sin n' E_j dE_j}{(1 - e_j \cos E_j)^2} =$$

$$= \frac{1}{2x} \sum_{r=0}^{q-2m'-1} (-1)^r \frac{(q-2m'-1)(q-2m'-2)\dots(q-2m'-s-r)}{s! e_j^{s-2m'-1}} \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{(\cos(n'-1)E_j - \cos(n'+1)E_j) dE_j}{(1 - e_j \cos E_j)} =$$

$$= \sum_{r=0}^{q-2m'-1} (-1)^r \frac{(q-2m'-1)(q-2m'-2)\dots(q-2m'-s-r)}{s! e_j^{s-2m'-1}} \frac{1}{2} [J_{n-1}'(x, e_j) - J_{n+1}'(x, e_j)]. \quad (4.31)$$

Воспользовавшись рекуррентными соотношениями между функциями  $J_{n'}(x, e_j)$ , получим

$$H_{s'} = \sum_{r=0}^{q-2m'-1} (-1)^r \frac{(q-2m'-1)(q-2m'-2)\dots(q-2m'-s-r)}{s! e_j^{s-2m'-1}} J_{n'}(x+1, e_j). \quad (4.32)$$

Подставляя теперь разложения (4.26) с коэффициентами (4.29) и (4.30) с коэффициентами (4.32) сначала в формулу (4.23), а затем в (4.22), получим

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{x} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_{m,k}^{(q)} \sum_{s=0}^{\infty} A_{s,m,k}^{(q)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi_n(p, x, e) \cdot \sum_{m'=0}^{\infty} [F_{m'}(q, -x+1, e_j) \times$$

$$\cos n E_j \cdot \cos(nE + p\omega - q\Omega + r\tau) - \Phi_{m'}(q, -x+1, e_j) \sin n E_j \sin(nE + p\omega - q\Omega + r\tau)], \quad (4.33)$$

где

$$F_{m'}(q, -x+1, e_j) = \sum_{s=0}^{q-2m'} (-1)^s \frac{(q-2m')(q-2m'-1)\dots(q-2m'-s+1)}{s! e_j^{s-2m'}} (1 - e_j^2)^{q-2m'-s} J_{n'}(x-2m'-s+1, e_j) \times$$

$$\times \sum_{r=0}^{q-2m'-1} (-1)^r \frac{(q-2m')(q-2m'-1)\dots(q-2m'-s-r)}{s! e_j^{s-2m'}} (1 - e_j^2)^{q-2m'-s-r} J_{n'}(x-2m'-s+1, e_j), \quad (4.34)$$

$$\Phi_{m'}(q, -x+1, e_j) = \sqrt{1 - e_j^2} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{2^{q-2m-1} (q-m'-1)(q-m'-2)\dots(q-2m')}{m!} \times$$

$$\times \sum_{s=0}^{q-2m'-1} (-1)^s \frac{(q-2m'-1)(q-2m'-2)\dots(q-2m'-s)}{s! e_j^{s-2m'}} (q-2m'-s) (1 - e_j^2)^{q-2m'-s-1} J_{n'}(q-2m'-x-s, e_j).$$

Преобразовывая в выражении (4.33) произведения синусов и косинусов в разность и сумму косинусов и замечая, что  $\Phi_{m'} = -\Phi_{-m'}$ , а  $F_{m'} = F_{-m'}$ , получим окончательное разложение  $\frac{1}{x}$  по функциям  $J_{n'}(x, e)$  в виде

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b_{k,l}^{(q)} \sum_{p,q,r} A_{p,q,r}^{(q)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi_n(p, x, e) \cdot \Psi_{n'}(q, -x+1, e_j) \times$$

$$\times \cos(nE + n'E_j + p\omega - q\Omega + r\tau). \quad (4.35)$$

Мы получили разложения для внешнего варианта. В случае внутреннего варианта отличие будет состоять только в том, что функции  $\Psi_n(p, x, e)$  и  $\Psi_{n'}(q, -x+1, e_j)$  поменяются местами, т.е. мы будем иметь  $\Psi_{n'}(p, -x+1, e)$  и  $\Psi_n(q, x, e_j)$ .

Чтобы получить теперь разложение  $\frac{1}{x}$  по кратным средней аномалии  $M$ , достаточно подставить в ряд (2.23) выражения  $\cos nE$  и  $\cos n'E_j$  через косинусы  $M$  и  $M_j$  по формулам:

$$\cos nE = a \sum_{s=0}^{\infty} J_{n-s}(se) \frac{\cos sM}{s}, \quad (4.36)$$

где  $J_{n-s}(se)$  суть функции Бесселя от аргумента  $se$ .

Мы получили, таким образом, разложения главной части пертурбационной функции в пространственной и ограниченной эллиптической задаче трех точек. Что касается дополнительной части пертурбационной функции, то ее влияние учитывается точно так же, как в круговой задаче, рассмотренной в части II, поэтому здесь мы на этом останавливаться не будем.

### § 3. Разложение главной части пертурбационной функции в пространственной ограниченной эллиптической задаче трех точек по степеням эксцентриситетов

В части II было показано, что, перегруппировав члены в разложениях величин  $\frac{\cos p\omega}{(1 - e \cos E)}$  и  $\frac{\sin p\omega}{(1 - e \cos E)}$ , мы можем представить эти разложения в виде степенных рядов по эксцентриситету с коэффициентами — тригонометрическими полиномами относительно  $\cos nE$  и  $\sin nE$ . Эти разложения будут иметь вид:

$$\frac{\cos p\omega}{(1 - e \cos E)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} e^n \sum_{k=0}^{\infty} C_k(n, p, x) \cos nE,$$

$$\frac{\sin p\omega}{(1 - e \cos E)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} e^n \sum_{k=0}^{\infty} C_k(n, p, x) \sin nE,$$

$$x = k + 2l + 1. \quad (4.37)$$

\* См. часть II (Евлевская, 1953): § 9, формулы (2.95), (2.97), (2.98); § 10, формулы (2.99), (2.100).

Совершенно аналогично мы можем поступить с величинами

$$\frac{\cos qe_j}{(1 - e_j \cos E_j)^{2+1}} \cdot \frac{\sin qe_j}{(1 - e_j \cos E_j)^{-2+1}} \quad (4.38)$$

Однако в этом случае мы будем иметь принципиальное различие. Дело в том, что величина  $(1 - e_j \cos E_j)$  стоит в знаменателе в отрицательной степени, поэтому аргумент, входящий в функции  $J_n^*(z, e_j)$  этих разложений, будет отрицательным. В этом случае функции  $J_n^*(z, e_j)$  вырождаются в полиномы. Напомним выражения для этих функций при помощи рядов.

$$J_n^*(z, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z(z+1) \dots (z+n+2m-1)}{(n+m)! m!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m},$$

$$J_n^*(-z, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z(z-1) \dots (z-n-2m+1)}{(n+m)! m!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m} \quad (4.39)$$

где  $\nu = \frac{z-n}{2}$  или  $\bar{\nu} = \frac{z-n-1}{2}$  в зависимости от того, какое из этих двух чисел будет целым.

Для получения коэффициентов разложений величини (4.38) по степеням эксцентриситета „Юпитера“  $e_j$ , разложим по степеням  $e_j$  функции  $F_{\nu}^*(q, -x+1, e_j)$  и  $\Phi_{\nu}^*(q, -x+1, e_j)$ . Как было показано в предыдущем параграфе,

$$F_{\nu}^*(q, -x+1, e_j) = \sum_{m=0}^{\nu} (-1)^m \frac{2^{2m-1} q(q-m-1)(q-m-2) \dots (q-2m+1)}{m!} G_{\nu}^*(q, m', x, e_j),$$

$$\Phi_{\nu}^*(q, -x+1, e_j) = \sum_{m=0}^{\nu} (-1)^m \frac{2^{2m-1} (q-m-1)(q-m-2) \dots (q-2m+1)}{m!} H_{\nu}^*(q, m', x, e_j), \quad (4.40)$$

$$x_1 = \frac{q}{2} \text{ или } x_1 = \frac{q-1}{2}, \quad x_2 = \frac{q-1}{2} \text{ или } x_2 = \frac{q-2}{2}.$$

где коэффициенты  $G_{\nu}^*$  и  $H_{\nu}^*$  определяются формулами (4.29) и (4.32).

Разложим по степеням  $e_j$  сначала величину  $G_{\nu}^*$ . Развернем сумму в формуле (4.29) и одновременно возведем  $(1 - e_j^2)$  в соответствующие степени. Мы получим:

$$G_{\nu}^* = \frac{1}{e_j^{2\nu}} \left[ J_{\nu}^*(q-2m'-x+1, e_j) \left[ 1 - (q-2m')e_j^2 + \frac{(q-2m')(q-2m'-1)}{2} e_j^4 - \dots \right] \dots \right. \\ \left. \dots (-1)^{\nu-2m'} e_j^{2(\nu-2m')} \right] - (q-2m') J_{\nu}^*(q-2m'-x, e_j) \left[ 1 - (q-2m'-1)e_j^2 + \dots \right] + \\ + \frac{(q-2m'-1)(q-2m'-2)}{2} e_j^4 - \dots (-1)^{\nu-2m'-1} e_j^{2(\nu-2m'-1)} \dots + \\ + (-1)^{\nu-2m'} \frac{(q-2m'-1) \dots (q-2m'-r+1)}{r!} J_{\nu}^*(q-2m'-x-r+1, e_j) \left[ 1 - (q-2m'-r)e_j^2 + \dots \right] + \\ + \frac{(q-2m'-r-1)(q-2m'-r-1)}{2} e_j^4 - \dots + (-1)^{\nu-r} e_j^{2(\nu-4m'-2r)} \dots + \\ \dots + (-1)^{\nu-2m'} J_{\nu}^*(-x+1, e_j) \left. \right] \quad (4.41)$$

Подставим теперь в формулу (4.41) разложение (4.39). Выберем затем первые члены из функции  $J_{\nu}^*(z, e_j)$ , умноженные на первые члены, стоящие в квадратных скобках формулы (4.41), получим коэффициент при  $e_j^{\nu-4m'+2m'}$ . Затем возьмем первые члены в  $J_{\nu}^*(z, e_j)$ , умноженные на второй член в квадратных скобках и вторые члены  $J_{\nu}^*(z, e_j)$ , умноженные на первые члены в квадратных скобках, получим коэффициент при  $e_j^{\nu-4m'+2m'+2}$ , и т. д.

Мы получим:

$$G_{\nu}^* = \frac{(-1)^{\nu} e_j^{\nu-4m'+2m'}}{2^{\nu}} \left\{ \sum_{r=0}^{\nu-2m'} (-1)^r \frac{(q-2m')(q-2m'-1) \dots (q-2m'-r+1)}{r!} \times \right. \\ \times \frac{(x-q+2m'+r-1)(x-q+2m'+r-2) \dots (x-q+2m'+r-n)}{n!} + \\ + e_j^2 \left[ \sum_{r=0}^{\nu-2m'} (-1)^r \frac{(q-2m')(q-2m'-1) \dots (q-2m'-r+1)}{r!} \times \right. \\ \times \frac{(x-q+2m'+r-1)(x-q+2m'+r-2) \dots (x-q+2m'+r-n-2)}{(n+1)! 2^2} - \\ - (q-2m') \sum_{r=0}^{\nu-2m'-1} (-1)^r \frac{(q-2m'-1)(q-2m'-2) \dots (q-2m'-r)}{r!} \times \\ \times \frac{(x-q+2m'+r-1)(x-q+2m'+r-2) \dots (x-q+2m'+r-n)}{n!} \left. \right] + \\ + e_j^4 \left[ \sum_{r=0}^{\nu-2m'} (-1)^r \frac{(q-2m')(q-2m'-1) \dots (q-2m'-r+1)}{r!} \times \right. \\ \times \frac{(x-q+2m'+r-1)(x-q+2m'+r-2) \dots (x-q+2m'+r-n-4)}{(n+2)! 2^4} - \\ - (q-2m') \sum_{r=0}^{\nu-2m'-1} (-1)^r \frac{(q-2m'-1)(q-2m'-2) \dots (q-2m'-r)}{r!} \times \\ \times \frac{(x-q+2m'+r-1)(x-q+2m'+r-2) \dots (x-q+2m'+r-n-2)}{(n+1)! 2^2} + \\ + (q-2m') \frac{(q-2m'-1) \dots (q-2m'-2)}{2!} \sum_{r=0}^{\nu-2m'-2} (-1)^r \frac{(q-2m'-2)(q-2m'-3) \dots (q-2m'-r-1)}{r!} \times \\ \times \frac{(x-q+2m'+r-1)(x-q+2m'+r-2) \dots (x-q+2m'+r-n)}{n!} \left. \right] + \\ + \dots + e_j^{2\nu} \left[ \sum_{r=0}^{\nu-2m'} (-1)^r \frac{(q-2m')(q-2m'-1) \dots (q-2m'-r+1)}{r!} \times \right. \\ \left. \dots \right] \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{(x-q+2m'+r-1)(x-q+2m'+r-2)\dots(x-q+2m'+r-n'-2\sigma)}{(n'+\sigma)! 2^{2\sigma-2}} \\ & - (q-2m') \sum_{r=0}^{q-2m'-1} (-1)^r \frac{(q-2m'-1)(q-2m'-2)\dots(q-2m'-r)}{r!} \times \\ & \times \frac{(x-q+2m'+r-1)(x-q+2m'+r-2)\dots(x-q+2m'+r-n'-2\sigma+2)}{(n'+\sigma-1)! 2^{2\sigma-2}} + \\ & + \dots + \\ & + (-1)^{\sigma} \frac{(q-2m')(q-2m'-1)\dots(q-2m'-\lambda+1)}{\lambda!} \sum_{r=0}^{q-2m'-\lambda} (-1)^r \frac{(q-2m'-\lambda)(q-2m'-\lambda-1)\dots(q-2m'-\lambda-r+1)}{r!} \times \\ & \times \frac{(x-q+2m'+r-1)(x-q+2m'+r-2)\dots(x-q+2m'+r-2\sigma+2\lambda-n)}{(n'+\sigma-\lambda)! 2^{2\sigma-2\lambda}} + \\ & + (-1)^{\sigma} \sum_{r=0}^{q-2m'-\lambda} (-1)^r \frac{(q-2m'-\sigma)(q-2m'-\sigma-1)\dots(q-2m'-\sigma-r+1)}{r!} \times \\ & \times \frac{(x-q+2m'+r-1)(x-q+2m'+r-2)\dots(x-q+2m'+r-n)}{n!} + \\ & + \dots \end{aligned}$$

Суммирование ведется до некоторой величины  $\bar{\sigma}$ , причем  $\bar{\sigma} = q - 2m'$ , если  $2q - 4m' \geq x$  и  $\bar{\sigma} = \frac{x+q-2m'-n'-1}{2}$  или  $\bar{\sigma} = \frac{x+q-2m'-n'}{2}$ , если  $2q - 4m' < x$ .

Как легко показать

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^{q-2m'-\lambda} (-1)^r \frac{(q-2m'-\lambda)(q-2m'-\lambda-1)\dots(q-2m'-\lambda-r+1)}{r!} \times \\ & \times \frac{(x-q+2m'+r-1)(x-q+2m'+r-2)\dots(x-q+2m'+r-2\sigma+2\lambda-n)}{(n'+\sigma-\lambda)! 2^{2\sigma-2\lambda}} = \\ & = (-1)^{\sigma-\lambda} \frac{(x-q+2m'-1)(x-q+2m'-2)\dots(x-n'-2\sigma+\lambda)(n'+2\sigma-2\lambda)(n'+2\sigma-2\lambda-1)\dots(n'+2\sigma-q+2m'-\lambda+1)}{(n'+\sigma-\lambda)! 2^{2\sigma-2\lambda}} \quad (4.43) \end{aligned}$$

Потому  $G_{\sigma}(q, m', x, e_j)$  можно записать в виде:

$$G_{\sigma} = \sum_{\lambda=0}^{\sigma} e^{i\lambda\pi} \dots K_{\sigma}^{(\lambda)}(q, m', x), \quad (4.44)$$

где

$$\begin{aligned} K_{\sigma}^{(\lambda)}(q, m', x) = & \sum_{r=0}^{\sigma-\lambda} (-1)^r \frac{(q-2m')(q-2m'-1)\dots(q-2m'-\lambda+1)}{r!} \times \\ & \times \frac{(x-q+2m'-1)(x-q+2m'-2)\dots(x-n'-2\sigma+\lambda)(n'+2\sigma-2\lambda)(n'+2\sigma-2\lambda-1)\dots(n'+2\sigma-q+2m'-\lambda+1)}{(n'+\sigma-\lambda)! 2^{2\sigma-2\lambda}} \quad (4.45) \end{aligned}$$

Положим теперь  $n' + 2\sigma - q + 2m' = s'$ . Очевидно, что  $s'$  не может принимать отрицательных значений. Обозначим через  $C_{\sigma}(n', q, -x+1)$  величину:

$$\begin{aligned} C_{\sigma}(n', q, -x+1) = & \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{2^{2\sigma-2m} q (q-2m) (q-2m-1) \dots (q-2m+1)}{m!} \times \\ & \times \sum_{r=0}^x (-1)^r \frac{(q-2m)(q-2m-1)\dots(q-2m-\lambda+1)}{r!} \times \\ & \times \frac{(x-q+2m'-1)(x-q+2m'-2)\dots(x-s'-q+2m'+\lambda)}{(n'+s'+q-2m'-2\lambda)! (s'-n'+q-2m'-2\lambda)!} \times \\ & \times \frac{(s+q-2m'-2\lambda)(s+q-2m'-2\lambda-1)\dots(s-\lambda+1)}{2^{\lambda+q-2m'-2\lambda+1}} \quad (4.46) \end{aligned}$$

Легко доказать, совершенно так же как и в части II, что все коэффициенты  $C_{\sigma}(n', q, -x+1)$  обращаются в нуль, если  $n' \neq q + s' - 2j$ , где  $j = 0, 1, 2, \dots, s$ . Так, например:

$$\begin{aligned} C_0(q, q, -x+1) &= \frac{1}{2}, C_0(q, -x+1) = 0, \quad \forall q \neq q, \\ C_1(q+1, q, -x+1) &= -\frac{1}{2}(x-q-1), C_1(q-1, q, -x+1) = -\frac{1}{2}(x+q-1), \\ C_1(q, q, -x+1) &= 0, \quad \forall q \neq q+1, \forall q \neq q-1. \end{aligned}$$

И вообще

$$\begin{aligned} C_{\sigma}(q+s'-2j, q, -x+1) &= \sum_{m=0}^j (-1)^m \frac{q(q-m-1)(q-m-2)\dots(q-2m+1)}{m!} \times \\ & \times \sum_{r=0}^{j-m} (-1)^r \frac{(q-2m')(q-2m'-1)\dots(q-2m'-\lambda+1)(x-q+2m'-1)(x-q+2m'-2)\dots(x-q+2m'-\lambda+s)}{\lambda! (q+s'-m'-\lambda-j)! (j-m'-\lambda)!} \times \\ & \times \frac{(s'+q-2m'-2\lambda)(s'+q-2m'-2\lambda-1)\dots(s'-\lambda+1)}{2^{\lambda+q-2m'-2\lambda+1}} \quad (4.47) \end{aligned}$$

Таким образом, разложение величин  $\frac{\cos q\sigma y}{(1-e_j \cos E_j)^{\sigma+1}}$  будет иметь вид:

$$\frac{\cos q\sigma y}{(1-e_j \cos E_j)^{\sigma+1}} = \sum_{s'=0}^{\sigma} e^{i s' \pi} \sum_{m=0}^{s'} C_{\sigma}^{s'} \cos n' E_j \quad (4.48)$$

Поступая аналогично с величинами  $\frac{\sin q\sigma y}{(1-e_j \cos E_j)^{\sigma+1}}$ , мы получим их разложения в виде:

$$\frac{\sin q\sigma y}{(1-e_j \cos E_j)^{\sigma+1}} = \sqrt{1-e_j^2} \sum_{s'=0}^{\sigma} e^{i s' \pi} \sum_{m=0}^{s'} C_{\sigma}^{s'} \sin n' E_j \quad (4.49)$$

где коэффициенты  $C_{\sigma}^{s'}$  определяются формулой:

$$C_{\sigma}^{s'}(q+s'-2j, q, -x+1) = \sum_{m=0}^j (-1)^m \frac{(q-m-1)(q-m-2)\dots(q-2m)}{m!} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{k=0}^{j-m'} (-1)^k \frac{(q-2m'-1)(q-2m'-2)\dots(q-2m'-k)}{m!} \times \\ & \times \frac{(x-q+2m'-1)(x-q+2m'-2)\dots(x-q+2m'-s'+k)}{2^{s'-k} k!} \times \\ & \times \frac{(s'+q-2m'-\lambda-1)(s'+q-2m'-\lambda-2)\dots(s'-\lambda+1)}{(q+s'-m'-\lambda-j)!(j-m'-\lambda)!}, \quad s'=x-1. \quad (4.50) \end{aligned}$$

Подставляя, наконец, разложения (4.48), (4.49) и (4.37) в формулу (4.35), получим разложение главной части пертурбационной функции  $\frac{1}{\Delta}$  в виде:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{2}{a} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} b_{pq}^{(1)} \sum_{p'=0}^{\infty} \sum_{q'=0}^{\infty} \sum_{r'=0}^{\infty} A_{p'q'r'}^{(1)} \sum_{n=p+q+r}^{\infty} \sum_{x=n}^{\infty} [C_1(n, p, q, r) + C_2(n, p, q, r) \sqrt{1-e^2}] \times [C_3(n', q, -x+1) + \sqrt{1-e^2} C_4(n', q, -x+1)] \cos(nE + n'E_j + p\Omega - q\Omega - r\tau). \quad (4.51)$$

Особенностью такого разложения пертурбационной функции является прежде всего то, что коэффициентами при соответствующих степенях эксцентриситетов и отношений полусей будут тригонометрические полиномы. Этот результат мы уже получили при разложении пертурбационной функции в круговой задаче. Для эллиптической же задачи интересно отметить еще одну особенность, а именно то, что и по эксцентриситету возмущающей точки  $e_j$  тоже получается не бесконечный ряд, а многочлен, если оставить  $\frac{1}{\Delta}$  в формуле (4.51), т. е. не разлагать в ряд  $\sqrt{1-e_j^2}$ .

Как было указано в работе (Еленевская, 1952), данное разложение особенно удобно для спутниковых задач, когда отношение  $\frac{a}{a_j}$  мало. В эллиптической задаче такое разложение позволит учесть все неравенства, зависящие от эксцентриситета возмущающего тела, например эксцентриситета солнечной (или, что то же, земной) орбиты в теории Луны.

Именно поэтому нами и оставлен неразложенным  $\sqrt{1-e_j^2}$  в формуле (4.51), а время как  $\sqrt{1-e_j^2}$  удобнее разложить, потому что по  $e_j$  мы получаем бесконечный ряд независимо от этого корня. Для случая внутреннего варианта будет как раз наоборот: мы будем иметь бесконечный ряд по  $e_j$  и многочлен по  $e$ , и коэффициенты  $c_1, c_2, c_3$  и  $c_4$  поменяются местами. Разложение  $\frac{1}{\Delta}$  в этом случае будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} = & \frac{2}{a_j} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} b_{pqr}^{(1)} \sum_{p'=0}^{\infty} \sum_{q'=0}^{\infty} \sum_{r'=0}^{\infty} A_{p'q'r'}^{(1)} \sum_{n=p'+q'+r'}^{\infty} \sum_{x=n}^{\infty} [c_1(n, p, q, r) + \\ & + \sqrt{1-e^2} c_2(n, p, q, r)] \cdot [c_3(n', q, x) + \\ & + \sqrt{1-e^2} c_4(n', q, x)] \cos(nE + n'E_j + p\Omega - q\Omega - r\tau). \quad (4.52) \end{aligned}$$

Именно поэтому нам кажется, что разложение пертурбационной функции при помощи функций  $F_n(x, e)$  удобнее, чем при помощи метода Ньюкома. Кроме того, вычисление коэффициентов  $c_i$  значительно проще вычисления операторов Ньюкома, и, наконец, здесь мы имеем возможность писать общий член разложения.

#### § 4. Разложение дополнительной части пертурбационной функции

Разложение дополнительной части, как и всегда, производится достаточно элементарно. В самом деле, мы имеем формулу:

$$R_1 = \frac{r \cos \theta}{(r')^2} = \frac{a}{a_j^2} \frac{(1-e \cos E)}{(1-e_j \cos E_j)^2} \quad (4.53)$$

или:

$$\begin{aligned} R_1 = \frac{r \cos \theta}{(r')^2} = & \frac{a}{a_j^2} [\cos(v+\omega) \cos(v_j-\Omega) + \sin(v+\omega) \sin(v_j-\Omega) \cos i] \frac{(1-e \cos E)}{(1-e_j \cos E_j)^2} = \\ = & \frac{a}{a_j^2} \frac{(1-e \cos E)}{(1-e_j \cos E_j)^2} \sum_{p, q, r=-1}^1 A_{pqr}^{(1)} \cos(pv + p\omega + qv_j - q\Omega + r\tau). \quad (4.54) \end{aligned}$$

Выделим сначала из общей суммы синус и косинус истинной аномалии. Мы получим:

$$\begin{aligned} R_1 = \frac{a}{a_j^2} \frac{(1-e \cos E)}{(1-e_j \cos E_j)^2} \sum_{p, q, r=-1}^1 A_{pqr}^{(1)} [\cos pv \cos(p\omega + qv_j - q\Omega + r\tau) - \\ - \sin pv \sin(p\omega + qv_j - q\Omega + r\tau)], \quad (4.55) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_1 = \frac{a}{a_j^2} \frac{1}{(1-e_j \cos E_j)^2} \sum_{p, q, r=-1}^1 A_{pqr}^{(1)} [F_n(-1, p, e) + \Phi_n(-1, p, e)] \times \\ \times \cos(nE + p\omega + qv_j - q\Omega + r\tau). \quad (4.56) \end{aligned}$$

Поступая затем так же с величиной  $v_j$ , получим:

$$\begin{aligned} R_1 = \frac{a}{a_j^2} \frac{1}{(1-e_j \cos E_j)^2} \sum_{p, q, r=-1}^1 A_{pqr}^{(1)} [F_n(-1, p, e) + \Phi_n(-1, p, e)] \times \\ \times [\cos qv_j \cos(nE + p\omega - q\Omega + r\tau) - \sin qv_j \sin(nE + p\omega - q\Omega + r\tau)] = \\ = \frac{a}{a_j^2} \sum_{p, q, r=-1}^k A_{pqr}^{(1)} \sum_{n=|p+q+r|}^{\infty} [F_n(-1, p, e) + \Phi_n(-1, p, e)] [F_n(2, q, e_j) + \Phi_n(2, q, e_j)] \times \\ \times \cos(nE + n'E_j + p\omega - q\Omega + r\tau). \quad (4.57) \end{aligned}$$

$F_n(-1, p, e)$ ,  $\Phi_n(-1, p, e)$  имеют чрезвычайно простые выражения, именно:

$$F_{-1}(-1, -1, e) = F_{-1}(-1, 1, e) = F_{-1}(-1, -1, e) = F_{-1}(-1, 1, e) = \frac{1}{2},$$

$$F_n(-1, -1, e) = F_n(-1, 1, e) = -e,$$

$$\Phi_{-1}(-1, -1, e) = \Phi_{-1}(-1, 1, e) = \frac{1}{2} \sqrt{1-e^2},$$

$$\Phi_n(-1, 1, e) = \Phi_n(-1, -1, e) = -\frac{1}{2} \sqrt{1-e^2},$$

$$\Phi_n(-1, -1, e) = \Phi_n(-1, -1, e) = 0.$$

Что касается  $F_{\nu}(2, q, e_j)$  и  $\Phi_{\nu}(2, q, e_j)$ , то тут дело обстоит сложнее. Выразим  $F_{\nu}(2, q, e_j)$  и  $\Phi_{\nu}(2, q, e_j)$  через функции  $J_{\nu}^*(\alpha, e)$ . Мы имеем:

$$\frac{\cos \nu j}{(1 - e_j \cos E_j)^{\nu}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{\nu}(2, 1, e_j) \cos n E_j,$$

где

$$F_{\nu}(2, 1, e_j) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos \nu E_j - e_j}{(1 - e_j \cos E_j)^{\nu}} \cos n E_j dE_j = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\nu-1)E_j + \cos(\nu+1)E_j - 2e_j \cos n E_j}{(1 - e_j \cos E_j)^{\nu}} dE_j = \\ = \frac{1}{2} [J_{\nu-1}^*(3, e_j) + J_{\nu+1}^*(3, e_j)] - e_j J_{\nu}^*(3, e_j)$$

или, по свойству функций  $J_{\nu}^*(\alpha, e)$ ,

$$F_{\nu}(2, 1, e_j) = \frac{1}{2} \frac{d}{de_j} J_{\nu}^*(2, e_j) - e_j J_{\nu}^*(3, e_j). \quad (4.59)$$

Далее

$$\frac{\sin \nu j}{(1 - e_j \cos E_j)^{\nu}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_{\nu}(2, 1, e_j) \sin n E_j,$$

где

$$\Phi_{\nu}(2, 1, e_j) = \frac{\sqrt{1-e_j^2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \nu E_j \sin n E_j}{(1 - e_j \cos E_j)^{\nu}} dE_j =$$

$$\frac{\sqrt{1-e_j^2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\nu-1)E_j - \cos(\nu+1)E_j}{(1 - e_j \cos E_j)^{\nu}} dE_j = \frac{\sqrt{1-e_j^2}}{2\pi} [J_{\nu-1}^*(3, e_j) - J_{\nu+1}^*(3, e_j)].$$

Вспользовавшись рекуррентными соотношениями между функциями  $J_{\nu}^*(\alpha, e)$ , получим:

$$\Phi_{\nu}(2, 1, e_j) = \frac{e_j}{2e_j} \sqrt{1-e_j^2} J_{\nu}^*(2, e_j). \quad (4.60)$$

Итак, для получения полного разложения пертурбационной функции необходимо заменить в формуле разложения ее главной части  $\frac{1}{\Delta}$  коэффициент

$$2b_{1,0}^{(0)} [F_{\nu}(2, p, e) + \Phi_{\nu}(2, p, e)] [F_{\nu}(-1, q, e_j) + \Phi_{\nu}(-1, q, e_j)]$$

через

$$2b_{1,0}^{(0)} [F_{\nu}(2, p, e) + \Phi_{\nu}(2, p, e)] [F_{\nu}(-1, q, e_j) + \Phi_{\nu}(-1, q, e_j)] - \\ - \frac{a}{c_j^2} [F_{\nu}(-1, p, e) + \Phi_{\nu}(-1, p, e)] [F_{\nu}(2, q, e_j) + \Phi_{\nu}(2, q, e_j)]. \quad (4.61)$$

Выражения для функций  $F_{\nu}(-1, p, e)$  и  $\Phi_{\nu}(-1, p, e)$  даются формулами (4.58), а для функций  $F_{\nu}(2, q, e_j)$  и  $\Phi_{\nu}(2, q, e_j)$  — формулами (4.59) и (4.60).

Если же мы хотим получить разложение  $R_1$  по степеням эксцентриситета, то нужно просто подставить в формулу (4.61) выражения для  $F_{\nu}(-1, p, e)$ ,  $\Phi_{\nu}(-1, p, e)$ ,  $F_{\nu}(2, q, e_j)$ ,  $\Phi_{\nu}(2, q, e_j)$  из формул (4.58), (4.59) и (4.60), причем в формулах (4.59) и (4.60) надо заменить функции  $J_{\nu}^*(\alpha, e_j)$  и производные от них их выражениями при помощи бесконечных рядов по  $e_j$ .

Мы видим, что в случае внешнего варианта ограниченной эллиптической задачи трех точек дополнительная часть  $R_1$  порит нам разложение пертурбационной функции  $R$  в том смысле, что разложение по  $e_j$  уже будет не многочленом, а бесконечным рядом. Зато для внутреннего варианта мы будем иметь многочлен по степеням  $e$  (если не считать  $\sqrt{1-e^2}$ ), причем члены, содержащие  $e$  в дополнительной части, будут очень просты. Они даются формулами (4.58). Как уже было указано, внутренний вариант (спутниковые задачи) является для нас наиболее интересным.

Тем не менее, мы и для внешнего варианта можем получить конечные выражения относительно  $e_j$ , если взять разложение дополнительной части в формуле (4.56). Оно, правда, сложнее обычного ряда с числовыми коэффициентами, но все же представляет собой (в сочетании с разложением  $\frac{1}{\Delta}$ ) явное выражение пертурбационной функции через аргументы, что и требуется для интегрирования уравнения Лагранжа.

### § 5. Разложение пертурбационной функции в неограниченной задаче $n$ точек

Пертурбационная функция в неограниченной задаче  $n$  точек представляет собой сумму  $n-2$  членов совершенно одинаковой конструкции, именно:

$$R_g = k^2 \sum_{s=1}^{n-1} m_s \left( \frac{1}{\Delta_g} - \frac{r_s \cos \theta_s}{r_s^2} \right), \quad g \neq s, \quad (4.62)$$

где

$$\Delta = \sqrt{r_s^2 + r_g^2 - 2r_s r_g \cos \theta_s},$$

$k^2$  — постоянная Гаусса,  $r_s$  и  $r_g$  — соответствующие радиус-векторы точек  $s$  и  $g$ , а  $\theta_s$  — угол между этими радиусами-векторами.

Из формул (4.62) видно, что получив разложение для одного из членов суммы, мы получим разложение для всех остальных членов простой заменой индексов.

Поэтому рассмотрим разложение только одного из таких членов. Принципиальным отличием неограниченной от схемы от всех ограниченных является то, что здесь мы не можем выбрать за основную плоскость движения какой-нибудь точки, потому что ни одно из движений в данном случае уже не будет плоским.

Рассмотрим положение оскулирующих орбит трех точек с индексами 0, 1, 2 в некоторый фиксированный момент времени (см. рисунок).

Здесь положено:  $\Omega_1, \Omega_2$  — восходящие узлы оскулирующих орбит,  $i_1, i_2$  — наклонность орбит к некоторой основной плоскости,  $P_1, P_2$  — перигелии орбит,  $P_1, P_2$  — положения движения точек,  $\theta_s$  — угол между радиусами-векторами точек.

$J$  — взаимная наклонность оскулирующих орбит.

Считая, что движение происходит относительно точки с индексом 0 (Солнце), получим член пертурбационной функции для точки с индексом 1, зависящий от разложения точки с индексом 2, в виде:

$$R_1^{(1)} = k^2 m_2 \left( \frac{1}{\Delta_{1,2}} - \frac{r_1 \cos \theta_1}{r_2^2} \right). \quad (4.63)$$

Соответствующий член пертурбационной функции для точки с индексом 2 будет:

$$R_{2,1}^{(2)} = k^2 m_1 \left( \frac{1}{a_{2,1}} - \frac{r_2 \cos \theta_1}{r_1^2} \right), \quad (4.64)$$

$$\Delta_{2,1} = \Delta_{1,2}.$$

Обозначим долготы планет в орбитах через  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Эти долготы можно представить в виде:

$$\omega_1 = \tau_1 + W_1, \quad \omega_2 = \tau_2 + W_2,$$

где  $\tau_1 = \Omega_1 + N_1$ ,  $\tau_2 = \Omega_2 + N_2$ , а  $W_1$  и  $W_2$  суть долготы планет, считаемые от точки пересечения орбит. Причем  $W_1 = \Pi_1 + v_1$ ,  $W_2 = \Pi_2 + v_2$ , если  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  — расстояния перигелиев орбит от точки их пересечения, а  $v_1$  и  $v_2$  — истинные аномалии планет.

Из сферического треугольника  $\Omega_1 \Omega_2 k$  легко можно найти

$$\cos \theta_1 = \cos W_1 \cos W_2 + \sin W_1 \sin W_2 \cos J, \quad (4.65)$$

$$\text{или} \quad \cos \theta_1 = \cos(v_1 + \Pi_1) \cos(v_2 + \Pi_2) + \sin(v_1 + \Pi_1) \sin(v_2 + \Pi_2) \cos J. \quad (4.66)$$

Из сопоставления формул (4.63), (5.64) и (5.66) с формулами (5.12) и (5.13) мы видим, что их структура совершенно аналогична. Поэтому мы сразу можем написать разложение для  $\Delta_{1,2}$  в виде:

$$\frac{1}{\Delta_{1,2}} = \frac{2}{\sigma_1} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} b_{l,m}^{(1)} \sum_{p=0}^k A_{p,p}^{(1)} \sum_{s=-\infty}^{\infty} [F_s(x, p, e) + \Phi_s(x, p, e)]$$

$$\times [F_s(-x+1, q, e) + \Phi_s(-x+1, q, e)] \cdot \cos(n_1 E_1 + n_2 E_2 + p\Pi_1 + q\Pi_2 + rJ).$$

$$\text{Или же в виде:} \quad \frac{1}{\Delta_{1,2}} = \frac{2}{\sigma_1} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} b_{l,m}^{(1)} \sum_{p=0}^k A_{p,p}^{(1)} \sum_{s=0}^l e_1^s e_2^{l-s} \sum_{n_1=p+1, n_2=p+1}^{l-1} [C_s(n_1, p, x) +$$

$$+ \sqrt{1-e_1^2} C_s(n_1, p, x)] \times [C_s(n_2, q, -x+1) + \sqrt{1-e_2^2} C_s(n_2, q, -x+1)] \times \cos(n_1 E_1 + n_2 E_2 + p\Pi_1 + q\Pi_2 + rJ). \quad (4.67)$$

Здесь  $x = k + 2l + 1$ ,  $\bar{x} = x - 1 = k + 2l$ . Здесь нам нет смысла раздвигать наружный и внутренний варианты задачи, так как мы всегда сможем переменить обозначения так, чтобы было  $r_1 > r_2$ . В этой задаче также нет смысла оставлять неразделенными  $\sqrt{1-e^2}$ , так как мы не различаем здесь возмущающей и возмущаемой точек.

Поэтому формулу (4.67) удобнее переписать в виде:

$$\frac{1}{\Delta_{1,2}} = \frac{2}{\sigma_1} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} b_{l,m}^{(1)} \sum_{p=0}^k A_{p,p}^{(1)} \sum_{s=0}^l e_1^s e_2^{l-s} \sum_{n_1=p+1, n_2=p+1}^{l-1} [C_s(n_1, p, x) + \bar{C}_s(n_1, p, x)] \times$$

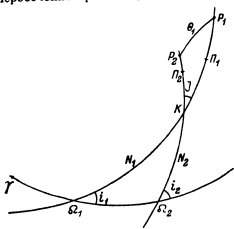


Рис. 7.

$$\times [C_s(n_2, q, -x+1) + \bar{C}_s(n_2, q, -x+1)] \cdot \cos(n_1 E_1 + n_2 E_2 + p\Pi_1 + q\Pi_2 + rJ). \quad (4.68)$$

Причем здесь  $\bar{C}_s$  определяется по тем же формулам, что и  $C_s$ , после замены в последних  $x$  на  $-x+1$  [см. часть II, § 9, формулы (2.96) и (2.98)].

Объединяя, наконец, все числовые коэффициенты при соответствующих членах в один и считая их исправленными за разложение дополнительной части, получим:

$$R_{1,2}^{(2)} = \frac{2}{\sigma_1} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} b_{l,m}^{(2)} \sum_{p=0}^k \sum_{s=0}^l e_1^s e_2^{l-s} \sum_{n_1=p+1, n_2=p+1}^{l-1} D_{p,p}^{(2)} \cos(n_1 E_1 + n_2 E_2 + p\Pi_1 + q\Pi_2 + rJ). \quad (4.69)$$

Интересно отметить, что функция  $R_{1,2}^{(2)}$ , зависящая от двенадцати элементов, после ее разложения представлялась девятичленным рядом. Это произошло потому, что, во-первых, разложение велось по отношению полюсов, во-вторых, по взаимной наклонности, и, в-третьих, как будет показано дальше, элементы  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  входят в разложение только в комбинации  $\Omega_1 - \Omega_2$ .

### § 6. Преобразование уравнений Лагранжа:

В предыдущем параграфе мы получили разложение пертурбационной функции в формуле (4.69), нам остается теперь выразить  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  через элементы орбит ( $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  суть расстояния перигелиев оскулирующих орбит от точки их пересечения). Из рисунка видно, что  $\Pi_1 = \tau_1 - \tau_2$ ,  $\Pi_2 = \tau_2 - \tau_1$ , где  $\tau_1$  и  $\tau_2$  — долготы перигелиев и  $\tau_1 = \Omega_1 + N_1$ ,  $\tau_2 = \Omega_2 + N_2$ . Мы можем выразить величины  $N_1$  и  $N_2$  через элементы орбит по формулам:

$$\begin{aligned} \sin \frac{J}{2} \sin \frac{(N_1 + N_2)}{2} &= \sin \frac{1}{2} (\Omega_2 - \Omega_1) \sin \frac{1}{2} (i_2 + i_1), \\ \sin \frac{J}{2} \cos \frac{(N_1 + N_2)}{2} &= \cos \frac{1}{2} (\Omega_2 - \Omega_1) \sin \frac{1}{2} (i_2 - i_1), \\ \cos \frac{J}{2} \sin \frac{(N_1 - N_2)}{2} &= \sin \frac{1}{2} (\Omega_2 - \Omega_1) \cos \frac{1}{2} (i_2 - i_1), \\ \cos \frac{J}{2} \cos \frac{(N_1 - N_2)}{2} &= \cos (\Omega_2 - \Omega_1) \cos \frac{1}{2} (i_2 - i_1). \end{aligned} \quad (4.70)$$

Однако это приводит к чрезвычайно громоздким выражениям. Кроме того, в этом случае надо выразить через элементы орбит и взаимную наклонность  $J$ , а это спорит нам простую зависимость от наклонности. Поэтому мы считаем более удобным применить преобразование, аналогичное преобразованию Леверье при разложении пертурбационной функции по степеням  $\sin^2 \frac{J}{2}$ . Именно, полагаем

$$\omega_1 = \tau_1 + \tau_2 - \tau_1 = \Pi_1 + \tau_2,$$

получим:

$$\Pi_1 = \omega_1 - \tau_1, \quad \Pi_2 = \tau_2 - \tau_1. \quad (4.71)$$

Положим для сокращения

$$\cos \chi = \cos(n_1 E_1 + n_2 E_2 + p\Pi_1 + q\Pi_2 + rJ) = \cos \chi. \quad (4.72)$$

Тогда  $\cos \chi$  можно записать в виде.

$$\begin{aligned} \cos \chi &= \cos(n_1 E_1 + n_2 E_2 + p\omega_1 - p\tau_1 + q\tau_2 - q\tau_1 + rJ) = \\ &= \cos(n_1 E_1 + n_2 E_2 + p\pi_1 + p(\tau_2 - \tau_1) + q\pi_2 - (p+q)\tau_1 + rJ). \end{aligned} \quad (4.73)$$

Так как разность  $\tau_2 - \tau_1$  зависит только от  $i_1, i_2, \Omega_2 - \Omega_1$  (Субботин, 1937), то очевидно, что  $\frac{\partial R_2}{\partial \tau_2} = \frac{\partial R_1}{\partial \tau_1}$ .

Напишем уравнения Лагранжа в форме:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \cdot \frac{\partial R}{\partial a}, \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{1}{na^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial e}, \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{\operatorname{cosec} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial \Omega} - \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left( \frac{\partial R}{\partial \omega} + \frac{\partial R}{\partial e} \right), \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \frac{d\tau}{dt} &= -\frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \cdot \frac{\partial R}{\partial e}, \\ \frac{d\delta}{dt} &= -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{1}{na^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial e}. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Для простоты мы здесь опустим индексы при элементах и пертурбационных функциях  $R_n$ . Так как  $\cos \gamma$  не зависит явно от  $i$  и  $\Omega$ , то производные от  $R$  по этим элементам надо заменять производными по  $\tau_1, \tau_2, \tau_1 - \tau_2$  и  $f$ . Учитывая соотношения (4.71), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial i_1} &= \frac{\partial R}{\partial \tau_2} \frac{\partial \tau_2}{\partial i_1} + \frac{\partial R}{\partial \omega_1} \frac{\partial (\tau_2 - \tau_1)}{\partial i_1} + \frac{\partial R}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial i_1}, \\ \frac{\partial R}{\partial \Omega_1} &= \frac{\partial R}{\partial \tau_2} \frac{\partial \tau_2}{\partial \Omega_1} + \frac{\partial R}{\partial \omega_1} \frac{\partial (\tau_2 - \tau_1)}{\partial \Omega_1} + \frac{\partial R}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \Omega_1}. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Воспользовавшись дифференциальными формулами сферической тригонометрии применительно к сферическому треугольнику  $\delta_1$  к  $\delta_2$ , получим:

$$\begin{aligned} df &= -\cos(\tau_1 - \Omega_1) di_1 + \cos(\tau_2 - \Omega_2) di_2 + \sin i_1 \sin(\tau_2 - \Omega_2) d(\Omega_2 - \Omega_1), \\ df &= -\cos(\tau_1 - \Omega_1) di_1 + \cos(\tau_2 - \Omega_2) di_2 + \sin i_1 \sin(\tau_1 - \Omega_1) d(\Omega_2 - \Omega_1), \\ \sin f d(\tau_1 - \Omega_1) &= \cos f \sin(\tau_1 - \Omega_1) di_1 - \sin(\tau_2 - \Omega_2) di_2 + \sin i_2 \cos(\tau_2 - \Omega_2) d(\Omega_2 - \Omega_1), \\ \sin f d(\tau_2 - \Omega_2) &= \sin(\tau_1 - \Omega_1) di_1 - \cos f \sin(\tau_2 - \Omega_2) di_2 + \sin i_1 \cos(\tau_1 - \Omega_1) d(\Omega_2 - \Omega_1). \end{aligned} \quad (4.76)$$

Отсюда вычисляем нужные нам частные производные.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial i_1} &= -\cos(\tau_1 - \Omega_1), \\ \frac{\partial \tau_2}{\partial i_1} &= \frac{\sin(\tau_1 - \Omega_1)}{\sin f}, \\ \frac{\partial (\tau_2 - \tau_1)}{\partial i_1} &= \operatorname{tg} \frac{f}{2} \sin(\tau_1 - \Omega_1), \\ \frac{\partial f}{\partial \Omega_1} &= -\sin i_1 \sin(\tau_1 - \Omega_1), \\ \frac{\partial \tau_2}{\partial \Omega_1} &= \frac{\sin i_1 \cos(\tau_1 - \Omega_1)}{\sin f}, \\ \frac{\partial (\tau_2 - \tau_1)}{\partial \Omega_1} &= -1 + \cos i_1 - \sin i_1 \cos(\tau_1 - \Omega_1) \operatorname{tg} \frac{f}{2}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Подставляя полученные производные в формулу (4.76), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_1}{\partial i_1} &= \frac{\partial R_1}{\partial \tau_2} \frac{\sin(\tau_1 - \Omega_1)}{\sin f} + \frac{\partial R_1}{\partial \omega_1} \operatorname{tg} \frac{f}{2} \sin(\tau_1 - \Omega_1) - \frac{\partial R_1}{\partial f} \cos(\tau_1 - \Omega_1), \\ \frac{\partial R_1}{\partial \Omega_1} &= -\frac{\partial R_1}{\partial \tau_2} \frac{\sin i_1 \cos(\tau_1 - \Omega_1)}{\sin f} + \frac{\partial R_1}{\partial \omega_1} [-1 + \cos i_1 - \sin i_1 \cos(\tau_1 - \Omega_1) \operatorname{tg} \frac{f}{2}] - \\ &= -\frac{\partial R_1}{\partial f} \sin i_1 \sin(\tau_1 - \Omega_1). \end{aligned} \quad (4.78)$$

Заменяем теперь в уравнениях (4.74) производные по  $i, \Omega$  их выражениями (4.78). Мы получим, снова опуская индексы:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a}, \\ \frac{de}{dt} &= \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{na^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{\cos \varphi \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{na^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial e}, \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{\sec \varphi \operatorname{cosec} i}{na^2} \left\{ -\frac{\partial R}{\partial \tau} \frac{\sin i \cos(\tau - \Omega)}{\sin f} + \frac{\partial R}{\partial \omega_1} [\cos i - 1 - \sin i \cos(\tau - \Omega) \operatorname{tg} \frac{f}{2}] - \right. \\ &= \left. -\frac{\partial R}{\partial f} \sin i \sin(\tau - \Omega) \right\} - \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2} \sec \varphi \left( \frac{\partial R}{\partial \omega} + \frac{\partial R}{\partial e} \right), \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2} \sec \varphi \left[ \frac{\sin(\tau - \Omega)}{\sin f} \cdot \frac{\partial R}{\partial \tau} + \operatorname{tg} \frac{f}{2} \sin(\tau - \Omega) \frac{\partial R}{\partial \omega_1} - \cos(\tau - \Omega) \frac{\partial R}{\partial f} \right], \\ \frac{d\tau}{dt} &= \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2} \sec \varphi \left[ \frac{\sin(\tau - \Omega)}{\sin f} \frac{\partial R}{\partial \tau} + \operatorname{tg} \frac{f}{2} \sin(\tau - \Omega) \frac{\partial R}{\partial \omega} - \cos(\tau - \Omega) \frac{\partial R}{\partial f} \right] + \\ &= \frac{\operatorname{ctg} \varphi \partial R}{na^2 \partial e}, \end{aligned} \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{dt} &= \frac{2}{na^2} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\sec \varphi \operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2} \left[ \frac{\sin(\tau - \Omega)}{\sin f} \cdot \frac{\partial R}{\partial \tau} + \operatorname{tg} \frac{f}{2} \sin(\tau - \Omega) \frac{\partial R}{\partial \omega_1} - \right. \\ &= \left. -\cos(\tau - \Omega) \frac{\partial R}{\partial f} \right] + \frac{\cos \varphi \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{na^2} \frac{\partial R}{\partial e}. \end{aligned}$$

Через  $\tau'$  обозначено  $\tau$  с индексом возмущающей точки.

Полагая, согласно Леверье,

$$\begin{aligned} \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} &= \frac{dL}{dt}, & \frac{1}{na^2} \cos \varphi \frac{\partial R}{\partial e} &= \frac{dP_2}{dt}, \\ -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \omega} &= \frac{dP_1}{dt}, & \frac{\sec \varphi \partial R}{na^2 \partial f} &= \frac{dP_3}{dt}, \\ -\frac{1}{na^2} \operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial R}{\partial \omega} &= \frac{dP_5}{dt}, & \frac{\sec \varphi \partial R}{na^2 \sin f} &= \frac{dT}{dt}, \\ & & \frac{\sec \varphi \operatorname{tg} \frac{i}{2} \frac{\partial R}{\partial \omega_1}}{na^2} &= \frac{dV}{dt}, \end{aligned}$$



приводим уравнения (4.79) к виду:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{dL}{dt}, \\ \frac{de}{dt} &= \frac{dP_3}{dt} - \frac{1}{2a} \cos \tau \lg \frac{dL}{dt}, \\ \frac{di}{dt} &= \sin(\tau - \Omega) \frac{dP_4}{dt} + \cos(\tau - \Omega) \left( \frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} \right) - \frac{\lg \frac{1}{2} \sec \tau}{2a} \frac{dL}{dt}, \\ \sin i \frac{d\Omega}{dt} &= -\cos(\tau - \Omega) \frac{dP_4}{dt} + \sin(\tau - \Omega) \left( \frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} \right), \\ \frac{d\tau}{dt} &= \frac{dP_2}{dt} + e \sin i \lg \frac{1}{2} \frac{d\Omega}{dt}, \\ \frac{d\tau}{dt} &= -\frac{dP_1}{dt} + \lg \frac{1}{2} \frac{dP_2}{dt} + \sin i \lg \frac{1}{2} \frac{d\Omega}{dt}. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Мы получили систему уравнений (порядок которой зависит от числа взаимно влияющих точек) такую, что производные, стоящие в правых частях зависят от величин:  $\tau, \tau', \tau''$  и  $i$ .

Разложение пертурбационной функции в пространственной неограниченной задаче  $n$  точек может быть теперь написано в виде:

$$R_p = k^2 \sum_{s=1}^{n-1} m_s R_s^{(s)}, \quad s \neq g, \quad (4.81)$$

где

$$\begin{aligned} R_s^{(s)} &= 2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} b_{l,m}^{(s)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} D_{l,m}^{(s)} r^k p^q \cos \chi, \\ \cos \chi &= \cos [n_s E_s + n_g E_g + p\pi_s + q\pi_g + p(\tau_s - \tau_g) - (p+q)\tau_s], \\ D_{l,m}^{(s)} &= A_{l,m}^{(s)} C_{l,m}(p, \chi, \sigma_s) \bar{C}_s(q, -x+1, \sigma_s), \\ C_{l,m}(p, \chi, \sigma_s) &= C_{2l}(n_s, p, \chi) + \bar{C}_{2l}(n_s, p, \chi), \\ C_{2l}(n_s, q, -x+1, \sigma_s) &= C_{2l}(n_s, q, -x+1) + \bar{C}_{2l}(n_s, q, -x+1). \end{aligned}$$

Коэффициенты  $C_s$  и  $\bar{C}_s$  определяются формулами (2.96), (2.98) части II этой работы<sup>1</sup> и формулами (4.47) и (4.50) этой части.

Все преимущества такого способа разложения, которые имели место для круговой и эллиптической задачи трех точек, остаются в силе и для неограниченной задачи  $n$  точек.

ЛИТЕРАТУРА

Еленинская Н. Б. 1949. О коэффициентах разложения координат невозмущенного движения в ряд Фурье по кратким эксцентрической аномалии. Уч. зап. Львовск. ун-та., 15, 4.  
 Еленинская Н. Б. 1952. Разложение пертурбационной функции в ряд Фурье относительно наклонности. Ч. I. Бюлл. ИТА, 5, 2 (65).  
 Еленинская Н. Б. 1953. Разложение пертурбационной функции по методу Ньюкома. Труды АО АГУ, 6, кн. II. Бюлл. ИТА, 5, 5 (68).  
 Орлов Б. А. 1956. Разложение пертурбационной функции по кратким эксцентрической аномалии. 2. ОНТИ.  
 Субботин М. Ф. 1927. Курс небесной механики. 2. ОНТИ.  
 Newcomb S. 1895. Development of the Perturbative Function in Cosines of Multiples of the Mean Anomalies and of Angles between the Perihelia and Common Node and in Powers of the Eccentricities and Mutual Inclination. Astr. Pap., 5.

Поступило в Редакцию  
6 марта 1956 г.

<sup>1</sup> (Еленинская, 1953).

Бюллетень Института Теоретической Астрономии

T. VI

1957

№ 7 (80)

Симметричная траектория ракеты для полета вокруг Луны

Г. А. Чеботарев

Аннотация построена симметричная траектория для полета ракеты вокруг Луны с возвращением на Землю без затраты горючего в пути.

A SYMMETRICAL ORBIT FOR A FLIGHT AROUND THE MOON, by G. Chebotarev. — In this article the orbit of a rocket for the flight around the moon is calculated. By means of numerical integration the effects of the earth's and moon's gravitational fields are taken into account. No fuel expense is required during the trip.

§ 1. Постановка задачи

В работе решена следующая задача: определить начальные условия движения, при которых ракета, находящаяся при  $t=0$  на поверхности Земли, совершит полет вокруг Луны и вернется на Землю без затрат горючего в пути.

Поместим начало координат в центр Земли; за плоскость  $xy$  примем плоскость орбиты Луны. Пренебрегая эксцентриситетом лунной орбиты, будем рассматривать движение Луны, как круговое.

Возмущения Солнца и планет лежат за пределами точности вычислений, принятой в настоящей работе. Сделанные упрощения не имеют принципиального характера и легко могут быть учтены в случае необходимости.

Пусть в начальный момент  $t_0$  Луна и ракета находятся на оси  $x$ , причем расстояние ракеты от Земли  $x^0$  больше, чем расстояние Луны от Земли  $x_1^0$ , а скорость ракеты равна нулю. При отсутствии возмущений со стороны Луны ракета, двигаясь по оси  $x$ , достигнет поверхности Земли со скоростью, которая равна скорости, необходимой для того, чтобы забросить ракету на исходную высоту  $x_0$ .

Возмущения Луны деформируют прямолинейную траекторию ракеты, и ракета при своем движении из точки  $x^0$ , вообще говоря, уже не коснется поверхности Земли, а пролетит на некотором расстоянии  $r_{min}$  от центра Земли.

Очевидно, что увеличивая начальное значение  $x^0$ , мы увеличиваем расстояние ракеты от Луны  $\Delta x = x^0 - x_1^0$  и этим самым уменьшаем лунные возмущения. Путем последовательных приближений можно добиться того, чтобы выполнялось неравенство

$$r_{min} < R,$$

где  $R$  — радиус Земли.

Изменим теперь движение Луны на обратное. Тогда ракета, двигаясь из точки  $x^0$ , опишет новую траекторию, симметричную той, что построена. Положение и скорость ракеты в момент падения дадут начальные условия, необходимые для того, чтобы забросить ракету в положение  $x^0$ . Обратное движение Луны при этом необходимо заменить на прямое.

Таким образом, построена траектория, состоящая из двух симметричных ветвей, для полета ракеты вокруг Луны с возвращением на поверхность Земли.

В работе приняты следующие численные значения для астрономических постоянных:

средний радиус Лунной орбиты . . . . .	$a_1 = 384400$ км
период обращения Луны . . . . .	$P_1 = 655.72$ часа
масса Луны . . . . .	$m_1 = 0.012277$
радиус Земли . . . . .	$R = 6378$ км
радиус Луны . . . . .	$R_1 = 1740$ км

Принята система единиц: километр, час, масса Земли. В этой системе численное значение постоянной Гаусса будет равно:

$$k = 2.2699 \times 10^6.$$

Все вычисления ведутся с пятью десятичными знаками.

§ 2. Первое приближение

В первом приближении расстояние ракеты от Земли, при  $t=0$ , принято равным 400 000 км. Поэтому начальные условия интегрирования определяются следующими данными:

$$\left. \begin{aligned} x^0 &= 400\,000 \text{ км}, & \dot{x}_0 &= 0, \\ y^0 &= 0, & \dot{y}_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Начальное расстояние ракеты от центра Луны  $\Delta^0 = 15600$  км. Численное интегрирование велось методом Ковалла по хорошо известным формулам:

$$\left. \begin{aligned} x &= f^{-2} + 0.083333f, \\ y &= g^{-2} + 0.083333g, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где

$$\left. \begin{aligned} f &= \omega^2 \bar{x} - \omega^2 k^2 \frac{x}{r^3} + X, \\ g &= \omega^2 \bar{y} - \omega^2 k^2 \frac{y}{r^3} + Y, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} X &= \omega^2 k^2 m_1 \frac{x_1 - x}{\Delta^3}, \\ Y &= \omega^2 k^2 m_1 \frac{y_1 - y}{\Delta^3}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Члены  $X_1 = -\omega^2 k^2 m_1 \frac{x_1}{\Delta^3}$  и  $Y_1 = -\omega^2 k^2 m_1 \frac{y_1}{\Delta^3}$  лежат на пределе точности вычислений и потому отброшены. Интервал интегрирования  $\omega$  принят равным одному часу.

При  $t \geq 100$  часам возмущения становятся незначительными и дальнейшее движение ракеты может рассматриваться как невозмущенное. Для  $t = 100$  часов численное интегрирование дает:

$$\left. \begin{aligned} x &= 40914 \text{ км}, & \dot{x} &= -9575, \\ y &= 72431 \text{ км}, & \dot{y} &= -3209, \\ r &= 83188 \text{ км}, & \Delta &= 301700 \text{ км}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

t (часы)	x (в тыс. км)	y (в тыс. км)	r (в тыс. км)	x <sub>1</sub> (в тыс. км)	y <sub>1</sub> (в тыс. км)	Δ (в тыс. км)
18.07	169.4	-36.6	173.3	221.0	-314.5	282.7
28.07	221.9	-34.6	224.6	250.1	-291.9	258.8
38.07	264.1	-31.1	255.9	276.9	-266.6	235.3
48.07	299.0	-26.7	300.2	301.1	-238.9	212.1
58.07	328.1	-22.0	328.8	322.6	-209.0	187.1
68.07	352.4	-17.2	352.8	341.1	-177.2	160.3
78.07	372.6	-12.4	372.8	356.5	-143.8	132.0
88.07	389.0	-7.8	389.1	368.6	-109.0	103.0
98.07	401.9	-3.8	401.9	377.4	-73.2	73.6
108.07	411.1	-0.9	411.0	382.6	-36.8	45.7
118.07	414.9	0	414.9	384.4	0	30.5
128.07	410.3	+0.5	410.3	382.6	+36.8	45.6
138.07	400.4	+3.5	400.4	377.4	+109.0	103.0
148.07	386.8	+7.6	386.8	368.6	+209.0	212.0
158.07	359.6	+12.3	359.6	356.5	+266.6	236.0
168.07	348.6	+17.2	349.0	341.1	+291.9	259.5
178.07	323.3	+22.2	324.5	322.6	+314.5	284.7
188.07	293.2	+27.0	294.8	301.1	+238.9	212.0
198.07	257.0	+31.4	259.3	276.9	+143.8	132.0
208.07	213.2	+34.9	216.4	250.1	+73.2	73.6
218.07	158.2	+36.7	162.7	221.0	-314.5	282.7

Скорости выражены в единице времени, равной  $\omega$  суткам, и их следует разделить на  $\omega k$  перед выводом элементов. Элементы вычисляются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} r\dot{r} &= x\dot{x} + y\dot{y}, & e \sin E &= \frac{r\dot{r}}{\sqrt{a}}, \\ V^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2, & e \cos E &= rV^2 - 1, \\ \frac{1}{a} &= \frac{2}{r} - V^2, & M &= E - e \sin E, \\ \sin \pi &= \frac{y}{r} \cos E - \dot{y} \sqrt{a} \sin E, \\ \cos \pi &= \frac{x}{r} \cos E - \dot{x} \sqrt{a} \sin E. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Интересующие нас параметры оскулирующего эллипса равны:

$$\left. \begin{aligned} a &= 235200 \text{ км}, \\ e &= 0.85980, \\ r_{\text{min}} &= 32975 \text{ км}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Таким образом, ракета пролетит на расстояние 26 597 км от поверхности Земли.

§ 3. Второе приближение

Во втором приближении увеличиваем начальное расстояние ракеты от Луны, полагая  $\Delta^0 = 31600$  км. Как показало интегрирование в первом приближении интервал  $\omega$  может быть значительно увеличен. Полагам поэтому  $\omega = 2$  часа.

Начальные условия для второго приближения:

$$\left. \begin{aligned} x^0 &= 416000 \text{ км}, & \dot{x}_0 &= 0, \\ y^0 &= 0, & \dot{y}_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Для  $t=100$  часов численное интегрирование дает следующие результаты:

$$\begin{aligned} x &= 169374 \text{ км}, & \dot{x} &= -11920, \\ y &= 36585 \text{ км}, & \dot{y} &= +134, \\ r &= 173280 \text{ км}, & \dot{r} &= 282670 \text{ км}. \end{aligned} \quad (9)$$

Вычисляем оскулирующую орбиту для  $t=100$  часов.

$$\begin{aligned} a &= 215200 \text{ км}, & M &= -23^{\circ}70, \\ e &= 0.97598, & \pi &= 176^{\circ}32, \\ n &= 1^{\circ}303 \text{ (в час)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Пренебрегая, как и в первом приближении, возмущениями при  $t > 100$  часов, вычислим перигелиальное расстояние кометы:

$$r_{\text{min}} = 5169 \text{ км.}$$

Таким образом, ракета при своем движении обязательно коснется поверхности Земли.

Условия падения находим из равенства  $r=R=6378 \text{ км}$ .

$$\begin{aligned} M &= -0^{\circ}16, \\ V &= 11080 \text{ м/сек.} \end{aligned} \quad (11)$$

Зная среднюю угловую скорость ракет  $n$ , легко вычислить, что расстояние  $\Delta M = 23^{\circ}54$  по невозмущенной траектории, от момента  $t_{100}$  до момента падения, ракета пройдет за время  $\Delta t = 18.07$  часов. Таким образом, общее время движения от точки  $x^0$  до момента падения на поверхность Земли составляет 118.07 часов, или 4.92 суток. В силу симметричности второй ветви траектории, относительно оси  $x$ , начальные условия движения для полета вокруг Луны определяются следующими параметрами:

$$\begin{aligned} a &= 215200 \text{ км}, & M &= +0^{\circ}16, \\ e &= 0.97598, & \pi &= 183^{\circ}18. \end{aligned} \quad (12)$$

Начальная скорость  $V_0 = 11080$  м/сек. Общая продолжительность полета ракет 236.14 часа или 9.84 суток. Наибольшее расстояние ракет от Земли 416000 км. Наименьшее расстояние ракет от поверхности Луны 29360 км.

В работе дано только схематическое решение поставленной задачи.

Дальнейшее исследование должно идти в трех направлениях:

1. Изучение устойчивости построенной траектории относительно начальных условий движения.
2. Изучение влияния ошибок принятых астрономических постоянных на движение ракет.
3. Переход к реальной задаче в результате отката от сделанных в настоящей работе упрощений.

#### § 4. Контрольные вычисления

В заключительной работе было проведено контрольное вычисление всего пути ракет от старта на поверхности Земли до обратного возвращения на Землю. Исходными данными послужили эллиптические элементы (12). В течение первых 18.07 часов полета ракеты рассматривались как невозмущенные. Основные величины, характеризующие вычисленное движение, приведены в таблице. По часовым данным этой таблицы легко

виден эффект накопления ошибок в процессе численного интегрирования. Необходимо отметить также неточности исходных данных (12), которые получены в результате численного интегрирования. Оскулирующая эллиптическая орбита вычислена для момента  $t_{100}$ :

$$\begin{aligned} a &= 214247 \text{ км}, \\ e &= 0.97524, \\ r_{\text{min}} &= 5313 \text{ км}. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, ракета при своем движении по невозмущенной орбите коснется поверхности Земли. Контрольные вычисления выполнены научным сотрудником Института М. С. Волковым.

#### § 5. Основные этапы завоевания межпланетного пространства

Какое практическое значение имеет задача, рассмотренная в настоящей работе? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо сказать несколько слов об основных этапах завоевания межпланетного пространства. Можно отметить три основных этапа в организации межпланетных перелетов:

I этап — полеты неуправляемых ракет;

II этап — полеты управляемых ракет-автоматов;

III этап — полеты пассажирских управляемых ракет.

Для того чтобы забросить в межпланетное пространство ракету, лишенную собственных запасов горючего (и, следовательно, неуправляемую), весом в несколько килограммов, необходимо построить трехступенчатую ракету, стартовый вес которой будет равен 16.8 т. Но уже при полезном весе третьей ступени в 100 кг стартовый вес ракеты увеличивается до 62.4 т (по другому варианту — 90.9 т). Для создания искусственного спутника с полезным грузом 36 т общий вес трехступенчатой ракеты должен равняться 7000 т, из которых 90% составляет горючее (проект Брауна). Для сравнения укажем, что стартовый вес  $V_1-2$  составляет всего 12.9 т.

Таким образом, возможности современной техники не выходят пока за пределы реализации I этапа межпланетных сообщений (неуправляемых ракет). Осуществление II и III этапов потребует, по-видимому, принципиально нового решения вопроса о толкающей ракете. Кроме того, осуществление III этапа связано с рядом трудных и далеко идущих задач. Помимо биологического и медицинского характера (особую сложность еще не ясных вопросов биологического действия космического излучения).

Какие же задачи могут быть решены на I этапе с помощью неуправляемых ракет?

Укажем три такие задачи.

1-я задача. Создание искусственных спутников Земли. Орбиты спутников могут быть весьма разнообразны.

2-я задача. Полет на Луну. Хотя ракета не несет с собой никакого полезного груза и не может затормозить свое падение на поверхность Луны, научное значение такого перелета чрезвычайно велико.

3-я задача. Полет вокруг Луны с возвращением на Землю. Для торможения ракеты в атмосфере Земли используются парашютные и плавательные устройства. Осуществление этого проекта даст возможность сфотографировать невидимое с Земли полушарие Луны.

Все три задачи, приблизительно одинаковой технической трудности, будут, вероятно, решены одна за другой в течение ближайших пяти-десяти лет.

Однако с точки зрения небесной механики вторая, и особенно третья, задача много сложнее, чем первая. На разработку этих двух задач и должно быть обращено внимание астрономов, интересующихся вопросами космонавтики.

В списке литературы укажем основные работы, вышедшие на русском языке.

## ЛИТЕРАТУРА

- Коварятюк Ю. В. 1947. Завоевание межпланетных пространств. Оборонгиз, 84 стр.  
 Кош И. и И. Ютеибогарт. 1950. Динамика ракет. Оборонгиз, 328 стр.  
 Оберт Г. 1948. Пути осуществления космических полетов. Оборонгиз, 232 стр.  
 Рымки Н. А. 1928—1932. Межпланетные сообщения, вып. 1—9.  
 Цвицер Ф. А. 1947. Проблема полета при помощи ракетных аппаратов. Оборонгиз, 240 стр.  
 Цыбаковский К. Э. 1951. Арктика. Собр. соч., 1, АН СССР, 268 стр.  
 Цыбаковский К. Э. 1954. Реактивные летательные аппараты. Собр. соч., 2, АН СССР, 455 стр.  
 Штернфельд А. 1937. Введение в космонавтику. ОНТИ, 320 стр.  
 Эно-Пельтра Р. 1950. Космические полеты. Оборонгиз, 148 стр.

Поступило в Редакцию  
3 апреля 1956 г.

## Бюллетень Института Теоретической Астрономии

Т. VI

1957

№7 (80)

## Новые элементы восьми малых планет

О. Н. Бартенева

Приводятся новые элементы малых планет 247, 344, 536, 680, 747, 794, 1339 и 1415, полученные в результате улучшения их орбит.  
 NEW ELEMENTS OF EIGHT MINOR PLANETS, by O. N. Barthenova. — New elements of minor planets 247, 344, 536, 680, 747, 794, 1339 and 1415 are given, improved by differential correction from some oppositions. Special perturbations from Jupiter or Jupiter and Saturn have been included.

В настоящей статье приводятся результаты улучшения орбит 8 планет: 247 Eukrate, 344 Desiderata, 536 Geneva, 680 Genoeva, 747 Winchester, 794 Irenaea, 1339 Désag-neuxa и 1415 Malauta, — для которых в Институте теоретической астрономии было выполнено численное интегрирование уравнений движения в прямоугольных координатах. Интегрирование велось с учетом возмущений от Юпитера и Сатурна (для планет 536, 747 и 1339) или только от Юпитера (для остальных пяти планет). Шаг интегрирования был различен: 40 дней для планет 536 и 1339 и 20 дней для остальных. Улучшение элементов проводилось по методу Энкерта—Брауера (Самойлова-Яхонтова, 1944). При улучшении моменты оскуляции для всех планет перенесены на более поздние моменты. С исправленными элементами численное интегрирование в прямоугольных координатах было повторено. Шаг интегрирования для всех планет сохранен первоначальным. После интегрирования вновь произведены сравнения с наблюдениями. Результаты представлены в табл. 1—9. В этих таблицах звездочками отмечены наблюдения, участвовавшие в исправлении.

## 247 Eukrate

Планета 247 Eukrate открыта в 1885 г. в Дюссельдорфе.  
 За исходные элементы при интегрировании взяты элементы Лютера (Luther, Эфемериды малых планет на 1948 год, ч. 2). Улучшение элементов выполнено дважды по 4 оппозициям 1950—1954 гг.

## Элементы

Эпоха и оскуляция 1951 декабрь 20.0 вс. вр.			
$M = 351^{\circ}65353$	1950.0	$P_s = 0.5876291$	}
$\omega = 53.68907$		$P_p = 0.5369784$	
$\Omega = 0.33970$		$P_i = 0.6050712$	
$i = 25.07132$			
$q = 14.01702$		$Q_s = -0.8089812$	
$\mu = 781^{\circ}81120$		$Q_p = 0.3878575$	
$\sigma = 2.7411733$		$Q_i = 0.4417153$	

Таблица 1  
Сравнения с наблюдениями планеты 247 Eukrate

№ по порядку	Дата	Наблюдения		До улучшения		После 2-го улучшения		Место наблюдения
		$\alpha_{1950.0}$	$\delta_{1950.0}$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	
*1	май 22.92905	18°26'31.74	-57°04'29.2	+1°00'49	-1'49.2	-0.27	-6.9	Иоганнесбург
	2 июль 31.72261	17 09 55.79	-55 36 51.4	+ 44'91	- 4'00.4	- 0.54	- 8.1	
	3 сентябрь 13.74659	17 16 49.26	-49 28 40.6	-	-	-22.78	-34.6	
1951	4 август 31.06568	1 11 05.17	+ 8 49 04.0	-	-	- 0.10	+ 2.9	Уэльс
	5 сентябрь 29.825	0 40 11.0	+13 49 49	+4*50'8	+85 13	+ 0.1	+ 6	
	*6 октябрь 10.02508	0 25 24.04	+15 09 42.3	+4 44.91	+89 02.0	+ 0.61	+ 6.1	
	7 октябрь 23.87658	0 06 39.75	+16 34 17.9	-	-	- 0.12	+11.7	
1953	8 март 7.90420	11 41 07.02	+ 9 53 12.5	+2 04.11	-44 46.8	-15.77	- 8.2	Мадрид
	9 март 9.91700	11 39 02.3	+ 9 52.28	-	-	+ 0.3	- 9	
	*10 март 10.85250	11 37 56.35	+ 9 52 01.4	-	-	- 0.28	-11.2	
	11 март 11.95700	11 36 39.3	+ 9 51 23	-	-	+ 0.3	-15	
*12 апрель 1954	8.97466	15 20 06.54	-44 07 10.8	+1 06.75	- 8.492	+ 0.60	- 5.6	Иоганнесбург

Наблюдения 3 и 8 (Иоганнесбург и Мадрид), повидному, ошибочны.

344 Desiderata

Планета 344 Desiderata открыта в 1892 г. Шардуа (Charlois) в Ницце. Карштедт (Kahrstedt) получил систему оскулирующих элементов планеты на основании наблюдений в 6 оппозициях за годы 1922—1938 с учетом возмущений от Юпитера. Однако в дальнейшем возмущения не вычислялись, и с 1941 г. публиковались невозмущенные эфемериды планеты. Вследствие этого разности наблюдений с вычислениями, постепенно увеличиваясь, дошли в 1950 г. до  $\Delta\alpha = -11.6$ . Поэтому решено было сделать улучшение орбиты планеты с учетом возмущений, приняв за исходные элементы Карштедта с оскуляцией 1941 (Kahrstedt, Kleine Planeten, 1941). Оказалось, что одного только учета возмущений было достаточно, чтобы уменьшить разности в 1950 г. до  $\Delta\alpha = +1.5$ . В результате улучшения получена приведенная ниже система оскулирующих элементов.

Элементы

Эпоха и оскуляция 1946 июль 29.0 в. ср.

$M = 24.32601$	} 1950.0	$P_2 = +0.2065543$
$\omega = 295.20508$		$P_3 = -0.7614637$
$\Omega = 46.58687$		$P_4 = -0.6144172$
$i = 18.51077$		
$q = 18.10610$		$Q_2 = 0.9490215$
$\mu = 047.40868$		$Q_3 = 0.3087325$
$a = 2.5978200$		$Q_4 = -0.0635792$

Таблица 2  
Сравнения с наблюдениями планеты 344 Desiderata

№ по порядку	Дата	Наблюдения		До улучшения		После улучшения		Место наблюдения
		$\alpha_{1950.0}$	$\delta_{1950.0}$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	
1	ноябрь 1938	7.94						Турку
	ноябрь 16.89	2°55'2	+14°55'	+ 0°2	0'	0°0	-3'	
*3	апрель 19.89	12 03.9	+20 47	+ 0.4	-3	0.0	0	"
	апрель 21.95	12 02.0	+20 35	-	-	-0.1	-1	
*5	ноябрь 1942	8.71	1 42.6	+ 1 34	+ 0.1	+ 4	0.0	Китаб
	ноябрь 1946	28.90882	0°20'01.09	-16°59'53.4	+24'93	+5'57.5	0.0	
*7	сентябрь 1950	5.83908	22 16 22.94	-48 04 44.9	+1°29'28	+8 12.9	0.2	Иоганнесбург
	сентябрь 7.83916	22 14 30.03	-47 44 06.1	+1 26.94	+7 59.5	0.2	+1	

536 Merapi

Планета 536 Merapi открыта в 1904 г. Петерсом (Peters) в Вашингтоне. Позднее Я. П. Цукеряник улучшил ее орбиту по 4 оппозициям 1922—1928 гг. с учетом возмущений от Юпитера. Он же вычислил возмущения планеты и давал ее эфемериды до 1942 г. Численное интегрирование в прямоугольных координатах перед улучшением произведено по элементам Я. П. Цукеряника (Цукеряник, Kleine Planeten, 1942). Улучшение элементов выполнено дважды по 4 оппозициям 1939—1951 гг.

Элементы

1. Эпоха и оскуляция 1949 март 25.0 в. ср.

$M = 195.92619$	} 1950.0	$P_2 = 0.9559158$
$\omega = 297.83480$		$P_3 = 0.1095472$
$\Omega = 60.28860$		$P_4 = -0.2724408$
$i = 19.38659$		
$q = 4.68394$		$Q_2 = 0.0557411$
$\mu = 541.37537$		$Q_3 = 0.8432388$
$a = 3.5021816$		$Q_4 = 0.5346413$

2. Эпоха и оскуляция 1957 июль 11.0 в. ср.

$M = 291.70272$	} 1950.0	$P_2 = 0.9498399$
$\omega = 294.02352$		$P_3 = 0.0505336$
$\Omega = 60.10121$		$P_4 = -0.3086266$
$i = 19.39180$		
$q = 5.14884$		$Q_2 = 0.1222887$
$\mu = 542.25709$		$Q_3 = 0.8482685$
$a = 3.4983847$		$Q_4 = 0.5152533$

Таблица 3  
Сравнения с наблюдениями планеты 536 Мегри

№ по пор.	Дата	Наблюдения		До улучшения		После 2-го улучшения		Место наблюдения
		$\alpha_{1950.0}$	$\delta_{1950.0}$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	
*1	ноябрь 1939 6.93	$3^h13^m4$	$+11^{\circ}19'$	-4"9	-53"	-0"2	-2"	Уккл
2	декабрь 1940 28.83	8 08.4	+41 01	-7.4	+3	-0.2	+1	Турку
3	январь 1941 1.88	8 05.0	+41 26	-7.5	+2	-0.3	0	-
*4	январь 21.90111	$7^h40^m43^s90$	$+43^{\circ}13'50.2$	-7"37.05	-355.0	-16.00	+31.2	Альбир
5	январь 29.80946	7 38 23.38	+43 18 03.9	-8 13.54	-312.5	-54.07	-147.6	Вюрцбург
*6	март 1949 23.56708	$13^h36^m6$	$+10^{\circ}28'$	-7"8	+91"	+0"1	-1"	Сименс
7	март 28.04	13 33.4	+10 44	-8.1	+93	-0.1	+1	Турку
8	апрель 25.91	13 12.3	+11 24	-8.1	+90	0.0	+1	-
9	август 23.87176	$22^h06^m26^s68$	$-40^{\circ}57'25.0$	-21"30'57"	-1'26'50"	+24"12"	+2.2	Иоганнесбург
*10	сентябрь 5.89549	21 55 39.79	-41 14 09.1	-21 18.14	-1 16 15.0	+24.01	+7.0	-

Наблюдение 5 (Вюрцбург) ошибочно.

680 Gopoueva

Планета 680 Gopoueva открыта Копфом (Kopff) в Гейдельберге в 1909 г. Благодаря своему большому эксцентриситету ( $e=17\%$ ) планета может в афелии сблизиться с Юпитером, а потому ее возмущения довольно велики. Карштедт (Karrstedt) вычислила возмущения планеты за 1909—1932 гг. и улучшила ее орбиту по оппозициям за те же годы. В дальнейшем возмущения не вычислялись, и с 1937 г. планета больше не наблюдалась. Лишь в 1950 г. в Ницце удалось найти планету, причем правая эфемериды составляла  $\Delta\alpha=+12"$ . В 1954 г. Брувер (Bruewer) в Иоганнесбурге открыла новую планету 1954 НС. П. Музен (Musen) вычислила для нее орбиту по трем наблюдениям. На основании сходства элементов Киппеса (Kippes) установил тождество планеты 1954 НС и 680 Gopoueva. Таким образом, из новых наблюдений планеты нам известны только пять точных наблюдений, полученных в Ницце в 1950 г., два приближенных наблюдения 1953 г. (Ницца и Турку) и семь точных наблюдений в Иоганнесбурге 1954 г. (одно приближенное Кюто-Кипаса).

В основу численного интегрирования положены элементы планеты 1954 НС, определенные Музеном (MPC 1098). Проведено улучшение только элементов  $\mu$  и  $M$  по точным наблюдениям в двух оппозициях 1950 и 1954 гг.

Элементы

Эпоха и оскуляция 1954 апрель 20.0 вс. пр.

$M = 228^{\circ}06'12$	1950.0	$P_s = 0.1591571$
$e = 240.57768$		$P_p = -0.7659410$
$\Omega = 40.14965$		$P_s = -0.6228992$
$i = 17.83107$		
$q = 17.24537$		$Q_s = 0.9673087$
$n = 640.28429$		$Q_p = 0.2471665$
$e = 3.1515242$		$Q_s = -0.0567683$

Таблица 4  
Сравнения с наблюдениями планеты 680 Gopoueva

№ по пор.	Дата	Наблюдения		До улучшения		После улучшения		Место наблюдения
		$\alpha_{1950.0}$	$\delta_{1950.0}$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	
1	ноябрь 1950 12.99259	$3^h18^m41^s51$	$+23^{\circ}58'04.8$	-	-	+1"70	+36.7	Ницца
*2	ноябрь 15.91791	3 15 52.10	+23 57 17.7	+1"18'81	-	+11'41.9	+1.41	-
3	ноябрь 30.90552	3 02 13.55	+23 46 56.9	-	-	-	+0.83	-
4	декабрь 1.85806	3 01 26.19	+23 46 02.9	+1 16.94	+11 50.4	-	+0.82	-
5	декабрь 11.83263	2 54 04.53	+23 36 24.8	-	-	-	+0.41	-
6	март 1953 10.50	$9^h58^m9$	$+36^{\circ}25'$	+0"7	-2"	+0"2	+1"	Турку
7	март 14.80	9 55.6	+36 21	+0.5	-2	0.0	+1	-
8	апрель 1954 8.95104	$15^h13^m26^s16$	$-17^{\circ}00'05.8$	-	-	+0"27	+25.9	Иоганнесбург
*9	апрель 28.88507	14 56 52.76	-18 41 19.5	+0"64	+3.4	-0.28	+5.8	-
10	апрель 28.60413	14 57 09	-18 40.1	-	-	-1"	+0.9	Кюто-Кипаса
11	апрель 30.88031	14 54 46.80	-18 50'42.0	-	-	-0.61	+1.2	Иоганнесбург
12	май 23.83023	14 29 56.64	-20 28 14.3	-	-	-1.69	-17.4	-
13	май 28.78194	14 25 18.59	-20 47 30.1	-	-	-2.01	-21.7	-
14	июнь 2.78056	14 21 11.97	-21 06 57.9	-	-	-2.37	-27.0	-
15	июнь 6.88507	14 18 19.78	-21 23 11.2	-0.10	-25.0	-2.52	-30.1	-

747 Winchester

Планета 747 Winchester открыта в 1913 г. Меткофом (Metcalf) в Винчестере. За исходные элементы при интегрировании взяты элементы Чампино (Cimino). Эфемериды малых планет на 1948 г., ч. 2). Улучшение элементов проделано по 4 оппозициям 1949—1954 гг.

Элементы

Эпоха и оскуляция 1951 декабрь 20.0 вс. пр.

$M = 254^{\circ}24'28$	1950.0	$P_s = +0.6645606$
$e = 274.64018$		$P_p = +0.7470948$
$\Omega = 130.76176$		$P_s = -0.0144439$
$i = 18.15130$		
$q = 20.20214$		$Q_s = -0.7090006$
$n = 685^{\circ}58874$		$Q_p = +0.6355431$
$e = 2.9920502$		$Q_s = +0.3035309$

Таблица 5  
Сравнения с наблюдением планеты 747 Winchester

№ по пор.	Дата	Наблюдения		До улучшения		После улучшения		Место наблюдения
		$\alpha_{1950.0}$	$\delta_{1950.0}$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	
1949								
1	январь 24.95266	9 <sup>h</sup> 43 <sup>m</sup> 05 <sup>s</sup> .51	+16 <sup>m</sup> 29 <sup>s</sup> 59.6	+42.90	+50.0	-0.40	+28.8	Ницца
2	январь 31.89072	9 42 29.40	+17 47 46.8	+43.51	+20.0	-0.61	+ 2.9	"
*3	февраль 17.89488	9 27 50.37	+20 46 13.5	—	—	- 9.51	+11.4	Ужаль
1951								
4	апрель 29.98292	16 <sup>h</sup> 45 <sup>m</sup> 5	- 0 <sup>m</sup> 18	+ 0 <sup>m</sup> 2	- 1'	0 <sup>m</sup> 0	0'	Симена
*5	июнь 4.66185	16 <sup>h</sup> 20 <sup>m</sup> 43.73	+ 0 <sup>m</sup> 55 <sup>s</sup> 11.3	+14.02	- 109.6	+ 4.72	-22.8	Навиги
1952								
6	июль 21.61603	20 12 36	-14 <sup>m</sup> 53.3	—	+ 1'	- 0.8	—	Кито-Квасан
7	август 17.01743	19 50 24.04	-18 <sup>m</sup> 33 29.7	+ 47.19	- 156.9	- 0.33	- 2.8	Ла-Палта
*8	август 17.03890	19 50 23.09	-18 33 40.7	+43.53	- 206.1	0.33	+ 2.6	"
1954								
*9	январь 20.98929	8 06 35.64	+14 32 11.2	+1 <sup>m</sup> 30.17	+ 307.9	+ 0.06	+ 0.5	Барселона
10	февраль 3.82153	7 54 44.27	+17 12 20.6	+ 1 27.17	+ 2 59.7	- 0.04	+ 1.8	Мадрид
11	февраль 9.000	7 51 05.2	+18 07 47	—	—	0.0	+ 6'	Таргу
1955								
12	апрель 18.94483	13 11 59.19	+16 12 14.4	—	—	+13.17	-55.3	Ужаль
13	апрель 19.90227	13 11 18.36	+16 15 31.3	—	—	+13.48	-16.7	"
14	май 1.350	13 <sup>h</sup> 03 <sup>m</sup> 7	+16 <sup>m</sup> 41'	—	—	0.0	- 1'	Линк

794 Igepsa

Планета 794 Igepsa открыта в 1914 г. Пализа (Palisa) в Вене.  
За исходные элементы при улучшении орбиты приняты элементы Штеттлера (Stettler). Эфемериды малых планет на 1948 г., ч. 2). Было сделано предварительное улучшение орбиты по двум оппозициям 1952—1953 гг., которые дали возможность составить четыре условных уравнения для определения четырех неизвестных поправок элементов ( $\Delta M$ ,  $\Delta \omega$ ,  $\Delta i$ ,  $\Delta e$ ). Второе исправление орбиты производилось по трем оппозициям 1948—1953 гг., исправлялись все шесть элементов.

Элементы

Эпоха и оскуляция 1951 декабрь 20.0 вс. пр.  
 $M = 309.44156$   
 $\omega = 123.69412$   
 $\Omega = 164.58812$   
 $i = 5.18379$   
 $e = 16.52988$   
 $k = 638.35691$   
 $a = 3.1378246$   
 $P_1 = 0.3135308$   
 $P_2 = -0.8983723$   
 $P_3 = -0.3076134$   
 $Q_1 = 0.5492745$   
 $Q_2 = 0.3047203$   
 $Q_3 = 0.0776123$

Таблица 6

Сравнения с наблюдениями планеты 794 Igepsa

№ по пор.	Дата	Наблюдения		До улучшения		После улучшения		Место наблюдения
		$\alpha_{1950.0}$	$\delta_{1950.0}$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	
1948								
*1	ноябрь 27.94801	3 <sup>h</sup> 43 <sup>m</sup> 07.09	+12 <sup>m</sup> 39 39.3	—	—	+1.92	+10.9	Ужаль
1952								
2	апрель 19.94320	15 <sup>h</sup> 26 <sup>m</sup> 8	-11 <sup>m</sup> 29'	+7.6	-31'	+0.8	- 2'	Симена
*3	апрель 25.08170	15 <sup>h</sup> 23 <sup>m</sup> 04.13	-11 <sup>m</sup> 01'44.4	+6 <sup>m</sup> 59.64	-29 <sup>m</sup> 53.7	+1.86	0.0	Ужаль
1953								
*4	октябрь 14.20068	1 11 18.1	+ 2 46 42.4	- 1 51.62	-23 39.5	+2.85	+13.8	Линк
5	октябрь 14.24859	1 11 15.72	+ 2 46 25.4	- 1 51.71	-23 30.4	+2.74	+13.6	"
6	октябрь 31.14721	0 59 33.31	+ 1 21 20.4	—	—	+2.46	+31.6	"
7	октябрь 31.19235	0 59 31.68	+ 1 21 08.8	—	—	+2.45	+30.9	"
8	ноябрь 5.09556	0 56 50.81	+ 1 03 11.9	—	—	+1.86	+28.5	"
9	ноябрь 5.15004	0 56 49.14	+ 1 03 01.8	—	—	+1.81	+29.0	"

1339 Desagneaux

В 1951 г. Н. Ф. Боева произвела улучшение орбиты планеты 1339 Desagneaux по 4 оппозициям 1946—1951 гг. (Боева, Эфемериды малых планет на 1953 г.). После улучшения представление наблюдений за эти годы оказалось удовлетворительным. Однако планета перестала наблюдаться. Это обстоятельство заставило произвести сравнение с наблюдениями за более ранние годы, продолжив численное интегрирование уравнений движения с элементами Н. Ф. Боевой до 1934 г. Неявки оказались очень большими. Впоследствии было обнаружено, что в улучшении Боевой участвовало одно не принадлежащее планете наблюдение (1951 г. январь 9.96233, Ужаль). Для улучшения орбиты было решено вновь провести численное интегрирование уравнений движения с учетом возмущений от Юпитера и Сатурна, начиная с 1934 г. по 1938 г., взяв за исходные элементы Бое (Boyer). Эфемериды малых планет на 1948 г., ч. 2). Улучшение элементов проделано по 4 оппозициям 1934—1938 гг. С новыми элементами вновь проведено интегрирование до 1951 г. и обнаружено, что два наблюдения новой планеты, открытой в Ужале и получившей предварительное обозначение 1951 AF, в действительности принадлежат планете 1339. Эти наблюдения были использованы при вторичном улучшении, которое было проведено по 5 оппозициям 1942—1951 гг. Наблюдения 1938 и 1941 гг. во втором улучшении не участвовали и являются контрольными.

Элементы

Эпоха и оскуляция 1946 июнь 29.0 вс. пр.  
 $M = 61.32576$   
 $\omega = 160.70531$   
 $\Omega = 291.81210$   
 $i = 8.67738$   
 $e = 2.83300$   
 $k = 675.45012$   
 $a = 3.0211482$   
 $P_1 = -0.0474516$   
 $P_2 = 0.8954276$   
 $P_3 = 0.4426714$   
 $Q_1 = -0.9890041$   
 $Q_2 = 0.0200276$   
 $Q_3 = -0.1465264$

Таблица 7  
Сравнения с наблюдениями планеты 1339 Desavignaux

№ по пор.	Дата	Наблюдения		До улучшения		После 1-го улучшения		Место наблюдения
		$\alpha_{1950.0}$	$\delta_{1950.0}$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	
1	1934 декабрь 16.94470	5 <sup>h</sup> 29 <sup>m</sup> 56 <sup>s</sup> .17	+29°35'28.4"	+1°41'59"	-757.3	-23'10"	+1'07.2"	Алжир
	декабрь 26.00634	5 21 14.20	+29 02 24.6	+1 41.74	-758.3	-22.83	+1 00.3	
3	1936 март 14.99985	11 25 13.89	-8 52 20.4	-46.66	+6 11.2	-13.43	-53.5	-
	март 22.02369	11 19 39.33	-8 23 03.5	-46.12	+6 11.8	-13.39	-54.7	
5	1937 июль 9.93465	16 <sup>h</sup> 45 <sup>m</sup> 3 <sup>s</sup>	-30°23'	+478"	+4'	+0°4'	-1'	Иоганнесбург Алжир
	июль 11.96530	16 <sup>h</sup> 46 <sup>m</sup> 00 <sup>s</sup> .80	-29°56'20.6"	+446.76	+249.3	+20.90	-1'05.3	
7	1938 июль 28.00938	22 19 50.02	-3 00 47.2	+5 02.75	+40 25.3	-	-	Гейдельберг Улья
	август 4.01361	22 15 27.58	-3 02 38.6	+5 11.13	+41 04.7	-2.05	+1 18.9	
	август 24.92178	21 59 24.94	-3 38 14.0	+5 23.45	+41 35.0	-2.28	+1 18.7	
10	1941 февраль 22.83000	10 <sup>h</sup> 02 <sup>m</sup> 0"	+2°59'	-5'0"	+37"	-1°0'	+6"	Симена

Таблица 8  
Сравнения с наблюдениями планеты 1339 Desavignaux

№ по пор.	Дата	Наблюдения		После 1-го улучшения		После 2-го улучшения		Место наблюдения
		$\alpha_{1950.0}$	$\delta_{1950.0}$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	
8	1938 август 4.01361	22 <sup>h</sup> 15 <sup>m</sup> 27 <sup>s</sup> .58	-3°02'38.6"	-2'05"	+1'18.9"	+1'21"	+5.7"	Гейдельберг Улья
	август 24.92178	21 59 24.94	-3 38 14.0	-2.28	+1 18.7	+1 30	+2.3	
10	1941 февраль 22.83000	10 <sup>h</sup> 02 <sup>m</sup> 0"	+2°59'	-1°0'	+6"	+0"	0"	Симена
11	1942 май 23.95068	15 <sup>h</sup> 15 <sup>m</sup> 17 <sup>s</sup> .19	-28°55'33.2"	-36.21	-7.3	+0'70"	-5.1"	Алжир
	июнь 22.89523	14 57 32.37	-26 19 01.8	-32.27	+6.9	+0.66	-5.2	
13	1946 январь 31.95026	8 37 15.89	+14 28 20.6	-2'03.13	+11'24.5"	-0.33	+8.2"	-
	февраль 5.87565	8 32 51.13	+14 32 25.7	-2 02.77	+11 10.1	-0.33	+8.6"	
15	1947 апрель 21.99148	13 58 00.95	-25 21 59.8	-1 29.13	+4 12.9	-0.35	-2.5"	-
	апрель 24.94967	13 55 33.77	-25 08 42.0	-1 29.02	+4 21.8	-0.38	-0.9"	
17	1949 октябрь 16.89692	0 13 09.21	+15 20 50.7	-1 54.99	-11 34.2	-0.88	-3.6"	-
	октябрь 19.88352	0 11 07.72	+15 04 07.1	-1 53.73	-11 34.9	-0.76	-4.8"	
19	1951 январь 9.88722	6 59 04.75	+24 13 52.8	-3 13.03	+11 12.7	-2.01	+11.2"	Улья
	январь 12.95778	6 56 08.36	+24 08 50.0	-3 12.98	+10 46.7	-2.49	+2.2"	
	январь 9.90253	7 22 33.87	+22 45 42.4	+20 18.93	-1°16'46.9"	+23°31'54"	-1°27'52.1"	

Наблюдение 21 (Улья) не принадлежит планете 1339.

1415 Malautra

В 1954 г. опубликованы новые элементы планеты 1415 Malautra, вычисленные по трем наблюдениям, 1949 декабрь—1950 январь (M. P. Pretre. Annales de l'Observatoire Astronomique de Toulouse, 1954).

В Институте теоретической астрономии проведено численное интегрирование в прямоугольных координатах по элементам Претера с учетом возмущений от Юпитера за период времени 1947—1954 гг. Улучшение элементов планеты проведено по наблюдениям в 4 оппозициях за этот же период времени.

Ниже приводятся две системы оскулирующих элементов:

Эпоха и оскуляция 1949 декабрь 23.0 в. вр.

$$\begin{aligned}
 M &= 266729445 \\
 \omega &= 238.60076 \\
 \Omega &= 329.39904 \\
 i &= 3.43175 \\
 P_x &= -0.8821701 \\
 P_y &= -0.4091698 \\
 P_z &= -0.2331438 \\
 Q_x &= 0.4699441 \\
 Q_y &= -0.7963038 \\
 Q_z &= -0.3976008
 \end{aligned}$$

Эпоха и оскуляция 1957 июнь 11.0 в. вр.

$$\begin{aligned}
 M &= 356704205 \\
 \omega &= 239.35616 \\
 \Omega &= 329.25569 \\
 i &= 3.42741 \\
 P_x &= -0.8770888 \\
 P_y &= -0.4176717 \\
 P_z &= -0.2373032 \\
 Q_x &= 0.4795548 \\
 Q_y &= -0.7955524 \\
 Q_z &= -0.3769344
 \end{aligned}$$

Таблица 9

Сравнения с наблюдениями планеты 1415 Malautra

№ по пор.	Дата	Наблюдения		До улучшения		После улучшения		Место наблюдения
		$\alpha_{1950.0}$	$\delta_{1950.0}$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	
1	1947 март 20.91657	10 <sup>h</sup> 38 <sup>m</sup> 11 <sup>s</sup> .08	+6°20'51.7"	-43.26	+6 13.79	-0.77	-8.3"	Алжир
	март 21.91042	10 37 20.65	+6 21 01.7	-43.45	+6 15.6	-0.73	-8.0"	
3	1948 сентябрь 7.27984	22 <sup>h</sup> 42 <sup>m</sup> 02"	-6 52.0	-1'18"	-9.9"	+0'02"	0.0"	Флагстафф Сидней
	сентябрь 8.29984	22 41.01	-6 56.8	-1.14	-10.1"	+0.04"	-0.4"	
	октябрь 3.81986	22 21.3	-8'21"	-	-	+0.2"	+0.2"	
5	1949 декабрь 23.08205	7 <sup>h</sup> 49 <sup>m</sup> 42 <sup>s</sup> .53	+25°15'56.3"	-0'07"	+0'2"	-0'53"	+9.6"	Улья
7	1950 январь 13.92565	7 25 09.09	+25 51 40.0	-0.01	+0.1"	-0.68"	+5.1"	Алжир
	январь 27.89797	7 08 59.42	+25 53 54.9	-0.04	+0.1"	-0.55"	+4.1"	
9	1954 май 4.88889	15 40 01.74	-26 19 36.3	+5°18'19"	-14'49.6"	+0.71"	-20.7"	Иоганнесбург Сидней
	май 31.55664	15 12 48.45	-24 46 28.0	+5 04.30	-18 41.1	+1.02"	-19.9"	



ЛИТЕРАТУРА

Самойлова-Яхонтова Н. С. 1944. Исправление аналитических орбит. Бюлл. ИТА, 3 (53).  
Халина Ф. Б. 1955. Формулы и таблицы для интерполирования особых координат и вычисления компонентов скоростей. Бюлл. ИТА, 6, 2 (75).

Поступило в Редакцию  
6 марта 1956 г.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Н. С. Самойлова-Яхонтова. Малые планеты 1955 г. . . . .	429
Н. Б. Еленевская. Разложение пертурбационной функции в ряд Фурье относительно наклонности. Часть III. Разложение пертурбационной функции в ряд по степеням прецессии эксцентриситета. . . . .	434
Н. Б. Гаскельская. Разложение пертурбационной функции в ряд Фурье относительно наклонности. Часть IV. Разложение пертурбационной функции в пространственной ограниченной аналитической задаче трех точек и в неограниченной задаче л точек . . . . .	466
Г. А. Чеботарев. Симметричная траектория ракеты для полета вокруг Луны . . . . .	467
О. Н. Бартерова. Новые элементы восьми малых планет . . . . .	493

ЛИТЕРАТУРА

Самойлова-Яхонтова Н. С. 1944. Исправление эллиптических орбит. Бюлл. ИТА, 3 (53).  
Ханниа Ф. Б. 1955. Формулы и таблицы для интерполирования осевых координат и вычисления компонент скоростей. Бюлл. ИТА, 6, 2 (75).

Поступило в Редакцию  
6 марта 1956 г.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Н. С. Самойлова-Яхонтова. Малые планеты 1955 г. . . . .	429
Н. Б. Еленевская. Разложение пертурбационной функции в ряд Фурье относительно наклонности. Часть III. Разложение пертурбационной функции в ряд по степеням приращения эксцентриситета. . . . .	434
Н. Б. Еленевская. Разложение пертурбационной функции в ряд Фурье относительно наклонности. Часть IV. Разложение пертурбационной функции в пространственной ограниченной эллиптической задаче трех точек и в неограниченной задаче 4 точек . . . . .	466
Г. А. Чеботарев. Симметричная траектория ракеты для полета вокруг Луны . . . . .	487
О. Н. Бартелева. Новые элементы восьми малых планет . . . . .	493

Утверждено к печати  
Институтом теоретической астрономии  
Академии Наук СССР

Технический редактор М. Е. Зендель.  
Корректоры А. А. Гельфонд и М. П. Казирновский

РИСО АН СССР № 29—4В. Изд. к. н. 23.1  
1957 г. М-10060. Бумага 84 × 108<sup>1</sup>/<sub>2</sub> мм.  
Бум. л. 2<sup>1</sup>/<sub>2</sub>. Печ. л. 7.79. Уч.-изд. л. 8.43.  
Тираж 1000. Заказ 832. Цена 5 р. 90 к.

1-й тип. Изд. АН СССР.  
Ленинград. В-34, 9 линия, 12.

ОПЕЧАТКИ

Страница	Столбец, строка	Напечатано	Должно быть
498	Табл. 5, столбец 1, строка 2 сверху	2	*2
"	Табл. 5, столбец 1, строка 3 сверху	*3	3
"	Табл. 5, столбец 8, строка 7 сверху	-2.8	+2.8

Воллестон ИТА, № 7000

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ  
РЕСПУБЛИК

БЮЛЛЕТЕНЬ ИНСТИТУТА  
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ АСТРОНОМИИ

Том VI, № 8 (81)



ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР  
МОСКВА 1957 ЛЕНИНГРАД

Директор Института Теоретической Астрономии чл.-корр. АН СССР М. Ф. Субботин  
 Ответственный редактор проф. Г. А. Чеботарев

Бюллетень Института Теоретической Астрономии  
 Т. VI 1957 № 8 (81)

### Потенциал земного притяжения

И. Д. Жонкалович

Дается разложение потенциала земного притяжения с точностью до пятого порядка владра слагаем. Делается попытка определить численные коэффициенты этого разложения, используя ранее найденные автором (Жонкалович, 1952) результаты для внешнего гравитационного поля Земли. Полученное разложение может быть использовано при исследовании движения тел. *Резюме в Земле.*  
 POTENTIEL DE L'ATTRACTION TERRESTRE, par I. D. Jonkaloitch. On donne le développement du potentiel de l'attraction de la Terre aux termes du quatrième ordre de l'aplatissement près. On cherche à déterminer les valeurs numériques des coefficients de ce développement en utilisant les résultats obtenus précédemment par l'auteur (Jonkaloitch, 1952) pour le champ extérieur de la gravitation terrestre. Le développement obtenu peut être utilisé dans l'étude du mouvement des corps dans le voisinage de la Terre.

#### § 1. Предварительные замечания

Потенциал земного притяжения во внешнем пространстве необходимо знать при решении различных задач небесной механики, когда учитывается влияние Земли на движение небесного тела. При больших расстояниях от Земли, когда движение тела определяется в основном воздействием Солнца или одной из больших планет, а Земля производит лишь небольшие возмущения в этом движении, можно рассматривать лишь материальную точку, находящуюся в центре инерции Земли и обладающую массой, равной массе всей Земли. Однако для более близких объектов, движение которых в основном определяется притяжением самой Земли, необходимо иметь более подробное выражение для потенциала земного притяжения, учитывающее в той или иной степени разложение земных масс. В теории движения Луны привлекается во внимание так называемое возмущение от земного притяжения, связанное с неравномерностью уровня силы тяжести, обычно в форме материального тела, сферического поперечного сечения, и в виде некоторого точечного диполя вращения. Однако при той точности наблюдения Луны, которую стремятся обеспечить современные астрономы, могут иметь значение и возможные отклонения реальной Земли от указанного идеального тела. Тем более необходимо иметь достаточно точное выражение для потенциала земного притяжения, когда переходим к рассмотрению более близких объектов, как, например, возможных искусственных спутников Земли.

В настоящей работе выводится выражение потенциала земного притяжения, необходимое при решении задач подобного рода, и делается попытка определения численных значений коэффициентов этого выражения. Для последней цели используются найденные автором (Жонкалович, 1952) численные значения коэффициентов в разложении силы тяжести на поверхности Земли по сферическим функциям широты и долготы. Поэтому в работе, прежде всего, находится выражение для потенциала силы тяжести. Полагаем в окончательном выражении угловую скорость равной нулю, мы тем самым уничтожаем

<sup>1</sup> При этом применяется метод, аналогичный использованному в работе Б. В. Нумерова и Д. Н. Храмова (1956) для определения фигуры геоида по наблюдениям силы тяжести. Приняты также некоторые обозначения из указанной работы.

влияние центробежной силы и получаем некое выражение для потенциала земного притяжения.

Окончательный результат работы представлен в § 7 формулой (81), числовые значения коэффициентов этой формулы даны в § 8.

**§ 2. Выражение для потенциала силы тяжести**

Начало координат берем в центре инерции регуляризированной Земли, ось  $z$  направляем по оси ее вращения к северу, ось  $x$  — параллельно плоскости астрономического меридиана в Гринвиче, ось  $y$  — на  $90^\circ$  к востоку. Сферические геоцентрические координаты элемента массы Земли  $dm$  обозначаем через  $r_1, \psi_1, l_1$ , а произвольной внешней точки  $M$  — через  $r, \psi, l$ . Потенциальная функция  $V$  для точки  $M$  напишется в виде

$$V = \int \frac{dm}{\Delta}, \quad (1)$$

а потенциала сил тяжести  $W$  в этой же точке в виде

$$W = fV - \frac{\omega^2}{2} r^2 \cos^2 \psi, \quad (2)$$

где

$$\Delta = \sqrt{r_1^2 + r^2 - 2r_1 r \cos \gamma}, \quad (3)$$

а

$$\cos \gamma = \sin \psi_1 \sin \psi + \cos \psi_1 \cos \psi \cos (l_1 - l), \quad (4)$$

$f$  — постоянная притяжения,  $\omega$  — угловая скорость вращения Земли и интеграл распространен на все массы Земли.

Разложим потенциала сил тяжести  $W$  в ряд по сферическим функциям. Величину  $\Delta^{-1}$  можно представить бесконечным рядом вида

$$\Delta^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_1^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \gamma), \quad (5)$$

где  $P_n(\cos \gamma)$  — сферическая (зональная) функция  $n$ -го порядка от  $\cos \gamma$  и ряд сходится при всяком  $r > r_1$ . Мы примем также, что указанным рядом можно пользоваться для всех точек, лежащих и на самом геоиде, хотя для некоторого числа элементов массы  $dm$  в этом случае будем иметь  $r \leq r_1$ .<sup>1</sup> Подставляя (5) в (2) получаем

$$W = f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int r_1^n P_n(\cos \gamma) dm + \frac{\omega^2}{2} r^2 \cos^2 \psi. \quad (6)$$

Введем теперь в рассмотрение значение потенциала сил тяжести  $W_0$  на самом геоиде и следующие вспомогательные величины, являющиеся функциями  $W_0$  и массы Земли  $M$ :

$$r_0 = \frac{fM}{W_0}, \quad g_0 = \frac{fM}{r_0^2}, \quad \sigma = \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{r_0}{g_0}; \quad (7)$$

очевидно, что  $r_0$  имеет размерность длины,  $g_0$  — размерность ускорения, а  $\sigma$  является некоторой небольшой безразмерной величиной.

Обозначим, кроме того, через  $\rho$  отношение

$$\rho = \frac{r_0}{r}; \quad (8)$$

очевидно,  $\rho$  для всех точек геоида будет лишь незначительно отличаться от единицы.

<sup>1</sup> О возможности такого допущения см., например: Суздский, 1888, § 14.

При указанных обозначениях легко представить выражение (6) в виде

$$W = W_0 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^{n+1}}{M_0^n} \int r_1^n P_n(\cos \gamma) dm + \sigma \rho^{-2} \cos^2 \psi \right\}. \quad (9)$$

Если введем еще в рассмотрение безразмерные величины

$$A_n = \frac{1}{M_0^n} \int r_1^n P_n(\cos \gamma) dm, \quad (10)$$

$$B_2 = \sigma \cos^2 \psi,$$

то искомое разложение потенциала силы тяжести напишется в следующем виде:

$$W = W_0 \{ \rho A_0 + \rho^2 A_1 + \rho^3 A_2 + \rho^4 A_3 + \rho^5 A_4 + \dots + B_2 \rho^{-2} \}. \quad (11)$$

Чтобы представить входящие сюда величины  $A_n$  в явном виде, воспользуемся так называемой теоремой сложения сферических функций (Идельсон, 1936, стр. 230), которая для  $P_n(\cos \gamma)$  дает выражение

$$P_n(\cos \gamma) = \sum_{k=0}^n \gamma_{nk} P_{nk}(\sin \psi_1) P_{nk}(\sin \psi) \cos k(l_1 - l), \quad (12)$$

где

$$\gamma_{n0} = 1, \quad \gamma_{nk} = 2 \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \quad (k=1, 2, 3, \dots, n). \quad (13)$$

Подставляя (12) в (10), получим следующее, играющее в дальнейшем важную роль, выражение для  $A_n$  в виде сферической функции  $n$ -го порядка:

$$A_n = \sum_{k=0}^n (c_{nk} \cos kl + d_{nk} \sin kl) P_{nk}(\sin \psi), \quad (14)$$

где коэффициенты  $c_{nk}$  и  $d_{nk}$  определяются формулами

$$c_{nk} = \frac{\gamma_{nk}}{M_0^n} \int r_1^n P_{nk}(\sin \psi_1) \cos kl_1 dm, \quad (15)$$

$$d_{nk} = \frac{\gamma_{nk}}{M_0^n} \int r_1^n P_{nk}(\sin \psi_1) \sin kl_1 dm.$$

**§ 3. Исследование коэффициентов  $c_{nk}$  и  $d_{nk}$**

Изменяя в формулах (15)  $k$  от 0 до  $n$ , мы получим все значения коэффициентов  $c_{nk}$  и  $d_{nk}$ , входящие в выражение  $A_n$ . Число этих коэффициентов равно  $2n+1$ ; под интегралами в этих величинах стоят следующие  $2n+1$  выражений:

$$\begin{aligned} & r_1^n P_{nk}(\sin \psi_1) \quad \text{при } k=0, \\ & r_1^n P_{nk}(\sin \psi_1) \cos kl_1, \quad | \quad \text{при } k=1, 2, \dots \\ & r_1^n P_{nk}(\sin \psi_1) \sin kl_1 \quad | \end{aligned} \quad (16)$$

Как известно, это есть полный комплект  $2n+1$  ортонормальных сферических функций  $n$ -го порядка, которые представляют собой также  $2n+1$  независимых, однородных гармонических полиномов  $n$ -й степени от трех переменных  $x, y, z$ . Выражение этих полиномов легко получить из (16), пользуясь известными выражениями сферических функций

$P_n(\sin \psi)$ , формулы для синусов и косинусов кратных дуг и формулы преобразования сферических координат в прямоугольные. В табл. на стр. 509, в столбце 4 приведен список этих полиномов для  $n=0, 1, 2, 3, 4$ .

Введем в рассмотрение величины  $J_{njk}$ , пропорциональные моментам масс Земли различного порядка, определяемые формулой

$$J_{njk} = \frac{1}{M r_0^n} \int x^j y^k z^n dm, \quad (17)$$

где  $x, y, z$  — возможные целые числа от 0 до  $n$ , так что всегда  $x+y+z=n$ ,  $dm$  — элемент массы Земли с координатами  $x, y, z$ , а интегрирование распространяется на все массы Земли.

Мы можем теперь все величины  $c_{nk}$  и  $d_{nk}$ , определенные формулами (15), представить линейным образом через указанные величины (17). В таблице, в 5-м столбце, приведен полный список этих величин для  $n=0, 1, 2, 3, 4$ . В 3-м столбце этой таблицы даны значения величин  $1: \gamma_{nk}$  соответственно формуле (13).

Кроме того, коэффициенты  $c_{nk}$  и  $d_{nk}$  для  $n=1$  и  $n=2$  можно представить иначе, введя в рассмотрение координаты центра инерции Земли  $x_c, y_c, z_c$ , моменты инерции Земли  $A, B, C$  и центробежные моменты инерции Земли  $D, E, F$ , выражения которых хорошо известны. Сравнивая их с выражениями коэффициентов  $c_{nk}$  и  $d_{nk}$  через  $J_{njk}$ , находим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} z_c &= r_0 c_{10}, & A+B-2C &= r_0^2 M c_{20}, & D &= r_0^2 M d_{21}, \\ x_c &= r_0 c_{11}, & B-A &= r_0^2 M c_{22}, & E &= r_0^2 M c_{23}, \\ y_c &= r_0 d_{11}, & & & F &= r_0^2 M d_{22}. \end{aligned} \quad (18)$$

Покажем также, что направления главных осей инерции Земли вполне определяются значениями коэффициентов  $c_{20}, c_{21}, c_{22}, c_{23}, d_{21}, d_{22}$ . Пусть по этим направлениям идут оси  $\xi, \eta, \zeta$ . Положение их относительно ранее названных осей  $x, y, z$  определим эйлеровыми углами  $\psi, \varphi, \theta$ . Известно, что угол  $\theta$  между осью вращения и ближайшей главной осью инерции Земли очень мал (меньше 1'), поэтому положим  $\sin \theta \approx \theta$  и  $\cos \theta \approx 1$ . В таком случае формулы преобразования координат примут вид

$$\begin{aligned} \xi &= x \cos(\psi + \varphi) + y \sin(\psi + \varphi) + z \theta \sin \varphi, \\ \eta &= -x \sin(\psi + \varphi) + y \cos(\psi + \varphi) + z \theta \cos \varphi, \\ \zeta &= x \theta \sin \psi - y \theta \cos \psi + z. \end{aligned} \quad (19)$$

Составим выражения центробежных моментов инерции  $\int \xi^2 dm, \int \eta^2 dm, \int \zeta^2 dm$  и приравняем их нулю, так как оси  $\xi, \eta, \zeta$  главные. Из полученных равенств, пользуясь известными выражениями для  $A, B, C, D, E, F$ , получим

$$\begin{aligned} \theta \cos \psi (A+B-2C) + \theta \cos \varphi (B-A) + 2\theta \sin \varphi F + 2D &= 0, \\ \theta \sin \psi (A+B-2C) - \theta \cos \varphi (B-A) - 2\theta \sin \varphi F + 2E &= 0, \\ -(B-A) \sin 2(\psi + \varphi) + 2F \cos 2(\psi + \varphi) + 2\theta [D \sin(\psi + 2\varphi) + \\ + E \cos(\psi + 2\varphi)] &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

На основании соотношений (18) видно, что полученные равенства дают выражения углов Эйлера  $\psi, \varphi, \theta$  через коэффициенты  $c_{20}, c_{21}, c_{22}, c_{23}, d_{21}, d_{22}$ . Пренебрегая произведением малых величин  $\theta(B-A), \theta D, \theta E, \theta F$ , с достаточной точностью находим из (20)

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{c_{21}}{c_{20}}, \quad \operatorname{tg} 2(\psi + \varphi) = \frac{d_{22}}{c_{22}}, \quad \theta = \frac{\sqrt{c_{21}^2 + d_{21}^2}}{c_{20}}. \quad (21)$$

Список однородных гармонических полиномов от переменных  $x, y, z$  до 4-й степени и выражение соответствующих коэффициентов  $c_{nk}$  и  $d_{nk}$  через моменты инерции масс Земли различного порядка.

$n$	$k$	$1: \gamma_{nk}$	Однородные гармонические полиномы	Выражения коэффициентов $c_{nk}$ и $d_{nk}$
0	0	1	1	$c_{00} = 1$
1	0	1	$z$	$c_{10} = I_{00}$
1	1	1	$x$	$c_{11} = I_{10}$
1	1	1	$y$	$d_{11} = I_{01}$
2	0	1	$-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + z^2$	$c_{20} = -\frac{1}{2}I_{20} - \frac{1}{2}I_{02} + I_{00}$
2	1	3	$3xz$	$c_{21} = I_{03}$
2	1	3	$3yz$	$d_{21} = I_{03}$
2	2	12	$3x^2 - 3y^2$	$c_{22} = \frac{1}{4}I_{20} - \frac{1}{4}I_{02}$
2	2	12	$6xy$	$d_{22} = \frac{1}{2}I_{11}$
3	0	1	$-\frac{3}{2}x^2z - \frac{3}{2}y^2z + z^3$	$c_{30} = -\frac{3}{2}I_{30} - \frac{3}{2}I_{03} + I_{00}$
3	1	6	$-\frac{3}{2}x^3 - \frac{3}{2}xy^2 + 6xz^2$	$c_{31} = -\frac{1}{4}I_{30} - \frac{1}{4}I_{10} + I_{00}$
3	1	6	$-\frac{3}{2}x^2y - \frac{3}{2}y^3 + 6yz^2$	$d_{31} = -\frac{1}{4}I_{30} - \frac{1}{4}I_{03} + I_{00}$
3	2	60	$15x^2z - 15y^2z$	$c_{32} = \frac{1}{4}I_{30} - \frac{1}{4}I_{03}$
3	2	60	$30xyz$	$d_{32} = \frac{1}{2}I_{11}$
3	3	360	$15x^3 - 45xy^2$	$c_{33} = \frac{1}{24}I_{30} - \frac{1}{8}I_{10}$
3	3	360	$45x^2y - 15y^3$	$d_{33} = \frac{1}{8}I_{10} - \frac{1}{24}I_{00}$
4	0	1	$\frac{3}{8}x^4 + \frac{3}{4}x^2y^2 + \frac{3}{8}y^4 - 3y^2z^2 + z^4$	$c_{40} = \frac{3}{8}I_{40} + \frac{3}{4}I_{20} - 3I_{02} + \frac{1}{8}I_{00} - 3I_{02} + I_{00}$
4	1	10	$-\frac{15}{2}xy^2z - \frac{15}{2}x^2z + 10xz^3$	$c_{41} = -\frac{3}{4}I_{40} - \frac{3}{4}I_{20} + I_{00}$
4	1	10	$-\frac{15}{2}x^2yz - \frac{15}{2}y^3z + 10yz^3$	$d_{41} = -\frac{3}{4}I_{40} - \frac{3}{4}I_{03} + I_{00}$
4	2	180	$-\frac{15}{2}x^4 + 45x^2y^2 + \frac{15}{4}y^4 - 45y^2z^2$	$c_{42} = -\frac{1}{24}I_{40} + \frac{1}{4}I_{20} + \frac{1}{48}I_{00} - \frac{1}{4}I_{02}$
4	2	180	$-15x^3y - 15xy^3 + 90xyz^2$	$d_{42} = -\frac{1}{12}I_{40} - \frac{1}{12}I_{20} + \frac{1}{2}I_{11}$
4	3	2520	$105x^3z - 415xy^2z$	$c_{43} = \frac{1}{24}I_{40} - \frac{1}{8}I_{20}$
4	3	2520	$415x^2yz - 105y^3z$	$d_{43} = \frac{1}{8}I_{20} - \frac{1}{24}I_{03}$
4	4	20160	$105x^4 - 630x^2y^2 + 105y^4$	$c_{44} = \frac{1}{192}I_{40} - \frac{1}{32}I_{20} + \frac{1}{192}I_{00}$
4	4	20160	$420x^3y - 420y^3x$	$d_{44} = \frac{1}{48}I_{40} - \frac{1}{48}I_{20}$

Так как все величины  $c_{ik}$  и  $d_{ik}$  [формулы (15)] имеют вид  $\int U dm$ , где интеграл распространяется на все массы, заключенные внутри геоида регуляризированной Земли (вне геоида масс нет), а  $U$  есть функция гармоническая внутри геоида, то (Идальсои, 1936, стр. 159) все эти величины и величины непосредственно от них зависящие будут стоксовыми постоянными, т. е. они вполне определяются общим количеством массы, поверхностью геоида и угловой скоростью его вращения. Следует также заметить, что различные моменты масс Земли, пропорциональные величинам  $I_{ik}$ , вообще говоря, не являются стоксовыми постоянными и только их комбинации, помещенные в табл. на стр. 509 являются таковыми.

**§ 4. Порядок величин  $A_1$  и  $B_2$  и точность дальнейших выводов**

Порядок величин  $A_n$  определяется значениями коэффициентов  $c_{ik}$  и  $d_{ik}$ , а порядок  $B_n$  — значением величины  $\epsilon$ . Назовем величиной первого порядка малости величину, близкую к величине второго эксцентриситета  $i = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$  обычно употребляемых в геодезии референц эллипсоидов, связанного с сжатием  $z = \frac{a-b}{a}$  формулой  $i^2 = 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots$ . Условимся в дальнейшем пренебрегать лишь величинами, порядок которых заведомо равен пяти и выше. Следовательно, будем производить расчеты с точностью до малых величин четвертого порядка. Можно также сказать, что в таком случае будет сохранена точность порядка квадрата сжатия.

Что касается величины  $B_2$ , то ее можно считать величиной второго порядка малости, так как  $\epsilon$ , как это видно из формулы (7), содержит отношение величин, близких к центробежной силе на экваторе и к силе тяжести на экваторе, что, как известно, имеет порядок сжатия.

Займемся оценкой порядка величины  $A_n$ . Во-первых,  $A_0 = 1$ , как это следует из значения  $c_{00}$ , указанного в табл. на стр. 509. Кроме того, очевидно,  $A_1 = 0$ , ибо начало координатных осей вьито нами в центре масс Земли, и поэтому  $c_{10} = c_{11} = d_{11} = 0$ , как это видно из формулы (18). Остается оценить лишь порядок величин  $A_2, A_3, A_4$  и т. д.

Так как коэффициенты  $c_{ik}$  и  $d_{ik}$ , входящие в эти выражения, зависят от моментов масс Земли различных порядков, то по существу для определения их порядка следовало бы принять какую-либо гипотезу о расположении масс внутри Земли. Однако это можно сделать с большей уверенностью и проще, используя известное выражение для потенциальной функции сжатого уровня и его эллипсоида вращения. По Стоксу, внешняя потенциальная функция такого эллипсоида вполне определяется его геометрическими параметрами  $a$  и  $b$ , угловой скоростью его вращения  $\omega$  и величиной заключенной в нем массы  $M$  и не требует для своего определения данных о расположении этих масс внутри эллипсоида. Потенциала силы тяжести  $W = fV + \frac{\omega^2}{2} r^2 \cos^2 \psi$  такого эллипсоида находим, если для  $V$  принять следующее точное выражение (Пизцетти, 1938, стр. 42),

$$V = \left( M + \frac{2Q}{3} \right) \frac{\text{arc tg } E}{\sqrt{a^2 - b^2}} - \frac{Q}{\sqrt{(a^2 - b^2)^3}} (\text{arc tg } E - \frac{E}{1 + E^2}) (x^2 + y^2) - \frac{2Q}{\sqrt{(a^2 - b^2)^3}} (E - \text{arc tg } E) z^2, \quad (22)$$

где  $Q$  определяется уравнением

$$\frac{Q}{a^2 b^2} [(3 + i^2) \text{arc tg } i - 3i] = \frac{\omega^2}{2f}, \quad (23)$$

а величина  $E$  находится из равенства

$$E = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + \lambda}}, \quad (24)$$

где  $\lambda$  есть больший корень уравнения

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2 + \lambda} + \frac{z^2}{b^2 + \lambda} = 1. \quad (25)$$

Как известно, геоид Земли лишь незначительно отличается от так называемого общего земного эллипсоида, отклоняясь от его поверхности в пределах около 150 м. Этот эллипсоид есть уровненный эллипсоид, центр его совпадает с центром масс Земли, вращается он с той же угловой скоростью, что и Земля, и внутри его заключена масса, равная массе всей Земли (Жонголович, 1952, стр. 62). Можно считать, что его внешнее потенциальное поле лишь незначительно отличается от потенциального поля Земли и параметры, их определяющие, не отличаются значительно друг от друга.

Следует, очевидно, выражение для потенциала силы тяжести  $W$  такого эллипсоида получить в виде разложения подобного (11) и сравнить соответствующие коэффициенты. Используем для этого приведенные выше формулы, пригодные для любого уровненного эллипсоида, и приведем известные соотношения

$$a^2 - b^2 = b^2 f, \quad x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \psi, \quad z^2 = r^2 \sin^2 \psi \quad (26)$$

и введем временно обозначение

$$k = \frac{b^2}{r}, \quad (27)$$

и вместо формулы (22) можем написать

$$V = \left( \frac{M}{r} + \frac{2Q}{3r} \right) \left[ \frac{\text{arc tg } E}{k} \right] - \frac{Q}{r} \cos^2 \psi \left[ \frac{\text{arc tg } E - \frac{E}{1 + E^2}}{k^2} \right] - \frac{2Q}{r} \sin^2 \psi \left[ \frac{E - \text{arc tg } E}{k^2} \right]. \quad (28)$$

а исключая из формулы (24) и (25) величину  $\lambda$ , найдем

$$E^2 + E^3 \sin^2 \psi = k^2 (1 + E^2). \quad (29)$$

Разлагая в соответствии с последним соотношением величину  $E$  по нечетным степеням  $k$  до члена с  $k^3$ , получим

$$E = k + \frac{k^2}{2} \cos^2 \psi + \frac{k^3}{8} \cos^4 \psi (7 \cos^2 \psi - 4) + \frac{k^4}{16} \cos^2 \psi (33 \cos^4 \psi - 36 \cos^2 \psi + 8) + \dots \quad (30)$$

Пользуясь этим, найдем для величин, заключенных в квадратные скобки в формуле (28), следующие выражения с точностью до  $k^4$ :

$$\begin{aligned} \frac{\text{arc tg } E}{k} &= 1 + k^2 \left( \frac{1}{2} \cos^2 \psi - \frac{1}{3} \right) + k^4 \left( \frac{7}{8} \cos^4 \psi - \cos^2 \psi + \frac{1}{5} \right) + \\ &+ k^6 \left( \frac{33}{16} \cos^6 \psi - 27 \cos^4 \psi + \frac{3}{2} \cos^2 \psi - \frac{1}{7} \right), \\ \frac{\text{arc tg } E - \frac{E}{1 + E^2}}{k^2} &= \frac{2}{3} + k^2 \left( \cos^2 \psi - \frac{4}{3} \right) + k^4 \left( \frac{9}{4} \cos^4 \psi - 3 \cos^2 \psi + \frac{6}{7} \right) + \\ &+ k^6 \left( \frac{143}{24} \cos^6 \psi - 11 \cos^4 \psi + 6 \cos^2 \psi - \frac{8}{9} \right), \\ \frac{E - \text{arc tg } E}{k^2} &= \frac{1}{3} + k^2 \left( \frac{1}{2} \cos^2 \psi - \frac{1}{5} \right) + k^4 \left( \frac{9}{8} \cos^4 \psi - \cos^2 \psi + \frac{1}{7} \right) + \\ &+ k^6 \left( \frac{143}{48} \cos^6 \psi - \frac{33}{8} \cos^4 \psi + \frac{3}{2} \cos^2 \psi - \frac{1}{5} \right). \end{aligned} \quad (31)$$



Подставляя эти выражения в формулу (28), группируя члены одного порядка и восстанавливая значение  $k$  по формуле (27), найдем

$$V = \frac{M}{r} - \frac{b^2 r^2}{3a^3} \left( M - \frac{8}{15} Q \right) P_{20} + \frac{b^4 r^4}{5r^3} \left( M - \frac{16}{21} Q \right) P_{40} - \frac{b^6 r^6}{7r^5} \left( M - \frac{8}{9} Q \right) P_{60} + \dots, \quad (32)$$

где  $P_{20} = P_0(\sin^2 \psi)$  — зональные сферические функции от  $\sin \psi$  для  $l=2, 4, 6, \dots$ .  
 Напишем теперь выражение для потенциала  $W$  сил тяжести рассматриваемого упрямого эллипсоида. Вводя в рассмотрение значение потенциала на поверхности этого эллипсоида  $W_0$  и вспомогательные величины  $r_{20}, g_0, \sigma_2, \sigma_4$ , аналогичные указанным формулам (7) и (8), получим

$$W = W_0 \left( \zeta + \zeta^2 A_2 + \zeta^4 A_4 + \zeta^6 A_6 + \dots + B_2 \zeta^{-2} \right), \quad (33)$$

где  $B_2$  естественно определяется той же формулой (11), как и в случае произвольной Земли, а выражения  $A_2, A_4, A_6, \dots$  вместо формул (15) имеют следующий простой вид:

$$A_2 = c_{20} P_{20}, \quad A_4 = c_{40} P_{40}, \quad A_6 = c_{60} P_{60}, \quad (34)$$

причем коэффициенты  $c_{20}, c_{40}, c_{60}$  определяются по формулам

$$\begin{aligned} c_{20} &= -\frac{b^2 r^2}{2a^3} \left( 1 - \frac{8}{15} \frac{Q}{M} \right), \\ c_{40} &= -\frac{b^4 r^4}{5r^3} \left( 1 - \frac{16}{21} \frac{Q}{M} \right), \\ c_{60} &= -\frac{b^6 r^6}{7r^5} \left( 1 - \frac{8}{9} \frac{Q}{M} \right), \end{aligned} \quad (35)$$

показывающим, что порядки величин  $A_2, A_4, A_6$  будут в основном соответствовать степеням  $r^2, r^4, r^6$ . Кроме того, сравнивая полученные результаты с общими для Земли выражениями (11) и (14), мы видим, что из общей формулы для  $W$  исчезли все  $A_n$  с нечетными индексами  $n$ , а в оставшихся  $A_n$  с четными индексами  $n$  из всех  $2n-1$  коэффициентов  $c_{nl}$  и  $d_{nl}$  сохраняется лишь один  $c_{n0}$ .

Можно, очевидно, предполагать, что все величины, исчезающие в выражении  $W$  для общего эллипсоида, будут иметь лишь сравнительно небольшие значения для Земли вообще.

На основании сказанного, откинем в общей формуле (11) выражения  $A_2, A_4$  и т. д. как выходящие из пределов принятой точности. Из оставшихся выражений  $A_2$  и  $B_2$  будем считать величинами второго порядка, а  $A_4$  — четвертого порядка. Оставим также выражение  $A_2$  и для удобства и однообразия последующих выкладок будем считать ее величиной третьего порядка малости; возможно, что она окажется еще меньше. Сохраняем также для общности все  $c_{nl}$  и  $d_{nl}$ , хотя многие из них могут оказаться и меньше величин третьего порядка малости; заранее исключаем лишь коэффициенты  $c_{21}$  и  $d_{21}$ , как величины для четвертого порядка. Заранее исключаем последние из формул (21).

Земли введомо очень малые, что показавет последние из формул (21).

Таким образом, в дальнейшем мы будем иметь дело со следующим выражением для  $W$ :

$$W = W_0 \left( \zeta + \zeta^2 A_2 + \zeta^4 A_4 + \zeta^6 A_6 + \dots + B_2 \zeta^{-2} \right), \quad (36)$$

где индексы у выражений, стоящих при различных степенях  $\zeta$ , указывают порядок их малости. Все выкладки будем производить, сохраняя формально лишь величины до четвертого порядка малости.

<sup>1</sup> Если для примера определяем общий эллипсоид следующими параметрами (Жонголович, 1952, стр. 66 и 67):  $a = 6378250$  м,  $e = 1/296.6$ ,  $AM = 39852 \cdot 10^6$  см<sup>2</sup> сек<sup>-2</sup>, откуда получается также  $W_0 = 62639 \cdot 10^6$  см<sup>2</sup> сек<sup>-2</sup>, то по указанным выше формулам получим  $r = 671734 \cdot 10^6$  см,  $b = 6356731$  м,  $r_0 = 6373766$  м,  $fQ = 38243 \cdot 10^6$  см<sup>2</sup> сек<sup>-2</sup>,  $c_{20} = -110775 \cdot 10^{-8}$ ,  $c_{40} = +246 \cdot 10^{-8}$ ,  $c_{60} = -0.6 \cdot 10^{-8}$ .

### § 5. Земной сфероида, его уравнение и величина, характеризующая его размеры

Представляя потенциал сил тяжести в виде (36), т. е. ограничиваясь в разложении (11) лишь определенным количеством членов, мы тем самым заменяем сложную поверхность геоида Земли некоторой более простой фигурой, совпадающей с геоидом лишь с точностью до величин порядка квадрата сжатия. Назовем эту поверхность земным сфероидом четвертого порядка. Для получения уравнения этой поверхности в сферических координатах применим выражение (36) к точке, находящейся на поверхности этого сфероида, т. е. положим  $W = W_0$ , что даст

$$\zeta + A_2 \zeta^2 + A_4 \zeta^4 + A_6 \zeta^6 + B_2 \zeta^{-2} = 1. \quad (37)$$

Отсюда видно, что  $\zeta$  отличается от единицы на величинами второго порядка и выше. Положив  $\zeta = 1 + s$  и пренебрегая величинами выше четвертого порядка малости, имеем

$$1 + s + A_2(1 + 3s) + A_4(1 + 4s) + B_2(1 - 2s) = 1. \quad (38)$$

Определив отсюда  $s$  и учитывая (8), находим следующее общее выражение для радиуса вектора  $r$  нашего сфероида:

$$r = r_0(1 + A_2 + B_2 + A_4 + A_6 - 2A_2^2 + 3B_2^2 + A_2 B_2). \quad (39)$$

Подставляя сюда выражения для  $B_2$  и  $A_n$  по формулам (11) и (15) и делая некоторые преобразования, получаем выражение для  $r$  в виде суммы сферических функций

$$r = r_0 \left\{ p_{00} + \sum_{n=2}^4 \sum_{k=0}^n (p_{nk} \cos kl + q_{nk} \sin kl) P_{nk}(\sin \psi) \right\}, \quad (40)$$

где коэффициенты  $p_{nk}$  и  $q_{nk}$  следующим образом выражаются через ранее введенные величины:

$$\begin{aligned} p_{00} &= 1 + \frac{2}{3} \sigma_2 + \frac{8}{15} \sigma_4 - \frac{2}{15} c_{20} - \frac{2}{5} c_{40} - \frac{24}{5} (c_{22}^2 + d_{22}^2); \\ p_{20} &= c_{20} - \frac{2}{3} \sigma_2 - \frac{16}{17} \sigma_4 + \frac{10}{21} c_{20} - \frac{4}{7} c_{40} + \frac{48}{7} (c_{22}^2 + d_{22}^2); \\ p_{40} &= c_{40} + \frac{24}{35} \sigma_2 - \frac{12}{35} c_{20} - \frac{36}{35} c_{40} - \frac{72}{35} (c_{22}^2 + d_{22}^2); \\ p_{21} = q_{21} &= 0; \quad p_{22} = c_{22} + \frac{6}{7} c_{22} + \frac{8}{7} c_{40} c_{22}; \quad q_{22} = d_{22} + \frac{6}{7} c_{22} d_{22} + \frac{8}{7} c_{40} d_{22}; \\ p_{40} = c_{40}; \quad p_{41} = c_{41}; \quad q_{41} = d_{41}; \quad p_{42} = c_{42}; \quad q_{42} = d_{42}; \quad p_{43} = c_{43}; \quad q_{43} = d_{43}; \\ p_{44} = c_{44}; \quad q_{44} = d_{44}; \quad p_{45} = c_{45} - \frac{2}{35} c_{20} - \frac{12}{35} c_{40} c_{22}; \quad q_{45} = d_{45} - \frac{2}{35} c_{20} d_{22} - \frac{12}{35} c_{40} d_{22}; \\ p_{46} = c_{46}; \quad q_{46} = d_{46}; \quad p_{47} = c_{47} - \frac{3}{35} (c_{22}^2 - d_{22}^2); \quad q_{47} = d_{47} - \frac{6}{35} c_{22} d_{22}. \end{aligned} \quad (41)$$

Уравнение (40) и представляет собой уравнение в сферических координатах рассматриваемого нами земного сфероида. Для характеристики его формы должны быть известны значения входящих в выражения (41) величины  $c_{nl}$ ,  $d_{nl}$  и  $\sigma_n$ . В дальнейшем будет показано, как можно определить эти величины из наблюдений сил тяжести на земной поверхности. Что касается величин  $r_0$ , то она характеризует размеры нашего сфероида и значение ее не может быть получено только из данных о гравитационном поле Земли. Для ее определения необходимо иметь также данные о результатах астрономо-геодезических работ на земной поверхности. Наиболее удобно с этой целью использовать

известное понятие об общем земном эллипсоиде, метод получения формы и размеров которого из результатов гравитационных и астрономо-геодезических работ достаточно хорошо разработаны.<sup>1</sup>

Мы предположим, что нам уже известны форма и размеры общего земного эллипсоида, т. е. его сжатие  $\bar{\alpha}$  и полуоси  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ . Напомним, что центр этого эллипсоида совпадает с центром масс Земли, малая ось — с осью вращения Земли, а поверхность его максимально совпадает с поверхностью геоида Земли. В нашем приближении последнее условие, очевидно, должно относиться к поверхности упомянутого земного сфероида.

Уравнение общего земного эллипсоида

$$\frac{x^2 + y^2}{\bar{a}^2} + \frac{z^2}{\bar{b}^2} = 1 \quad (42)$$

в сферических координатах, с точностью до величин квадрата сжатия, можно представить в виде

$$r = \bar{b} [\bar{p}_{00} + \bar{p}_{20} P_{20}(\sin \psi)] + \bar{p}_{10} P_{10}(\sin \psi), \quad (43)$$

где

$$\bar{p}_{00} = 1 + \frac{2}{3} \bar{\alpha} + \frac{7}{15} \bar{\alpha}^2, \quad \bar{p}_{20} = -\frac{2}{3} \bar{\alpha} - \frac{17}{21} \bar{\alpha}^2, \quad \bar{p}_{10} = \frac{12}{35} \bar{\alpha}^2. \quad (44)$$

Составим теперь выражение для расстояния  $N$  вдоль радиуса вектора между поверхностью земного сфероида (40) и поверхностью общего земного эллипсоида (43)

$$N = r - r' = (r_0 p_{00} - \bar{b} \bar{p}_{00}) + (r_0 p_{20} - \bar{b} \bar{p}_{20}) P_{20}(\sin \psi) + (r_0 p_{10} - \bar{b} \bar{p}_{10}) P_{10}(\sin \psi) + \\ + r_0 \left\{ (p_{22} \cos 2l + q_{22} \sin 2l) P_{22}(\sin \psi) + \sum_{k=2}^n (p_{k0} \cos kl + q_{k0} \sin kl) P_{k0}(\sin \psi) \right\}. \quad (45)$$

Максимальное совпадение указанных двух поверхностей требует минимума для суммы квадратов этих расстояний, т. е. для величины

$$\Omega = \int N^2 ds = 4\pi \left\{ (r_0 p_{00} - \bar{b} \bar{p}_{00})^2 + \frac{1}{5} (r_0 p_{20} - \bar{b} \bar{p}_{20})^2 + (\text{величины высшего порядка}) + \right. \\ \left. + (\text{величины, не содержащие параметров эллипсоида}) \right\}, \quad (46)$$

при подсчете которой интеграл взят по поверхности единичной сферы и использованы известные свойства сферических функций. В соответствии с двумя параметрами  $\bar{b}$  и  $\bar{\alpha}$ , определяющими общий земной эллипсоид, условия минимума функции  $\Omega$  будут

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \bar{b}} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\alpha}} = 0, \quad (47)$$

что после соответствующих выкладок приводит к следующим двум уравнениям:

$$r_0 \left( 1 + \frac{2}{3} \sigma + \frac{8}{5} \sigma^2 - \frac{2}{15} \sigma c_{20} - \frac{2}{5} c_{20}^2 - \frac{24}{5} (c_{22}^2 + d_{22}^2) + \frac{2}{3} \bar{\alpha} + \frac{8}{15} \bar{\alpha} \sigma + \frac{7}{15} \bar{\alpha}^2 - \frac{2}{15} \bar{\alpha} c_{20} \right) = \\ = \bar{b} \left( 1 + \frac{4}{3} \bar{\alpha} + \frac{22}{15} \bar{\alpha}^2 \right), \quad (48)$$

$$r_0 \left( 1 + \frac{4}{5} \sigma - \frac{1}{5} c_{20} + \frac{72}{35} \sigma^2 - \frac{8}{5} \sigma c_{20} - \frac{2}{7} c_{20}^2 - \frac{216}{35} (c_{22}^2 + d_{22}^2) + \frac{7}{5} \bar{\alpha} + \frac{44}{35} \bar{\alpha} \sigma - \frac{17}{35} \bar{\alpha} c_{20} \right) = \\ = \bar{b} \left( 1 + \frac{11}{5} \bar{\alpha} + \frac{66}{35} \bar{\alpha}^2 \right).$$

<sup>1</sup> См., например, предыдущие работы автора (Жонголович, 1952, 1956).

Для одно уравнение на другое, исключаем сначала величины  $r_0$  и  $\bar{b}$  и из полученного равенства методом последовательных приближений находим следующее соотношение для  $\bar{\alpha}$ :

$$\bar{\alpha} = \sigma - \frac{3}{2} c_{20} + \frac{31}{14} \sigma^2 + \frac{27}{14} c_{20} \sigma - \frac{3}{8} c_{20}^2 - \frac{72}{7} (c_{22}^2 + d_{22}^2), \quad (49)$$

после чего любое из уравнений (48) дает

$$\bar{b} = r_0 \left[ 1 + c_{20} - \frac{12}{35} \sigma^2 - \frac{24}{35} \sigma c_{20} - \frac{1}{5} c_{20}^2 - \frac{72}{35} (c_{22}^2 + d_{22}^2) \right]. \quad (50)$$

Равенство (49) не дает для определения фигуры земного сфероида каких-либо новых данных, так как сжатие общего земного эллипсоида  $\bar{\alpha}$  так же определяется по данным о внешнем гравитационном поле Земли, как и величины, стоящие в правой части равенства. Если для одной и другой задачи использован тот же гравитационный материал, то равенство (49) может дать лишь дополнительный контроль сделанных расчетов.

Равенство (50) играет важную роль в разбираемом вопросе, так как дает простое средство для определения величин  $r_0$ , характеризующих размеры земного сфероида, определение которой по результатам гравиметрических и астрономо-геодезических работ не представляет принципиальных затруднений. Практическое использование равенства (50) будет выяснено дальше в § 7.

### § 6. Выражение для силы тяжести на земном сфероиде

Пользуясь выражением для потенциала силы тяжести  $W$  в функции сферических координат (36), получаем значение силы тяжести  $g$  по формуле

$$g = \sqrt{g_r^2 + g_\psi^2 + g_l^2}, \quad (51)$$

где

$$g_r = \frac{\partial W}{\partial r}, \quad g_\psi = \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \psi}, \quad g_l = \frac{1}{r \cos \psi} \frac{\partial W}{\partial l} \quad (52)$$

суть проекции вектора силы тяжести на оси сферических координат  $r, \psi, l$ .

Пределаив указанные выкладки, приняв во внимание, что из формул (8) следует

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} = -r_0^{-1} \sigma, \quad (53)$$

и учитывая обозначение  $g_0$ , введенное формулой (7), получим для любой точки вне или на сфероиде следующие выражения:

$$g_r = -g_0 (r^2 + 3A_2 r^4 + 4A_4 r^6 + 5A_6 r^8 - 2B_2 r^{-1}), \\ g_\psi = g_0 \left( \frac{\partial A_2}{\partial \psi} r^4 + \frac{\partial A_4}{\partial \psi} r^6 + \frac{\partial A_6}{\partial \psi} r^8 + \frac{\partial B_2}{\partial \psi} r^{-1} \right), \quad (54)$$

$$g_l = g_0 \left( \frac{\partial A_2}{\partial l} r^4 + \frac{\partial A_4}{\partial l} r^6 + \frac{\partial A_6}{\partial l} r^8 \right) \sec \psi.$$

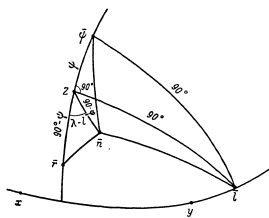
Подставляя сюда значение  $r$  для поверхности сфероида по формуле (39), получим для точки, лежащей на поверхности сфероида,

$$g_r = -g_0 [1 + A_2 - 4B_2 + 2A_4 + 3A_6 - 5A_2^2 - 5B_2^2 - 10A_2 B_2], \\ g_\psi = g_0 \left[ \frac{\partial A_2}{\partial \psi} + \frac{\partial B_2}{\partial \psi} + \frac{\partial A_4}{\partial \psi} + \frac{\partial A_6}{\partial \psi} - 4(A_2 + B_2) \frac{\partial A_2}{\partial \psi} + (A_2 + B_2) \frac{\partial B_2}{\partial \psi} \right], \quad (55) \\ g_l = g_0 \left[ \frac{\partial A_2}{\partial l} + \frac{\partial A_4}{\partial l} + \frac{\partial A_6}{\partial l} - 4(A_2 + B_2) \frac{\partial A_2}{\partial l} \right] \sec \psi.$$

Подставляя эти выражения в формулу (51), получим с принятой точностью для силы тяжести  $g$  на сфере следующие выражение:

$$g = g_0 \left[ 1 + A_2 - 4B_2 + 2A_3 + 3A_4 - 5A_2^2 - 5B_2^2 - 10A_2B_2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A_2}{\partial \psi} \right)^2 + \frac{\partial A_2}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial B_2}{\partial \psi} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial B_2}{\partial \psi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A_2}{\partial l} \right)^2 \sec^2 \psi \right]. \quad (56)$$

Величины, стоящие в правой части формулы (56), являются функциями геоцентрических координат  $\psi$  и  $l$ , указывающих направление радиуса вектора, проведенного из центра масс Земли в данную точку на геоиде. Для возможности практического использования выражения (56) необходимо преобразовать его от сферических координат к астрономическим координатам  $\varphi$  и  $\lambda$ , определяющих направление нормали к геоиду, ибо из непосредственных наблюдений мы определяем именно эти координаты в пунктах



определения силы тяжести  $g$ . Для указанного преобразования необходимо сначала найти выражение для разности  $\varphi - \psi$  и  $\lambda - l$ . Легко понять, что эти разности будут зависеть от тех же параметров  $c_n, d_n, \tau$ , которыми определяется форма земного сфероида, и не будут зависеть от величины  $r_n$ , определяющей линейные размеры сфероида. Для получения искомого соотношения найдем сначала выражения косинусов углов, которые внешняя нормаль  $n$  к сфероида составляет с направлением осей сферических координат  $r, \psi, l$  — касательных к соответствующим координатным линиям сферических координат. Пусть на вспомогательной сфере (см. рисунок) точка  $Z$  соответствует оси  $OZ$ , направленной по оси вращения Земли к северу, точка  $\psi$  — второй оси, точка  $l$  — третьей оси и, наконец, точка  $n$  — направлением внешней нормали к сфероида в данном пункте.

Из сферических треугольников  $nZr, nZl, nZl$  известные величины сторон и углов которых помечены на рисунке, получаем искомые косинусы углов  $\cos(n, r), \cos(n, \psi), \cos(n, l)$  и соответствующие проекции вектора силы тяжести на оси  $r, \psi, l$

$$\begin{aligned} g_r &= -g \cos(n, r) = -g [\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos(l - \lambda)], \\ g_\psi &= -g \cos(n, \psi) = -g [\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \cos(l - \lambda)], \\ g_l &= -g \cos(n, l) = -g [-\cos \varphi \sin(l - \lambda)]. \end{aligned} \quad (57)$$

Сравнивая эти выражения с выражениями (55) и принимая во внимание зависимость между  $g$  и  $g_0$ , данную формулой (56), получаем с принятой точностью

$$\begin{aligned} \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos(l - \lambda) &= 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A_2}{\partial \psi} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial B_2}{\partial \psi} \right)^2 - \frac{\partial A_2}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial B_2}{\partial \psi} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A_2}{\partial l} \right)^2 \sec^2 \psi, \\ -\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \cos(l - \lambda) &= \frac{\partial A_2}{\partial \psi} + \frac{\partial B_2}{\partial \psi} + \frac{\partial A_2}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \psi} - 5A_2 \frac{\partial A_2}{\partial \psi} + 5B_2 \frac{\partial B_2}{\partial \psi}, \quad (58) \\ \cos \varphi \cos \psi \sin(l - \lambda) &= \frac{\partial A_2}{\partial l} + \frac{\partial A_2}{\partial l} + \frac{\partial A_2}{\partial l} - 5A_2 \frac{\partial A_2}{\partial l}. \end{aligned}$$

Из этих выражений следующим образом можно получить искомые разности  $\varphi - \psi$  и  $\lambda - l$ , которые называются также абсолютными уклонениями отвесных линий на сфере. Умножим первое уравнение (58) на  $\sin \psi$ , второе уравнение —  $\cos \psi$  и, сложив их, получим

$$\begin{aligned} \sin \varphi - \sin \psi &= - \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A_2}{\partial \psi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial B_2}{\partial \psi} \right)^2 + \frac{\partial A_2}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial B_2}{\partial \psi} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A_2}{\partial l} \right)^2 \sec^2 \psi \right] \sin \psi - \\ &= \left[ \frac{\partial A_2}{\partial \psi} + \frac{\partial B_2}{\partial \psi} + \frac{\partial A_2}{\partial \psi} + \frac{\partial A_2}{\partial \psi} - 5A_2 \frac{\partial A_2}{\partial \psi} + 5B_2 \frac{\partial B_2}{\partial \psi} \right] \cos \psi. \end{aligned} \quad (59)$$

Так как при малой разности углов  $\varphi - \psi$  можно написать

$$\varphi - \psi = (\sin \varphi - \sin \psi) \sec \psi + \frac{1}{2} (\sin \varphi - \sin \psi)^2 \operatorname{tg} \psi \sec^2 \psi + \dots, \quad (60)$$

то, учитывая выражение (59), получаем

$$\varphi - \psi = \frac{\partial (A_2 + B_2 + A_2 + B_2 - \frac{5}{2} A_2^2 + \frac{5}{2} B_2^2)}{\partial \psi} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A_2}{\partial l} \right)^2 \sec^2 \psi \operatorname{tg} \psi. \quad (61)$$

Из третьего уравнения (58) найдем  $\lambda - l$ . Так как эта величина, очевидно, второго порядка, то с принятой точностью достаточно заменить синус ее самим углом, а множитель  $\cos \varphi \cos \psi$ , сохраняя в нем лишь величины второго порядка, представить в виде

$$\cos \varphi \cos \psi = \cos^2 \psi [\cos(\varphi - \psi) - \sin(\varphi - \psi) \operatorname{tg} \psi] = \cos^2 \psi \left[ 1 + \frac{\partial (A_2 + B_2)}{\partial \psi} \operatorname{tg} \psi \right]. \quad (62)$$

Приняв это во внимание, легко получаем

$$(\lambda - l) \cos^2 \psi = \frac{\partial (A_2 + A_2 + A_2 - \frac{5}{2} A_2^2)}{\partial l} + \frac{\partial A_2}{\partial l} \cdot \frac{\partial (A_2 + B_2)}{\partial \psi} \operatorname{tg} \psi. \quad (63)$$

Формулы (61) и (63) показывают, что разности  $\varphi - \psi$  и  $\lambda - l$  содержат величины второго порядка малости и выше. Поэтому при преобразовании различных выражений от сферических координат к астрономическим можно во всех членах третьего и четвертого порядка малости просто заменить  $\psi$  на  $\varphi$  и  $l$  на  $\lambda$ , а соответствующие преобразования необходимо сделать лишь в членах второго порядка малости, причем эти изменения будут величинами четвертого порядка. Обозначим в общем виде такой член второго порядка в виде  $F_2(\varphi, \lambda)$ . По строке Тейлора получаем

$$F_2(\varphi, \lambda) = F_2(\varphi, \lambda) + (\varphi - \psi) \frac{\partial F_2(\varphi, \lambda)}{\partial \varphi} + (l - \lambda) \frac{\partial F_2(\varphi, \lambda)}{\partial \lambda}. \quad (64)$$

Во входящих сюда разностях  $(\varphi - \psi)$  и  $(l - \lambda)$ , очевидно, достаточно сохранить лишь члены второго порядка, т. е. согласно формулам (61) и (63) принять

$$\begin{aligned} \varphi - \psi &= \frac{\partial A_2}{\partial \psi} + \frac{\partial B_2}{\partial \psi}, \\ l - \lambda &= \frac{\partial A_2}{\partial l} \sec^2 \psi. \end{aligned} \quad (65)$$

Применяя теперь указанное преобразование к членам  $A_2$  и  $4B_2$ , стоящим в квадратных скобках, равенства (56), получаем для выражения силы тяжести на сфере где

следующее окончательное выражение, все члены которого содержат лишь астрономические координаты  $\varphi$  и  $\lambda$ :

$$g = g_0 \left[ 1 + A_2 - 4B_2 + 2A_3 + 3A_4 - 5A_2^2 - 5B_2^2 - 10A_2B_2 + \frac{3}{2} \left( \frac{\partial A_2}{\partial \varphi} \right)^2 - \frac{7}{2} \left( \frac{\partial B_2}{\partial \varphi} \right)^2 - 2 \frac{\partial A_2}{\partial \varphi} \frac{\partial B_2}{\partial \varphi} + \frac{3}{2} \left( \frac{\partial A_2}{\partial \lambda} \right)^2 \sec^2 \varphi \right]. \quad (66)$$

Подставляя сюда выражения для  $B_2$  и  $A_2$  по формулам (10) и (14) и делая некоторые преобразования, получаем выражение для  $g$  в виде суммы сферических функций

$$g = g_0 \left( a_{00} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^n (a_{nk} \cos k\lambda + b_{nk} \sin k\lambda) P_{nk}(\sin \varphi) \right), \quad (67)$$

где коэффициенты  $a_{nk}$  и  $b_{nk}$  следующим образом выражаются через ранее введенные величины:

$$\begin{aligned} a_{00} &= 1 - \frac{8}{3} \sigma - \frac{68}{15} \sigma^2 + \frac{44}{15} \sigma c_{20} + \frac{4}{5} c_{20}^2 + \frac{48}{5} c_{22}^2 + \frac{48}{5} d_{22}^2; \\ a_{20} &= c_{20} + \frac{8}{3} \sigma + \frac{52}{21} \sigma^2 - \frac{76}{21} \sigma c_{20} - \frac{1}{7} c_{20}^2 + \frac{12}{7} (c_{22}^2 + d_{22}^2); \\ a_{40} &= 3c_{40} + \frac{72}{35} \sigma^2 + \frac{24}{35} \sigma c_{20} - \frac{198}{35} c_{20}^2 - \frac{396}{35} (c_{22}^2 + d_{22}^2); \\ a_{21} &= b_{21} = 0; \quad a_{22} = c_{22} - \frac{68}{7} \sigma c_{22} + \frac{2}{7} c_{20} c_{22}; \quad b_{22} = d_{22} - \frac{68}{7} \sigma d_{22} + \frac{12}{7} c_{20} d_{22}; \\ a_{30} &= 2c_{30}; \quad a_{31} = 2c_{31}; \quad b_{31} = 2d_{31}; \quad a_{32} = 2c_{32}; \quad b_{32} = 2d_{32}; \quad a_{33} = 2c_{33}; \quad b_{33} = 2d_{33}; \\ a_{41} &= 3c_{41}; \quad b_{41} = 3d_{41}; \quad a_{42} = 3c_{42} + \frac{4}{35} \sigma c_{20} c_{42} - \frac{66}{35} c_{20} c_{42}; \quad b_{42} = 3d_{42} + \frac{4}{35} \sigma c_{20} d_{42} - \frac{66}{35} c_{20} d_{42}; \\ a_{43} &= 3c_{43}; \quad b_{43} = 3d_{43}; \quad a_{44} = 3c_{44} - \frac{33}{70} (c_{22}^2 - d_{22}^2); \quad b_{44} = 3d_{44} - \frac{66}{77} c_{20} d_{22}. \end{aligned} \quad (68)$$

**§ 7. Определение параметров потенциала земного притяжения из результатов наблюдений и окончательное выражение этого потенциала**

Как уже было упомянуто раньше, в настоящей работе имеется в виду определение параметров, характеризующих потенциал земного притяжения из результатов определения сил тяжести на земной поверхности. При этом будем предполагать, что предварительно на основании материала о мировой гравиметрической съемке получено разложение сил тяжести в ряд по сферическим функциям вида

$$g = A_{00} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^n (A_{nk} \cos k\lambda + B_{nk} \sin k\lambda) P_{nk}(\sin \varphi), \quad (69)$$

где  $\varphi$  и  $\lambda$  астрономические координаты.

Если бы вся поверхность Земли была сплошь покрыта гравиметрическими наблюдениями, то получение значений любых коэффициентов ряда (69) производилось бы просто и независимо друг от друга. Это разложение можно было бы сделать практически до любой желаемой гармоник  $n$ . Для наших целей можно было бы использовать лишь начальные члены такого разложения до  $n=4$ , в соответствии с введенным выше понятием о земном сфероиде четвертого порядка, и откинуть в разложении (69) остальные члены как выходящие за пределы принятой точности вычислений.

Однако в данное время мировая гравиметрическая съемка еще очень далека от сплошной сети, хотя бы и редко расположенных пунктов. Огромные пространства земной поверхности, особенно поверхности мирового океана, еще совершенно гравиметрически не обследованы. Поэтому в данное время определение даже небольшого числа коэффициентов ряда (69) представляет значительные трудности. Включение в разложение гармоник высшего порядка не оправдывается наличием имеющегося материала и может даже внести дополнительные искажения в коэффициенты первых гармоник. Вероятно, членами до  $n=4$  в соответствии с произвольной заменой точной фигуры геоида земным сфероидом четвертого порядка. Оставшиеся коэффициенты в таком разложении и будут однообразным образом соответствовать имеющемуся наличию данных о гравиметрическом поле Земли.

Как бы то ни было, для дальнейших приложений следует принять известным разложение (69) до значения  $n=4$ . Такое разложение не должно содержать гармоник первого порядка, т. е. коэффициентов  $A_{10}, A_{11}, B_{11}$ , для чего делается дополнительное уравнение исходного гравиметрического материала (Жонголович, 1952, стр. 78); кроме того, в этом разложении можно с принятой точностью заранее положить  $A_{21} = B_{21} = 0$ , как это следует из результатов наблюдений над изменением широт.

Таким образом, будем предполагать, что мы имеем разложение (69), для которого известны численные значения всех 20 оставшихся коэффициентов начальных гармоник  $n=4$ . Это именно и является тем основным материалом, который служит для определения искомых параметров, характеризующих потенциал земного притяжения. Сравнимая между собой коэффициенты разложений (67) и (69), получаем первые 20 из 22 уравнений системы (70). Два последних уравнения этой системы соответствуют ранее приведенным соотношениям (7) для величины  $\sigma$  и (50) для связи между  $c_0$  и малой полуосью общего земного эллипсоида  $B_1$ , получаемой из результатов астрономико-геодезических работ на материках. Система 22 уравнений (70) содержит, таким образом, 22 неизвестных, а именно: 19 коэффициентов  $c_k$  и  $d_k$  и три величины  $\sigma, g_0, \tau_0$ .

Система уравнений для определения параметров потенциала земного притяжения

- 1)  $A_{00} = g_0 \left( 1 - \frac{8}{3} \sigma - \frac{68}{15} \sigma^2 + \frac{44}{15} \sigma c_{20} + \frac{4}{5} c_{20}^2 + \frac{48}{5} c_{22}^2 + \frac{48}{5} d_{22}^2 \right),$
- 2)  $A_{20} = g_0 \left( c_{20} + \frac{8}{3} \sigma + \frac{52}{21} \sigma^2 - \frac{76}{21} \sigma c_{20} - \frac{1}{7} c_{20}^2 + \frac{12}{7} c_{22}^2 + \frac{12}{7} d_{22}^2 \right),$
- 3)  $A_{40} = g_0 \left( 3c_{40} + \frac{72}{35} \sigma^2 + \frac{24}{35} \sigma c_{20} - \frac{198}{35} c_{20}^2 - \frac{396}{35} (c_{22}^2 + d_{22}^2) \right),$
- 4)  $A_{22} = g_0 \left( c_{22} - \frac{68}{7} \sigma c_{22} + \frac{2}{7} c_{20} c_{22} \right),$
- 5)  $B_{22} = g_0 \left( d_{22} - \frac{68}{7} \sigma d_{22} + \frac{2}{7} c_{20} d_{22} \right),$
- 6)  $A_{30} = g_0 2c_{30},$
- 7)  $A_{31} = g_0 2c_{31},$
- 8)  $B_{31} = g_0 2d_{31},$
- 9)  $A_{32} = g_0 2c_{32},$
- 10)  $B_{32} = g_0 2d_{32},$
- 11)  $A_{43} = g_0 3c_{43},$

<sup>1</sup> Эти 20 уравнений совпадают с уравнениями (59), полученными в упомянутой уже работе (Нумеров и Храмов, 1936), если в последних положить  $c_{21} = d_{21} = 0$ .

- 12)  $B_{23} = g_0 d_{23}$ ,
- 13)  $A_{41} = g_0^2 c_{41}$ ,
- 14)  $B_{41} = g_0^2 d_{41}$ ,
- 15)  $A_{42} = g_0 (3c_{42} + \frac{4}{35} c_{22} - \frac{66}{35} c_{20} c_{22})$ ,
- 16)  $B_{42} = g_0 (3d_{42} + \frac{4}{35} c_{22} - \frac{66}{35} c_{20} d_{22})$ , (70)
- 17)  $A_{43} = g_0^2 c_{43}$ ,
- 18)  $B_{43} = g_0^2 d_{43}$ ,
- 19)  $A_{44} = g_0 (3c_{44} - \frac{33}{70} c_{22}^2 + \frac{33}{70} d_{22}^2)$ ,
- 20)  $B_{44} = g_0 (3d_{44} - \frac{33}{35} c_{22} d_{22})$ ,
- 21)  $\sigma = \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{r_0}{g_0}$ ,
- 22)  $\bar{b} = r_0 (1 + c_{20} - \frac{12}{35} \sigma^2 - \frac{24}{35} \sigma c_{20} - \frac{1}{5} c_{20}^2 + \frac{72}{35} c_{22}^2 + \frac{72}{35} d_{22}^2)$ .

Решение этой системы уравнений необходимо производить методом последовательных приближений. Можно этот процесс выполнить следующим образом.

Прежде всего составим 19 величин

$$\tau_{i,k} = \frac{A_{ik}}{A_{0i}}, \quad \pi_{i,k} = \frac{B_{ik}}{A_{0i}}. \quad (71)$$

Разделив четвертое и пятое на уравнений (70) на первое из них, имеем с точностью до величин второго порядка  $c_{22} = \tau_{22}$  и  $d_{22} = \pi_{22}$ , а следовательно, с точностью до величин 4-го порядка

$$c_{22}^2 + d_{22}^2 = \tau_{22}^2 + \pi_{22}^2 \quad \text{и} \quad c_{22}^2 - d_{22}^2 = \tau_{22}^2 - \pi_{22}^2.$$

Разделив затем второе на уравнений (70) на первое, применяя метод последовательных приближений, к следующему выражению  $c_{20}$  с полной принятой точностью:

$$c_{20} = \tau_{20} - \frac{8}{3} \sigma - \frac{100}{9} \sigma^2 + \frac{4}{21} \sigma \tau_{20} + \frac{1}{7} \tau_{20}^2 - \frac{12}{7} (\tau_{22}^2 + \pi_{22}^2). \quad (72)$$

Точно так же, разделив третье уравнение (70) на первое и приняв во внимание найденное выражение (72) для  $c_{20}$ , найдем аналогичное выражение для

$$c_{40} = \frac{1}{3} \tau_{40} + \frac{40}{3} \sigma^2 - \frac{72}{7} \sigma \tau_{20} + \frac{66}{35} \tau_{20}^2 + \frac{132}{35} (\tau_{22}^2 + \pi_{22}^2). \quad (73)$$

Определяя непосредственно из первого и последнего из уравнений (70)  $g_0$  и  $r_0$  и приняв во внимание выражение (72) для  $c_{20}$ , находим

$$g_0 = A_{00} \left[ 1 + \frac{8}{3} \sigma + \frac{124}{9} \sigma^2 + \frac{4}{3} \sigma \tau_{20} - \frac{4}{5} \tau_{20}^2 - \frac{48}{5} (\tau_{22}^2 + \pi_{22}^2) \right] \quad (74)$$

и

$$r_0 = \bar{b} \left[ 1 - \tau_{20} + \frac{8}{3} \sigma + \frac{144}{63} \sigma^2 - \frac{124}{21} \sigma \tau_{20} + \frac{37}{35} \tau_{20}^2 - \frac{72}{35} (\tau_{22}^2 + \pi_{22}^2) \right]. \quad (75)$$

Подставляя эти значения для  $g_0$  и  $r_0$  в выражение для  $\sigma$  в предпоследнем из уравнений (70), находим

$$\sigma = \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{\bar{b}}{A_{00}} (1 - \tau_{20}). \quad (76)$$

Величина  $\sigma$  и должна быть рассчитана в первую очередь по этой формуле, так как она входит во все предыдущие формулы. Подставив теперь в четвертую и пятую из формул (70) величину  $g_0$  по формуле (74) и  $c_{20}$  по формуле (72), находим

$$c_{22} = \tau_{22} \left( 1 - \frac{2}{7} \tau_{20} + \frac{164}{21} \sigma \right). \quad (77)$$

$$d_{22} = \pi_{22} \left( 1 - \frac{2}{7} \tau_{20} + \frac{164}{21} \sigma \right). \quad (78)$$

Для остальных параметров аналогичным образом получаем с той же точностью

$$c_{30} = \frac{1}{2} \tau_{30}; \quad c_{31} = \frac{1}{2} \tau_{31}; \quad d_{31} = \frac{1}{2} \pi_{31}; \quad c_{32} = \frac{1}{2} \tau_{32};$$

$$d_{32} = \frac{1}{2} \pi_{32}; \quad c_{33} = \frac{1}{2} \tau_{33}; \quad d_{33} = \frac{1}{2} \pi_{33}; \quad c_{41} = \frac{1}{3} \tau_{41};$$

$$d_{41} = \frac{1}{3} \pi_{41}; \quad c_{42} = \frac{1}{3} \tau_{42} - \frac{12}{7} \sigma \tau_{22} + \frac{22}{35} \tau_{20} \tau_{22}; \quad (79)$$

$$d_{42} = \frac{1}{3} \pi_{42} - \frac{12}{7} \sigma \pi_{22} + \frac{22}{35} \tau_{20} \pi_{22}; \quad c_{43} = \frac{1}{3} \tau_{43};$$

$$d_{43} = \frac{1}{3} \pi_{43}; \quad c_{44} = \frac{1}{3} \tau_{44} + \frac{11}{70} (\tau_{22}^2 - \pi_{22}^2); \quad d_{44} = \frac{1}{3} \pi_{44} + \frac{11}{35} \tau_{20} \pi_{22}.$$

Заметим попутно, что определение указанных неизвестных из системы (70) дает также возможность получить просто величину массы Земли и значение потенциала силы тяжести на поверхности геоида Земли по формулам

$$\begin{aligned} fM &= g_0^2 r_0^2 \\ W_0 &= g_0 r_0 \end{aligned} \quad (80)$$

соответственно с формулами (7).

Когда получены значения указанных выше параметров, окончательное выражение потенциала земного притяжения удобно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} fV &= \frac{fM}{r} \left\{ 1 + \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 [c_{20} P_{20}(\sin \delta) + (c_{22} \cos 2t_{rp} - d_{22} \sin 2t_{rp}) P_{22}(\sin \delta)] + \right. \\ &+ \left( \frac{r_0}{r} \right)^4 [c_{30} P_{30}(\sin \delta) + (c_{31} \cos t_{rp} - d_{31} \sin t_{rp}) P_{31}(\sin \delta) + \\ &+ (c_{32} \cos 2t_{rp} - d_{32} \sin 2t_{rp}) P_{32}(\sin \delta) + \\ &+ (c_{33} \cos 3t_{rp} - d_{33} \sin 3t_{rp}) P_{33}(\sin \delta)] + \\ &+ \left( \frac{r_0}{r} \right)^6 [c_{40} P_{40}(\sin \delta) + (c_{41} \cos t_{rp} - d_{41} \sin t_{rp}) P_{41}(\sin \delta) + \\ &+ (c_{42} \cos 2t_{rp} - d_{42} \sin 2t_{rp}) P_{42}(\sin \delta) + (c_{43} \cos 3t_{rp} - d_{43} \sin 3t_{rp}) P_{43}(\sin \delta) + \\ &+ (c_{44} \cos 4t_{rp} - d_{44} \sin 4t_{rp}) P_{44}(\sin \delta)] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (81)$$

Это выражение легко получается из (36), если положить в нем  $B_2=0$ , подставить  $W_0 = \frac{fM}{r_0}$  и принять во внимание выражения  $A_2, A_3, A_4$  по формуле (14). Кроме того, вместо сферических координат, широты  $\psi$  и долготы  $l$  (счет от меридиана Гринвича к востоку), подставлены соответствующие им значения астрономических экваториальных координат, склонения  $\varphi$  и гринвичского угла  $l_{гр}$  (счет к западу), по формулам

$$\psi = \delta, \quad l = 360^\circ - l_{гр}. \quad (82)$$

**§ 8. Опыт определения численных значений коэффициентов формулы (81)**

Для этой цели используем разложение сил тяжести, которое было получено в одной из предыдущих работ автора (Жонголович, 1952). Способ получения этого разложения, а также сведения о материалах мировой гравиметрической съемки, на основании которых оно получено, подробно изложены в упомянутой работе. Ниже приводятся числовые значения коэффициентов  $A_{ik}$  и  $B_{ik}$  в разложении сил тяжести по сферическим функциям до четвертого порядка на основании результатов указанной работы. При этом взяты результаты второго варианта под № 14 из табл. 7, помещенной на стр. 50—51 второй работы. Этот именно результат выбран как наиболее вероятный из тех решений, в которых разложение производилось по сферическим функциям только до четвертого порядка.

Кроме того, в значение  $A_{00}$ , полученное в указанном решении 1952 г., вводим теперь поправку, равную  $-12$  мга, с целью возможного исправления употребляющейся до сих пор Потсдамской системы в соответствии с результатами современных абсолютных измерений сил тяжести.<sup>1</sup>

Числовые значения (в мга) коэффициентов  $A_{ik}$  и  $B_{ik}$  формулы (69)

$A_{00} = 979\,764.83$	$A_{10} = 8.90$
$A_{20} = 3\,444.40$	$A_{11} = -1.96$
$A_{30} = 5.56$	$B_{11} = -1.18$
$A_{40} = -1.53$	$A_{22} = 0.01$
$A_{21} = 8.67$	$B_{22} = 0.24$
$A_{31} = 3.90$	$A_{32} = 0.14$
$A_{41} = -1.87$	$B_{32} = -0.03$
$A_{42} = 0.70$	$A_{43} = 0.04$
$B_{43} = -0.98$	$B_{44} = 0.05$
$A_{44} = 0.83$	
$B_{44} = 0.68$	

Приняв, кроме того, для общего земного эллипсоида значения

$$\bar{a} = 6\,378\,070 \text{ м}, \quad \bar{z} = 1:296.6,$$

а для угловой скорости вращения Земли в 1 сек. среднего времени значение

$$\omega = \frac{2\pi}{86\,164.1}$$

и, произведя все расчеты по формулам (71)—(80), получим следующие окончательные результаты.

<sup>1</sup> В данное время еще нет возможности получить окончательное значение этой поправки, так как еще не сделан общий анализ всех произведенных для этого измерений, а некоторые абсолютные определения и гравиметрические связи в разных странах еще не вполне закончены или не опубликованы. Возможно, что на предстоящем в 1957 г. съезде Международного геодезического и геофизического союза будет уже принято некоторое решение об этой поправке. Указанная в тексте предварительная величина  $-12$  мга представляет округленное среднее значение из известных в данное время отдельных выводов.

Числовые значения величин, входящих в формулу (81)

$c_{20} = -109\,808 \cdot 10^{-8}$	$c_{40} = 358 \cdot 10^{-8}$	
$c_{22} = 574$	$c_{42} = -67$	
$c_{24} = -158$	$c_{44} = -40$	
$c_{30} = 442$	$c_{32} = 0$	$r_0 = 6\,363\,553 \text{ м}$
$c_{31} = 199$	$d_{22} = 8$	$fM = 39\,859 \cdot 10^{18} \frac{\text{см}^3}{\text{сек}^2}$
$c_{41} = -96$	$c_{43} = 5$	
$c_{42} = 36$	$d_{42} = -1$	
$d_{22} = -50$	$c_{44} = 1$	
$c_{24} = 42$	$d_{44} = 2$	
$d_{44} = 34$		

В процессе вычислений получены также следующие величины:

$$\sigma = 171\,889 \cdot 10^{-7}, \quad g_0 = 984\,293.9 \text{ мга}, \quad W_0 = 62\,636 \cdot 10^3 \frac{\text{см}^2}{\text{сек}^2}.$$

Полученные результаты не могут претендовать на большую точность. Основной причиной этого являются огромные проблемы в мировой гравиметрической съемке, на которой основано использованное здесь разложение сил тяжести. Большие пространства мирового океана, а также материков в южном полушарии гравиметрически исследованы еще совершенно недостаточно. Это обстоятельство может быть причиной значительных систематических, не поддающихся точному учету ошибок в полученных результатах. Поэтому полученный результат следует рассматривать как предварительный, дающий лишь ориентировочное представление о порядке различных членов в разложении потенциала земного притяжения.

**ЛИТЕРАТУРА**

Жонголович И. Д. 1952. Внешнее гравитационное поле Земли и фундаментальные постоянные, связанные с ним. Труды ИТА, 3, А.—М.  
 Жонголович И. Д. 1956. Об определении размеров общего земного эллипсоида. Труды ИТА, 6, А.—М.  
 Идельский Н. И. 1936. Теория потенциала с приложениями к теории фигур Земли и геофизике. 2-е изд., А.—М.  
 Нумеров Б. В. и Д. Н. Храмов, 1936. Об определении фигур геоида на основании наблюдений сил тяжести. Бюлл. Астр. инст., 40, А.  
 Пизетти П. 1933. Основы механической теории фигур планет. М.—Л.  
 Сладский Ф. А. 1888. Общая теория фигур Земли. М.

Поступило в Редакцию  
11 июля 1956 г.

Периодические движения частицы в поле тяготения вращающегося трехосного эллипсоида

Ю. В. Батраков

Рассматривается движение частицы с массой, равной нулю, под действием притяжения однородного трехосного эллипсоида, мало отличающегося от сферы того же объема. Эллипсоид равномерно вращается вокруг одной из осей симметрии.

Показано существование периодических решений третьего, второго и первого сортов и рассмотрены частные случаи.

THE PERIODICAL MOTIONS OF A PARTICLE UNDER GRAVITATION OF A ROTATING THREE-AXIAL ELLIPSOID, by J. W. Batrakov. — The article discusses the motion of a particle of zero mass under the action of gravity of a homogeneous three-axial ellipsoid, the latter differing but little from a sphere of the same volume and rotating uniformly about one of the axes of symmetry.

The possibility of periodical solutions of the third, second and first sort in this problem has been established.

Периодические движения в окрестности гравитирующего трехосного эллипсоида, насколько нам известно, еще никем не изучались. Известны лишь результаты, относящиеся к частному случаю, когда гравитирующий эллипсоид является эллипсоидом вращения. Наиболее полно они изложены в классической монографии (Moulton, 1920).

Упомянем еще работу Г. Н. Дубошина (1945), где рассмотрены пространственные периодические движения под действием притяжения эллипсоида вращения и нескольких концентрических круговых колец, расположенных в экваториальной плоскости.

Между тем, изучение свойств движения в окрестности трехосного эллипсоида было бы весьма полезным, так как, помимо получения новых результатов, позволило бы взглянуть с более общей точки зрения осветить уже известные особенности движения в различных частных случаях.

Настоящая работа преследует цель изучить условия существования некоторых простейших семейств периодических решений в окрестности гравитирующего трехосного эллипсоида. Первые два параграфа имеют вводный характер и содержат главным образом общие вопросы. В остальных параграфах мы займемся непосредственно периодическими решениями. В целях удобства изложения в первую очередь рассматриваются решения третьего сорта и лишь в последнюю очередь — решения первого сорта. При этом мы стараемся по возможности сделать упор на вопросы существования, не увлекаясь фактическим вычислением решений.

§ 1. Постановка задачи. Развитие пертурбационной функции

Рассмотрим однородный гравитирующий эллипсоид и обозначим его массу через M. Если уравнение эллипсоида записано в виде

x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1, (1.1)

то потенциала эллипсоида на внешней точке с координатами x, y, z выражается известной формулой

V = 3/4 \* k^2 \* M \* integral from 0 to infinity of (1 - x^2/(a^2+u) - y^2/(b^2+u) - z^2/(c^2+u)) / sqrt((a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)) \* du, (1.2)

где k^2 — постоянная тяготения, а u — решение уравнения

x^2/(a^2+u) + y^2/(b^2+u) + z^2/(c^2+u) = 1. (1.3)

Будем предполагать, что эллипсоид (1.1) мало отличается от сферы радиуса R и что объем его равен объему сферы. Пользуясь этим, можно написать

a^2 = R^2 + alpha, b^2 = R^2 + beta, c^2 = R^2 + gamma, (1.4)

где alpha, beta, gamma — малые величины, с точностью до малых более высоких порядков, связанные соотношением

alpha + beta + gamma = 0

в силу равенства объемов эллипсоида и сферы. Если ввести эксцентриситеты главных меридианных сечений

epsilon\_x = sqrt(a^2 - c^2)/a, epsilon\_y = sqrt(b^2 - c^2)/b, (1.5)

то с точностью до малых второго порядка будем иметь

epsilon\_x^2 = 2alpha + beta/R^2, epsilon\_y^2 = gamma + 2beta/R^2. (1.6)

Разложим потенциала (1.2) по степеням alpha, beta, gamma, тогда получим

V = k^2 \* M / r + 3/10 \* k^2 \* M \* (alpha^2 x^2 + beta^2 y^2 + gamma^2 z^2) / r^3 + ... (1.7)

Пусть эллипсоид (1.1) равномерно вращается вокруг оси OZ с угловой скоростью n и пусть система координат OX, OY, OZ связана с эллипсоидом и вращается вместе с ним. Тогда уравнения движения частицы под влиянием притяжения эллипсоида во вращающихся осях можно записать в виде

d^2x/dt^2 - 2n \* dy/dt - n^2 \* x = -nV/dx, d^2y/dt^2 + 2n \* dx/dt - n^2 \* y = -nV/dy, d^2z/dt^2 = -nV/dz, (1.8)

где V определяется формулой (1.7). Введем в эти уравнения и в выражение (1.7) безразмерный малый параметр epsilon. Для этого положим

3/10 \* k^2 \* M \* alpha = epsilon\_x, 3/10 \* k^2 \* M \* beta = epsilon\_y, 3/10 \* k^2 \* M \* gamma = epsilon\_z, (1.9)

где  $\lambda, \mu, \nu$  — некоторые величины такой же размерности как и  $k^2 M x$ , связанные условием  $\lambda + \mu + \nu = 0$ . Тогда  $V$  представится рядом по степеням малого параметра

$$V = V_0 + \theta V_1 + \theta^2 V_2 + \dots,$$

где

$$V_0 = \frac{k^2 M}{r}, \quad V_1 = \frac{\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2}{r^3} = \frac{\lambda x^2 + \mu y^2 - (\lambda + \mu) z^2}{r^3}, \dots \quad (1.10)$$

При  $\theta = 0$  эллипсоид обращается в сферу и движение частицы происходит по невозмущенному кеплеровскому эллипсу. Член  $\theta V_1$  можно рассматривать как наиболее существенную часть пертурбационной функции.

Выразим  $V_1$  через эллиптические элементы. Координаты частицы выражаются через эллиптические элементы следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= r (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\ y &= r (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\ z &= r \sin u \sin i, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где  $r$  есть радиус-вектор частицы ( $OP$  на рис. 1),  $u$  — аргумент широты,  $i$  — наклонность орбиты к экваториальной плоскости эллипсоида,  $\Omega = \angle NO\Omega$  —  $n'l$  — расстояние узла от направления оси  $OX$ . Через  $ON$  на рис. 1 обозначено начальное положение большой оси эллипсоида, через  $P$  — частица, через  $II$  — перигелий орбиты. Возводя (1.11) в квадраты и подставляя в (1.10), получим

$$V_1 = \frac{\lambda + \mu}{2a^3} \left[ 1 - 6e^2 + 6e^4 + \lambda(1 - e^2)^2 \cos(2u + 2\Omega) + \lambda e^4 \cos(2u - 2\Omega) + 2\lambda e^2(1 - e^2) \cos 2\Omega + 6e^2(1 - e^2) \cos 2u \right], \quad (1.12)$$

где обозначено

$$\lambda = \sin \frac{i}{2}, \quad \mu = \frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu}. \quad (1.13)$$

При помощи известных таблиц (Сэйле, 1859)<sup>1</sup> ограничиваясь четвертыми степенями эксцентриситета  $e$ , получаем разложение

$$\begin{aligned} r^{-3} &= a^{-3} \left[ 1 + \frac{3}{2} e^2 + \frac{15}{8} e^4 + \left( 3e + \frac{27}{8} e^3 \right) \cos l + \right. \\ &+ \left. \left( \frac{9}{2} e^2 + \frac{7}{2} e^4 \right) \cos 2l + \frac{53}{8} e^2 \cos 3l + \frac{77}{8} e^4 \cos 4l \right], \\ r^{-3} \cos 2u &= a^{-3} \left[ \left( -\frac{1}{2} e + \frac{1}{12} e^3 \right) \cos l + \left( 1 - \frac{5}{2} e^2 + \frac{41}{48} e^4 \right) \cos 2l + \right. \\ &+ \left. \left( \frac{7}{2} e - \frac{123}{16} e^3 \right) \cos 3l + \left( \frac{17}{2} e^2 - \frac{115}{6} e^4 \right) \cos 4l + \right. \\ &+ \left. \frac{845}{48} e^3 \cos 5l + \frac{533}{16} e^5 \cos 6l \right], \\ r^{-3} \sin 2u &= a^{-3} \left[ \left( -\frac{1}{2} e + \frac{1}{24} e^3 \right) \sin l + \left( 1 - \frac{5}{2} e^2 + \frac{37}{48} e^4 \right) \sin 2l + \right. \\ &+ \left. \left( \frac{7}{2} e - \frac{123}{16} e^3 \right) \sin 3l + \left( \frac{17}{2} e^2 - \frac{115}{6} e^4 \right) \sin 4l + \right. \\ &+ \left. \frac{845}{48} e^3 \sin 5l + \frac{533}{16} e^5 \sin 6l \right], \end{aligned} \quad (1.14)$$

<sup>1</sup> Имя аналитических таблиц в курсе М. Ф. Субботина (1937).

где  $u$  — истинная, а  $l$  — средняя аномалии. Через  $a$  обозначена большая полуось орбиты частицы (не путать с большой полуосью эллипсоида). Учитывая, что  $u = v + \omega$ , где  $\omega$  — расстояние перигелия от узла, окончательно получаем

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{\lambda + \mu}{2a^3} \left[ (1 - 6e^2 + 6e^4) \left[ 1 + \frac{3}{2} e^2 + \frac{15}{8} e^4 + \left( 3e + \frac{27}{8} e^3 \right) \cos l + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left( \frac{9}{2} e^2 + \frac{7}{2} e^4 \right) \cos 2l + \frac{53}{8} e^2 \cos 3l + \frac{77}{8} e^4 \cos 4l \right] + \right. \\ &+ \lambda (1 - e^2)^2 \left[ \left( -\frac{1}{2} e + \frac{1}{12} e^3 \right) \cos(l + 2\omega + 2\Omega) + \frac{1}{48} e^3 \cos(l - 2\omega - 2\Omega) + \right. \\ &+ \left. \left( 1 - \frac{5}{2} e^2 + \frac{13}{16} e^4 \right) \cos(2l + 2\omega + 2\Omega) + \frac{1}{24} e^4 \cos(2l - 2\omega - 2\Omega) + \right. \\ &+ \left. \left( \frac{7}{2} e - \frac{123}{16} e^3 \right) \cos(3l + 2\omega + 2\Omega) + \left( \frac{17}{2} e^2 - \frac{115}{6} e^4 \right) \cos(4l + 2\omega + 2\Omega) + \right. \\ &+ \left. \frac{845}{48} e^3 \cos(5l + 2\omega + 2\Omega) + \frac{533}{16} e^5 \cos(6l + 2\omega + 2\Omega) \right] + \\ &+ \lambda e^4 \left[ \left( -\frac{1}{2} e + \frac{1}{12} e^3 \right) \cos(l + 2\omega - 2\Omega) + \frac{1}{48} e^3 \cos(l - 2\omega + 2\Omega) + \right. \\ &+ \left. \left( 1 - \frac{5}{2} e^2 + \frac{13}{16} e^4 \right) \cos(2l + 2\omega - 2\Omega) + \frac{1}{24} e^4 \cos(2l - 2\omega + 2\Omega) + \right. \\ &+ \left. \left( \frac{7}{2} e - \frac{123}{16} e^3 \right) \cos(3l + 2\omega - 2\Omega) + \left( \frac{17}{2} e^2 - \frac{115}{6} e^4 \right) \cos(4l + 2\omega - 2\Omega) + \right. \\ &+ \left. \frac{845}{48} e^3 \cos(5l + 2\omega - 2\Omega) + \frac{533}{16} e^5 \cos(6l + 2\omega - 2\Omega) \right] + \\ &+ 2\lambda e^2 (1 - e^2) \left[ \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 + \frac{15}{8} e^4 \right) \cos 2\Omega + \left( \frac{3}{2} e + \frac{27}{8} e^3 \right) \cos(l - 2\Omega) + \right. \\ &+ \left. \cos(l + 2\Omega) \right] + \left( \frac{9}{4} e^2 + \frac{7}{4} e^4 \right) \left[ \cos(2l - 2\Omega) + \cos(2l + 2\Omega) \right] + \\ &+ \frac{53}{16} e^4 \left[ \cos(3l + 2\Omega) + \cos(3l - 2\Omega) \right] + \\ &+ \frac{77}{16} e^4 \left[ \cos(4l + 2\Omega) + \cos(4l - 2\Omega) \right] + \\ &+ 6e^2 (1 - e^2) \left[ \left( -\frac{1}{2} e + \frac{1}{12} e^3 \right) \cos(l + 2\omega) + \frac{1}{48} e^3 \cos(l - 2\omega) + \right. \\ &+ \left. \left( 1 - \frac{5}{2} e^2 + \frac{13}{16} e^4 \right) \cos(2l + 2\omega) + \frac{1}{24} e^4 \cos(2l - 2\omega) + \right. \\ &+ \left. \left( \frac{7}{2} e - \frac{123}{16} e^3 \right) \cos(3l + 2\omega) + \left( \frac{17}{2} e^2 - \frac{115}{6} e^4 \right) \cos(4l + 2\omega) + \right. \\ &+ \left. \frac{845}{48} e^3 \cos(5l + 2\omega) + \frac{533}{16} e^5 \cos(6l - 2\omega) \right] \Big]. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Разложение (1.15) понадобится нам в дальнейшем.



§ 2. Поверхность нулевых скоростей и точки либрации

Уравнения движения точки в окрестности гравитирующего эллипсоида (1.8) допускают интеграл Якоби

$$x^2 + y^2 + z^2 = n^2(x^2 + y^2) + \frac{2k^2M}{r} + 2\theta \frac{\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2}{r^3} + \dots = C. \quad (2.1)$$

Пологая  $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ , получаем уравнение поверхности нулевых скоростей, ограничивающей области возможных движений. Это уравнение с точностью до членов первого порядка относительно  $\theta$  имеет вид

$$2\Omega = n^2(x^2 + y^2) + \frac{2k^2M}{r} + 2\theta \frac{\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2}{r^3} = C. \quad (2.2)$$

Так как  $x, y, z$  входят в  $\Omega$  только посредством квадратов, то поверхность нулевых скоростей обладает тремя плоскостями симметрии, совпадающими с координатными плоско-

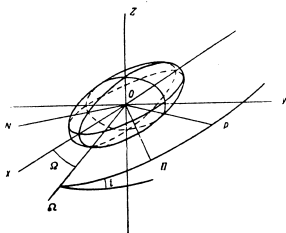


Рис. 1.

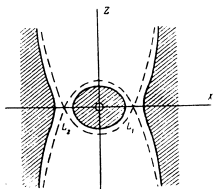


Рис. 2.

костями. Если постоянная  $C$  достаточно велика, то поверхность  $2\Omega = C$  имеет вид, представленный на рис. 2, где заштрихованы области возможного движения. По мере уменьшения  $C$  внешняя и внутренняя области возможного движения сближаются и при некотором  $C$  соприкасаются в двойных точках. Двойные точки поверхности нулевых скоростей обычно называются точками либрации.

Чтобы определить координаты точек либрации, необходимо положить  $\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0$  и определить  $x, y, z$ , удовлетворяющие этим уравнениям. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial x} &= x \left( n^2 - \frac{k^2M}{r^3} + \frac{2\theta\lambda}{r^3} - 5\theta \frac{\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2}{r^5} + \dots \right) = 0, \\ \frac{\partial \Omega}{\partial y} &= y \left( n^2 - \frac{k^2M}{r^3} + \frac{2\theta\mu}{r^3} - 5\theta \frac{\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2}{r^5} + \dots \right) = 0, \\ \frac{\partial \Omega}{\partial z} &= z \left( -\frac{k^2M}{r^3} + \frac{2\theta\nu}{r^3} - 5\theta \frac{\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2}{r^5} + \dots \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Из уравнений (2.3) видно, что единственные возможные решения будут при  $z=0$ , если только  $\theta$  достаточно мало. Пологая  $z=0$ , имеем два случая:

$$\begin{aligned} 1) \quad & y=0, \quad z=0, \quad n^2 - \frac{k^2M}{|x|^3} + \frac{2\theta\lambda}{|x|^3} + \dots = 0, \\ 2) \quad & x=0, \quad z=0, \quad n^2 - \frac{k^2M}{|y|^3} + \frac{2\theta\mu}{|y|^3} + \dots = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Отсюда окончательно получаем:

$$\begin{aligned} 1) \quad & y=0, \quad z=0, \quad x = \pm \left( a_0 + \frac{\theta\lambda}{n^2 a_0^3} + \dots \right), \\ 2) \quad & x=0, \quad z=0, \quad y = \pm \left( a_0 + \frac{\theta\mu}{n^2 a_0^3} + \dots \right), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где для краткости обозначено

$$a_0 = \sqrt[3]{\frac{k^2M}{n^2}}. \quad (2.6)$$

Таким образом, имеются четыре точки либрации, расположенные на продолжении осей эллипсоида в экваториальной плоскости симметрично относительно начала координат. Частица, помещенная в любую из этих точек будет находиться в состоянии покоя относительно вращающейся системы координат.

Вычислим еще значения постоянной  $C$  для каждой из этих точек. С точностью до малых выше первого порядка будем иметь:

$$\begin{aligned} 1) \quad & C = \frac{3k^2M}{a_0} + \frac{2\theta\lambda}{a_0^3}, \\ 2) \quad & C = \frac{3k^2M}{a_0} + \frac{2\theta\mu}{a_0^3}. \end{aligned}$$

Исследование устойчивости движения в найденных точках либрации проведено в работе В. К. Аббакина (1957), опубликованной в этом же номере "Булетеня". Там же получены периодические решения в окрестности этих точек.

§ 3. Периодические решения третьего сорта

Приведем уравнения движения частицы в форме, удобной для исследования, взяв в качестве переменных канонические элементы Делона:

$$\begin{aligned} L &= k\sqrt{M}\sqrt{a}, & l &= n(t-t_0), \\ G &= k\sqrt{M}\sqrt{a(1-e^2)}, & g &= \omega, \\ H &= k\sqrt{M}\sqrt{a(1-e^2)}\cos i, & h &= \Omega, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $a$  — большая полуось орбиты частицы,  $e$  — эксцентриситет,  $i$  — наклонность орбиты к экваториальной плоскости,  $n$  — среднее движение,  $\omega$  — расстояние перигея от узла,  $\Omega$  — расстояние от узла до направления оси  $Ox$  вращающейся системы координат (долгота узла). Тогда, как легко показать, уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G}, \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$F = F_0 + \theta F_1 + \theta^2 F_2 + \dots, \quad (3.3)$$

$$F_0 = \frac{k^2 M^2}{2L^2} + n^2 H, \quad F_1 = \frac{\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2}{\rho^2}, \dots$$

Здесь  $F_1, F_2, \dots$  являются периодическими функциями переменных  $l, g, h$  вида

$$\sum_{i,j,k} K(L, G, H) \cos(il + jg + 2kh), \quad (3.4)$$

где  $K(L, G, H)$  — коэффициенты, аналитическим образом зависящие от  $L, G, H$ . Правые части уравнений (3.2) не зависят явно от времени, и сами эти уравнения аналогичны уравнениям движения в ограниченной задаче трех тел. Но периодические решения третьего сорта ограниченной задачи изучались в нашей более ранней работе (Батраков, 1955). Поэтому некоторыми результатами, полученными в этой работе, можно воспользоваться для получения периодических решений третьего сорта в поле тяготения трехосного эллипсоида.

Напомним, в чем состоит метод Пуанкаре (Poincaré, 1892) для нахождения периодических решений.

При  $\theta = 0$  система (3.2) имеет решение:

$$\begin{aligned} L &= L_0, & \dot{l} &= nt + l_0, \\ G &= G_0, & g &= g_0, \\ H &= H_0, & \dot{h} &= -nt + h_0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где  $L_0, G_0, H_0, l_0, g_0, h_0$  — произвольные постоянные, а  $n = -\frac{\partial F_0}{\partial L_0}$ . Если  $n$  и  $l$  соизмеримы, т. е. отношение  $\frac{n}{l}$  равно отношению двух целых взаимно простых чисел, то (3.5) является периодическим решением и носит название порождающего решения. Обозначим период этого решения через  $T_0$ .

Для того чтобы найти периодические решения системы (3.2) при  $\theta \neq 0$ , близкие к (3.5) и обращающиеся в них при  $\theta = 0$ , полагаем

$$\begin{aligned} L &= L_0 + \zeta_1 + \zeta_2, & \dot{l} &= nt + l_0 + \gamma_1 + \gamma_2, \\ G &= G_0 + \zeta_3 + \zeta_4, & g &= g_0 + \gamma_3 + \gamma_4, \\ H &= H_0 + \zeta_5 + \zeta_6, & \dot{h} &= -nt + h_0 + \gamma_5 + \gamma_6, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где  $\zeta_i, \gamma_i$  — начальные отклонения решения (3.5) от порождающего решения, а  $\zeta_i, \gamma_i$  — функции времени, обращающиеся в нуль при  $t = 0$ , и составляем уравнения

$$\begin{aligned} \zeta_1(T) &= 0, & \gamma_1(T) &= n\Delta T + \gamma_1(T) = 0, \\ \zeta_2(T) &= 0, & \gamma_2(T) &= \gamma_2(T) = 0, \\ \zeta_3(T) &= 0, & \gamma_3(T) &= n\Delta T + \gamma_3(T) = 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где  $T$  — период искомого решения, вообще говоря отличный от  $T_0$  на величину  $\Delta T$  порядка малого параметра  $\theta$ .

Разлагая левые части уравнений (3.7) по степеням  $\zeta_i, \gamma_i, \Delta T, \theta$ , получаем уравнения для определения  $\zeta_i, \gamma_i, \Delta T$ , соответствующих периодическому решению в виде функций  $\theta$ . В этих уравнениях члены нулевой степени относительно  $\zeta_i, \gamma_i, \Delta T$  зависят от начальных значений порождающего решения (3.5) и, вообще говоря, отличны от нуля. Между тем определение  $\zeta_i, \gamma_i, \Delta T$  в виде голоморфных функций  $\theta$ , обращающихся в нуль при  $\theta = 0$ , возможно только в том случае, когда эти свободные члены отсутствуют. Приравнявая нулю свободные члены разложений  $\zeta_i, \gamma_i$  по степеням

$\zeta_i, \gamma_i, \Delta T$ , получаем условия, которым должны удовлетворять величины  $L_0, G_0, H_0, l_0, g_0, h_0$  для того, чтобы в окрестности (3.5) существовали искомые периодические решения. В нашем случае эти условия имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial [F_1]}{\partial l_0} = \frac{\partial [F_1]}{\partial g_0} = \frac{\partial [F_1]}{\partial h_0} &= 0, \\ \frac{\partial [F_1]}{\partial G_0} &= 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где обозначено

$$[F_1] = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} F_1 dt, \quad (3.9)$$

причем при вычислении (3.9) вместо  $L, G, H, l, g, h$  нужно подставить их значения из порождающего решения (3.5).

Если  $\zeta_i, \gamma_i, \Delta T$  известны, то тем самым известно и искомое периодическое решение, так как его легко получить со сколь угодно большой точностью фактическим разложением в ряд или численным интегрированием. Таким образом, все дело сводится к определению  $\zeta_i, \gamma_i, \Delta T$  из уравнений (3.7).

В силу того, что правые части уравнений движения (3.2) не зависят явно от времени, начало отсчета времени всегда можно выбрать так, что будет

$$l_0 = \gamma_1 = 0. \quad (3.10)$$

Кроме того, в силу существования интеграла Якоби  $F = \text{const}$  одно из уравнений (3.7) должно быть следствием остальных, и шесть величин  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5, \zeta_6, \Delta T$  связаны лишь пятью независимыми соотношениями (3.7). Так как производная  $\frac{\partial F_0}{\partial L_0}$  отлична от нуля, то зависимым можно считать уравнение  $\zeta_1(T) = 0$ . Что же касается вопроса о том, какое из начальных отклонений считать произвольным, то он решается рассмотрением всевозможных якобианов пятого порядка от функций  $\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5, \zeta_6$  по величинам  $\zeta_i, \gamma_i, \Delta T$ . Если, например, якобиан

$$\frac{\partial(\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5, \zeta_6)}{\partial(\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5, \zeta_6, \Delta T)} \neq 0 \quad (3.11)$$

при  $\zeta_1 = \gamma_1 = \Delta T = 0$  отличен от нуля, то из уравнений (3.7) при условиях (3.8) возможно определить  $\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5, \zeta_6, \Delta T$  в виде голоморфных функций  $\theta$  и  $\theta$  и, следовательно,  $\zeta_i$  можно считать произвольным.

В нашем случае якобиан (3.11) имеет вид (Батраков, 1955, стр. 115)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial l_0^2} & \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial g_0^2} \\ \frac{\partial F_1}{\partial l_0} & \frac{\partial F_1}{\partial g_0} \\ \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial l_0^2} & \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial g_0^2} \\ \frac{\partial F_1}{\partial l_0} & \frac{\partial F_1}{\partial g_0} \\ \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial l_0^2} & \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial g_0^2} \\ \frac{\partial F_1}{\partial l_0} & \frac{\partial F_1}{\partial g_0} \end{vmatrix}. \quad (3.12)$$

Таким образом, определение  $\zeta_i, \gamma_i, \Delta T$  как функций  $\theta$  возможно, и периодические решения системы (3.7) в окрестности порождающих решений существуют, если начальные значения порождающих решений удовлетворяют уравнениям (3.8) и если для этих начальных значений один из якобианов типа (3.11), в нашем случае (3.12), отличен от нуля. Вопрос о существовании периодических решений сводится к исследованию уравнений (3.8) и якобиана (3.12).

Рассмотрим сначала первые три уравнения (3.8). Как видно из (1.15), разложение  $F_1$  имеет вид

$$\sum K(L, G, H) \cos(il + 2jg + 2kh) (j, k = -1, 0, +1). \quad (3.13)$$

Если вместо  $l, g, h$  подставить их значения в порождающем решении, то аргументы в (3.13) примут вид

$$(in + 2kn)t + il_0 + 2jg_0 + 2kh_0 \quad (j, k = -1, 0, 1). \quad (3.14)$$

Отсюда видно, что критические члены могут быть только при условии

$$in \times 2n' = 0 \quad \text{или} \quad \frac{n}{n'} = \pm \frac{2}{i}. \quad (3.15)$$

Придавая последовательно значения  $l = 1, 2, \dots$ , получим для критических аргументов следующие возможные случаи:

$$1) \frac{n}{n'} = \pm \frac{2}{1}, \quad 2) \frac{n}{n'} = \pm \frac{1}{1}, \quad 3) \frac{n}{n'} = \pm \frac{2}{3}, \quad 4) \frac{n}{n'} = \pm \frac{1}{2}, \dots \quad (3.16)$$

Следовательно, периодические решения третьего сорта, для существования которых требуется, чтобы  $n$  и  $n'$  были соизмеримы, возможны только в случаях (3.16), где верхний знак соответствует прямому движению частицы, т. е. в том же направлении, в каком происходит движение эллипсоида, а нижний — обратному движению. Но обратное движение можно рассматривать как прямое по орбите с наклоном, большей 90°. Это позволяет ограничиться рассмотрением только прямых движений.

Допустим, что между  $n$  и  $n'$  имеет место соотношение  $\frac{n}{n'} = \frac{2}{q}$ , где  $q = 1$  целое число. Тогда для  $[F_1]$  получаем разложение вида

$$\sum_{j=-l, 0, +1} K(L_0, G_0, H_0) \cos(ql + 2jg_0 + 2h_0). \quad (3.17)$$

Отсюда сразу видно, что  $\frac{\partial [F_1]}{\partial l_0}$  и  $\frac{\partial [F_1]}{\partial h_0}$  разлагаются только постоянным множителем и, следовательно, из первых трех уравнений (3.8) независимыми являются только два. В силу этого одну из величин  $l_0, h_0$  можно выбрать произвольно. Положим  $l_0 = 0$ . Тогда из (3.8), учитывая (3.17), получим

$$g_0 = k_1 \frac{\pi}{2}, \quad h_0 = k_2 \frac{\pi}{2} \quad (k_1, k_2 = 0, 1, 2, 3). \quad (3.18)$$

Значит, если  $l_0 = 0$ , а  $g_0$  и  $h_0$  удовлетворяют (3.18), то первые три уравнения (3.8) будут удовлетворены.

Теперь обратимся к последнему уравнению (3.8). Переходя к кеплеровским переменным, это уравнение можно переписать так (Батраков, 1955, стр. 116):

$$\frac{1 - e^2}{c} \frac{\partial [F_1]}{\partial e} - \frac{1 - 2e^2}{4c} \frac{\partial [F_1]}{\partial \sigma} = 0. \quad (3.19)$$

Соотношение (3.19) представляет собой связь между эксцентриситетом и наклоном порождающего решения, в окрестности которого возможно существование орбит третьего сорта.

Нас могут интересовать только такие порождающие решения, которые достаточно близки к кругам, так как только в этом случае, применяя разложение (1.15), можно получить более или менее точные результаты. Но если составить уравнение (3.19) для соизмеримостей 2/1 и 2/3, то легко убедиться, что оно имеет вид

$$\frac{ca(\sigma)}{c} + b(\sigma) + c(\sigma)e + \dots = 0$$

<sup>1</sup> Мы рассмотрим здесь только тот случай, когда в  $F_1$  имеются критические члены. Случай, когда в  $F_1$  критические члены отсутствуют, нуждается в дополнительном исследовании.

и при  $x$  нулевого порядка относительно  $e$  удовлетворяется только сравнительно большими значениями  $e$ . Поэтому соизмеримости 2/1 и 2/3 мы рассматривать не будем, и вопрос о существовании в них решений третьего сорта оставим открытым. Обратимся к изучению других соизмеримостей.

$$\text{Соизмеримость } \frac{n}{n'} = 1$$

Если, как мы условились выше, положить  $l_0 = 0$ , то функция  $[F_1]$  в этой соизмеримости имеет вид

$$[F_1] = \frac{\lambda + \mu}{2a^3} \left\{ (1 - 6\sigma^2 + 6\sigma^4) \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 + \frac{15}{8} e^4 \right) + \right. \\ \left. + x(1 - \sigma^2) \left( 1 - \frac{5}{2} e^2 + \frac{13}{16} e^4 \right) \cos(2g_0 + 2h_0) + \frac{x}{24} e^4 \cos(2g_0 - 2h_0) + \right. \\ \left. + x\sigma^2(1 - \sigma^2) \left( \frac{9}{2} e^2 + \frac{7}{2} e^4 \right) \cos 2h_0 + \dots \right\}, \quad (3.20)$$

где  $g_0, h_0$  имеют значения (3.18). При помощи (3.20) из (3.19) получаем

$$6(1 - 5\sigma^2 + 5\sigma^4) + x \{ (-4 + 7\sigma^2 - 3\sigma^4) \cos(2g_0 + h_0) + (9\sigma^2 - 9\sigma^4) \cos 2h_0 \} + \\ + e^4 \left\{ 9(1 - 5\sigma^2 + 5\sigma^4) - \frac{33}{5} x(9 - 28\sigma^2 + 19\sigma^4) \cos(2g_0 + 2h_0) + \right. \\ \left. + \frac{1}{6} x^2 \cos(2g_0 - 2h_0) - \frac{9}{4} x(1 - 56\sigma^2 + 56\sigma^4) \cos 2h_0 \right\} + \dots = 0. \quad (3.21)$$

Уравнение (3.21) удовлетворяется малыми значениями  $e$  только в том случае, когда свободный член достаточно мал. Приравняв этот свободный член нулю, получаем условие существования круговых порождающих решений в соизмеримости 1/1

$$6(1 - 5\sigma^2 + 5\sigma^4) + x \{ (-4 + 7\sigma^2 - 3\sigma^4) \cos(2g_0 + 2h_0) + (9\sigma^2 - 9\sigma^4) \cos 2h_0 \} = 0. \quad (3.22)$$

В зависимости от значений  $g_0, h_0$  могут иметь место четыре случая:

- 1)  $g_0 = h_0 = 0; g_0 = \pi, h_0 = 0; g_0 = 0, h_0 = \pi; g_0 = \pi, h_0 = \pi;$
- 2)  $g_0 = 0, h_0 = \frac{\pi}{2}; g_0 = \pi, h_0 = \frac{\pi}{2}; g_0 = 0, h_0 = \frac{3}{2}\pi; g_0 = \pi, h_0 = \frac{3}{2}\pi;$
- 3)  $g_0 = \frac{\pi}{2}, h_0 = 0; g_0 = \frac{\pi}{2}, h_0 = \pi; g_0 = \frac{3}{2}\pi, h_0 = 0; g_0 = \frac{3}{2}\pi, h_0 = \pi;$
- 4)  $g_0 = \frac{\pi}{2}, h_0 = \frac{\pi}{2}; g_0 = \frac{3}{2}\pi, h_0 = \frac{\pi}{2}; g_0 = \frac{\pi}{2}, h_0 = \frac{3}{2}\pi; g_0 = \frac{3}{2}\pi, h_0 = \frac{3}{2}\pi;$

для которых из (3.21) получаем

$$x = \pm \frac{3(1 - 5\sigma^2 + 5\sigma^4)}{2(1 - 4\sigma^2 + 3\sigma^4)}, \quad (3.23)$$

$$x = \pm \frac{3(1 - 5\sigma^2 + 5\sigma^4)}{3\sigma^2 - \sigma^4 - 2}, \quad (3.24)$$

причем (3.23), (3.24) с верхним знаком относятся соответственно к случаям 1 и 3, а с нижним знаком — к случаям 2 и 4.

В табл. 1 даны значения  $\chi$  в зависимости от  $\sigma^2$ , причем через  $x_1$  обозначены  $\chi$  из (3.23), а через  $x_2$  — значения из (3.24). В обоих случаях взят верхний знак. На рис. 3, 4 представлены графики кривых  $\chi = x_1(\sigma^2)$ ,  $\chi = x_2(\sigma^2)$ . Графики зависимостей (3.23), (3.24) с нижним знаком получаются из графиков на рис. 3, 4 поворотом плоскости чертежа вокруг оси  $\sigma^2$  на  $180^\circ$ .

Таблица 1

$\sigma^2$	$x_1$	$x_2$
0	1.5030	-1.5030
0.1	1.3095	-0.7971
0.2	0.9375	-0.2885
0.3	-1.0714	0.0739
0.4	2.5000	0.3122
0.5	1.5000	0.4235
0.6	0.9375	0.3747
0.7	0.2273	0.1220
0.8	-1.0714	-0.4818
0.9	-4.8529	-3.5106
1.0	$-\infty$	$-\infty$

Величина  $\chi$  является мерой отклонения эллипсоида от эллипсоида вращения, круговое сечение которого совпадает с экваториальной плоскостью. Этому эллипсоиду вращения соответствует значение  $\chi=0$ . Как видно из рис. 3, 4, в случаях 1, 3 круговые порождающие решения возможны при любых  $\chi$ . Что же касается случаев 2, 4, то для них круговые порождающие решения возможны лишь при  $\chi \leq 0.43 \dots$  для случая 2 и при  $\chi \geq 0.43 \dots$  для случая 4. Если  $\sigma^2 < 0.5$ , то порождающее решение является прямым, при  $\sigma^2 > 0.5$  оно будет обратным.

Допустим теперь, что для некоторого  $\chi$  имеется  $\sigma_0$ , соответствующее круговому порождающему решению. Тогда уравнение (3.19) дает возможность определить  $\sigma^2$  как голоморфную функцию  $e^i$ , обращающуюся

в  $\sigma^2$  при  $e=0$ . Для этого достаточно, чтобы частная производная по  $\sigma^2$  от левой части (3.22) была отлична от нуля. Получим сходящееся при достаточно малых  $e$  разложение

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 + \sigma_0^2 e^2 + \sigma_0^4 e^4 + \dots, \quad (3.25)$$

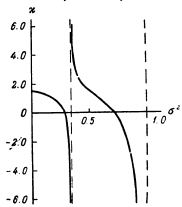


Рис. 3.

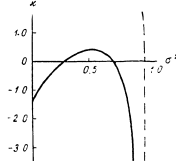


Рис. 4.

которое дает связь между наклоном и эксцентриситетом для некруговых допустимых, порождающих решений.

Чтобы доказать существование периодических решений системы уравнений (3.2) в окрестности допустимых порождающих решений, остается проверить, что якобиан (3.12) в соизмеримости  $1/1$  отличен от нуля. Вычисление  $\frac{\partial^2 [F_1]}{\partial e^2}$  показывает, что эта производная может обратиться в нуль при  $e=0$  только в том случае, когда  $\chi, \sigma^2$  удовлетворяют соотношению

$$\chi = \pm \frac{1-6\sigma^2+6\sigma^4}{(1-\sigma^2)^2}, \quad (3.26)$$

<sup>1</sup> Допустимыми мы называем порождающие решения, удовлетворяющие (3.18) и (3.19).

где верхний знак соответствует случаю  $2g_0 + 2h_0 = (2k+1)\pi$ , а нижний — случаю  $2g_0 + 2h_0 = 2k\pi$ . Точно также имеем

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial g_0^2}, \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial g_0 \partial h_0} \\ \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial h_0 \partial g_0}, \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial h_0^2} \end{bmatrix} = N e^{2i\sigma^2} (\sigma^2 (1-\sigma^2)^2 \cos 2h_0 \cos (2g_0 + 2h_0) + A(\sigma^2) e^{2i} + \dots), \quad (3.27)$$

где  $N$  — постоянная, зависящая от  $L_0$ , а  $A(\sigma^2)$  — некоторая функция, зависящая от  $\sigma, g_0, h_0$ . При достаточно малых  $e$  определитель (3.27) может обратиться в нуль только в следующих случаях:

$$1) \chi=0, \quad 2) e=0, \quad 3) \sigma=0, \quad 4) \sigma=1. \quad (3.28)$$

Если эти случаи исключить и, кроме того, рассматривать  $\chi, \sigma_0$ , не удовлетворяющие уравнению (3.26), то при достаточно малых  $e$  определитель (3.12) будет отличен от нуля, и можно сделать заключение о существовании в окрестности допустимого порождающего решения с наклоном (3.25) периодических решений системы уравнений (3.2), обращающихся в порождающие при  $e=0$ .

В зависимости от порождающего решения эти периодические решения могут быть как прямыми, так и обратными.

Таким образом, существование периодических решений третьего сорта в соизмеримости  $1/1$  нашей задачи можно считать доказанным.

$$\text{Соизмеримость } \frac{n}{\pi} = \frac{1}{2}$$

В этой соизмеримости имеем

$$\begin{aligned} [F_1] = & \frac{\lambda + \mu}{2\sigma^2} \left\{ (1 - 6\sigma^2 + 6\sigma^4) \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 + \frac{15}{8} e^4 \right) + \right. \\ & + \chi (1 - \sigma^2)^2 \left( \frac{17}{2} e^2 - \frac{115}{6} e^4 \right) \cos (2g_0 + 2h_0) + \\ & \left. + \frac{77}{8} \chi^2 (1 - \sigma^2)^4 e^4 \cos 2h_0 + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Уравнение (3.19) принимает тогда вид

$$\begin{aligned} & 6 \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 \right) (1 - 5\sigma^2 + 5\sigma^4) + [17\chi (1 - \sigma^2)^2 + \\ & + \chi (-511 + 97[17\sigma^2 - 460\sigma^4] e^2) \cos (2g_0 + 2h_0) + \\ & + \frac{77}{2} (\sigma^2 - \sigma^4) e^2 \cos 2h_0 + \dots = 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

При  $e=0$  уравнение (3.30) дает

$$6(1 - 5\sigma^2 + 5\sigma^4) + 17\chi(1 - \sigma^2)^2 \cos(2g_0 + 2h_0). \quad (3.31)$$

Отсюда

$$\chi = \pm \frac{6}{17} \frac{1 - 5\sigma^2 + 5\sigma^4}{(1 - \sigma^2)^2}, \quad (3.32)$$

где верхний знак соответствует случаю  $2g_0 + 2h_0 = (2k+1)\pi$ , а нижний — случаю  $2g_0 + 2h_0 = 2k\pi$  ( $k$  — целое число).

Равенство (3.32) определяет связь между параметром  $\chi$ , характеризующим форму эллипсоида, и наклоном кругового порождающего решения. Значения  $\chi$  в зависи-

ности от значений  $\sigma^2$  приводятся в табл. 2, причем взят верхний знак. На рис. 5 дан график зависимости (3.32) с верхним знаком. График этой зависимости с нижним знаком может быть получен на рис. 5 поворотом плоскости чертежа на  $180^\circ$  вокруг оси  $\sigma^2$ .

Таблица 2

$\sigma^2$	$x$
0	0.3529
0.1	0.2397
0.2	0.1103
0.3	-0.0360
0.4	-0.1961
0.5	-0.3530
0.6	-0.4412
0.7	-0.1961
0.8	1.7646
0.9	19.411
1.0	$\infty$

Из рис. 5 видно, что круговые порождающие решения существуют только при  $x \geq -0.44 \dots$  в случае  $2g_0 + 2h_0 = (2k+1)\pi$  и при  $x \leq 0.44 \dots$  в случае  $2g_0 + 2h_0 = 2k\pi$ . Если  $x, \sigma_0$  соответствуют круговому допустимому порождающему решению, то решение уравнения (3.30) можно представить в виде (3.25), который определит связь между  $\sigma$  и  $e$  некругового порождающего решения при малых  $e$ .

Для доказательства существования периодических решений в окрестности допустимых порождающих решений необходимо еще рассмотреть определитель (3.12).

Имеем

$$\frac{\partial^2 [F_1]}{\partial L_0^2} = N_1 (1 - 6\sigma^2 + 6\sigma^4 + B(\sigma, x)e^2 + \dots),$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial g_0^2} & \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial h_0^2} \\ \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial h_0 \partial g_0} & \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial g_0^2} \end{vmatrix} = N_2 x^2 e^2 ((1 - \sigma^2) \cos(2g_0 + 2h_0) + C(\sigma, x)e^2 + \dots), \quad (3.33)$$

где  $N_1, N_2$  — постоянные, зависящие от  $L_0$ , а  $B(\sigma, x), C(\sigma, x)$  — некоторые непрерывные функции от  $\sigma, x, g_0, h_0$ .

Отсюда видно, что если выполнены условия  $x \neq 0, e \neq 0, \sigma_0 \neq 1$  и, кроме того,  $\sigma_0$  не является корнем уравнения

$$1 - 6\sigma^2 + 6\sigma^4 = 0,$$

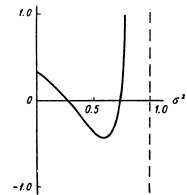


Рис. 5.

то при достаточно малых  $e$  якобиан (3.12) отличен от нуля. Тем самым существование решений третьего сорта в окрестности допустимых некруговых порождающих решений в соизмеримости  $1/2$  можно также считать доказанным. В этой соизмеримости, как и в предыдущей, нельзя доказать существование решения третьего сорта в следующих двух случаях: 1) когда эллипсоид является эллипсоидом вращения ( $x=0$ ), 2) когда порождающее решение является строго круговым ( $e=0$ ).

Эти случаи можно рассматривать как вырожденные. В случае  $\sigma_0=1$  существование периодических решений искомого вида не исключено, но для доказательства необходимо дополнительное исследование, которого мы здесь проводить не будем.

Соизмеримость  $\frac{n}{m} = \frac{2}{5}$  и другие соизмеримости

В соизмеримости  $\frac{2}{5}$  имеем

$$[F_1] = \frac{\lambda + \mu}{2a^2} \left\{ (1 - 6\sigma^2 + 6\sigma^4) \left( 1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{15}{8}e^4 \right) + \frac{845}{48} (1 - \sigma^2)^2 e^2 \cos(2g_0 + 2h_0) + \dots \right\}, \quad (3.34)$$

и уравнение (3.19) принимает вид

$$6 \left( 1 + \frac{3}{2}e^2 \right) (1 - 5\sigma^2 + 5\sigma^4) + \frac{845}{16} x (1 - \sigma^2)^2 e \cos(2g_0 + 2h_0) + \dots = 0. \quad (3.35)$$

При  $e=0$  получаем

$$1 - 5\sigma^2 + 5\sigma^4 = 0. \quad (3.36)$$

Приближенные значения корней (3.36) равны

$$\sigma_1^2 = 0.525732, \quad \sigma_2^2 = 0.850651.$$

Этим значениям корней соответствуют следующие наклоны порождающего кругового решения:

$$i_1^0 = 63^\circ 26' 06'', \quad i_2^0 = 116^\circ 33' 54''. \quad (3.37)$$

Допустимые некруговые порождающие решения, независимо от значений  $x$ , должны теперь иметь наклон, близкий к значениям (3.37). Этот наклон определяется из (3.35) разложениями по степеням эксцентриситета

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \sigma_1^0 + D_1 e + \dots, \\ \sigma_2^2 &= \sigma_2^0 + D_2 e + \dots, \end{aligned} \quad (3.38)$$

где  $D_1, D_2$  — коэффициенты, зависящие от  $\sigma_1^0, \sigma_2^0$  соответственно, а также от  $x, g_0, h_0$ . В данном случае разложение (3.34) оказывается уже недостаточным для исследования якобиана (3.12), так как с принятой точностью этот якобиан тождественно равен нулю. Однако, продолжив это разложение до более высоких степеней эксцентриситета, нетрудно убедиться в том, что при достаточно малых  $e$ , отличных от нуля, и при  $x \neq 0$  якобиан (3.12) будет отличен от нуля, и, следовательно, решения третьего сорта в данном случае существуют.

Точно такая же картина, как и в соизмеримости  $2/5$  будет иметь место и в остальных соизмеримостях  $1/3, 2/7, \dots$ . Во всех этих соизмеримостях решения третьего сорта, близкие к кругам, существуют и имеют наклоны, мало отличающиеся от (3.37). Таким образом, соизмеримость  $2/5$  является типической.

#### § 4. Решения второго сорта

Рассмотрим движение частицы в экваториальной плоскости. Так как движение является плоским, то  $z=0$  и будем иметь

$$V_1 = \frac{\lambda x^2 + \mu g^2}{r^2}. \quad (4.1)$$

Введем вместо прямоугольных координат канонические элементы Делоне

$$\begin{aligned} L &= k \sqrt{M} \sqrt{a}, & l &, \\ G &= k \sqrt{M} \sqrt{a(1 - e^2)}, & g &, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где  $a$  — большая полуось,  $e$  — эксцентриситет,  $l$  — средняя аномалия, а  $g$  — расстояние перигея от оси  $OX$  вращающейся системы координат. Если расстояние перигея от оси  $OZ$  неподвижной системы координат обозначить через  $g'$ , то

$$g = -a'l + g'. \quad (4.3)$$

Тогда уравнения движения частицы принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial t}, \quad \frac{dl}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial l}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g}, \quad \frac{dg}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial g}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где

$$\begin{aligned} F &= F_0 + bF_1 + b^2F_2 + \dots, \\ F_0 &= \frac{kM^2}{2L^2} + nG, \quad F_1 = \frac{\nu x^2 + y^2}{r}, \dots \end{aligned} \quad (4.5)$$

Разложение  $F_1$  по степеням эксцентриситетов в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{\lambda + \mu}{2a^3} \left\{ 1 + \frac{3}{2} e^2 + \frac{15}{8} e^4 + \left( 3e + \frac{27}{8} e^3 \right) \cos l + \left( \frac{9}{2} e^2 + \frac{7}{2} e^4 \right) \cos 2l + \right. \\ &+ \frac{53}{8} e^3 \cos 3l + \frac{77}{8} e^4 \cos 4l + \left. \left[ -\frac{1}{2} e + \frac{1}{16} e^3 \right] \cos(l + 2g) + \frac{1}{48} e^3 \cos(l - 2g) + \right. \\ &+ \left. \left( 1 - \frac{5}{2} e^2 + \frac{13}{16} e^4 \right) \cos(2l + 2g) + \frac{1}{24} e^4 \cos(2l - 2g) + \right. \\ &+ \left. \left( \frac{7}{2} e - \frac{123}{16} e^3 \right) \cos(3l + 2g) + \left( \frac{17}{2} e^2 - \frac{115}{6} e^4 \right) \cos(4l + 2g) + \right. \\ &\left. - \frac{845}{48} e^3 \cos(5l + 2g) + \frac{533}{16} e^4 \cos(6l + 2g) \right\}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

При  $b=0$  система (4.4) имеет порождающее решение

$$\begin{aligned} L &= L_0, \quad l = nt + l_0, \\ G &= G_0, \quad g = -nt + g_0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где  $L_0, G_0, l_0, g_0$  — произвольные постоянные и где  $n = \frac{kM^2}{L_0^3}$ . Мы будем предполагать, что  $L_0 \neq G_0$ , т. е. порождающее решение не является круговым. Пусть  $n$  и  $n'$  соизмеримы между собой, тогда решение (4.7) является периодическим. Его период обозначим через  $T_0$ .

При  $b \neq 0$  можно написать

$$\begin{aligned} L &= L_0 + \xi_1 + \xi_2, \quad l = nt + l_0 + \gamma_1 + \gamma_2, \\ G &= G_0 + \eta_1 + \eta_2, \quad g = -nt + g_0 + \gamma_1 + \gamma_2, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где  $\xi_i, \gamma_i$  — начальные отклонения, а  $\xi_i, \eta_i$  — функции времени, постоянных  $\xi_i, \gamma_i$  и параметра  $b$ , обращающихся в нуль при  $t=0$ . Среди всех решений (4.8) нам нужны периодические с периодом  $T = T_0 + \Delta T$ , где  $\Delta T$  — величина такого же порядка, как и  $b$ . Условия периодичности можно записать в виде

$$\begin{aligned} \xi_1(T) &= 0, \quad \xi_2(T) = n\Delta T + \gamma_1(T) = 0, \\ \eta_2(T) &= 0, \quad \eta_1(T) = -n\Delta T + \gamma_2(T) = 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Раскладывая левые части (4.9) по степеням  $\xi_i, \eta_i, \Delta T$ , получим уравнения, которым должны удовлетворять эти величины в случае периодического решения. В силу существования интеграла Якоби, из которого возможно определение  $\xi_1(T)$  в виде функции от остальных  $\xi_i, \eta_i$ , уравнение  $\xi_1(T) = 0$  является следствием остальных и его можно

исключить из рассмотрения. Кроме того, в силу независимости правых частей (4.4) от времени начала отсчета времени, можно выбрать так, что  $l_0 = \gamma_1 = 0$ . Тогда имеем

$$\begin{aligned} \xi_1(T) &= \frac{\partial F_1}{\partial L_0} - \xi_1 \frac{\partial F_0}{\partial L_0} - \frac{\partial F_1}{\partial L_0} \frac{\partial F_0}{\partial L_0} + \frac{\partial F_1}{\partial L_0} \frac{\partial F_0}{\partial L_0} + \dots \\ &+ \frac{\partial^2 F_1}{\partial L_0^2} + \frac{\Delta T}{T_0} \frac{\partial F_1}{\partial L_0} + \frac{b}{T_0} \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial L_0} \right\} + \dots = 0, \end{aligned}$$

$$\xi_2(T) = n \frac{\Delta T}{T_0} - \xi_2 \frac{\partial F_0}{\partial L_0} - \frac{b}{T_0} \frac{\partial F_0}{\partial L_0} \int_0^T \frac{\partial F_1}{\partial L_0} dt dt - b \frac{\partial F_1}{\partial L_0} \dots = 0, \quad (4.10)$$

$$\eta_2(T) = -n \frac{\Delta T}{T_0} - \eta_2 \frac{\partial F_0}{\partial G_0} \dots = 0,$$

где через  $\left\{ \frac{\partial F_1}{\partial L_0} \right\}$  обозначена некоторая известная постоянная, зависящая от начальных значений порождающего решения (Батраков, 1955, стр. 124).

Для определения четырех неизвестных  $\xi_i, \eta_i, \Delta T$  имеем лишь три уравнения (4.10), следовательно, одно из этих неизвестных можно выбрать произвольно. Выберем  $\xi_2 = 0$ , что равносильно выбору начального эксцентриситета решения в качестве произвольной постоянной.

Определение  $\xi_1, \eta_1, \Delta T$  как голоморфных функций  $b$ , обращающихся в нуль при  $b=0$ , из уравнений (4.10), возможно только в том случае, когда

$$\frac{\partial F_1}{\partial L_0} = 0. \quad (4.11)$$

Так как функция  $F_1$  имеет вид

$$\sum K(L, G) \cos(il + 2jg) \quad \begin{matrix} (i=0, 1) \\ (j=-1, 0, 1) \end{matrix}$$

то единственными соизмеримостями, где появляются критические члены, являются соизмеримости вида (3.15). Следовательно, периодические решения второго сорта, как и решения третьего сорта, возможны только в этих соизмеримостях.<sup>1</sup> Полагая  $l_0 = 0$ , имеем

$$\frac{\partial F_1}{\partial L_0} = -\sum 2jK(L_0, G_0) \sin 2jg_0, \quad (4.12)$$

причем в силу свойств разложения (4.6) в правой части (4.12) все слагаемые, кроме одного, равны нулю. Отсюда единственным решением уравнения (4.11) будет

$$g_0 = \frac{k\pi}{2} \quad (k=0, 1, 2, 3). \quad (4.13)$$

Из последних двух уравнений (4.10) можно определить  $\xi_1, \Delta T$  как голоморфные функции  $b, \gamma_2$ , обращающиеся в нуль, при  $b = \gamma_2 = 0$ . Подставляя их выражения через  $b, \gamma_2$  в первое уравнение (4.10) и учитывая, что  $\xi_2 = 0$ , получим уравнение, разрешимое относительно  $\gamma_2$ , если

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial G_0^2} \neq 0. \quad (4.14)$$

<sup>1</sup> Если учитывать только те критические члены, которые входят в  $F_1$ .

Но мы уже отмечали, что разложение (4.12) сводится к одному члену. Следовательно, (4.14) при достаточно малых  $\epsilon$  выполняется и решения второго сорта существуют во всех соизмеримостях типа (3.15). Особыми будут случаи, когда эллипсоид является эллипсоидом вращения ( $\lambda=0$ ), а также, когда порождающее решение является строго круговым. В этих случаях  $\frac{\partial^2 F_1}{\partial g_0^2}$  тождественно равна нулю и определение  $\gamma_1$  невозможно. Эти случаи, как и в предыдущих параграфах, будут вырожденными, и периодические решения второго сорта в этих случаях не существуют. Исключением является лишь соизмеримость 1/1, где при  $\lambda=0$  круговые порождающие решения возможны. Периодические решения в этом случае рассмотрены в работе В. К. Абалакина (1957).

§ 5. Решения первого сорта

Для того чтобы показать существование решений первого сорта в нашей задаче, введем вместо переменных Делоне канонические переменные Пуанкаре  $L, \lambda, \xi, \chi$  по формулам

$$L = k \sqrt{M} \sqrt{a}, \quad \lambda = l + g = (n-n')t + \tilde{\lambda}, \quad (5.1)$$

$$\xi = \sqrt{2(L-G)} \cos g, \quad \chi = -\sqrt{2(L-G)} \sin g.$$

Тогда уравнения движения примут вид

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial L}, \quad (5.2)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \xi}, \quad \frac{d\chi}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \chi},$$

где

$$F = F_0 + \theta F_1 + \theta^2 F_2 + \dots, \quad (5.3)$$

$$F_0 = \frac{k^2 M^2}{2L^2} + n' \left( L + \frac{\xi^2 + \chi^2}{2} \right), \quad F_1 = \lambda x + \mu y^2 + \dots$$

Функции  $F_i$  разлагаются в ряды по степеням  $\xi, \chi$  вида

$$\sum K_{j,s} (L) \xi^j \chi^s \cos s\lambda,$$

причем нужно брать  $\cos s\lambda$  при  $j$  четном и  $\sin s\lambda$  — при  $j$  нечетном. При  $\theta=0$  система (4.2) имеет порождающее решение

$$L = L_0, \quad \lambda = (n_0 - n')t + \lambda_0, \quad (5.4)$$

$$\xi = 0, \quad \chi = 0,$$

представляющее движение с угловой скоростью  $n_0 - n'$  по кругу радиуса  $a_0$ , лежащему в экваториальной плоскости. Это порождающее решение является периодическим и имеет период  $T_0 = \frac{2\pi}{n_0 - n'}$ .

Будем искать решения системы (4.2) при  $\theta \neq 0$  периода  $T = T_0 + \Delta T$ , где  $\Delta T$  — величина такого же порядка, как и  $\theta$ , близкие к (5.4) и обращающиеся в (5.4) при  $\theta=0$ . Эти решения можно записать в виде

$$L = L_0 + \beta_1 + \beta_2, \quad \lambda = (n_0 - n') \frac{T}{T_0} t + \lambda_0 + \gamma_1 + \gamma_2, \quad (5.5)$$

$$\xi = \xi_1 + \xi_2, \quad \chi = \chi_1 + \chi_2,$$

где  $\beta_i, \gamma_i$  — начальные отклонения искомого решения от (5.4), а  $\beta_i, \psi_i$  — функции времени с периодом  $T_i$ , обращающиеся в нуль при  $t=0$  и разлагающиеся по степеням  $\beta, \gamma, \theta$ . Условия периодичности

$$\beta_i(T) = 0, \quad \psi_i(T) = 0 \quad (i=1, 2) \quad (5.6)$$

дают уравнения, которым должны удовлетворять  $\beta, \gamma, \Delta T, \theta$ . При этом уравнение  $\beta_1(T)$  является следствием трех остальных, так как система (4.2) имеет интеграл Якоби, разделимый относительно  $L$ .

Опраничиваясь первыми степенями неизвестных и параметра  $\theta$ , выйдем оставшиеся три уравнения в явном виде

$$\frac{\beta_1(T)}{T_0} = \lambda(T) - \lambda(0) - 2\theta = (n_0 - n') \frac{\Delta T}{T_0} - \frac{3k^2 M^2}{L_0^2} \beta_1 + \dots, \quad (5.7)$$

$$+ \frac{3\theta k^2 M^2}{L_0^2 (n_0 - n')} \sum K_{m,0} \cos s\lambda - \theta \frac{\partial K_{0,0}}{\partial L_0} + \dots = 0,$$

$$\beta_2(T) = \xi(T) - \xi(0) = \xi_2 (\cos n' T_0 - 1) - \gamma_2 \sin n' T_0 + \theta F_2 + \dots = 0,$$

$$\psi_2(T) = \chi(T) - \chi(0) = \psi_2 \sin n' T_0 + \gamma_2 (\cos n' T_0 - 1) + \theta F_2 + \dots = 0,$$

где  $F_2, F_3, \dots$  — известные функции начальных значений порождающего решения, не равные одновременно нулю.

Пять величин  $\beta, \gamma, \Delta T$  связаны только тремя уравнениями (5.7), и, следовательно, две из этих величин можно выбрать произвольно. Так как правые части (5.2) не зависят от времени, то  $\beta_i$  вместе с  $\lambda_0$  являются произвольными величинами, и можно положить  $\beta_1 = \lambda_0 = 0$ . Кроме того, положим  $\beta_2 = 0$ . Тогда уравнения (5.7) определяют  $\Delta T, \beta_2, \gamma_2$  единственным образом как голоморфные функции  $\theta$ , обращающиеся в нуль при  $\theta=0$ , если только отвлечь от нуля определитель

$$\begin{vmatrix} \cos n' T_0 - 1 & -\sin n' T_0 \\ \sin n' T_0 & \cos n' T_0 - 1 \end{vmatrix} = 2(1 - \cos n' T_0) \quad (5.8)$$

и, кроме того,  $n_0 \neq n'$ .

Но (5.8) обращается в нуль только при

$$\frac{n_0}{n'} = \frac{1+m}{m} \quad (m = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (5.9)$$

Таким образом, периодические решения первого сорта существуют во всех случаях, кроме (5.9) и случая  $n_0 = n'$ . При этом мы предполагаем, что  $n' \neq 0$ .

Если же  $n'=0$ , т. е. рассматривается случай покоящегося трехосного эллипсоида, то определитель (5.8) тождественно равен нулю, но одновременно будем иметь  $F_1 = T_0 = 0$ ; следовательно, необходимо провести дополнительные исследования.

Отметим, что определитель (5.8) не зависит от  $\lambda$ , точно так же не зависит от  $\lambda$  и коэффициент при  $\Delta T$  в первом уравнении (5.7). Следовательно, периодические решения первого сорта во вращающейся системе координат существуют и в случае  $\lambda=0$ , т. е. в случае эллипсоида вращения.

Подведем некоторые итоги. В работе рассматривается задача о периодических движениях частицы в поле тяготения трехосного эллипсоида. При этом предполагается, что эллипсоид мало отличается от сферы того же объема и его отклонения от этой сферы в направлении осей являются малыми первого порядка. Эллипсоид считается однородным.

В § 1 даны дифференциальные уравнения движения частицы в поле тяготения вращающегося эллипсоида. В эти уравнения, посредством равенств (1.9), введен малый

параметр  $\theta$ . Равенства (1.9) означают, что отношения  $\frac{\lambda}{\mu}, \frac{\mu}{\nu}, \frac{\nu}{\lambda}$  являются фиксированными. Проводится разложение пертурбационной функции по степеням эксцентриситетов с точностью до членов четвертого порядка включительно.

В § 2 получено уравнение поверхности нулевых скоростей и определены координаты точек либрации.

В § 3 методом Пуанкаре доказывается существование решений третьего сорта в случае, когда имеют место соотношения  $\frac{n}{n'} = \frac{1}{i}$  или  $\frac{1}{2}$ , где  $n$  — среднее движение частицы, а  $n'$  — угловая скорость вращения эллипсоида. Изучаются условия существования почти круговых порождающих решений. Зависимость между параметром  $k$ , характеризующим форму эллипса, и наклонностью круговых порождающих решений для решений третьего сорта представлена на рис. 3, 4, 5. В соизмеримых  $\frac{n}{n'} = \frac{2}{i}$  ( $i=5, 6, \dots$ ) наклонности почти круговых порождающих решений должны быть близки к  $63^\circ 26' 06''$  или же к дополнению этой величины до  $180^\circ$ .

В § 4 доказывается существование решений второго сорта во всех соизмеримостях. В § 5 рассматривается вопрос о существовании решений первого сорта и доказывается, что они существуют при всех  $n$  и  $n'$ , кроме  $\frac{n}{n'} = \frac{1+k}{k}$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) и  $n = n'$ . Имеется также сомнительный случай  $n' = 0$ .

В заключение отметим, что выводы, сделанные в работе, справедливы и в том случае, когда гравитирующий эллипсоид не будет однородным. Необходимо лишь, чтобы слои одинаковой плотности располагались гомотетично, т. е. были бы ограничены эллипсоидами, подобными поверхностному эллипсоиду.

ЛИТЕРАТУРА

Абалакии В. К. 1957. К вопросу об устойчивости точек либрации в окрестности вращающегося гравитирующего эллипсоида, Бюлл. ИТА, 6, 8.  
 Батраков Ю. В. 1955. Периодические решения типа Шварцшилда в ограниченной задаче трех тел. Бюлл. ИТА, 4, 2.  
 Дубовицкий Г. Н. 1945. О периодических движениях в системе спутников Сатурна. Труды ГАИШ, 15, вып. 1.  
 Субботин М. Ф. 1937. Курс небесной механики, 2. ОНТИ, М.—А.  
 Cayley A. 1859. Tables of the developments of Functions in the theory of elliptic motion. Memoirs of the RAS, 29, стр. 191—306.  
 Moulton F. 1920. Periodic orbits. Washington.  
 Poincaré H. 1892. Methodes nouvelles de la mécanique celeste, 1. Paris.

Получено в Редакцию  
 15 июня 1956 г.

Бюллетень Института Теоретической Астрономии

T. VI

1957

№ 8 (81)

К вопросу об устойчивости точек либрации в окрестности вращающегося гравитирующего эллипсоида

В. К. Абалакии

Исследуются устойчивости точек либрации в случае движения частицы в поле тяготения вращающегося эллипсоида. Точки либрации, лежащие на продолжениях малой оси экваториального сечения эллипсоида, устойчивы в первом приближении; точки либрации, расположенные в направлении большой оси, неустойчивы. Найден три семейства периодических орбит, размеры которых зависят от одного параметра.

ON THE STABILITY OF LIBRATION POINTS NEAR THE GRAVITATING ELLIPSOID IN ROTATION, by V. K. Abalakin. — In the present paper the stability of the libration points in the case of a particle moving under the gravitational attraction of a rotating ellipsoid has been discussed. The libration points which lie on the extensions of the minor axis of the equatorial section of the ellipsoid have been found to be stable by the first approximation while those disposing in direction of the major axis are unstable. Three families of periodic orbits are obtained, the sizes of which depending on one parameter. In addition the one-parametric family of asymptotic solutions has been also derived.

В работе „Периодические движения частицы в поле тяготения вращающегося трехосного эллипсоида“ (Батраков, 1957) были найдены положения относительного равновесия — точки либрации — в случае движения материальной частицы нулевой массы под действием притяжения вращающегося эллипсоида.

В настоящей статье мы ставим целью исследование устойчивости движения в точках либрации и получение периодических решений в окрестности этих точек. При этом мы будем считать положение относительного равновесия устойчивым в первом приближении, если система уравнений в вариациях такова, что соответствующее ей характеристическое уравнение имеет своими корнями чисто мнимые величины. Если же некоторые из корней характеристического уравнения имеют не равные нулю вещественные части, то положение относительного равновесия считается неустойчивым. Метод исследования в данной задаче такой же, что и в ограниченной задаче трех тел [см., например, в руководстве Мультонна (Moulton, 1923)].

Уравнения движения материальной частицы в гравитационном поле эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

вращающегося с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг одной из главных осей, в данном случае вокруг оси OZ, могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} &= \frac{\partial U}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} &= \frac{\partial U}{\partial y} \\ \ddot{z} &= \frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где обозначено

$$2U = \omega^2(x^2 + y^2) + 2k^2M \left( \frac{1}{r} + \frac{\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2}{r^3} \right) + \dots \quad (2)$$



Полуоси  $a, b$  и  $c$  эллипсоида связаны с радиусом  $R$  сферы того же объема и той же средней плотности (сфера сравнения) соотношениями

$$\begin{aligned} a^2 &= R^2 + m\lambda, \\ b^2 &= R^2 + m\mu, \\ c^2 &= R^2 + m\nu, \end{aligned}$$

где  $m$  — некоторый числовой коэффициент, зависящий от распределения плотности эллипсоида; для однородного эллипсоида  $m = \frac{10}{3}$ . Параметры  $\lambda, \mu$  и  $\nu$ , входящие в (2), пропорциональны квадратам отклонений эллипсоида от сферы сравнения и удовлетворяют условию  $\lambda + \mu + \nu = 0$ .

Отклонения эллипсоида от сферы сравнения, а значит и величины  $\lambda, \mu$  и  $\nu$  считаем малыми, причем равенства параметров  $\lambda, \mu, \nu$  принимаем за величины того же порядка малости. Кроме того, можно отметить, что величины  $\lambda, \mu, \nu$  могут характеризовать неоднородность эллипсоида при гомотетическом расположении слоев одинаковой плотности, благодаря чему в известной степени увеличивается общность рассматриваемой задачи. Значение остальных, входящих в (2) величин не нуждается в пояснениях.

В случае движения частицы в окрестности вращающегося эллипсоида существуют положения относительного равновесия  $L_1, \dots, L_4$  — точки либрации, лежащие на продолжениях главных осей эллипсоида  $2a$  и  $2b$  симметрично относительно его центра (Ватраков, 1957). Координаты точек либрации  $L_1$  и  $L_2$  в наших обозначениях имеют вид

$$x_0 = \pm \left( a_0 + \frac{\lambda}{a_0} \right), \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 0,$$

а координаты точек  $L_3$  и  $L_4$  определяются формулами

$$x_0 = 0, \quad y_0 = \pm \left( a_0 + \frac{\mu}{a_0} \right), \quad z_0 = 0,$$

где  $a_0^2 = k^2 M \omega^{-2}$ .

В силу симметричного расположения точек либрации  $L_1$  и  $L_2, L_3$  и  $L_4$  относительно начала системы координат и независимости их от способа обозначения координатных осей достаточно все рассуждения в дальнейшем провести для одной из точек, например, для точки  $L_1(x_0, 0, 0)$ .

Выберем точку либрации  $L_1$  за начало новой системы координат с осями, параллельными осям старой системы отсчета. Тогда система уравнений в вариациях (с точностью до малых первого порядка) примет вид

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} = \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \sum \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial^3 \Omega}{\partial x^3} + \gamma' \frac{\partial^3 \Omega}{\partial x^2 \partial y} + \gamma'' \frac{\partial^3 \Omega}{\partial x \partial y^2} + \gamma''' \frac{\partial^3 \Omega}{\partial x \partial y \partial z}, \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} = \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \sum \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial^3 \Omega}{\partial y^3} + \gamma' \frac{\partial^3 \Omega}{\partial y^2 \partial x} + \gamma'' \frac{\partial^3 \Omega}{\partial y \partial x^2} + \gamma''' \frac{\partial^3 \Omega}{\partial y \partial x \partial z}, \\ \ddot{z} = \frac{\partial \Omega}{\partial z} + \sum \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} + \gamma \frac{\partial^3 \Omega}{\partial z^3} + \gamma' \frac{\partial^3 \Omega}{\partial z^2 \partial x} + \gamma'' \frac{\partial^3 \Omega}{\partial z \partial x^2} + \gamma''' \frac{\partial^3 \Omega}{\partial z \partial x \partial y}. \end{cases} \quad (3)$$

где обозначено  $\dot{x} = \dot{x} - x_0, \dot{y} = y - y_0, \dot{z} = z$  и где при вычислениях частных производных  $\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \dots$  необходимо положить  $x = x_0, y = 0, z = 0$ .

Тогда тождественно имеем

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0.$$

Вычисление производных второго порядка при указанных выше значениях  $x, y, z$  дает следующие выражения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} &= \omega^2 + 2(A+B\gamma), \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} = 0, \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} &= \omega^2 - (A-2B\gamma), \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \partial z} = 0, \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} &= -(A-2B\gamma), \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z \partial x} = 0, \end{aligned}$$

где для краткости обозначено

$$\begin{cases} A = k^2 M \left( \frac{1}{x_0^3} + \frac{5\gamma}{x_0^5} + \dots \right), \\ B = k^2 M \left( \frac{1}{x_0^3} + \dots \right). \end{cases} \quad (4)$$

Потому система (3) приводится к виду

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} = [\omega^2 + 2(A+B\gamma)]x, \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} = [\omega^2 - (A-2B\gamma)]y, \\ \ddot{z} = -(A-2B\gamma)z. \end{cases} \quad (5)$$

Очевидно, что третье уравнение системы (5), независимое от первых двух, имеет решение

$$z = C_1 \sin \sqrt{A-2B\gamma}t + C_2 \cos \sqrt{A-2B\gamma}t,$$

где  $\gamma < \frac{A}{2B}$ .

Решение первых двух уравнений системы (5) будем искать в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = Pe^{it}, \\ \dot{y} = Re^{it}. \end{cases} \quad (6)$$

Подстановка (6) в (5) дает следующие соотношения для определения постоянных  $P$  и  $R$ :

$$\begin{cases} [x^2 - [\omega^2 + 2(A+B\gamma)]P - 2\omega zR = 0, \\ 2\omega zP + [x^2 - [\omega^2 - (A-2B\gamma)]R = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Система уравнений (7) может иметь ненулевые решения относительно  $P$  и  $R$  только в том случае, когда детерминант ее равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} x^2 - [\omega^2 + 2(A+B\gamma)]P & -2\omega z \\ + 2\omega z & x^2 - [\omega^2 - (A-2B\gamma)]R \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

Уравнение (8), являющееся характеристическим уравнением системы первых двух дифференциальных уравнений из (5), при помощи (4) и равенства  $x_0 = a_0 + \frac{\lambda}{a_0}$  преобразуется к виду

$$\dot{y}^2 + \left( 1 - \frac{4\lambda + 2\mu}{a_0^2} \right) \dot{z}^2 + \frac{6(\mu - \lambda)}{a_0^2} = 0, \quad (9)$$

где положено  $\dot{y} = \frac{y}{a_0}$ .

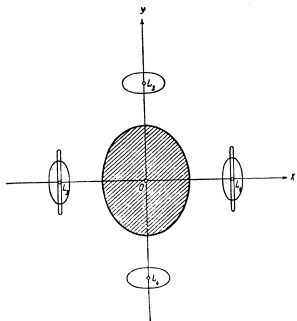
При  $\lambda < \mu$  уравнение (9) имеет четыре попарно сопряженных чисто мнимых корней. Если параметры  $\sqrt{|\lambda|}$  и  $\sqrt{|\mu|}$  принять за малые первого порядка, то с точностью до величин второго порядка малости эти корни имеют вид

$$\begin{aligned} \beta_1 &= +\frac{i}{a_0} \sqrt{6(\mu - \lambda)}, & \beta_2 &= -\frac{i}{a_0} \sqrt{6(\mu - \lambda)}, \\ \beta_3 &= +i, & \beta_4 &= -i. \end{aligned}$$

Таким образом, при  $\lambda < \mu$  точка либрации  $L_1$  является устойчивым в первом приближении положением относительного равновесия; однако это соответствует тому критическому случаю, когда для строгого решения вопроса об устойчивости первого приближения недостаточно.

При  $\lambda > \mu$  уравнение (9) имеет два вещественных и два сопряженных чисто мнимых корня

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{a_0} \sqrt{6(\mu - \lambda)}, & \beta_2 &= -\frac{1}{a_0} \sqrt{6(\mu - \lambda)}, \\ \beta_3 &= +i, & \beta_4 &= -i. \end{aligned}$$



В этом случае точка либрации  $L_1$  неустойчива (Ляпунов, 1950, стр. 128); однако, ввиду наличия отрицательного вещественного корня, здесь имеет место условная устойчивость в смысле Ляпунова. Соответствующие условия, связывающие начальные данные, приведены ниже.

Вследствие симметричного расположения точек либрации  $L_1$  и  $L_2$  относительно начала координат можно сделать вывод о том, что устойчивость точки  $L_1$  при  $\lambda < \mu$  означает одновременно и устойчивость точки  $L_2$ .

Таким образом, мы получаем, что при  $\lambda < \mu$  точки либрации  $L_1$  и  $L_2$  являются положениями соответственно устойчивого и неустойчивого равновесия. При  $\lambda > \mu$  устойчивость обладают точки  $L_2$  и  $L_4$ , точки либрации  $L_1$  и  $L_3$  при этом условии неустойчивы.

В случае  $\lambda = \mu$ , соответствующем сфериду, понятие точки либрации "теряет смысл. Перейдем теперь к отысканию периодических решений в окрестности точек либрации  $L_1, \dots, L_4$ . В силу равноправности этих точек ограничимся рассмотрением одной из них, например  $L_1$ .

Как известно, система дифференциальных уравнений имеет периодические решения, если соответствующее ей характеристическое уравнение имеет, по крайней мере, одну пару чисто мнимых корней (Ляпунов, 1950, стр. 240—246, 259—261).

Поскольку система (5) удовлетворяет условиям существования периодических решений, то в окрестности точки  $L(x_0, 0, 0)$  существуют периодические решения, которые мы получим, выбирая определенным образом начальные данные — началь-

ные координаты  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$  и компоненты скорости  $\dot{\xi}_0, \dot{\eta}_0, \dot{\zeta}_0$ . Так как при  $\lambda < \mu$  характеристическое уравнение (9) имеет две пары сопряженных чисто мнимых корней, то в данном случае существуют два семейства периодических решений, которые с принятой точностью имеют вид

$$\begin{cases} \xi = P_1 e^{i\omega t} + P_2 e^{-i\omega t}, \\ \eta = R_1 e^{i\omega t} + R_2 e^{-i\omega t} \end{cases}$$

"

$$\begin{cases} \xi = P_3 e^{i\omega t} + P_4 e^{-i\omega t}, \\ \eta = R_3 e^{i\omega t} + R_4 e^{-i\omega t} \end{cases}$$

Их периоды равны соответственно  $\frac{2\pi a_0}{a_0 \sqrt{6(\mu - \lambda)}}$  и  $\frac{2\pi}{a_0}$  с точностью до малых первого порядка.

При  $\lambda > \mu$  имеется одна пара чисто мнимых корней, и, следовательно, существует одно семейство периодических решений вида (с той же точностью)

$$\begin{cases} \xi = P_5 e^{i\omega t} + P_6 e^{-i\omega t}, \\ \eta = R_5 e^{i\omega t} + R_6 e^{-i\omega t} \end{cases}$$

с периодом  $\frac{2\pi}{a_0}$  (с точностью до малых первого порядка).

Подставив выражения  $A$  и  $B$  из (4) при  $x_0 = a_0 + \frac{i}{a_0}$  в систему (7) и учитывая, что  $\beta_1 = \frac{1}{a_0}$ , запишем (7) в виде

$$\begin{cases} \xi^2 - 3\left(1 + \frac{2\mu}{a_0^2}\right)P - 2R = 0, \\ 2\mu P + \left[\xi^2 - 1 + \frac{2(\mu - \lambda)}{a_0^2}\right]R = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Последовательная подстановка в (10) значений  $\beta_1, \dots, \beta_4$  дает для случая  $\lambda < \mu$

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{2i}{3a_0} \sqrt{6(\mu - \lambda)} R_1, & P_2 &= i \frac{2i}{3a_0} \sqrt{6(\mu - \lambda)} R_2, \\ P_3 &= -\frac{i}{2} R_3, & P_4 &= i \frac{i}{2} R_4 \end{aligned}$$

и для случая  $\lambda > \mu$

$$\begin{aligned} P_1 &= -\frac{2}{3a_0} \sqrt{6(\mu - \lambda)} R_1, & P_2 &= i \frac{2}{3a_0} \sqrt{6(\mu - \lambda)} R_2, \\ P_3 &= -\frac{i}{2} R_3, & P_4 &= +\frac{i}{2} R_4. \end{aligned}$$

Положим  $\xi = 0$  и  $\dot{\xi} = 0$ , тогда  $C_1 = C_2 = 0$ , т. е. движение материальной частицы происходит в плоскости. Для получения периодического решения долгого периода определим начальные данные условиями  $R_3 = R_4 = 0$ .

Тогда будем иметь

$$\begin{cases} \xi = P_1 e^{i\omega t} + P_2 e^{-i\omega t}, \\ \eta = R_1 e^{i\omega t} + R_2 e^{-i\omega t}. \end{cases}$$

Подставляя выражения  $P_1$  и  $P_2$  через произвольные постоянные  $R_1$  и  $R_2$  и заменяя показательные функции тригонометрическими, получим

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{2}{3} q \Lambda_2 \cos \frac{\omega_2}{\tau} t + \frac{2}{3} q \Lambda_1 \sin \frac{\omega_2}{\tau} t, \\ \eta &= \Lambda_1 \cos \frac{\omega_2}{\tau} t - \Lambda_2 \sin \frac{\omega_2}{\tau} t, \end{aligned}$$

где обозначено  $q = \frac{1}{a_0} \sqrt{6(\mu - \lambda)}$ ,  $\Lambda_1 = R_1 + R_2$ ,  $\Lambda_2 = -i(R_1 - R_2)$ .

Исключая из выражений для  $\xi$  и  $\eta$  время  $t$ , получим уравнение орбиты периодического движения с периодом  $\frac{2\pi a_0}{\omega \sqrt{6(\mu - \lambda)}}$  в виде

$$\frac{2\pi}{9} \frac{\xi^2}{q^2 C^2} + \eta^2 = 1, \quad (11)$$

где  $C^2 = \Lambda_1^2 + \Lambda_2^2$ .

Уравнение (11) представляет эллипс с полуосями  $\frac{2}{3} q C$  и  $C$ , параллельными координатным осям, и с эксцентриситетом  $e = 1 - \frac{2}{9} q^2$ .

Периодическое решение короткого периода получим, полагая  $R_1 = R_2 = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \xi &= -\frac{i}{2} R_2 e^{i\omega t} + \frac{i}{2} R_1 e^{-i\omega t}, \\ \eta &= R_2 e^{i\omega t} + R_1 e^{-i\omega t}. \end{aligned}$$

Аналогично предыдущему случаю получаем

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2} \Lambda_3 \cos \omega t + \frac{1}{2} \Lambda_4 \sin \omega t, \\ \eta &= \Lambda_3 \cos \omega t - \Lambda_4 \sin \omega t, \end{aligned}$$

где  $\Lambda_3 = R_3 + R_4$ ,  $\Lambda_4 = -i(R_3 - R_4)$ .

Уравнение траектории этого периодического движения с периодом  $\frac{2\pi}{\omega}$ , совпадающим с периодом до малых первого порядка с периодом вращения эллипсоида, имеет вид

$$\frac{\xi^2}{C^2} + \frac{\eta^2}{C^2} = 1, \quad (12)$$

где  $C^2 = \Lambda_3^2 + \Lambda_4^2$ .

Эллипс (12) имеет полуоси  $\frac{C}{2}$  и  $C$  и эксцентриситет  $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

В случае  $\lambda > \mu$  получается только одно семейство периодических решений короткого периода, совпадающее с рассмотренным выше короткопериодическим семейством. Уравнение орбиты соответствующего периодического движения идентично уравнению (12).

Расположение периодических орбит при  $\lambda < \mu$  представлено на рисунке. Отметим, что размеры орбиты зависят от одной произвольной постоянной.

Можно заметить, что при  $\lambda > \mu$ , выбирая начальные условия так, чтобы выполнялись  $R_1 = R_3 = R_4 = 0$ , получим семейство асимптотических решений, имеющее с принятой точностью вид

$$\begin{cases} \xi = P_1 e^{i\omega t} \\ \eta = R_2 e^{i\omega t} \end{cases}$$

и соответствующее отрицательному вещественному корню  $\frac{1}{2}$  характеристического уравнения. Траектория этого асимптотического движения (с принятой точностью) есть прямая, проходящая через точку либрации и уравнение которой имеет вид (с той же точностью)

$$\xi = \frac{2}{3a_0} \sqrt{6(\mu - \nu)} \eta.$$

Как уже было отмечено выше, в этом случае имеет место условие (в смысле Ляпунова) устойчивости соответствующих положений относительного равновесия.

Таким образом, в нашей статье получены следующие результаты:

- 1) доказана в первом приближении устойчивость движения материальной частицы в точках либрации, лежащих на продолжениях малой оси экваториального сечения эллипсоида;
- 2) в точках либрации, расположенных в направлении большой оси эллипсоида, движение частицы неустойчиво;
- 3) в окрестности устойчивых положений относительного равновесия существуют два семейства периодических орбит долгого и короткого периодов;
- 4) в окрестности неустойчивых положений относительного равновесия существуют одно семейство периодических орбит короткого периода и одно семейство асимптотических орбит.

Периодические движения в обоих случаях происходят по орбитам, близким к эллипсам, размеры которых зависят от одного существенного параметра.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Батраков Ю. В. 1957. Периодические движения частиц в поле тяготения вращающегося трехлопастного эллипсоида. Бюлл. ИТА, 6, 8 (81).  
 Диниун А. М. 1950. Общая задача об устойчивости движения. 3-е изд. ГИИТА, М.—Л.  
 Меллер Ф. Р. 1923. An Introduction to Celestial Mechanics. New York.

Поступило в Редакцию  
15 июня 1956 г.

## Бюллетень Института Теоретической Астрономии

Т. VI

1957

№ 8 (81)

### О траекториях полета ракеты вокруг Луны

М. С. Лисовская

В работе указываются условия существования орбит ракет, охватывающих Землю и Луну и проходящих на произвольно малом расстоянии от Луны. Разработан метод графического интегрирования, с помощью которого построено 5 симметричных орбит указанного типа.

ÜBER DIE RAKETENBAHNEN, DIE DEN MOND UMFASSEN, von M. S. Lisovskaja. — In dieser Arbeit werden die Existenzbedingungen der Raketenbahnen, die die Erde und den Mond umfassen und oben dem letzteren einen wörtlich kleinen Minimalabstand haben, angegeben. Mittels der vom Autor gegebenen grafischen Methode werden 5 solchen symmetrischen Raketenbahnen konstruiert.

#### Введение

Целью настоящей работы является выяснение качественной картины траекторий, по которым может двигаться ракета, запускаемая с Земли или с искусственного спутника, остающаяся на небольшом расстоянии Луну и возвращающаяся обратно.

Существует целый ряд работ, в которых рассматривается построение траекторий ракет.

Для ракеты, снабженной реактивным двигателем, разрешена общая задача о выборе направления мгновенных импульсов, сообщаемых двигателем при условии минимума расхода горючего. Так, например, выведены формулы, определяющие траекторию с минимальным расходом горючего, связывающую круговые орбиты вокруг двух планет (Lawden, 1955).

Что касается построения траектории ракеты, целиком предоставленной действию сил притяжения, задача решалась, как правило, без учета возмущений (Кой, 1950; Эно-Пеклетри, 1950), а именно в сферах действия Земли и Луны строились две невозмущенные круговые орбиты, причем переход с одной орбиты на другую фактически не рассматривался.

Лишь в нескольких работах были определены траектории полета ракеты методом численного интегрирования уравнений возмущенного движения.

В одной из них (Goldstein, Fröberg, 1952) решается наиболее легкая задача — полет на Луну без последующего возвращения на Землю. В недавно вышедшей работе Г. А. Чеботарева (Чеботарев, 1956) строится траектория полета вокруг Луны с возвращением на Землю без дополнительного импульса. Автор строит эту орбиту последовательными приближениями так, чтобы в результате удовлетворить двум условиям:

- 1) скорость ракеты в момент ее соединения с Луной принимается равной нулю;
- 2) траектория должна касаться поверхности Земли (см. § 2), но при этом ограничивает минимальное расстояние ракеты от центра Луны (оно оказывается весьма значительным — 31 600 км).

Как будет показано в настоящей работе, это расстояние может быть сделано, вообще говоря, любым, без нарушения симметрии траектории, если не связывать себя нулевым значением скорости в момент соединения с Луной. Именно мы заданым определенным (небольшим) расстоянием ракеты от центра Луны в момент соединения и будем

выбирать величину начальной скорости таким образом, чтобы траектория пересекала поверхность Земли или прошла вблизи нее.

В работе построено 6 орбит, охватывающих более или менее полно интересующую нас область движения. Из них 5 орбит построено особым методом графического интегрирования.

### § 1. Об условиях, которым должна удовлетворять траектория ракет без расхода горючего

Наиболее простой (с вычислительной точки зрения) способ построения траектории ракеты, которая проходила бы на заданном расстоянии от Луны, состоит в сообщении ракете дополнительного импульса вблизи Луны, там, где ее движение относительно Луны становится невозмущенным.

Гораздо труднее выбрать начальные условия движения ракеты, если она на своем пути не получает дополнительного импульса.

Среди задач, которые будут поставлены при облете Луны, можно предвидеть фотографирование части Луны, которая не видна с Земли. При этом ракета должна приблизиться к Луне на некоторое минимальное расстояние  $\epsilon$ .

Таким образом, наша задача будет решена, если траектория ракеты будет удовлетворять двум условиям:

- 1) ракета пересечет линию Земля—Луна со стороны невидимой части поверхности Луны на расстоянии  $\epsilon$  от ее центра;
- 2) ракета вернется на Землю, т. е. пройдет на небольшом расстоянии от центра Земли.

В тот момент, когда будет выполняться первое условие, расстояние ракеты от центра Земли будет равно  $r_2 = a' + \epsilon$ , где  $a'$  — среднее значение большой полуоси Луниной орбиты. (Движение Луны считаем круговым).

Зададим начальные условия движения ракеты. Пусть в начальный момент ракета находится на малом расстоянии  $r_1$  от центра Земли. Рассмотрим эллиптическое движение относительно Земли, определяемое минимальным расстоянием от центра Земли, равным  $r_1$ , и максимальным, равным  $r_2$ , где  $r_2 = a' + \epsilon$ . Эллипсы эллипса  $a$ , и  $e_0$  определяются из соотношений

$$\begin{aligned} r_1 &= a_0(1 - e_0), \\ r_2 &= a_0(1 + e_0). \end{aligned} \quad (1)$$

Пусть  $v_0$  — эллиптическая скорость, соответствующая расстоянию  $r_1$ . Сообщим эту скорость ракете в начальный момент.

Пока ракета не попадет в сферу действия Луны, она будет двигаться по эллиптической орбите с элементами  $a_0$  и  $e_0$ , определяемыми соотношениями (1).

Вблизи Луны движение ракеты становится невозмущенным относительно Луны. Скорость ее при этом с удалением от Земли увеличивается под влиянием Луны, в то время как эллиптическая скорость с удалением от Земли уменьшается.

Итак, в области тесного сближения с Луной истинная скорость больше эллиптической. Кроме того, очевидно, что  $r$  (расстояние от Земли) с течением времени возрастает. Учтя эти два обстоятельства, покажем, что для оскулирующей орбиты относительно Земли в рассматриваемый момент тесного сближения с Луной минимальное расстояние от Земли  $r_1$  будет, вообще говоря, больше, чем исходное расстояние  $r_1$ , являющееся минимальным для исходной эллиптической орбиты.

Действительно, как видно из соотношения  $v^2 = k^2 m_1 \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a_{\text{оск}}} \right)$ , при одновременном увеличении  $r$  и  $v$  большая полуось оскулирующих орбит  $a_{\text{оск}}$  будет с течением времени увеличиваться; в частности,  $a_{\text{оск}} > a_0$ .

Покажем теперь, что  $e_{\text{оск}} < e_0$ . Как было сказано, нас интересует случай, когда ракета приблизится к Луне на минимальное расстояние  $\epsilon$  при пересечении ею линии

551

Земля—Луна. Так как  $\epsilon$  — минимальное расстояние от Луны, то скорость ракеты относительно Луны будет в этот момент перпендикулярна линии  $TLR$  (рис. 1).

Скорость Луны  $\vec{v}_L$  тоже перпендикулярна к линии  $TLR$ , следовательно, скорость ракеты относительно Земли, равная  $\vec{v}_R = \vec{v}_L + \vec{v}_R^o$ , тоже перпендикулярна к этой линии. Тогда  $TR$  будет афелийным расстоянием для оскулирующей орбиты, соответствующей этому моменту времени. Расстояние  $TR$ , равное  $a + \epsilon$  и, следовательно, равное  $r_2$ , будет равно

$$TR = r_2 = a_{max}(1 + e_{max}).$$

Для исходной эллиптической орбиты мы имели  $r_2 = a_0(1 + e_0)$ . Так как  $a_{max} > a_0$ , то будем иметь  $e_{max} < e_0$ .

Видим, что перигелийное расстояние для оскулирующей орбиты  $r_1 = a_{max}(1 - e_{max})$ , действительно, будет больше  $r_1 = a_0(1 - e_0)$ .

Значит, для того чтобы могло быть  $r_1 \approx r_1$  (т. е. для обеспечения возвращения ракеты на Землю) необходимо, чтобы после сближения с Луной последующие возмущения от Луны уменьшили бы в достаточной степени скорость ракеты.

Обозначим через  $\theta$  угол между скоростью ракеты и ее радиусом-вектором. В зависимости от направления скорости ракеты вблизи Луны могут представиться четыре случая: 1)  $0 < \theta < 90^\circ$ ; 2)  $90^\circ \leq \theta < 180^\circ$ ; 3)  $180^\circ < \theta \leq 270^\circ$ ; 4)  $270^\circ < \theta < 360^\circ$  (скорость Луны образует с радиусом-вектором угол  $\vartheta = 90^\circ$ ).

Рассмотрим движение ракеты с момента  $t_0$ , когда она находится на линии Луна—Земля на расстоянии  $\Delta_0$  от центра Луны, где  $\Delta_0$  близко к минимальному расстоянию от центра Луны, равному  $\epsilon$  (в идеальном случае  $\Delta_0 = \epsilon$ ). Тогда углы будут близки к  $90$  или к  $270^\circ$ .

На рис. 2 представлен случай 2, на рис. 3 — случай 3, на рис. 4 — случай 1 и на рис. 5 — случай 4.

Рассмотрим изменение скорости ракеты  $v_R^o$  начиная с момента  $t_0$ .

Если  $\Delta$  — расстояние ракеты от центра Луны, то ускорение, сообщаемое Луной, равно  $\omega = \frac{K}{\Delta^2}$ . Пусть  $\omega_0$  — ускорение, сообщаемое Луной в момент  $t_0$ . Тогда  $\omega = \frac{K \omega_0}{\Delta^2}$ . Изменение скорости  $v_R^o$  за малый промежуток времени  $\Delta t$  будет равно

$\Delta v_R^o = \omega_0 \cdot \Delta t$  и направлено к Луне. Построим для каждого случая скорости  $v_R^o$ , равные  $v_R^o = v_R^o + \Delta v_R^o$ . За время  $\Delta t$  Луна, движущаяся со скоростью  $v_L$ , переместится в точку  $L_1$ , а ракета за этот же промежуток времени переместится в точку  $R_1$ , причём  $LL_1 = v_L \cdot \Delta t$ , а  $RR_1 \approx v_R^o \cdot \Delta t$ .

Из построения видно, что в случае 2 (рис. 2) скорость ракеты продолжает увеличиваться (т. е.  $v_R^o > v_R^o$  и т. д.), так как она в момент  $t_1$  образует острый угол с направлением на Луну, и с течением времени этот угол уменьшается.

В случае 3 (рис. 3) через малый промежуток времени скорость ракеты начнет образовывать тупой угол с направлением на Луну. Это поведет к тому, что скорость  $v_R^o$  начнет уменьшаться.

Из построения  $v_R^o$  для случая 1 (рис. 4) мы видим, что на малом промежутке времени (малом, так как  $\Delta_0$  близко к  $90^\circ$ ) скорость ракеты уменьшается, но затем начинает увеличиваться в связи с тем, что угол между  $v_R^o$  и направлением на Луну становится острым и в дальнейшем уменьшается.

Наконец, в случае 4 (рис. 5) скорость ракеты сразу же начинает уменьшаться.

Заметим, что случаи 1 и 2, с одной стороны, и случаи 3 и 4, с другой, отличаются величиной угла между скоростью ракеты и скоростью Луны. В случаях 1 и 2 этот угол острый, а в 3 и 4 — тупой.

Таким образом, в результате построения мы видим, что в случаях 3 и 4, т. е. когда угол между скоростью ракеты и Луны тупой, возмущения со стороны Луны после сближения благоприятствуют уменьшению скорости ракеты, т. е. возвращению ракеты на Землю.

В конечном счете вероятность возвращения ракеты на Землю с некоторого минимального расстояния  $\epsilon$  от Луны определяется скоростью относительно Луны, с которой она

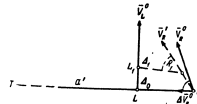


Рис. 2 (случай 2).

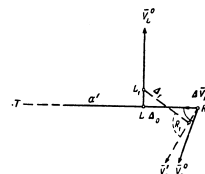


Рис. 3 (случай 3).

проходит вблизи последней. Можно сказать, что различие между разобранными случаями при фиксированном  $\epsilon$  состоит в различной величине этой скорости.

Чем меньше  $\epsilon$ , тем больше должна быть относительная скорость. Однако при решении задачи в первом приближении мы по существу ничего не знаем об оптимальной величине этой скорости и тем более о величине начальной скорости ракеты относительно Земли.

В первом приближении мы исходим из невозмущенной эллиптической орбиты с заданными перигелийным и афелийным расстояниями.

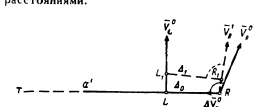


Рис. 4 (случай 1).

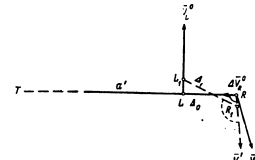


Рис. 5 (случай 4).

Дальнейшие приближения строим таким образом, чтобы величина и направление скорости ракеты относительно Луны оказались бы наиболее благоприятными (в указанном выше смысле) для возвращения на Землю.

## § 2. Об условиях существования симметричных орбит

В работе использована известная идея о симметричных траекториях, нашедшая свое применение в работах Копенгагенской школы при построении периодических орбит в задаче трех тел и примененная Г. А. Чеботаревым в задаче о ракетах (Чеботарев, 1956).

Пусть движение по орбите задается уравнениями  $x=f(t)$ ,  $y=\varphi(t)$ . Будем говорить, что орбита симметрична, если

$$\begin{aligned} f(t) &= f(-t), \\ \varphi(t) &= -\varphi(-t). \end{aligned}$$

Из этого определения следует, что траектория движения симметрична относительно оси  $x$ , а годограф скоростей симметричен относительно оси  $y$ . Поэтому достаточно построить только половину орбиты (соответствующую, например,  $y > 0$  или  $y < 0$ ). Кроме того, симметричные орбиты имеют еще и то преимущество, что начальные и конечные координаты и скорости симметричны в указанном выше смысле. Это создает известные удобства, так как при своем возвращении ракета снова коснется орбиты спутника, с которой она была запущена, и сможет перейти на эту орбиту с помощью такого же по величине толчка, с каким она запускалась для полета вокруг Луны.

Пусть движение ракеты определяется следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(x, y, t), \\ \frac{dy}{dt} &= \Phi(x, y, t). \end{aligned} \quad (2)$$

Можно доказать, что если правые части уравнений (2) обладают свойством

$$\begin{aligned} F(x, -y, -t) &= F(x, y, t), \\ \Phi(x, -y, -t) &= -\Phi(x, y, t) \end{aligned} \quad (3)$$

и если в начальный момент  $\frac{dx}{dt} = y = 0$  (т. е. в начальный момент ракета находится на оси  $x$ , а скорость ее перпендикулярна оси  $x$ ), то траектория будет симметричной. Докажем это.

Пусть  $x = f(t)$  и  $y = \varphi(t)$  (4)

частное решение уравнений (2).

В соответствии с этим имеем тождества

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} &= F[f(t), \varphi(t), t], \\ \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} &= \Phi[f(t), \varphi(t), t]. \end{aligned}$$

Возьмем две следующие функции  $\xi = -f(-t)$  и  $\tau = -\varphi(-t)$ . Дифференцируя их дважды и приняв во внимание (3), получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= \frac{d^2 f(-t)}{dt^2} = \frac{d^2 f(-t)}{d(-t)^2} = F[f(-t), \varphi(-t), -t] = F[f(-t), -\varphi(-t), t] = F(\xi, \tau, t), \\ \frac{d^2 \tau}{dt^2} &= -\frac{d^2 \varphi(-t)}{dt^2} = -\frac{d^2 \varphi(-t)}{d(-t)^2} = -\Phi[f(-t), \varphi(-t), -t] = \Phi[f(-t), -\varphi(-t), t] = \Phi(\xi, \tau, t). \end{aligned}$$

Таким образом,  $\xi$  и  $\tau$  также являются решением уравнений (2).

Для того чтобы это решение совпало с решением (4), необходимо и достаточно в силу единственности решения систем дифференциальных уравнений (2), чтобы их начальные условия совпадали:

$$x_0 = \xi_0, \quad y_0 = \tau_0, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \left(\frac{d\xi}{dt}\right)_0, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = \left(\frac{d\tau}{dt}\right)_0. \quad (5)$$

При  $t=0$  имеем

$$\begin{aligned} x_0 &= f(0), \quad y_0 = \varphi(0), \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \left(\frac{df}{dt}\right)_0, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0, \\ \xi_0 &= f(0), \quad \tau_0 = -\varphi(0), \quad \left(\frac{d\xi}{dt}\right)_0 = -\left(\frac{df}{dt}\right)_0, \quad \left(\frac{d\tau}{dt}\right)_0 = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0. \end{aligned} \quad (6)$$

В случае  $y_0 = \varphi(0) = 0$  и  $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \left(\frac{df}{dt}\right)_0 = 0$  будет иметь место (5).

Но тогда  $f(-t) \equiv f(t)$  и  $\varphi(-t) \equiv -\varphi(t)$ . Это означает симметрию кривой  $x=f(t)$ ,  $y=\varphi(t)$  относительно оси  $x$ .

### § 3. Особенности численного интегрирования дифференциальных уравнений задачи

При решении задачи вводим следующие упрощения:  
1) рассматриваем движение ракеты под действием сил притяжения Земли, Луны и Солнца, пренебрегая возмущениями других тел Солнечной системы;  
2) движение Луны и годичное движение Солнца рассматриваем в одной плоскости;  
3) считаем движения Луны и Солнца круговыми;  
4) массой ракеты пренебрегаем.

Систему координат выбираем следующим образом. Начало помещаем в центр Земли. Оси сохраняют постоянное направление относительно неподвижных звезд.

Ось  $x$  направлена в начальное положение центра Солнца. Ось  $y$  составляет угол  $+\frac{\pi}{2}$  с осью  $x$ .

В нашей системе движения Луны и Солнца будут описываться уравнениями

$$\begin{aligned} x_L &= a' \cos(\vartheta_0 - n't), & x_S &= a'' \cos n''t, \\ y_L &= -a' \sin(\vartheta_0 - n't), & y_S &= a'' \sin n''t, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $a'$  и  $a''$  — средние расстояния до Луны и Солнца;  $n'$  и  $n''$  — соответствующие средние движения;  $\vartheta_0$  — угловое расстояние Луны от оси  $x$  в момент  $t=0$ .

Дифференциальные уравнения относительного движения ракеты записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -k^2 m_T \frac{x}{r^3} + k^2 m_L \left( \frac{x_L - x}{\Delta_{Ll}^3} - \frac{x_L}{r_L^3} \right) + k^2 m_S \left( \frac{x_S - x}{\Delta_{Ss}^3} - \frac{x_S}{r_S^3} \right), \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= -k^2 m_T \frac{y}{r^3} + k^2 m_L \left( \frac{y_L - y}{\Delta_{Ll}^3} - \frac{y_L}{r_L^3} \right) + k^2 m_S \left( \frac{y_S - y}{\Delta_{Ss}^3} - \frac{y_S}{r_S^3} \right), \end{aligned}$$

где  $x, y, x_L, y_L, x_S, y_S$  — декартовы координаты ракеты, Луны и Солнца,

$$\Delta_{Ll}^2 = (x - x_L)^2 + (y - y_L)^2,$$

$$\Delta_{Ss}^2 = (x - x_S)^2 + (y - y_S)^2,$$

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

$k^2$  — постоянная тяготения;  $m_T, m_L, m_S$  — массы Земли, Луны и Солнца.

Учитывая (7), имеем

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -k^2 m_T \frac{x}{r^3} - k^2 m_L \left[ \frac{\cos(\vartheta_0 - n't)}{a'^3} + \frac{x - a' \cos(\vartheta_0 - n't)}{\Delta_{Ll}^3} \right] - k^2 m_S \left[ \frac{\cos n''t}{a''^3} + \frac{x - a'' \cos n''t}{\Delta_{Ss}^3} \right],$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -k^2 m_r \frac{y}{r^3} - k^2 m_l \left[ \frac{-\sin(\vartheta_0 - n't)}{a^2} + \frac{y + a' \sin(\vartheta_0 - n't)}{\Delta_{kl}^3} \right] - k^2 m_s \left[ \frac{\sin n't}{a^2} + \frac{y - a' \cos n't}{\Delta_{ks}^3} \right],$$

где

$$\Delta_{kl}^2 = [x - a' \cos(\vartheta_0 - n't)]^2 + [y + a' \sin(\vartheta_0 - n't)]^2, \\ \Delta_{ks}^2 = [x - a' \cos n't]^2 + [y - a' \sin n't]^2, \\ r^2 = x^2 + y^2.$$

При переносе начала координат в центр Луны с сохранением направления осей координат уравнения относительного движения принимают вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 m_r \frac{x}{r^3} - k^2 m_l \left[ \frac{x + a' \cos(\vartheta_0 - n't)}{\Delta_{lr}^3} - \frac{\cos(\vartheta_0 - n't)}{a^2} \right] - k^2 m_s \left[ \frac{\cos(\vartheta_0 - n't)}{a^2} - k^2 m_s \left[ \frac{x + a' \cos(\vartheta_0 - n't) - a' \cos n't}{\Delta_{rs}^3} + \frac{\cos n't}{a^2} \right] \right], \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -k^2 m_r \frac{y}{r^3} - k^2 m_l \left[ \frac{y - a' \sin(\vartheta_0 - n't)}{\Delta_{lr}^3} + \frac{\sin(\vartheta_0 - n't)}{a^2} \right] + k^2 m_s \left[ \frac{\sin(\vartheta_0 - n't)}{a^2} - k^2 m_s \left[ \frac{y - a' \sin(\vartheta_0 - n't) - a' \sin n't}{\Delta_{rs}^3} + \frac{\sin n't}{a^2} \right] \right], \quad (8)$$

где  $x, y$  — координаты ракеты относительно Луны,

$$\Delta_{lr}^2 = [x + a' \cos(\vartheta_0 - n't)]^2 + [y - a' \sin(\vartheta_0 - n't)]^2, \\ \Delta_{rs}^2 = [x + a' \cos(\vartheta_0 - n't) - a' \cos n't]^2 + [y - a' \sin(\vartheta_0 - n't) - a' \sin n't]^2, \\ r^2 = x^2 + y^2.$$

Формулами (8) пользуемся, когда влияние Луны становится преобладающим. При численном интегрировании приведенных выше уравнений пользуемся следующими формулами метода квадратур, соответствующего методу Коулла (Субботин, 1937):

$$x_n = f_n^2 + \frac{1}{12} f_n - \frac{1}{240} f_n^2 + \frac{31}{60480} f_n^3 - \dots, \\ f_n^2 = x_0 - \frac{1}{12} f_0 + \frac{1}{240} f_0^2 - \frac{31}{60480} f_0^3 + \dots, \\ f_{-n}^2 = x_0 - \frac{1}{12} f_0 + \frac{1}{240} f_0^2 - \frac{11}{720} f_0^3 + \dots,$$

где  $n$  — шаг интегрирования.

Формулы для  $y_n$  аналогичны.

При интегрировании уравнений движения ракеты вблизи Луны вводим подстановку Сундмана (Sundman, 1913)

$$dt = r du, \quad (9)$$

где  $u$  — новая независимая переменная интегрирования вместо  $t$ . Эта подстановка значительно облегчает вычисления.

В формулах (8) члены  $k^2 m_l \frac{x}{r^3}$ ,  $k^2 m_l \frac{y}{r^3}$  сильно возрастают с убыванием  $r$ , что для сохранения точности потребует частого уменьшения шага. С заменой независимой переменной по формуле (9) будем иметь уравнения:

$$\frac{d^2x}{du^2} = \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{du} \cdot \frac{dx}{du} - k^2 m_l \left( \frac{x}{r} \right) - r^2 \frac{\partial R}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{du^2} = \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{du} \cdot \frac{dy}{du} - k^2 m_l \left( \frac{y}{r} \right) - r^2 \frac{\partial R}{\partial y},$$

где

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{d^2x}{dt^2} + k^2 m_l \frac{x}{r^3}, \\ \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{d^2y}{dt^2} + k^2 m_l \frac{y}{r^3}. \quad (10)$$

В области тесного сближения с Луной влияние последней настолько сильно по сравнению с действием Земли и Солнца, что для приближенной оценки правых частей можно пользоваться формулами невозмущенного движения.

Оценим каждый член в правой части (10).

Члены  $r^2 \frac{\partial R}{\partial x}$ ,  $r^2 \frac{\partial R}{\partial y}$  уменьшаются по мере приближения к Луне. Члены  $k^2 m_l \left( \frac{x}{r} \right)$  и  $k^2 m_l \left( \frac{y}{r} \right)$  ограничены. Оценим выражения  $\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{du} \cdot \frac{dx}{du}$  и  $\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{du} \cdot \frac{dy}{du}$ .

Из уравнения Кеплера имеем

$$(1 - e \cos E) dE = ndt, \\ r dE = na dt.$$

Сравнивая последнее равенство с (9), получаем  $du = \frac{dE}{na}$ . Но  $\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{dE} \cdot \frac{dx}{dE}$  и  $\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{dE} \cdot \frac{dy}{dE}$  ограничены. Действительно

$$\frac{dx}{dE} = -a \sin E, \quad \frac{dy}{dE} = a \sqrt{1 - e^2} \cos E, \quad \frac{dr}{dE} = ae \sin E,$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{dE} \cdot \frac{dx}{dE} = \frac{ae \sin^2 E}{1 - e \cos E} = \frac{ae \sin E}{\sqrt{1 - e^2}} \sin E,$$

где  $\left| \frac{y}{r} \right| < 1$ ,  $|\sin E| < 1$ .

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{dE} \cdot \frac{dy}{dE} = \frac{ae \sqrt{1 - e^2} \cos E \sin E}{1 - e \cos E} = \frac{ae \cos E}{r} \cos E,$$

где  $\left| \frac{y}{r} \right| < 1$ ,  $|\cos E| < 1$ .

Видно, что после замены независимой переменной  $\frac{d^2x}{du^2}$  и  $\frac{d^2y}{du^2}$  становятся ограниченными и

$$\frac{d^2x}{du^2} \approx \frac{ae \sin E}{\sqrt{1 - e^2}},$$

$$\frac{d^2y}{du^2} \approx \frac{ae}{r} y \cos E.$$

Преобразуем теперь уравнения (10). Выразим  $\frac{dx}{dt}$  через  $\frac{dx}{du}$ ,  $\frac{dy}{dt}$  через  $\frac{dy}{du}$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $r$ . Будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{x}{r^2} \left( \frac{dx}{du} \right)^2 + \frac{y}{r^2} \frac{dx}{du} \frac{dy}{du} + r^2 \frac{d^2x}{du^2}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{y}{r^2} \left( \frac{dy}{du} \right)^2 + \frac{x}{r^2} \frac{dy}{du} \frac{dx}{du} + r^2 \frac{d^2y}{du^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Правые части уравнений (11) теперь содержат первые производные. Поэтому для численного интегрирования формула Коулла для непосредственного употребления теперь не годится. Сводя нашу систему двух уравнений к системе четырех уравнений 1-го порядка, мы можем воспользоваться затем соответствующей формулой Коулла. Но мы поступим несколько иначе, а именно: оставим в силе формулу Коулла, причем входящие в правую часть первые производные выразим через разности.

Будем иметь

$$\omega \left( \frac{dx}{du} \right)_n = f_n^{-1} - \frac{1}{12} f_n + \frac{11}{720} f_n^3 - \frac{191}{60480} f_n^5 + \dots = ( ),$$

$$\omega \left( \frac{dy}{du} \right)_n = g_n^{-1} - \frac{1}{12} g_n + \frac{11}{720} g_n^3 - \frac{191}{60480} g_n^5 + \dots = ( ),$$

$$f_n = \omega^2 \left[ \frac{x}{r^2} \left( \frac{dx}{du} \right)^2 + \frac{y}{r^2} \left( \frac{dy}{du} \right)^2 + r^2 \frac{d^2x}{du^2} \right],$$

$$g_n = \omega^2 \left[ \frac{y}{r^2} \left( \frac{dy}{du} \right)^2 + \frac{x}{r^2} \left( \frac{dx}{du} \right)^2 + r^2 \frac{d^2y}{du^2} \right],$$

$$f_n = \omega^2 \left( \frac{d^2x}{du^2} \right)_n,$$

$$g_n = \omega^2 \left( \frac{d^2y}{du^2} \right)_n.$$

Начальные значения  $\left( \frac{dx}{du} \right)_0$ ,  $\left( \frac{dy}{du} \right)_0$ ,  $\left( \frac{d^2x}{du^2} \right)_0$ ,  $\left( \frac{d^2y}{du^2} \right)_0$  были вычислены по  $\left( \frac{dx}{dt} \right)_0$ ,  $\left( \frac{dy}{dt} \right)_0$ ,  $\left( \frac{d^2x}{dt^2} \right)_0$ ,  $\left( \frac{d^2y}{dt^2} \right)_0$ ,  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $r_0$ , взятым из таблицы численного интегрирования по переменной  $t$ .

При интегрировании уравнений (11) несколько значений  $r^2 \frac{d^2x}{du^2}$  и  $r^2 \frac{d^2y}{du^2}$  были проинтерполированы для новых значений времени, соответствующих равным интервалам переменной  $u$ . При этом была использована формула Ньютона для неравных промежуточных аргументов (Уиттекер и Робинсон, 1935). Если известны значения функций  $f(u_0)$ ,  $f(u_1)$ ,  $f(u_2)$ , ...,  $f(u_n)$ , и разлассенные разности  $k$ -го порядка исчезают или незначительны, то значение функции  $f(u)$  для некоторого промежуточного значения аргумента  $u$  может быть найдено по формуле

$$\begin{aligned} f(u) &= f(u_0) + (u - u_0) f(u_0, u_1) + (u - u_0)(u - u_1) f(u_0, u_1, u_2) + \\ &+ (u - u_0)(u - u_1)(u - u_2) f(u_0, u_1, u_2, u_3) + \dots + \\ &+ (u - u_0)(u - u_1) \dots (u - u_{k-2}) f(u_0, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}), \end{aligned}$$

где  $f(u_0, u_1)$ ,  $f(u_0, u_1, u_2)$ , ... — разлассенные разности. В нашем случае известны четыре значения аргумента, и разлассенные разности 4-го порядка равны 0.

#### § 4. Исходная орбита

За единицы измерения приняты: экваториальный радиус Земли, равный 6378 км, сутки и масса Земли.

Приняты следующие значения астрономических постоянных: средний радиус Лунной орбиты  $a' = 60.270$  радиусов Земли; средний радиус Солнечной орбиты  $a'' = 23440$  радиусов Земли; масса Луны  $m' = 0.012265$  массы Земли; радиус Луны  $R_l = 1738$  км; среднее движение Луны  $n' = 13.17643$ ; среднее движение Солнца  $n'' = 0.98561$ .

Ракета запускается с искусственного спутника, период обращения которого равен  $P_{сп.} = 2^d$ , или 0.083333 суток. Радиус орбиты спутника соответственно равен  $R_{сп.} = 1.2673$  радиусов Земли (8083 км). Минимальное расстояние ракеты от центра Земли тоже будет равно  $r_1 = 1.2673$ . Максимальное расстояние от центра Земли принимаем

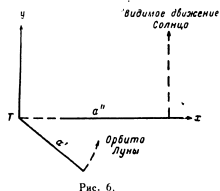


Рис. 6.

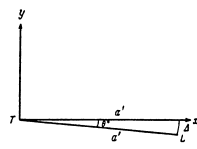


Рис. 7.

равным  $r_2 = a' + 0.3136$  (0.3136 составляет 2000 км, а минимальное расстояние от поверхности Луны составляет около 200 км).

Имеем  $r_2 = 60.5836$ ,  $r_1 = 1.2673$ .

По формуле (1) получим элементы эллиптической орбиты — большую полуось  $a$ , эксцентриситет  $e$ , период  $P$ :

$$a = 30.9259, \quad e = 0.95902, \quad P = 10.2071.$$

Начальная скорость ракеты  $v_0$  равна эллиптической скорости на расстоянии  $r_1 = 1.2673$ , а именно:  $v_0 = 133.70$ . Направления движения Луны и Солнца показаны на рис. 6.

Из двух возможных направлений начальной скорости  $v_0 = + \left( \frac{dy}{dt} \right)_0$  и  $v_0' = - \left( \frac{dy}{dt} \right)_0$  выбираем первое.

Определим угол  $\theta_0$ , который составляет радиус-вектор Луны с осью  $x$  в начальный момент. На рис. 7 угол  $\theta_0 = \angle RTL$  — угол, который составляет направление на Луну с осью  $x$  в тот момент, когда ракета пересекает ось  $x$ . Пусть  $\Delta$  есть радиус сферы действия Луны. Он может быть определен соотношением

$$\frac{k_{m_l}^2}{(TR)^2} = \frac{k_{m_l}^2}{\Delta^2} \quad (12)$$

(условие равенства ускорений, создаваемых протяжением Земли и Луны).

<sup>1</sup> Проект Брауна (Haskins, 1953).



Преобразуем теперь уравнения (10). Выразим  $\frac{dr}{du}$  через  $\frac{dx}{du}$ ,  $\frac{dy}{du}$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $r$ . Будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{du^2} &= \frac{x}{r^2} \left( \frac{dx}{du} \right)^2 + \frac{y}{r^2} \frac{dx}{du} \cdot \frac{dy}{du} + r^2 \frac{d^2x}{dt^2}, \\ \frac{d^2y}{du^2} &= \frac{y}{r^2} \left( \frac{dy}{du} \right)^2 + \frac{x}{r^2} \frac{dy}{du} \cdot \frac{dx}{du} + r^2 \frac{d^2y}{dt^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Правые части уравнений (11) теперь содержат первые производные. Поэтому для численного интегрирования формула Коуэлла для непосредственного употребления теперь не годится. Сведя нашу систему двух уравнений к системе четырех уравнений 1-го порядка, мы можем воспользоваться затем соответствующей формулой Коуэлла. Но мы поступим несколько иначе, а именно: оставим в силе формулу Коуэлла, причем входящие в правую часть первые производные выразим через разности.

Будем иметь

$$\omega \left( \frac{dx}{du} \right)_n = f_n^{-1} - \frac{1}{12} f_n + \frac{11}{720} f_n^3 - \frac{191}{60480} f_n^5 + \dots = ( ),_n$$

$$\omega \left( \frac{dy}{du} \right)_n = g_n^{-1} - \frac{1}{12} g_n + \frac{11}{720} g_n^3 - \frac{191}{60480} g_n^5 + \dots = ( ),_n$$

$$f_n = \omega^2 \left[ \frac{x}{r^2} \left( \frac{dx}{du} \right)^2 + \frac{y}{r^2} \left( \frac{dy}{du} \right)^2 + r^2 \frac{d^2x}{dt^2} \right]_n,$$

$$g_n = \omega^2 \left[ \frac{y}{r^2} \left( \frac{dy}{du} \right)^2 + \frac{x}{r^2} \left( \frac{dx}{du} \right)^2 + r^2 \frac{d^2y}{dt^2} \right]_n,$$

$$f_n = \omega^2 \left( \frac{d^2x}{dt^2} \right)_n,$$

$$g_n = \omega^2 \left( \frac{d^2y}{dt^2} \right)_n.$$

Начальные значения  $\left( \frac{d^2x}{dt^2} \right)_0$ ,  $\left( \frac{d^2y}{dt^2} \right)_0$ ,  $\left( \frac{dx}{du} \right)_0$ ,  $\left( \frac{dy}{du} \right)_0$  были вычислены по  $\left( \frac{d^2x}{dt^2} \right)_0$ ,  $\left( \frac{d^2y}{dt^2} \right)_0$ ,  $\left( \frac{dx}{dt} \right)_0$ ,  $\left( \frac{dy}{dt} \right)_0$ ,  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $r_0$ , взятым из таблицы численного интегрирования по переменной  $t$ .

При интегрировании уравнений (11) несколько значений  $r^2 \frac{d^2x}{dt^2}$  и  $r^2 \frac{d^2y}{dt^2}$  были проинтерполированы для новых значений времени, соответствующих равным интервалам переменной  $u$ . При этом была использована формула Ньютона для неравных промежутков аргумента (Уиттекер и Робинсон, 1935). Если известны значения функций  $f(u_0)$ ,  $f(u_1)$ ,  $f(u_2)$ , ...,  $f(u_n)$ , и разделение разности  $k$ -го порядка исчезает или незначительно, то значение функции  $f(u)$  для некоторого промежуточного значения аргумента  $u$  может быть найдено по формуле

$$\begin{aligned} f(u) &= f(u_0) + (u - u_0)f(u_0, u_1) + (u - u_0)(u - u_1)f(u_0, u_1, u_2) + \\ &+ (u - u_0)(u - u_1)(u - u_2)f(u_0, u_1, u_2, u_3) + \dots + \\ &+ (u - u_0)(u - u_1) \dots (u - u_{k-2})f(u_0, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}), \end{aligned}$$

где  $f(u_0, u_1)$ ,  $f(u_0, u_1, u_2)$ , ... — разделение разности. В нашем случае известны четыре значения аргумента, и разделение разности 4-го порядка равно 0.

#### § 4. Исходная орбита

За единицы измерения приняты: экваториальный радиус Земли, равный 6378 км, сути и масса Земли.

Приняты следующие значения астрономических постоянных: средний радиус Луной орбиты  $a' = 60.270$  радиусов Земли; средний радиус Солнечной орбиты  $a'' = 23440$  радиусов Земли; масса Луны  $m_l = 0.012265$  масс Земли; радиус Луны  $R_l = 1738$  км; среднее движение Луны  $n' = 13.17643$ ; среднее движение Солнца  $n'' = 0.98561$ .

Ракета запускается с искусственного спутника, период обращения которого равен  $P_{сп.} = 2^s$ , или 0.083333 суток. Радиус орбиты спутника соответственно равен  $P_{сп.} = 1.2673$  радиусов Земли (8083 км). Минимальное расстояние ракеты от центра Земли тоже будет равно  $r_1 = 1.2673$ . Максимальное расстояние от центра Земли принимаем

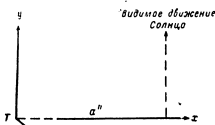


Рис. 6.

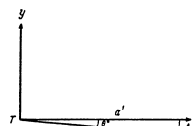


Рис. 7.

равным  $r_2 = a' + 0.3136$  (0.3136 составляет 2000 км, а минимальное расстояние от поверхности Луны составляет около 200 км).

Имеем  $r_2 = 60.5836$ ,  $r_1 = 1.2673$ .

По формуле (1) получим элементы эллиптической орбиты — большую полуось  $a$ , эксцентриситет  $e$ , период  $P$ :

$$a = 30.9259, \quad e = 0.95902, \quad P = 10.2071.$$

Начальная скорость ракеты  $v_0$  равна эллиптической скорости на расстоянии  $r_1 = 1.2673$ , а именно:  $v_0 = 133.70$ . Направления движения Луны и Солнца показаны на рис. 6.

Из двух возможных направлений начальной скорости  $v_0 = + \left( \frac{dy}{dt} \right)_0$  и  $v_0' = - \left( \frac{dy}{dt} \right)_0$  выберем первое.

Определим угол  $\theta_0$ , который составляет радиус-вектор Луны с осью  $x$  в начальный момент. На рис. 7 угол  $\theta_0 = \angle RTL$  — угол, который составляет направление на Луну с осью  $x$  в тот момент, когда ракета пересекает ось  $x$ . Пусть  $\delta$  есть радиус сферы действия Луны. Он может быть определен соотношением

$$\frac{k^2 m_l}{(TR)^2} = \frac{k^2 m_l}{\delta^2} \quad (12)$$

(условие равенства ускорений, создаваемых протяжением Земли и Луны).

<sup>1</sup> Проект Брауна (Haskins, 1953).

Возьмем  $TR \approx a'$ . Тогда соотношение (12) позволяет определить  $\Delta$  и из равнобедренного треугольника  $TRL$  — угол  $\theta_0$ . Будем иметь

$$\frac{k m_T}{a'^2} = \frac{k m_L}{a^2}$$

отсюда  $\Delta = 6.6747$ ,  $\angle \theta_0 = 6^\circ 3486$ .

Угол  $\theta_0$  возьмем равным  $\theta_0 = n' \frac{P}{2} + \theta_0$ , где  $\frac{P}{2} = 5.1035$  — полу период эллиптической орбиты.

Исходную орбиту, таким образом, строим с начальными условиями:

$$x_0 = 1.2673, \quad y_0 = 0, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = 133.70, \quad \theta_0 = 73^\circ 5952.$$

Вычисления ведутся с четырьмя десятичными знаками. Шаг выбираем так, чтобы четвертыми разностями можно было пренебречь. На разных участках интегрирования шаг меняется от  $\Delta t_0 = 0.001$  до  $\Delta t_n = 0.128$ . Всего было сделано около 200 шагов.



Рис. 8. Примерный вид линии отрыва незаполненной части орбиты.

Общий вид исходной орбиты показан на рис. 8.

Отметим, что вблизи Луны ракета движется относительно Луны по гиперболе, большая полуось которой имеет небольшой наклон к оси  $x$ . Элементы гиперболы:  $a = 0.5276$ ,  $e = 2.8116$ .

Ракета проходит на минимальном расстоянии от Луны, равном 0.9574 (6100 км). Оно соответствует моменту  $t = 5.4628$ . Вблизи Луны скорость ракеты относительно Земли остается эллиптической, порядка скорости Луны (около 1.1 км).

Элементы оккультирующей орбиты ракеты в конечный момент  $t = 7.23304$  следующие:  $a = 47.8698$ ,  $e = 0.9918$ . Ракета обязательно достигнет поверхности Земли, так как  $a = a(1 - e) = 0.3920$ .

Скорость ракеты на поверхности Земли будет составлять около 11.169 км/сек.

### § 5. Метод графического интегрирования

Как было сказано во введении, наша задача состоит в выяснении качественной картины движения ракеты. Но так как не существует теории, с помощью которой можно было бы решить эту задачу в общем виде, то остается другой путь, а именно: исследование качественной картины движения на основании построения достаточно большого числа примеров орбит.

При решении дифференциальных уравнений возмущенного движения пользуются, как правило, методом численного интегрирования. Но, как известно, численное интегрирование — процесс трудоемкий. В некоторых задачах для сохранения точности в процессе интегрирования приходится менять шаг. При этом необходимое число шагов может стать очень большим.

При численном интегрировании исходной орбиты нам пришлось сделать около 200 шагов, причем шаг менялся более 10 раз. Однако цель данной работы не требует высокой точности. Мы постараемся найти метод, который кратчайшим путем поведет бы к нашей цели — получению геометрической картины распределения интегральных кривых. Таким методом является графическое интегрирование. Сущность его состоит в следующем.

1. Как известно, при численном интегрировании дифференциальных уравнений, мы разбиваем траекторию движения на малые участки. При этом шаг интегрирования мы выбираем таким образом, чтобы при данной точности разности определенного порядка были бы постоянными. В результате интегрирования получаем линию, которая с уменьшением шага приближается к действительной траектории движения.

В частности, если мы принимаем разности 1-го порядка равными нулю, то это значит, что на малом промежутке  $\Delta t$ , равном шагу интегрирования, мы считаем ускорение постоянным.

2. Введем в рассмотрение вектор ускорения  $\vec{w}$ , вектор изменения скорости  $\Delta \vec{v}$ , вектор скорости  $\vec{v}$ , вектор перемещения  $\Delta \vec{S}$ . Так как на графике можно изображать направления, то мы сможем строить эти векторы, откладывая в определенном масштабе их численные величины. При этом для каждого вектора  $r$ ,  $\vec{v}$  масштаб может быть своим.

Тогда вместо двух дифференциальных уравнений движения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F(x, y, t), \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \Phi(x, y, t)$$

мы можем интегрировать одно уравнение движения в векторной форме

$$\vec{w} = \frac{d^2r}{dt^2} = \vec{F}(r, t),$$

где  $r$  — радиус-вектор ракеты.

Отсюда становится ясной последовательность операций, необходимых для графического метода:

- 1) пусть для некоторого момента  $t_i$  известны вектора  $\vec{w}_i, \vec{v}_i$ ;
- 2) определяем изменение скорости  $\Delta \vec{v}_i$  за малый промежуток времени  $\Delta t_i$ , на котором  $\vec{w}$  считаем постоянным. Будем иметь  $\Delta \vec{v}_i = \vec{w}_i \Delta t_i$ ;
- 3) скорость в момент времени  $t_i + \Delta t_i = t_{i+1}$  составит  $\vec{v}_{i+1} = \vec{v}_i + \Delta \vec{v}_i$ ;
- 4) вектор перемещения  $\Delta \vec{S}_i$ , соответствующий промежутку времени  $\Delta t_i$ , будет равен  $\Delta \vec{S}_i \approx \vec{v}_{i+1} \Delta t_i$ ;

5) в момент  $t_{i+1} = t_i + \Delta t_i$  радиус-вектор  $\vec{r}_{i+1}$  будет равен  $\vec{r}_{i+1} = \vec{r}_i + \Delta \vec{S}_i$ .

Далее все операции повторяются сначала в той же последовательности, т. е. по  $r_{i+1}$  находим  $\vec{w}_{i+1}$ , затем находим  $\Delta \vec{v}_{i+1}, \vec{v}_{i+2}, \Delta \vec{S}_{i+1}$  и т. д.

В нашем случае  $\vec{w} = \vec{F} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$ , где:  $\vec{w}_1 = -\frac{A_1}{r^2} \vec{r}$ ;  $\vec{w}_2 = -\frac{A_2}{\Delta^3} \vec{\Delta}$ ;  $A_1, A_2$  — константы;  $r, \Delta$  — расстояния ракеты соответственно до центра Земли и до центра Луны,  $r_0, \Delta^0$  — соответствующие орты, показывающие, в каком направлении надо откладывать на графике отрезки  $\frac{A_1}{r^2}$  и  $\frac{A_2}{\Delta^3}$ .

Таким образом, мы видим, что при графическом интегрировании количество работы значительно уменьшается: во-первых, за счет того, что фактически мы имеем дело не с двумя, а с одним (векторным) уравнением. Кроме того, вместо вычисления выражений типа  $\frac{[(x-x')^2 + (y-y')^2]^{3/2}}$  нам нужно только измерить на чертеже  $r, r_1, \dots$  и вычислить  $r^{-2}, r_1^{-2}, \dots$

Графический метод используется нами при построении симметричных траекторий ракеты. Он дает готовую качественную картину, наглядное представление о характере траекторий в отдельности и в зависимости от начальных условий движения и картину всего семейства в целом.

Точность результата при интегрировании графическим методом зависит как от числа шагов, так и от выбора масштаба. Для одного и того же числа шагов можно подобрать такой масштаб, что точность результата будет удовлетворительной.

Для выяснения точности графического метода мы построили «орбиту сравнения», а именно: мы проинтегрировали графическим методом часть исходной орбиты, заключенную в сфере действия Луны с тем же шагом, что и при численном интегрировании исходной орбиты.

При этом был выбран следующий масштаб: для расстояний в 1 см — 0.2 радиусов Земли, для скоростей в 1 см — 0.5 радиус Земли/сутки, для ускорений в 1 см — 0.5 радиус Земли/сутки<sup>2</sup>.

В табл. 1 даны координаты орбиты сравнения параллельно с координатами, полученными численным интегрированием. Графическое интегрирование орбиты сравнения велось с точностью до двух десятичных знаков (напомним, что при численном интегрировании точность равнялась четырем десятичным знакам).

Таблица 1

t	Координаты, полученные численным интегрированием		Координаты, полученные графическим интегрированием	
	x	y	x	y
5.67304	58.3664	-2.4192	58.37	-2.42
5.71304	57.8334	-2.3793	57.83	-2.38
5.75304	57.2988	-2.3408	57.30	-2.32
5.79304	56.7636	-2.2756	56.77	-2.25
5.83304	56.2256	-2.2149	56.24	-2.18
5.87304	55.6848	-2.1504	55.70	-2.10
5.91304	55.1402	-2.0826	55.16	-2.03
5.95304	54.5914	-2.0118	54.62	-1.96
6.03304	53.4802	-1.8632	53.50	-1.78
6.11304	52.3464	-1.7058	52.37	-1.60
6.19304	51.1937	-1.5447	51.22	-1.42
6.27304	50.0143	-1.3775	50.06	-1.22
6.35304	47.5731	-1.0914	47.67	-0.97
6.39304	45.0091	-0.6736	45.10	-0.50
6.75304	42.3043	-0.3070	42.38	-0.20
6.91304	39.4364	0.0658	39.46	0.00
7.07304	36.3850	0.4428	36.35	0.58
7.23304	33.1096	0.8201	33.04	0.90

При построении орбиты сравнения ошибка для минимального расстояния от центра Земли  $r_1 = a(1 - e)$  составила 0.04 единицы измерения, т. е. около 240 км, ошибка в скорости  $v_1^2 = k^2 m_r (2 - \frac{1}{a})$  — около 0.005 км/сек., где  $v_1$  — скорость ракеты на поверхности Земли.

Такой результат можно считать для наших целей удовлетворительным.

§ 6. Графическое построение симметричных орбит

Будем строить описанным выше графическим методом симметричные траектории движения ракеты.

Определим неподвижную систему координат следующим образом. Начало поместим в центр Земли. Ось  $x$  направим в точку, которую занимает центр Луны в начальный момент движения ракеты. Покажем, что при таком выборе системы координат правые части дифференциальных уравнений движения будут удовлетворять первому условию симметрии траекторий [§ 2, формулы (3)].

Действительно, в нашем случае дифференциальные уравнения движения ракеты относительно Земли имеют вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F(x, y, t) = -k^2 m_L \left[ \frac{x - a' \cos n' t}{\Delta_{RL}^3} + \frac{\cos n' t}{a'^2} \right] - k^2 m_r \frac{x}{r^3},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \Phi(x, y, t) = -k^2 m_L \left[ \frac{y - a' \sin n' t}{\Delta_{RL}^3} - \frac{\sin n' t}{a'^2} \right] - k^2 m_r \frac{y}{r^3},$$

где  $\Delta_{RL}^2 = (x - a' \cos n' t)^2 + (y - a' \sin n' t)^2$  (притяжением Солнца пренебрежем).

Видим, что при замене  $t$  на  $-t$  и  $y$  на  $-y$  будет выполняться условие (3). Тогда для симметрии траектории ракеты должно выполняться еще второе условие — относительно начальных координат и скоростей. Поэтому возьмем в начальный момент  $(\frac{dx}{dt})_0 = y_0 = 0$ .

Построим несколько траекторий, проходящих на одном и том же минимальном расстоянии от центра Луны, равном  $\Delta_0 = 1$  радиусу Земли (6378 км), которое в то же время равно минимальному расстоянию от центра Луны для исходной орбиты. Тогда в начальный момент будем иметь  $x_0 = a' - \Delta_0$ .

При интегрировании исходной орбиты оказалось, что на минимальном расстоянии от центра Луны, равном 1 радиусу Земли, скорость ракеты направлена под тупым углом к скорости Луны, что подтверждает рассуждения, приведенные в § 1 относительно условий благоприятствующих возвращению ракеты на Землю.

Поэтому при построении симметричных траекторий мы будем выбирать начальные скорости ракеты  $v_{0x} = |y_0|$  направленными противоположно скорости Луны, т. е.  $y_{0x} < 0$  (рис. 9), но равными по величине. Строим пять симметричных траекторий со скоростями  $v_{0x}$ , равными в наших единицах  $v_{0x} = 3 (= 0.222 \text{ км/сек.})$ ,  $v_{0x} = 6 (= 0.444 \text{ км/сек.})$ ,  $v_{0x} = 7.5 (= 0.554 \text{ км/сек.})$ ,  $v_{0x} = 9 (= 0.666 \text{ км/сек.})$ ,  $v_{0x} = 10.5 (= 0.775 \text{ км/сек.})$ .

Построение выполняем в таком же масштабе, с той же точностью, приблизительно с тем же (меньшим) числом шагов, что и в орбите сравнения. Поэтому можно ожидать, что ошибки построенных орбит будут близки к ошибкам орбиты сравнения.

Построение исходной орбиты показало, что в непосредственной близости от Луны шаг интегрирования  $\omega = 0.01$  является достаточно малым. Тем более этот шаг будет удовлетворительным при менее точном графическом методе интегрирования, где точность ограничивается двумя десятичными знаками (при численном интегрировании — четырьмя десятичными знаками).

Построение осуществляется по принципу, изложенному в § 5 (см. графики 1—5). Интегрирование ведется до того момента, когда движение ракеты становится невозможным относительно Земли.

В табл. 2 помещены основные характеристики симметричных траекторий, при этом введены следующие обозначения:  $v_0$  — начальная скорость ракеты, соответствующая минимальному расстоянию от центра Луны, равному 1 радиусу Земли (6378 км);  $v_1$  — скорость ракеты в момент  $t = 0.84$ , когда притяжение Луны становится незначительным;  $a_1$  — большая полуось и эксцентриситет, соответствующие этому моменту;  $r_1$  — минимальное расстояние от центра Земли;  $v_r$  — скорость ракеты на этом расстоянии;  $\Delta_0$  — минимальное расстояние от поверхности Земли;  $v_{0L}$  — соответствующая скорость.

Из полученных результатов можно заключить, что в промежутке от  $v_0 = 6$  до  $v_0 = 10.5$  находится множество орбит, для которых наибольшее минимальное расстояние от поверхности Земли составляет 10 000 км, а минимальное расстояние от центра Луны составляет 6378 км (радиус Земли). Все орбиты со скоростями от  $v_0 = 3$  до  $v_0 = 7.5$  образуют петлю, а именно: кривая пересекает сама себя в двух точках по разные стороны от Земли. С увеличением скорости  $v_0$  точки самопересечения орбит приближаются к Земле. Наконец, некоторой скорости  $v_0$ , заключенной в интервале  $7.5 < v_0 < 9$ , будет соответствовать орбита, для которой обе точки самопересечения сходятся в одну, совпадающую с центром Земли. (Соответствующая невозмущенная орбита является вырожденным эллипсом с  $e = 1$ , т. е. прямой линией).

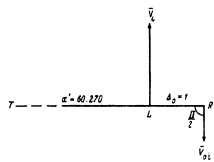


Рис. 9.



Рис. 10.

Таблица 2

№№ орбит	Единицы: радиус Земли, сутки					$r_0$ (в км)	$v_{r1}$ (в км/сек.)	$v_{r2}$ (в км/сек.)	Тип
	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$a$	$c$	$r_1$				
1	3	13,45	48,100	0,9115	4,2568	21000	5,52	—	II
2	6	10,12	35,932	0,9286	2,7422	10000	6,48	—	II
3	7,5	9,27	34,423	0,9833	0,5731	—	—	11,147	II
4	9	8,70	33,547	0,9918	0,2759	—	—	11,537	I
5	10,5	8,80	34,037	0,9510	1,6678	4000	8,59	—	I

Орбиты со скоростями  $v_1=9'$  и  $v_2=10,5$  пересекают сами себя в одной точке, причем Земля оказывается в замкнутой части траектории.



На рис. 10 изображены полутраектории всех симметричных орбит. Стрелками ограничена часть траектории, пройденная графически интегрированием.  
 На рис. 11 изображена траектория типа II, на рис. 12 — траектория типа I. Симметричные полутраектории изображены прерывистой линией.

**Заключение**

Учитывая, что при построении симметричных траекторий минимальное расстояние ракеты от Луны вато м малым, но произвольным, и обобщая результаты построения, мы можем сделать следующие выводы.

1. Возможно построение семейства орбит без дополнительного импульса, проходящих на любом малом расстоянии от Луны, как касающихся поверхности Земли, так и проходящих вблизи ее поверхности.
2. Построение симметричных траекторий зависит от двух существенных параметров: от скорости ракеты в сфере действия Луны  $v_1$  (а) и от минимального расстояния ракеты от центра Луны  $r_0$  (б). Рассмотрим каждую из этих зависимостей.  
 а) Фиксируем  $r_0$  (в нашем случае  $r_0=1$  радиусу Земли). Показано, что при  $v_1 \leq 3$  ракета будет настолько сильно увлекаться притяжением Луны, что возвращение на Землю станет невозможным. Очевидно, тот же результат получится и при  $v_1 \geq 10,5$ , так как при этом скорость ракеты относительно Земли будет приближаться к гиперболической.  
 б) Фиксируем  $v_1$  таким образом, чтобы при  $r_0=1$  радиусу Земли осуществлялось возвращение ракеты (в нашем случае  $v_1$  направлено в сторону, противоположную скорости Луны, и по величине заключено в интервал  $6 \leq v_1 \leq 10,5$ ). Очевидно, что при уменьшении  $r_0$  влияние Луны возрастает, и при достаточно малом  $r_0$  возвращение ракеты на Землю станет невозможным. При достаточно большом  $r_0$  ветвя скорости  $v_1$  почти не испытывает возмущений от Луны (в сторону уменьшения), поэтому будет близка к гиперболической, т. е. такой случай оказывается также неблагоприятным с точки зрения возможности возвращения на Землю.

Из этих рассуждений следует, что если мы задаемся целью построить траекторию ракеты, возвращающуюся на Землю, то между  $r_0$  и  $v_1$  должна существовать обратная

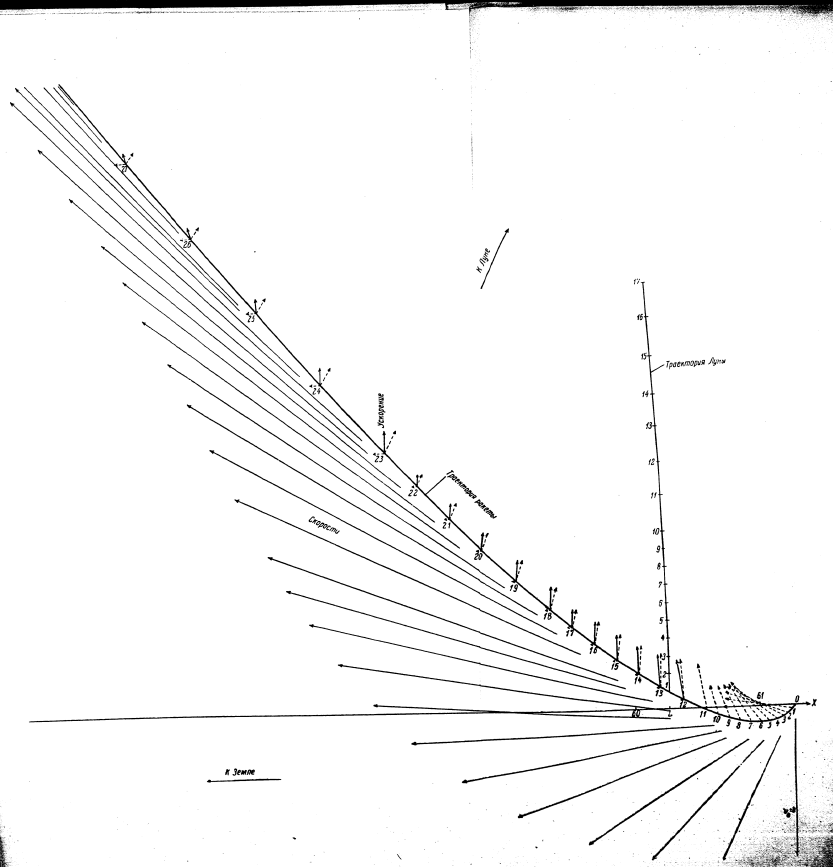


График № 1. Графическое построение симметричной траектории  $V_0=3$  (0,22 км/сек.).

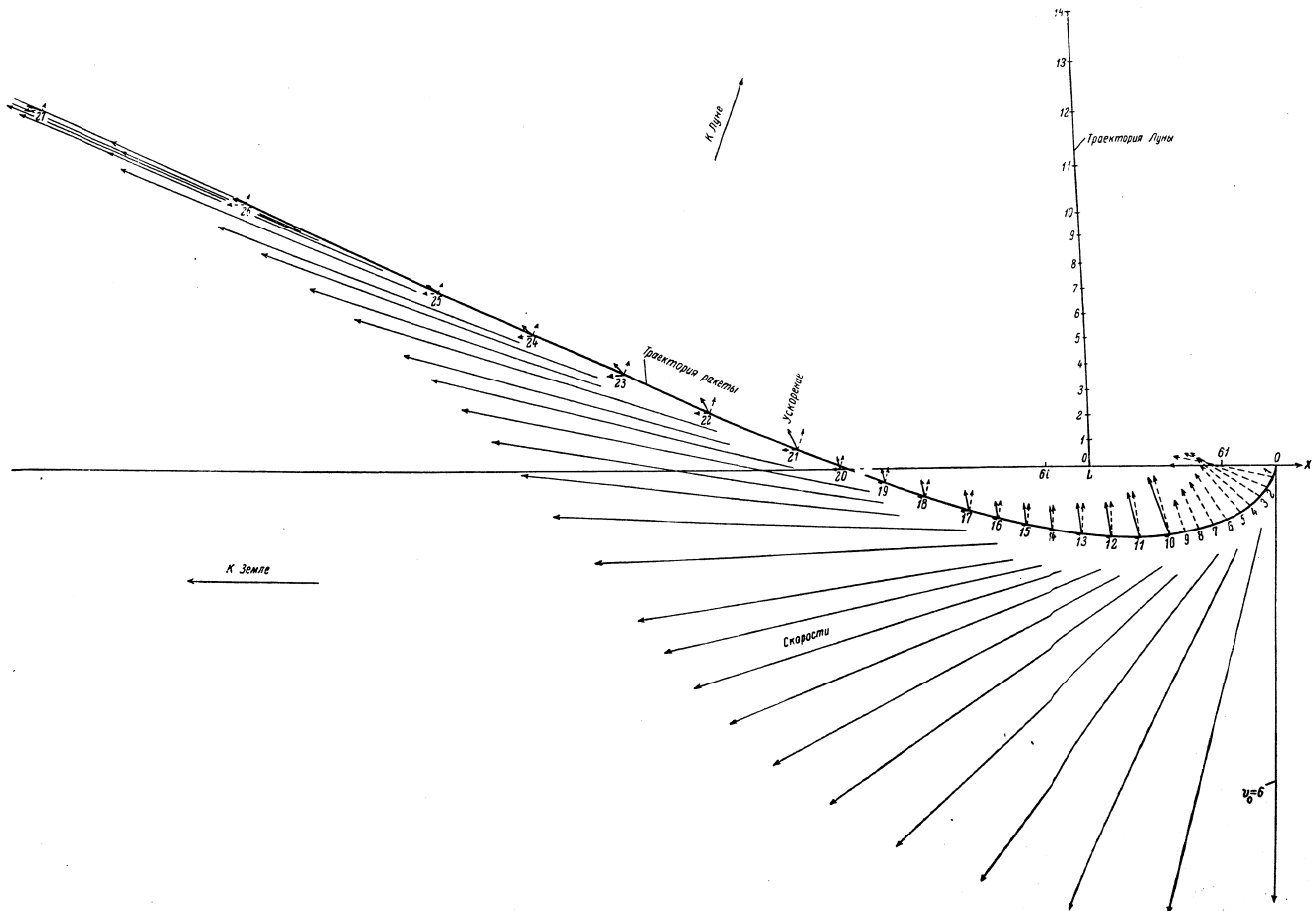


График № 2. Графическое построение симметричной траектории  $V_0 = 6$  (0.44 км/сек.).

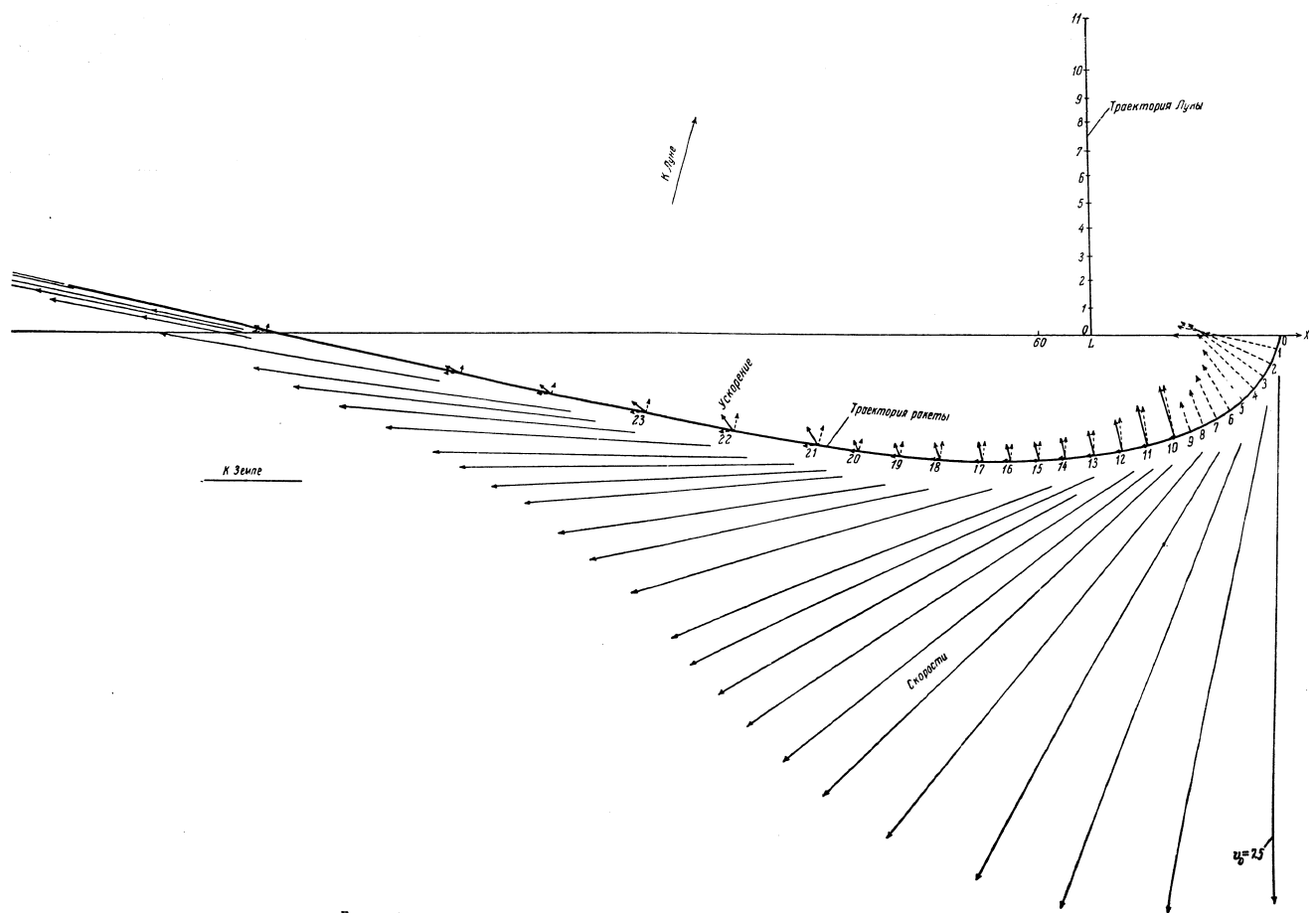


График № 3. Графическое построение симметричной траектории  $V_{01} = 7.5$  (0.55 км сек.).

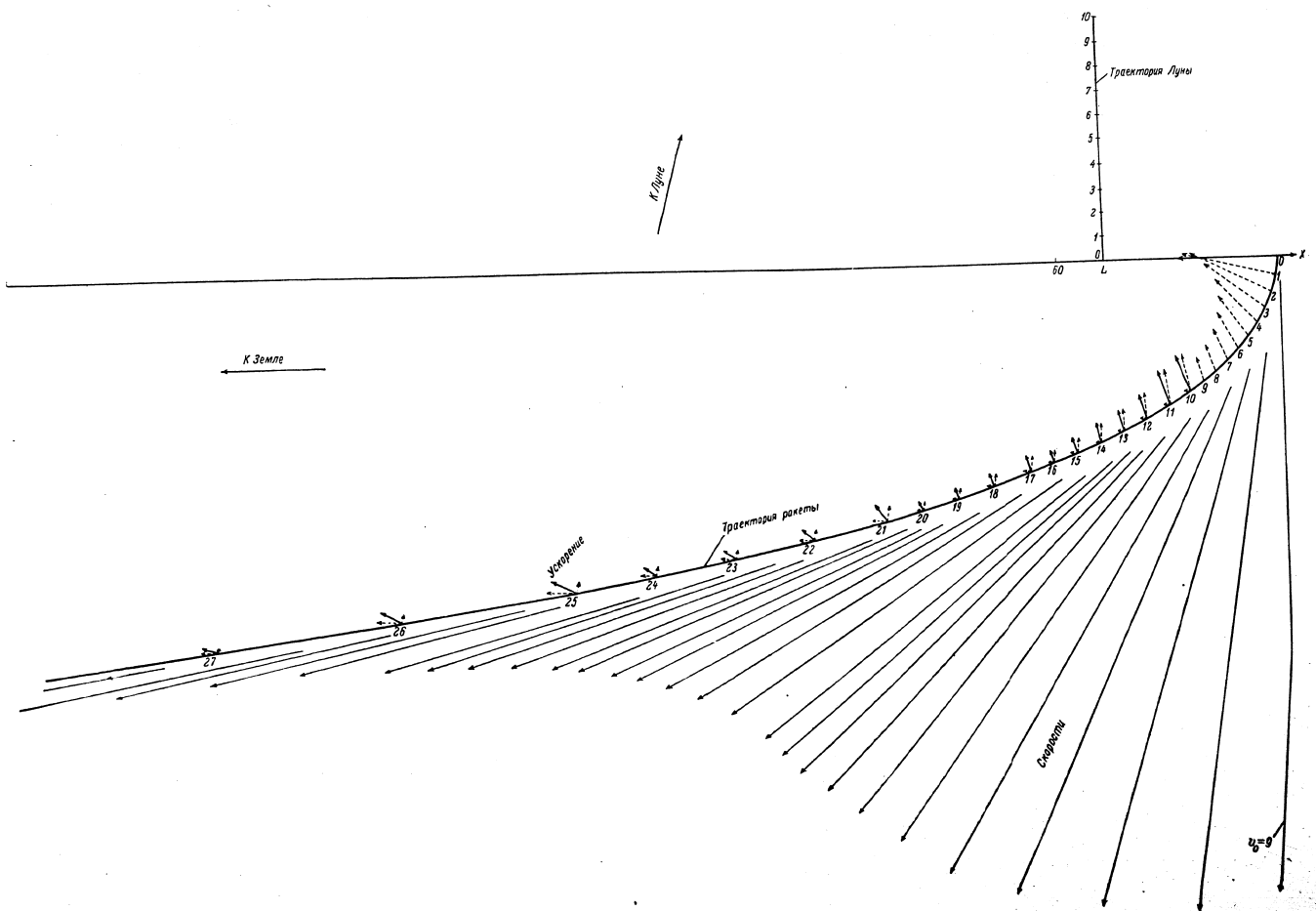


График № 4. Графическое построение симметричной траектории  $V_0 = 9$  (0.66 км.сек.).

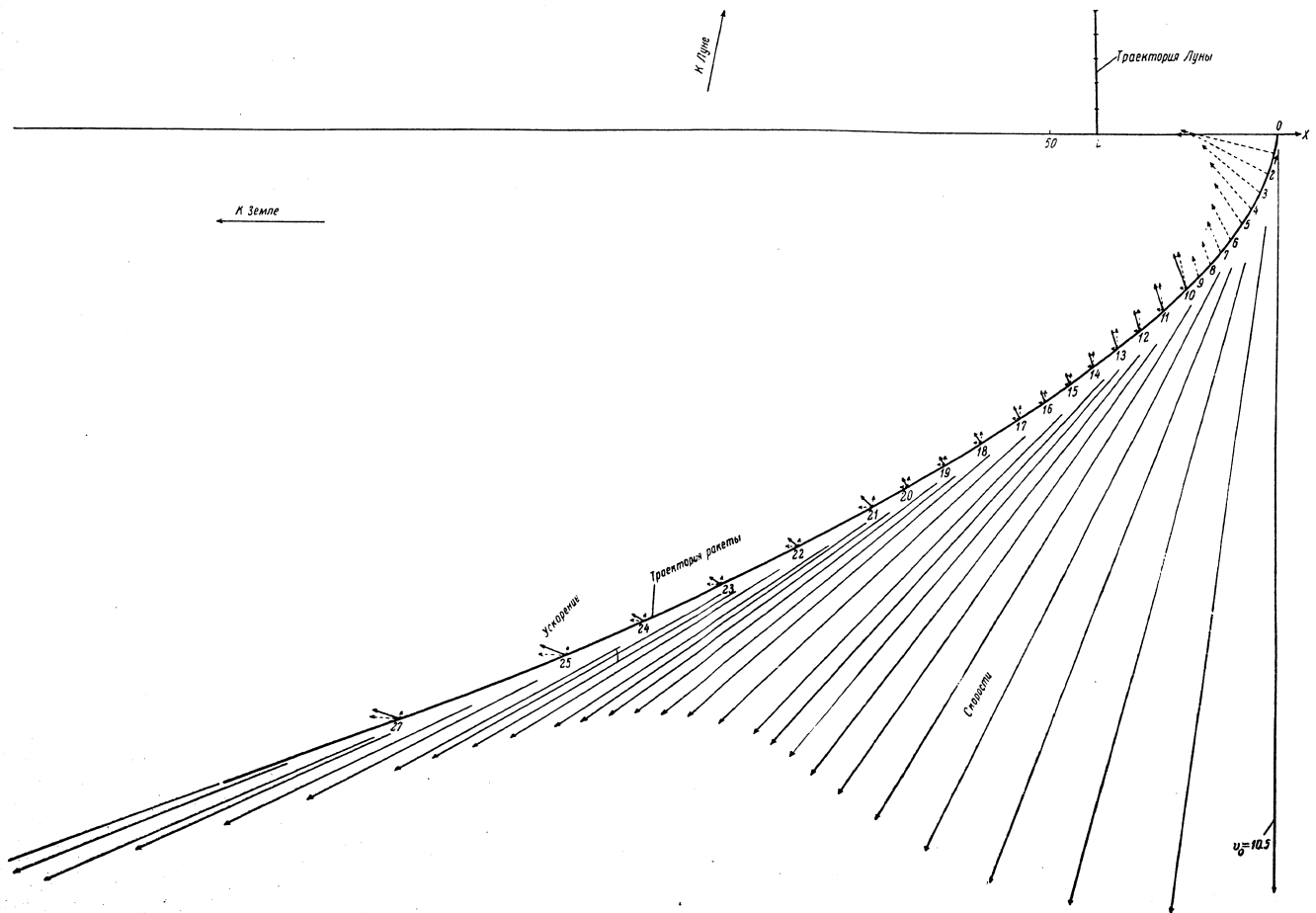


График № 5. Графическое построение симметричной траектории  $V_0 = 10.5$  (0.77 км/сек.).



зависимость. С увеличением  $\varepsilon$  следует уменьшить  $v_0$ , так что при некотором  $\varepsilon = \varepsilon_0$ ,  $v_0 = 0$ , а при  $\varepsilon > \varepsilon_0$  скорость  $v_0$  следует направить в сторону движения Луны.

Орбита, построенная Г. А. Чеботаревым (Чеботарев, 1956), соответствует этому частному случаю  $v_0$  ( $\varepsilon_0 = 31\,600$  км).

3. Построенные орбиты могут быть двух типов: орбиты пересекающие себя в одной точке (тип I) и пересекающие себя в двух точках (тип II). Угловая скорость на орбитах I типа в начальный момент (т. е. в сфере действия Земли) противоположна по знаку угловой скорости Луны. Угловая скорость ракеты на орбитах типа II направлена одинаково с угловой скоростью Луны.

4. Орбиты типа II при одинаковых по величине с орбитами типа I начальных скоростях являются более выгодными, так как:

а) для орбит типа II представляется возможность использования скорости суточного вращения Земли (в какой мере — это зависит от угла между радиусом-вектором и скоростью в начальный момент);

б) кроме того, если иметь в виду задачу фотографирования невидимой части поверхности Луны, то на одинаковом с орбитой типа I минимальном расстоянии от центра Луны ракета движется по орбите типа II с меньшей скоростью (в нашем случае орбите типа I соответствует скорость относительно Луны, равная  $7.5 + 13 = 20.5$ , а орбите типа II — скорость  $9 + 13 = 22$  в наших единицах, т. е. для орбит типа I скорость относительно Луны на  $0.14$  км/сек. больше, чем для орбиты типа II).

#### ЛИТЕРАТУРА

- К о о н. 1950. Динамика ракет.  
 Субботин М. Ф. 1937. Курс небесной механики, II.  
 Уиттекер Е. Т. и Г. Н. Робинсон. 1935. Математическая обработка наблюдений.  
 Чеботарев Г. А. 1956. Симметричная траектория ракеты для полета вокруг Луны. Бюлл. ИТА, 6, 7 (80).  
 Эно-Пельтри, 1950. Космические полеты.  
 Goldstein A., C. E. Fröberg. 1952. A Collision path from the Earth to the Moon in the restricted problem of three bodies.  
 Haskins E. 1953. A mathematical interpretation of crossing the last frontier.  
 Lawden D. E. 1954. Fundamentals of space navigation. Journ. of the Brit. Interpl. Soc. 13, 2, 87—101.  
 Lawden D. E. 1955. Optimal transfer between circular orbits about two planets, Astronaut. Acta, 1, 2.  
 Sundman K. F. 1913. Mémoire sur le problème des trois corps. Acta Mathematica, 36.

Поступило в Редакцию  
 11 июля 1956 г.

Постоянная лунного параллакса

Ф. Х. Перлин

В статье дается краткий обзор результатов определения постоянной лунного параллакса, а также вывод численного значения этой величины в соответствии с новыми данными о некоторых фундаментальных постоянных астрономии.  
DIE KONSTANTE DER MONDPARALLAXE, von F. H. Perlin. — Es wird kurze Zusammenstellung der Ergebnisse einer Bestimmung der Konstante der Mondparallaxe gegeben, sowie der numerische Werth dieser Größe, entsprechend den neuen Daten für einige fundamentale Konstanten der Astronomie.

Введение

Постоянными астрономии принято называть величины, полученные прямо или косвенно из наблюдений и составляющие численную основу редуцированных вычислений, как, например, прецессионные постоянные, постоянная солнечного параллакса и т. д. Некоторые из этих величин связаны между собой определенными соотношениями, вытекающими из теоретических соображений. Постоянная лунного параллакса, методом определения и численному значению которой посвящена настоящая работа, относится к астрономическим постоянным, в значительной степени зависящим от элементов, характеризующих фигуру и размеры Земли. Вопрос о постоянной лунного параллакса является одним из дискуссионных вопросов. Во-первых, употребляемое теперь значение этой величины недостаточно согласуется с другими современными данными о некоторых фундаментальных постоянных. Во-вторых, значение этой постоянной, полученное из астрономических наблюдений, недостаточно хорошо совпадает со значением, полученным из теоретических соотношений, основанных на свойствах гравитации. Новые данные о фундаментальных постоянных, связанных с Землей, полученные в последние годы (Жонголович, 1952, 1956) позволяют внести некоторые уточнения в принятое теперь значение постоянной лунного параллакса.

§ 1. Краткий исторический обзор определений постоянной лунного параллакса

Определение постоянной лунного параллакса, как и других астрономических постоянных, имеет длинную историю. Мы остановимся кратко лишь на главнейших работах, характеризующих состояние вопроса в настоящее время.

Один из методов определения постоянной лунного параллакса, получивший название теоретического или динамического метода, основан на гравитационной теории, позволяющей установить соотношение между параллаксом Луны, ее средним суточным движением, размерами Земли и силой тяжести на ее поверхности (см. далее § 2).

Мысль об использовании тождества земной гравитации с силой, обуславливающей движение Луны вокруг Земли, для определения параллакса Луны была высказана Иоганном Генрихом Ламбертом еще в середине XVIII в.<sup>1</sup> Первое известное численное

<sup>1</sup> Как сообщает Зейделя (Seidel, 1859), Ламберт предложил такую задачу в качестве конкурсной в одном из писем к секретарю Берлинской академии.

значение постоянной лунного параллакса, полученное этим методом, принадлежит Лапласу (Laplace, 1844, III, стр. 285—286). Со времени Лапласа все таблицы Луны от Бюрра (Bürg) до Брауна (Brown E. W.) основаны на значениях постоянной параллакса, полученных динамическим методом.

В табл. 1 приводятся значения постоянной экваториального горизонтального параллакса Луны ( $\pi_c$ ),<sup>2</sup> введенные этим методом Ганзеном, Адамсом, Ньюкомбом, Брауном, Де-Ситтером и Кламенсом, а также принятые при этих выводах значения массы Луны, средней радиуса и ускорения силы тяжести на ее средней широте.<sup>3</sup>

Таблица 1

Автор	1/m	1/z	$g_1$ (в см.сек. <sup>-2</sup> )	$R_1$ (в м)	$\pi_c$	Источники
Ганзен	80	300	979.772	6370063	3422.25	Данные приведены и обработаны Ньюкомбом (Newcomb, 1882, стр. 79).
Адамс	80	300	979.772	6370063	3422.28	
Ньюкомб	81.45	293.5	979.770	6371004	3422.68	Newcomb, 1895, стр. 192—194.
Браун	81.53	294	979.743	6370843	3422.70	Brown, 1915, стр. 42.
Де-Ситтер	81.53	296.75	979.770	6371260	3422.68	Brown, 1915, стр. 516.
Кламенс	81.79	296.202	979.770	6371248	3422.76	De-Sitter, 1938, стр. 213—231. Clemence, 1948, стр. 169—179.

Здесь  $m$  — масса Луны в единицах массы Земли;  $z$  — сжатие Земли;  $R_1$  — средний радиус Земли (в м);  $g_1$  — ускорение силы тяжести на средней широте (в см.сек.<sup>-2</sup>);  $\pi_c$  — постоянная экваториального горизонтального параллакса Луны.

Другой метод<sup>4</sup> определения экваториального горизонтального параллакса Луны, который иногда называется тригонометрическим методом, основан на сравнении склонений Луны, полученных из соответственных меридианных наблюдений Луны в двух пунктах земной поверхности, достаточно отдаленных по широте. Такие наблюдения выполнялись неоднократно на мысе Доброй Надежды и соответственно в Гринвиче, а также на некоторых других европейских обсерваториях.

В 1751—1753 гг. Лакей (Lacaille) выполнил на мысе Доброй Надежды ряд наблюдений, послуживших затем материалом для вывода постоянной лунного параллакса целому ряду астрономов (Lacaille, Laland, Du Séjour, Гришков).<sup>5</sup> Эти же наблюдения Лакей был переработаны в 1837 г. Олуфсеном (Olufsen, 1837) совместно с наблюдениями Брайера в Гринвиче, Кассини в Париже, Лаванды в Берлине и Зенотти в Болонье. В 1838 г. была опубликована Хендерсоном (Henderson, 1838) обработка новых наблю-

<sup>1</sup> Современные авторы дают вместо величины  $\pi_c$  — постоянной параллакса Луны — величину  $\pi_c \frac{\sin \pi_c}{\sin 1''}$  и называют  $\pi_c$  постоянной синуса параллакса Луны. Эти две величины необходимо различать, так как  $\pi_c = \sin \pi_c + \frac{\sin \pi_c}{6}$  и  $\pi_c = \frac{\sin \pi_c}{\sin 1''} = \pi_c - 0.157$ .

<sup>2</sup> Ньюкомб, как и Ганзен и Адамс, называют средней географической широту, синус которой равен  $1/\sqrt{3}$ . Де-Ситтер и Кламенс понимают под средней широтой географическую широту, синус которой равен  $1/\sqrt{3}$ .  $R_1$  и  $g_1$  соответственно для двух определений средней широты совпадают с точностью до величин второго порядка малости относительно сжатия.

<sup>3</sup> Более общий метод определения параллакса Луны может, очевидно, заключаться в определении обобщенных координат Луны в различных пунктах земной поверхности. Разработанными в настоящее время методами фотографического определения таких координат повысит точность определения параллакса Луны из наблюдений.

<sup>4</sup> Интересно отметить работу акад. А. Н. Гришова (1761), использовавшего работу Лакей для определения параллакса Луны по соответствующим наблюдениям в Петербурге.

дений, выполненных в течение 1832—1833 гг. в Гринвиче, Кембридже и на мысе Дорной Надежды. Последующие соответственные наблюдения, поставленные с целью определения постоянной лунного параллакса, были выполнены в 1830—1837 гг. и в 1856—1861 гг. и обработаны Брином (Breen 1864) и Стоуном (Stone, 1866). Все наблюдения обрабатывались по формулам сферической астрономии, выведенным в предположении, что поверхность Земли точно представляет собой сжатый эллипсоид.<sup>1</sup> Мы приводим в табл. 2 значения постоянной экваториального горизонтального параллакса Луны, полученные тригонометрическим методом Олуфсеном, Хендерсоном, Брином и Стоуном при двух предположениях о сжатии Земли ( $\alpha=1/293.5$ ,  $\alpha=1/300$ ), в обработке Харкнесса (Harkness, 1891, 20—21).

Таблица 2

Автор	$\pi_C$ ( $\alpha=1/293.5$ )	$\pi_C$ ( $\alpha=1/300$ )	Источники	Примечания
Олуфсен.	3423.28	3422.91	Olfen, 1837.	Наблюдения выполнены в Гринвиче, Париже, Берлине, Бомбее и на мысе Дорной Надежды в 1751—1753 гг. (53 наблюдения).
Хендерсон.	3422.85	3422.46	Henderson, 1838, стр. 283—294	Наблюдения выполнены в Гринвиче, Кембридже и на мысе Дорной Надежды в 1832—1833 гг.
Брин.	3423.08	3422.70	Breen, 1864, стр. 115—178	Наблюдения выполнены в Гринвиче, Кембридже и на мысе Дорной Надежды в 1830—1837 гг. (123 наблюдения).
Стоун.	3423.08	3422.71	Stone, 1866, стр. 11—16.	Наблюдения выполнены в Гринвиче и на мысе Дорной Надежды в 1856—1861 гг. (239 наблюдений).

Сравнение значений  $\pi_C$ , полученных тригонометрическим методом, со значением, полученным динамическим методом, при одной и той же величине сжатия, как, например, значение Стоуна (табл. 2,  $\alpha=1/293.5$ ) со значением Ньюкомба (табл. 1,  $\alpha=1/293.5$ ), показывает довольно большое расхождение (0.4). Это может быть объяснено как ошибками наблюдений, так и неточностью принятых при вычислении величин, связанных с фигурой и размерами Земли.

В 1906—1910 гг. была поставлена ряд наблюдений на обсерваториях в Гринвиче и на мысе Дорной Надежды для получения более точного значения постоянной параллакса Луны. Чтобы уменьшить ошибку отсчетов, наблюдался не лунный край, а кратер Mösting A. Дискуссия этих наблюдений была опубликована в 1911 г. Кроммеленом (Strommelin, 1911, стр. 526—540). Обработка наблюдений производилась по формулам для эллипсоидальной Земли, но была также учтена высота пикнов наблюдения над уровнем моря. Полученный Кроммеленом результат представлен в виде поправки к среднему параллаксу Ганзена (к постоянной синуса параллакса  $\pi_C = \frac{\sin \pi_C}{\sin \Gamma}$ ), который следует принять равным 3422.11, так как параллакс, взятый для соответствующих моментов наблюдения из „Berliner Jahrbuch“ основан именно на этом значении постоянной (Bauchschinger, 1919, стр. 872; De-Sitter, 1927, § 10). Кроммелен получил следующий результат:

$$d\pi_C = 0.49 - 0.057 \left(\frac{1}{\alpha} - 293.5\right).$$

Он провел также сравнение величин  $\pi_C$ , полученных на наблюдений кратера Mösting A при разных значениях  $\alpha$ , с величинами, полученными при тех же значениях  $\alpha$

<sup>1</sup> Подробное описание этого метода можно найти, например, в „Руководстве к сферической астрономии“ А. Шалозского (1866), т. 1, стр. 220—225.

динамическим методом, и пришел к выводу, что наилучшее согласие достигается при  $\alpha = 294.4$ . Этот именно вывод побудил Брауна принять при вычислении постоянной синуса горизонтального экваториального параллакса Луны динамическим методом сжатие Земли, равным  $1/294$ . Однако значение  $\alpha = 1/294$ , при котором согласовались значения  $\pi_C$ , полученные разными методами, существенно отличается от той величины, которая получается из современных гравиметрических и других астрономо-геодезических исследований. Кроммелен (Strommelin, 1911) указывает как на одну из возможных причин такого расхождения на трехосность Земли и отличие сжатия гринвичского меридиана, на котором производились наблюдения, от среднего сжатия Земли.<sup>1</sup>

В дальнейшем вопросом о согласовании значений постоянной лунного параллакса, полученных разными методами, занимались Ламберт (Lambert, 1928), Де-Ситтер (De-Sitter, 1927) и Джеффрис (Jeffreys, 1948).

Работы Де-Ситтера и Ламберта в этом вопросе почти идентичны по содержанию. Мы приведем численные данные Де-Ситтера, так как на них основана дальнейшая дискуссия Джеффриса. Де-Ситтер, как и Ламберт, вводит в рассмотрение различные поправки к постоянной параллакса, полученной Кроммеленом, в частности поправки за отклонение геоида от эллипсоида; он дает следующее выражение для разности между значениями  $\pi_C$   $\pi_{C \text{ динам.}}$  и  $\pi_C$   $\pi_{C \text{ динам.}}$  вычисленным динамическим методом:

$$\pi_{C \text{ динам.}} - \pi_C = -0.012 + 0.006 - 0.018 dR_1 + 1.16 d g_1 - 0.044 d \left(\frac{1}{\alpha}\right) - 0.170 d \left(\frac{1}{m}\right) - 0.422 h_1 - 0.301 h_2 - 0.010 t_1 + 0.0138 t_2 + 0.0168 h,$$

где  $dR_1$ ,  $d g_1$ ,  $d \left(\frac{1}{\alpha}\right)$ ,  $d \left(\frac{1}{m}\right)$  — небольшие изменения к принятым при вычислении  $\pi_C$   $\pi_{C \text{ динам.}}$  значениям:  $R_1 = 6371.238$  км,  $g_1 = 979.770$  см-сек.<sup>-2</sup>,  $\frac{1}{\alpha} = 296.96$ ,  $\frac{1}{m} = 81.53$ , а  $h_1$ ,  $h_2$  — поправки к принятым радиусам Земли в Гринвиче и на мысе Дорной Надежды (в км);

$t_1$ ,  $t_2$  — поправки за уклонение отвесных линий в пунктах наблюдений (в сек. дуги);  $h$  — поправка к принятому сеноцентрическому расстоянию наблюдаемого кратера Mösting A. Вероятная ошибка наблюдаемого значения  $\pm 0.006$  выведена из невязок и может считаться хорошим критерием точности наблюдений, так как распределение невязок находится в хорошем согласии с нормальным законом распределения ошибок. По подсчетам Де-Ситтера можно, например, объяснить разность  $\pi_C$   $\pi_{C \text{ динам.}}$  —  $\pi_C$   $\pi_{C \text{ динам.}}$  понижением геоида в Гринвиче на 400 м или же на Мысе — на 280 м, но более вероятным он считает объяснение такой разности систематическими ошибками в наблюдаемом положении кратера Mösting A.

По мнению Ламберта, можно отнести разность  $\pi_C$   $\pi_{C \text{ динам.}}$  —  $\pi_C$   $\pi_{C \text{ динам.}}$  за счет случайных ошибок наблюдаемого значения в сочетании с ошибками в данных, принятых при вычислении  $\pi_C$   $\pi_{C \text{ динам.}}$ . Как на одну из возможных причин такой разности, Ламберт указывает неучтенное уклонение отвеса в пунктах наблюдений и на то, что сжатие гринвичского меридиана от среднего сжатия Земли. Следует, однако, заметить, что Де-Ситтер и Ламберт не располагали данными с положением геоида относительно эллипсоида, принятого при обработке наблюдений, и их оценки влияния отклонения геоида от эллипсоида на величину  $\pi_C$   $\pi_{C \text{ динам.}}$  весьма приблизительны.

Приведенное Джеффрисом (Jeffreys, 1948) исследование внешнего гравитационного поля Земли позволяло ему оценить влияние величин  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $t_1$ ,  $t_2$  на наблюдаемое значение

<sup>1</sup> Такое же предположение высказывал впоследствии Ламберт (Lambert, 1928). Но по подсчетам самого Ламберта, чтобы объяснить существующую разность  $\pi_C$   $\pi_{C \text{ динам.}}$  и  $\pi_C$   $\pi_{C \text{ динам.}}$  достаточно предположить, что сжатие гринвичского меридиана равно 0.003465, по современным данным о трехосности Земли (Джонгольвич, 1952, § 14) сжатие Гринвичского меридиана равно 0.003386.

чение  $\pi_{\zeta}$ . По оценке Джеффриса, влияние всех этих членов выражается очень малой величиной — 0,008.

Джеффрис принимает следующие поправки к значениям Де-Ситтера (см. стр. 569 настоящей работы):  $dR_1 = -0.301 \pm 0.116$ ,  $dq = -0.014 \pm 0.002$ ,  $d(\frac{1}{a}) = +1.14 \pm 0.36$ ,  $d(\frac{1}{m}) = -0.261 \pm 0.025$  и получает соответственно:  $\pi_{\zeta}^{\text{демп.}} = 3422'422 \pm 0'024$ ,  $\pi_{\zeta}^{\text{набл.}} = 3422'34 \pm 0'09$  (в  $\pi_{\zeta}^{\text{набл.}}$  не учтены поправки за отклонение геоида от эллипсоида).

Разность  $\pi_{\zeta}^{\text{набл.}} - \pi_{\zeta}^{\text{демп.}}$  не выходит теперь за пределы средней ошибки, при этом изменения в  $R_1$  и  $\frac{1}{m}$  уменьшили ее, а изменения в  $\frac{1}{a}$  увеличили. Джеффрис предлагает принять для постоянной экваториального горизонтального параллакса Луны значение  $\pi_{\zeta} = 3422'419$  — уравновешенное среднее  $\pi_{\zeta}^{\text{набл.}}$  и  $\pi_{\zeta}^{\text{демп.}}$ . Это значение соответствует  $\frac{1}{a} = 297.10$ ,  $\frac{1}{m} = 81.279$ , экваториальному радиусу Земли  $R_0 = 6378.099$  км, ускорению силы тяжести на экваторе  $g_0 = 978.0373$  см·сек.<sup>-2</sup>

§ 2. Динамический метод определения постоянной лунного параллакса

Движение Луны вокруг Земли подвержено сильному возмущающему действию Солнца. Поэтому, прежде чем говорить о методах определения постоянной лунного параллакса необходимо строго определить само понятие этой постоянной.

Мы будем называть постоянной синуса экваториального горизонтального параллакса Луны ( $\sin \pi_{\zeta}$ ) постоянный член в полном разложении синуса возмущенного параллакса Луны ( $\sin \Pi_{\zeta}$ ). Этот член выражается различно в разных теориях Луны. Например, в теории Луны Ганзена вычисления ведутся с аномалистическим средним движением и среднее расстояние Луны в теории Ганзена отличается от среднего расстояния, определяемого другими теориями, где вычисления ведутся с сидерическим средним движением. В наиболее современной теории движения Луны, теории Хилла—Брауна, возмущения Луны от действия Солнца учитываются относительно так называемой вариационной орбиты.

Вариационную орбиту можно определить как периодическое решение уравнений движения Луны, если в них пренебречь членами, зависящими от наклонности, эксцентриситета солнечной орбиты и параллакса Солнца, и положить равным нулю эксцентриситет лунной орбиты. Вследствие большого возмущающего действия Солнца на движение Луны для вариационной орбиты не существует большой полуоси в ее обычном понимании и нельзя применить к Луне третий закон Кеплера. В вариационной орбите рассматривают аналог большой полуоси — некоторую постоянную величину  $a$  — общей множателем прямоугольных координат Луны (Субботин, 1937, гл. XVIII). В теории Хилла—Брауна постоянный член в разложении синуса возмущенного экваториального горизонтального параллакса Луны равен

$$\sin \pi_{\zeta} = \frac{R_0}{a}, \tag{1}$$

где  $R_0$  — экваториальный радиус Земли.

Введем в рассмотрение величину  $a$ , формально удовлетворяющую третьему закону Кеплера

$$n^2 a^3 = fM(1+m); \tag{2}$$

здесь  $n$  — наблюдаемое среднее суточное движение Луны;  $M$  — масса Земли, включая массу атмосферы;  $m$  — масса Луны в единицах массы Земли;  $f$  — постоянная тяготения.

1 Все значения Джеффриса даны со средними ошибками.

Величина  $a$ , формально удовлетворяющая третьему закону Кеплера для Луны, связана с величиной  $a$  — аналогом большой полуоси — числовым соотношением (3), установленным в теории Брауна (Brown, 1908):

$$\frac{1}{a} = +1.00090768 \frac{1}{a} \tag{3}$$

Соотношения (1), (2) и (3) позволяют выразить постоянную экваториального горизонтального параллакса Луны через среднее движение Луны, массу Земли и ее экваториальный радиус. Подставим  $\frac{1}{a}$  из (3) в (1)

$$\sin \pi_{\zeta} = \frac{1.00090768}{a} R_0,$$

или, полагая  $\delta = 0.00090768$ ,

$$\sin^2 \pi_{\zeta} = \frac{(1+\delta)^2 R_0^2}{a^2}. \tag{4}$$

Пользуясь соотношением (2) получим

$$\sin^2 \pi_{\zeta} = \frac{(1+\delta)^2 R_0^2}{fM(1+m)}. \tag{5}$$

Величину  $fM$  можно выразить через силу тяжести на поверхности Земли. Фигура Земли и ее внутреннее строение весьма сложны и до сих пор мало исследованы. Поэтому речь идет не о действительной Земле, а о некотором идеальном теле, которым заменяют Землю в астрономических вычислениях. Выбор такого тела определяется полученными из наблюдений (астрономическими, геодезическими, гравиметрическими) данными о фигуре и внутреннем строении Земли. Де-Ситтер в своей системе астрономических постоянных, исходя из решения проблемы Клеро до членов второго порядка включительно, принимает в качестве модели Земли тело вращения, фигура которого не является строгим эллипсоидом. Это приводит к введению в систему астрономических постоянных величин, характеризующих отклонение принятой фигуры от строго эллипсоидальной и зависящих от той или иной гипотезы о внутреннем строении Земли. С достаточным приближением можно рассматривать Землю как материальное тело, ограниченное ровной поверхностью эллипсоидальной формы. Мы будем исходить из решения проблемы Стокса, не требующей никаких предположений о распределении масс внутри Земли, рассматривая Землю как материальное тело с внешней ровной поверхностью в виде общего двухосного эллипсоида.

Если ограничиться членами второго порядка малости относительно сжатия, то величина  $fM$  для двухосного эллипсоида выразится следующим образом (Жонголович, 1949):

$$fM_1 = g_0 R_0^2 \left( 1 - x + \frac{3}{2} q - \frac{15}{14} xq \right),$$

где  $g_0$  — ускорение силы тяжести на экваторе;  $q$  — отношение центробежной силы на экваторе к силе тяжести на экваторе;  $M_1$  — масса Земли без массы атмосферы;  $M = M_1(1+c)$ ,  $c = 3.65 \cdot 10^{-7}$  — масса атмосферы в долях массы Земли.

С принятой точностью имеем

$$fM = g_0 R_0^2 \left( 1 - x + \frac{3}{2} q - \frac{15}{14} xq + c \right). \tag{6}$$

После подстановки  $fM$  из (6) в (5) получим, сохраняя члены второго порядка малости,

$$\sin^2 \pi_{\zeta} = \frac{R_0}{g_0} \frac{n^2 (1+\delta)^2}{(1+m)} \left( 1 + x - \frac{3}{2} q + x^2 + \frac{9}{4} q^2 - \frac{21}{14} xq + c \right). \tag{7}$$

1 Относительно определения такого эллипсоида см.: Жонголович, 1952, 1956.

Полученное выражение  $\sin^3 \pi_c$  совпадает с аналогичным выражением Де-Ситтера (De-Sitter, 1938) до членов, характеризующих отклонение принятой им модели Земли от модели, принятой здесь.

Продифференцируем равенство (7), считая  $q$  неизменной величиной. Пренебрегая величинами выше второго порядка малости относительно сжатия, мы получим после некоторых элементарных преобразований следующее выражение для поправки  $d\pi_c$  в зависимости от возможных поправок к значениям исходных величин:

$$d\pi_c = \frac{1}{3R_0} dR_0 - \frac{1}{3g_0} dg_0 + \frac{1}{3} \frac{d\left(\frac{1}{m}\right)}{\left(1 + \frac{1}{m}\right)} - \frac{1}{3} \frac{d\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)} \quad (8)$$

где  $dR_0$ ,  $dg_0$ ,  $d\left(\frac{1}{m}\right)$ ,  $d\left(\frac{1}{2}\right)$  — небольшие изменения в принятых значениях  $R_0$ ,  $g_0$ ,  $\frac{1}{m}$ .

**§ 3. Численное значение постоянной лунного параллакса, полученное с учетом новых данных о некоторых фундаментальных постоянных астрономии**

Формула (7) предыдущего параграфа позволяет получить постоянную синуса экваториального горизонтального параллакса Луны, если известны некоторые величины, входящие в ее правую часть. Рассмотрим их подробнее, стараясь уточнить их значения по современным данным.

а) Среднее сидерическое движение ( $n$ )

Средняя долгота Луны для эпохи 1900, Январь 0, Гринвичский полдень по Брауну  $\lambda_c = 270^\circ 26' 11.71'' + 481267^{\circ} 53' 26.067''$  + вековые и периодические члены,

где  $T$  считается в юлианских столетиях от 1900, Январь 0, Гринвичский полдень.

Средняя долгота Луны получена из наблюдений, отнесенных к астрономическому времени, неравномерному вследствие неравномерности вращения Земли, и должна быть приведена к эфемеридному времени, в котором строится теория движения Луны. По современным данным, учитывающим неравномерность вращения Земли (Загребин, 1951) значение  $\lambda_c$  по Брауну, должно быть исправлено на величину

$$\Delta\lambda = -872 - 2675T \dots$$

что дает для  $\lambda_c$  значение  $\lambda_c = 270^\circ 26' 02.99'' + 481267^{\circ} 52' 59.317''$ , и, следовательно, среднее сидерическое движение Луны в юлианское столетие в 36525 эфемеридных суток равно

$$\frac{1732564373.31}{36525.75} \text{ (часть, обусловленная прецессией)} \\ \frac{1732559353.56}{36525.75}$$

Отсюда среднее суточное движение получается равным

$$n = 47434.889899$$

или

$$n = \frac{47434.889899 \times \sin 1''}{86400} \text{ рад/сут.} \\ \text{сек. эфем. времени}$$

б) Масса Луны в единицах массы Земли ( $m$ )

Масса Луны определяется двумя методами:

1) по наблюдаемому лунному неравенству в долготе Солнца;

2) по постоянной нутации, когда определена постоянная прецессии.

Принятое в таблицах Луны Брауна и в системе астрономических постоянных Де-Ситтера значение  $\frac{1}{m} = 81.53$  получено первым методом Хинксом из обработки появившейся Эроса в 1900—1901 гг.

<sup>1</sup> Для общей прецессии по долготу принято значение Ньюкомба. Исследования последних десятилетий указывают на поправку к этой величине примерно в 1". На такую величину среднесуточного движения эта поправка мало сказывается.

Каменс (Clemence, 1948) получил вторым методом  $\frac{1}{m} = 81.79$ . Теоретические соотношения, которыми пользуются при определении массы Луны по постоянной нутации, получены в предположении, что Земля находится в гидростатической равновесии. Расхождение между значением постоянной нутации, выведенным из неодиократных и хорошо согласующихся между собой наблюдений, и значением, полученным из теоретических соотношений, когда определены постоянная прецессии и масса Луны, показывает, что предположение о гидростатическом равновесии не оправдывается. Поэтому, в настоящее время наиболее надежным методом определения величины  $m$  следует считать метод, основанный на наблюдаемом лунном неравенстве. Джеффрис (Jeffreys, 1948) принял  $\frac{1}{m} = 81.269$ , величину, полученную по постоянной лунного неравенства Спенсера Джонса  $L = 6.4378^1$  при постоянной параллакса Солнца  $\pi_c = 8.790$  и постоянной синуса параллакса Луны  $\pi_l = 3422.526$  (значение Де-Ситтера, De-Sitter, 1938). Новое значение  $\pi_c = 3422.419$ , полученное Джеффрисом (Jeffreys, 1948) приводит к значению  $\frac{1}{m} = 81.278$ .

Рабе (Rabe, 1950) обработала наблюдения оппозиций Эроса с 1926 по 1945 гг. с учетом эфемеридного счета времени и получила новое значение для массы Земли + Луна  $\frac{1}{m_{\text{Земля+Луна}}} = 328.452 \pm 43$

и соответственно этому параллакс Солнца  $\pi_c = 8.79835 \pm 0.00039$ .

Постоянная лунного неравенства, выведенная Рабе из обработки наблюдений Эроса в 1930—1931 гг.

$$L = 6.4356 \pm 0.0028$$

Принимая для  $L$  среднее из полученного им значения и значения Спенсера Джонса, Рабе вывел  $\frac{1}{m} = 81.375 \pm 0.0026$ , при этом параллакс Солнца принят равным  $\pi_c = 8.7984$  и параллакс Луны  $\pi_l = 3422.526$ .

Вывод массы Луны по лунному неравенству требует предварительного определения параллаксов Солнца и Луны. Н. И. Идельсон (1942) вывел соотношение, позволяющее определить  $\frac{1}{m}$  по наблюдаемому лунному неравенству в долготе Солнца и параллактическому неравенству в долготе Луны независимо от параллаксов Солнца и Луны. Действительно, постоянная лунного неравенства и параллактическое неравенство (по Брауну) равны соответственно:

$$L = \frac{m}{1+m} \cdot \frac{\pi_c}{\pi_l} \cdot \sin 1''$$

$$P = 498532 \cdot \frac{\pi_c}{\pi_l} \cdot \frac{1-m}{1+m}$$

откуда

$$\frac{1}{m} = 4.13744 \frac{P}{L} + 1$$

Мы воспользуемся этим соотношением для определения  $\frac{1}{m}$ . Параллактическое неравенство лучше всего определяется из покрытий. Прием

$$P = 125.023 \pm 0.058 \text{ (вероятная ошибка)}$$

<sup>1</sup> По наблюдениям Эроса 1930—1931 гг. в переработке Джеффриса.  
<sup>2</sup> По формуле Де-Ситтера, связывающей массу системы Земля + Луна с параллаксом Солнца (De-Sitter, 1938).

Это значение  $P$  получено Спенсером Джоном (Spenser Jones, 1930, стр. 71--104), переработавшим на основании теории Брауна значение Ньюкомба, выведенное из наблюдений покрытий с 1753 по 1906 гг. При  $L = 6.437 \pm 0.002$  (среднее из значений Спенсера Джона и Рабе) мы имеем  $\frac{1}{m} = 81.360 \pm 0.055$ , значение, близкое к полученному Рабе.

в) Сжатие Земли ( $\alpha$ ), экваториальная постоянная силы тяжести ( $g_0$ ), экваториальный радиус Земли ( $R_0$ )

И. Д. Жонголович (1952) получил на основе обширного гравиметрического материала новые данные о фигуре Земли и ее гравитационном поле. По определению И. Д. Жонголовича, сжатие общего земного эллипсоида  $\alpha = \frac{1}{296.61}$  (второй вариант), экваториальная постоянная силы тяжести  $g_0 = 978.0573$ , причем абсолютное значение силы тяжести в Потсдаме принято равным  $981.274 \pm 0.003$  см. сек.<sup>-2</sup>.

Новые абсолютные определения силы тяжести в Америке и Англии, а также анализа определения, выполненного Кюненом и Фуртвенгером в Потсдаме, показали, что принятое для Потсдама значение должно быть уменьшено (Казанский, 1948; Berroth, 1949, Jeffreys, 1948; Woollard, 1950). Хотя в настоящее время нельзя еще с полной уверенностью дать точное значение, однако из всех указанных определений следует, что принятое значение необходимо уменьшить приблизительно на 12 мга. Приняв поэтому для Потсдама  $g_0 = 981.262$  см.сек.<sup>-2</sup>, мы получим соответственно  $g_0 = 978.045$  см.сек.<sup>-2</sup>.

Кроме того, И. Жонголович (1956) показал, как из различных астрономо-геодезических данных можно получить размеры общего земного эллипсоида и получил для большой полуоси этого эллипсоида значение  $R_0 = 6378075$  м.

г) Параметр центробежной силы ( $q$ )

$$q = \frac{\omega^2 R_0}{g_0}$$

где  $\omega$  — скорость вращения Земли. Среднее значение  $\omega$  за последние 2000 лет равно 1 299 548' 204 2053 (Clemence, 1948) в эфемериде сутки над 0.0000729211514 радиан в секунду эфемеридного времени. С принятыми нами значениями  $R_0$  и  $g_0$  имеем  $q = 0.00346767$ .

Таким образом, мы рассмотрели все величины, входящие в правую часть выражения (7) и приняли для них следующие значения:

$$n = \frac{47434.8899}{86400} \sin 1'' \text{ радиан сек. эфм. времени}$$

$$\delta = 0.00090768,$$

$$\sigma = 8.65 \cdot 10^{-2},$$

$$\frac{1}{m} = 81.36 \pm 0.06,$$

$$R_0 = 6378.08 \text{ км} \pm 0.04,$$

$$g_0 = 978.045 \pm 0.003 \text{ см.сек.}^{-2}$$

$$\frac{1}{\alpha} = 296.61 \pm 0.57.$$

С этими значениями мы получим по формулам (7) и (8)

$$\pi_{\zeta}^{\text{набл.}} = 3422.453 \pm 0.014 \quad (*)$$

$$d\pi_{\zeta} = 0.179dR_0 - 1.7167dg_0 + 0.170d\left(\frac{1}{m}\right) - 0.013d\left(\frac{1}{\alpha}\right),$$

где  $R_0$  выражено в километрах, а  $dg_0$  — в см.сек.<sup>-2</sup>. Наблюдаемое значение  $\pi_{\zeta}$ , выведенное Кроммелином из наблюдений кратера Mösting A и рассчитанное по формулам для эллипсоидальной Земли, должно быть также исправлено. Исправления должны быть внесены как за сжатие общего земного эллипсоида, так и за уклонение эллипсоида от геоида. В работе И. Д. Жонголовича „Об определении размеров общего земного эллипсоида“ (1956) указаны формулы и метод, которым можно получить превышение геоида над общим земным эллипсоидом и абсолютные уклонения отвесных линий в пунктах наблюдений. Пользуясь этим, мы получим для Гринвича и мыса Доброй Надежды соответственно

$$\begin{aligned} h_1 &= +0.058 \text{ км} \\ h_2 &= +0.090 \text{ км} \\ i_1 &= +3.2' \\ i_2 &= -4.5' \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{превышения геоида над общим земным эллипсоидом,} \\ \text{меридиальные составляющие уклонений} \\ \text{отвесных линий.} \end{array} \right.$$

Коэффициенты дифференциальных поправок к наблюдаемому значению  $\pi_{\zeta}$ , вызванным небольшими изменениями в принятых значениях радиуса Земли и широт пунктов наблюдения, введены Де-Ситтером (De-Sitter, 1927) и выражаются следующим образом:

$$d\pi_{\zeta}^{\text{набл.}} = -0.422h_1 - 0.301h_2 - 0.0104i_1 + 0.0138i_2.$$

Учитывая эти поправки и поправку за принятое нами сжатие общего земного эллипсоида, мы получим следующую величину  $\pi_{\zeta}$  по наблюдениям кратера Mösting A в обработке Кроммелина:

$$\pi_{\zeta}^{\text{набл.}} = 3422.47 \pm 0.09. \quad (**)$$

Полученные разными методами значения (\*) и (\*\*), уточненные в соответствии с современными данными о форме и размерах Земли, находятся в хорошем согласии друг с другом. Можно считать, что с ошибкой, не превосходящей одной сотой доли секунды дуги, значение постоянной синуса экваториального горизонтального параллакса Луны будет  $\pi_{\zeta}^{\text{набл.}} = 3422.46$ , что даст постоянную собственную параллакса Луны, равную  $\pi_{\zeta} = 3422.62$ .

Автор выражает глубокую благодарность проф. И. Д. Жонголовичу, под чьим руководством выполнена настоящая работа.

ЛИТЕРАТУРА

Гришков А. Н. (Grishov A. N.). 1761. Investigatio parallaxos Lunae observationibus aequo anno 1752. Petropoli et in Praesentorio Bonae Sphae ex compacto habitis indicis. Novi Commentarii Academiae Scientiarum imperialis Petropolitanae. 6.  
 Жонголович И. Д. 1949. О редукциях силы тяжести. Труды ЦНИИГАиК, вып. 68.  
 Жонголович И. Д. 1952. Ближнее гравитационное поле Земли и фундаментальные постоянные, связанные с ним. Труды ИТА, 3.  
 Жонголович И. Д. 1956. Об определении размеров общего земного эллипсоида. Труды ИТА, 6.  
 Загребин Д. В. 1951. Об учете эллипсоидального члена при составлении лунной эфемериды. Бюлл. ИТА, 5, 1(64).

<sup>1</sup> Уклонения взяты в смысле: астрономическая широта — геодезическая.

Идельсон Н. И. 1942. Фундаментальные постоянные астрономии и геодезии. Приложение к „Астрономическому ежегоднику на 1942 г.“, стр. 411—476.

Казацкий И. А. 1948. Соображения об установлении среднего значения абсолютной силы тяжести для мировой геометрической съемки. Труды ЦНИИГАиК, вып. 51.

Субботин М. Ф. 1937. Курс небесной механики, II.

Шидловский А. 1866. Руководство к сферической астрономии.

Bauschinger J. 1919. Bestimmung und Zusammenhang der astronomischen Konstanten. Ensskt. d. math. Wiss., 6, 2, Heft 7.

Bergroth A. 1919. Das fundamentale System der Schwere in Lichte neuer Reversionpendelmessungen. Bull. geodesique, 19.

Breen H. 1864. On the Constant of the Horizontal Equatorial Parallax, as deduced from Observations made at the Cambridge Observatory and the Royal Observatories of Greenwich, Edinburgh and the Cape of Good Hope. Mem. Astr. Soc., 32.

Brown E. W. 1908. Theory of the Motion of the Moon. Mem. Astr. Soc., 58.

Brown E. W. 1915. The Elements of the Moon orbit. M. N., 75.

Clemence G. M. 1948. On the system of astronomical constants. A. J., 53, 1170.

Crommelin A. 1911. Determination of the Moon's Parallax from Meridian Observations of the crater Misting A at the Royal Observatories Greenwich and the Cape of Good Hope in the Years 1906—1910. M. N., 71.

Harkness W. 1891. The solar parallax and its related constants, including the figure and density of the Earth.

Henderson F. 1838. The Constant Quantity of the Moon's Equatorial Horizontal Parallax, deduced from Observations made at Greenwich, Cambridge and the Cape of Good Hope in 1837 and 1839. Mem. Astr. Soc., 10.

Jeffreys H. 1948. On the figures of the Earth and Moon. (Third paper). M. N. 5 Geophys. Suppl., 7.

Lambert W. D. 1928. The Figure of the Earth and parallax of the Moon. A. J., 38, 908.

Laplace, 1814. Mecanique celeste, III.

Newcomb S. 1882. A Transformation of Hansen's Lunar Theory compared with the Theory of Delaunay. Astr. Pap., I, Washington.

Newcomb S. 1895. The Elements of the four Inner Planets and the Fundamental Constants of Astronomy. Suppl. Amer. Eph., 1897, Washington.

Newcomb S. 1912. Researches on the Motion of the Moon, part II. Astr. Pap., 9, 1.

Olufsen 1857. Untersuchungen über den Werth der Mondparallaxen, den in die aus der Mitte des vorigen Jahrhunderts angestellten correspondirenden Beobachtungen abgeleitet werden kann. A. N., 14, 326.

Rabe E. 1950. Derivation of fundamental astronomical constants from the observations of Eros during 1926—1915. A. J., 55, 1184.

Seidel L. 1859. Aus einem schreiben des Herrn Professor Seidel an den Herausgeber. A. N., 50, 1193.

De-Sitter W. 1927. On the most probable values of some astronomical constants. B. A. N., 4, 129.

De-Sitter W. 1928. On the system of the astronomical constants. B. A. N., 8, 307.

Spencer Jones H. 1930. A Revision of Newcomb's oscillation Memoir. M. N., 90.

Stone E. J. 1886. Constant of Lunar Parallax. Mem. Astr. Soc., 34.

Woodward G. P. 1950. The Gravity meter as a geodetic instrument. Geophysics, 15, 1.

Получено в Редакцию  
2 июня 1956 г.

Утверждено к печати  
Институтом теоретической астрономии  
Академии наук СССР

Технический редактор М. Е. Зендава.  
Корректоры Н. П. Митов и А. К. Колдужинина

Рубо АН СССР М18—2В. Подготовлено к печати 5 III 1957 г. М. 12210. Бумага 84 × 108. № Бум. А. 2.  
Цена д. 738. Уч.-изд. л. 8,18 + 3 вкл. (1,24 уч.-изд. л.) Тираж 1000. Заказ 885. Цена т. р. 05.  
1-я Тип. Изд. АН СССР, Ленинград, В-34, 9 л., л. № 12.

СОДЕРЖАНИЕ

И. Д. Жонгелович. Потенциал лунного притяжения . . . . .	Стр. 505
Ю. В. Батраков. Периодические движения частицы в поле тяготения вращающегося трехосного эллипсоида . . . . .	524
В. К. Абдулваев. К вопросу об устойчивости точек либрации в окрестности вращающегося твратирующего эллипсоида . . . . .	543
М. С. Лисовская. О траекториях полета ракеты вокруг Луны . . . . .	550
Ф. Х. Перди. Постоянная лунного параллакса . . . . .	566

АКАДЕМИЯ НАУК СССР  
ТРУДЫ ГЕОЛОГИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

Выпуск 6

Е. Д. ЗАКЛИНСКАЯ

**СТРАТИГРАФИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ  
ПЫЛЬЦЫ ГОЛОСЕМЕННЫХ  
КАЙНОЗОЙСКИХ ОТЛОЖЕНИЙ  
ПАВЛОДАРСКОГО ПРИИРТЫШЬЯ  
И СЕВЕРНОГО ПРИАРАЛЬЯ**

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР  
МОСКВА



А К А Д Е М И Я   Н А У К   С С С Р

---

ТРУДЫ ГЕОЛОГИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

Выпуск 6

Е. Д. ЗАКЛЕНСКАЯ

СТРАТИГРАФИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ  
ПЫЛЬЦЫ ГОЛОСЕМЕННЫХ  
КАЙНОЗОЙСКИХ ОТЛОЖЕНИЙ  
ПАВЛОДАРСКОГО ПРИПРТЫШЬЯ  
И СЕВЕРНОГО ПРИАРАЛЬЯ

2-я ТИПОГРАФИЯ  
Издательства Академии Наук СССР  
Москва, Шубинский пер., д. 10

При обнаружении недостатков  
в книге просим вернуть книгу  
вместе с этим ярлыком для обмена



---

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР  
МОСКВА - 1957

Ответственный редактор:  
В. П. Гричук

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время метод спорово-пыльцевого анализа прочно завоевал положение в науке как один из палеоботанических методов исследования.

Песчаные пыльца, споры, семена, отпечатки листьев и древесины растений в одинаковой мере интересуют палеоботаников и как документы для восстановления картины последовательного развития флоры и растительности и как материал для обоснования стратиграфического расчленения осадочных отложений морского и континентального происхождения.

По мере изучения песчаных растительных остатков (как микроскопических, так и макроскопических) постепенно находят звенья, связывающие отдельные этапы истории формирования флоры, а также намечают пути к познанию происхождения и становления современной растительности различных ботанических областей.

В литературе в настоящее время известно немало работ, затрагивающих в той или иной степени вопросы методики изучения пыльца и спор и спорово-пыльцевых спектров третичных отложений, хотя у нас в Советском Союзе третичные отложения методом спорово-пыльцевого анализа стали систематически изучаться лишь с начала 40-х годов.

В настоящее время опыт широкого применения спорово-пыльцевого анализа в области изучения третичных отложений оправдал себя для стратиграфических и палеофлористических целей. Построение схем стратиграфического расчленения третичных отложений в их континентальных, солончатоводных и морских фациях уже не мыслится без биостратиграфической основы, для которой материал по песчаным спорам и пыльце является одним из основных.

Метод комплексного исследования опорных разрезов третичных и четвертичных отложений становится обязательным в научно-исследовательских работах, так как только детальное изучение опорных разрезов (стратиграфии которых фаунистически обоснована), вскрытых на территориях, распадавшихся в третичный период в различных ботанико-географических областях, а в четвертичный период — в различных физико-географических зонах, позволяет установить последовательность становления флоры и растительности во времени и пространстве.

Одним из наиболее важных вопросов в области спорово-пыльцевого анализа в настоящее время является разработка метода сопоставления спорово-пыльцевых спектров, выделенных из разновозрастных отложений в районах, значительно удаленных один от другого и находящихся в различных современных ботанических областях, а в третичное время распадавшихся в различных ботанических областях или ботанико-географических провинциях, в понимании А. П. Криштофовича.

Выделенные А. П. Криштофовичем (1941, 1946) ботанико-географические области и провинции палеогена, значительно различающиеся по

характеру флоры, достаточно ясно указывают на то, что в пределах северного полушария палеогеновая флора не была одинаковой на различных территориях и один и те же отрезки геологического времени, и что поэтому прямое сопоставление флористических горизонтов по составу обнаруженных в них растительных остатков может привести к ошибочным выводам.

Последними работами в области спорно-льняного анализа (Покровская, 1954; Заклинская, 1953) намечена первоначальная схема примерного расположения различных флористических провинций на территории СССР, а также первоначальная схема вертикального распределения руководящих спорно-льняных спектров в различных регионах на территории СССР в палеогене и неогене. П. М. Покровская (1954) на основании обобщения данных спорно-льняного анализа предположительно выделяет, например, Европийскую, Урало-Западносибирскую, Казахстанскую, Восточносибирскую и Дальневосточную геоботанические провинции, отличающиеся одна от другой характером спектров и флористической принадлежностью их.

Автор настоящей работы в докладе на Второй Всесоюзной конференции по спорно-льняному анализу отмечал значительные флористические различия однообразных палеогеновых спектров из опорных разрезов различных районов юга Европейской части СССР и Казахстана; наличие палеогеновые спектры юга Европейской части СССР отражают флору тропическую, в основном древнесредиземноморскую, казахстанские же однообразные спектры уже в середине палеогена характеризуются флорой смешанными, включающими элемент северо-восточных азиатских умеренных компонентов. Среднепалеогеновые спектры юга Европейской части СССР характеризуют флору в основном древнередиземноморскую, с небольшой примесью умеренной тургайской, казахстанские же среднепалеогеновые спектры почти полностью представлены пшеницей с спорами растений умеренной тургайской флоры, т. е. флоры весьма близкой к нижнеэоценовой флоре юга Европейской части СССР.

Таким образом, в настоящее время достаточно ясно представляется вся сложность вопроса сопоставления однообразных отложений по флористическим данным и выливается необходимость разработки детальных местных палеофлористических схем, которые в дальнейшем могут послужить основой для создания общей палеофлористической шкалы в целях корреляции однообразных отложений из удаленных территорий.

Попытка П. М. Покровской выделить геоботанические провинции в пределах крупных флористических областей является большим шагом вперед в области палеоботанических исследований. Выделение различных флористических провинций палеогена и неогена, по-видимому, — один из правильных путей к разрешению задачи сопоставления однообразных горизонтов по флористическим данным, тогда, когда эти горизонты охарактеризованы спорно-льняными спектрами различного состава.

К сожалению, несмотря на то, что сама идея подсказала пути развития спорно-льняного анализа как научной области палеоботаники, состояние методики и техника определения ископаемых форм еще не всегда позволяет полностью использовать все собранные материалы. До сих пор мы располагали и, по-видимому, еще много лет будем располагать лишь весьма ограниченными возможностями для определения ископаемых гильды и спор до вида. Проходят эти от того, что гильды современных растений, в особенности субтропических и тропических, изучена еще очень слабо. Между тем правильность определения ископаемых гильды и спор третичных и четвертичных растений почти целиком зависит именно оттого обстоятельство.

На основании многолетних исследований А. П. Криштофовича, Е. В. Вульфа, В. Н. Сухачева, М. М. Ильина и других ученых установ-

лено, что элементы современной флоры имеют чрезвычайно много общих форм с третичными и даже верхнемеловыми комплексами. В особенности это относится к области палеотропиков, где, по мнению наших крупных палеоботаников и флористов, третичная флора по настоящее время осталась почти без изменений. В умеренных широтах в течение всего кайнозоя под влиянием изменений общей физико-географической обстановки и флоры неоднократно менялась вариация с перераспределением границ растительных провинций и зон. Становление современной флоры происходило не одновременно в различных регионах. В северном полушарии основной комплекс третичных субтропических семейств, родов и видов растений, типичный общим похолоданием, частичной аридизацией, а затем увеличением континентальности климата, отступил к южным широтам, уступил место умеренным северо-восточным флорам. В то же время по постепенному сокращению площади, занятой морскими формами, изменение конфигурации материков и их рельефа, происходившее постепенно и неодинаково в различных районах, создавало специфические условия для развития ландшафтных зон. Например, территория Казахстана уже в среднем эоцене представляла собой сушу, на которой развивалась растительность, отчасти степная, лесоокеанная, или полуджунгарная и сухо степная на участках с выровненной поверхностью и с бесчашчатым, щебнистым грунтом (возможно, с солончочными почвами).

На юге же Европейской части СССР, например на территории Азово-Кубанской впадины, в это время было еще глубокое море, в котором отлагались мощные осадки. Море окончательно регрессировало отсюда лишь в конце палеогена, после неоднократных возвратных движений. Естественно, что лишь к этому времени могло относительно заселение данной территории растительностью, которая в связи с аридизацией границ мелководного моря неоднократно меняла свой состав и только в конце палеогена, когда общие физико-географические условия приблизились к современным, стала приобретать состав так же, близкий к современному.

Несмотря на то, что состав растительности и границы распространения различных фитоценологических единиц неоднократно изменялись в течение кайнозоя, сохранились до наших дней те основные роды растений, которые входили в состав тургайской умеренной флоры и южной средиземноморской флоры, сформировавшейся в течение кайнозоя путем смешения древнесредиземноморской, восточноазиатской, китайской и других флор.

Таким образом, определение родов ископаемых гильды и спор может и должно производиться путем сравнения с гильдой и спорами современных родов, точно так же, как это делается при определении ископаемых цветковых отпечатков и остатков растений для морской фауны.

При сопоставлении ископаемых видов гильды и спор с эталонными сравнительными коллекциями гильды и спор современных видов растений мы наблюдаем, что эти виды в подавляющем большинстве случаев имеют общие морфологические черты, что указывает на их близкое родство.

В то же время относительная бедность наших лабораторий сравнительными коллекциями и ограниченность нашей литературы по морфологии гильды не позволяют исследователям в ряде случаев довести определение ископаемого материала не только до вида, но и до рода. Иногда же выделенные формы остаются определенными только до семейства или даже до класса. Некоторые формы приходится группировать лишь по морфологическим признакам. Такие условно определенные формы уже не могут быть использованы для флористических реконструкций и имеют лишь стратиграфическую ценность, характеризуют отдельные горизонты однообразных отложений в пределах только одной и той же физико-географической области, провинции или подобласти.

Не так давно В. А. Вахрамеев в своей работе о состоянии советской палеоботаники (1953) высказал мысль о том, что списки спорово-пыльцевых спектров, составленные из родовых названий, совершенно недостаточны для характеристики отдельных слоев и свит и что использование таких списков для характеристики флоры отдельных отрезков геологического времени нецелесообразно, так как большинство растительных видов этих родов обладает широким горизонтальным и вертикальным распространением. Это не совсем так. Безусловно, видовое определение пыльцы и спор необходимо при изучении молодых кайнозойских и тем более четвертичных отложений. Не вызывает также сомнения и то, что недостаточно точно определенное систематическое положение той или иной ископаемой формы лишает возможности использовать данные анализа для реконструкции дробных элементов ландшафта. Но все же спорово-пыльцевые спектры, представленные родовыми названиями или включающие компоненты, систематическое положение которых определено лишь до семейства, пригодны для стратиграфических целей.

Ботаникам хорошо известно, что основной единицей для характеристики флористических подразделений принимается семейство (Алекшин, 1950). Зная ареалы различных семейств и родов, удалось установить границы современных ботанических областей. Известно, например, что часть семейств, таких как *Rubiacae*, *Amelanchiaceae*, *Ebenaceae*, *Sapotaceae*, *Cephalotaxaceae* и др., является часто тропическими, и некоторые роды этих семейств приурочены к тропическим же широтам различных стран. Так, например, некоторые роды семейства *Cistaceae*, *Bromeliaceae* встречаются только в Южной Америке, отдельные же роды семейства *Cephalotaxaceae* приурочены только к Австралии. Такие роды семейства *Podocarpaceae*, как *Dacrydium*, *Phyllocladus* или семейства *Araucariaceae* известны только в западной части Австралийской ботанической области и т. д. Семейство миртовых во всем его многообразии приурочено в основном к Австралийской области, а обширный род этого семейства — *Eucalyptus* чуть ли не эндемичен для Австралии.

Таким образом, определенное сочетание группы семейств характеризует ботаническую область или подобласть, а следовательно, характеризует и общую физико-географическую обстановку какой-то определенной территории. Следовательно, спорово-пыльцевой спектр, включающий большое число компонентов, определенных лишь в пределах семейства, может служить и для флористических целей и для стратиграфического подразделения.

Очевидно, что чем менее схематично определение, тем ценнее данные спорово-пыльцевой флоры для дробного стратиграфического подразделения, так как определение пыльцы и спор до рода или вида позволяет охарактеризовать не только флору, но и сумму невоетических единиц, составляющих эту флору. Приуроченность определенных родов отдельных семейств к различным широтам земного шара позволяет выделить флористические подобласти, а распространение различных видов этих родов характеризует группы или отдельные периоды в этих подобластях. Последнее подводит нас к возможности судить о составе растительности определенных элементов рельефа и выделить отдельные ландшафтные единицы.

В применении к спорово-пыльцевому анализу определение родов дает возможность реконструировать флористический состав растительного покрова для сравнительно крупных стратиграфических интервалов (эпох), определение же видовое может дать возможность выделить коррелирующие спектры для деления на свиты и слои. Такое дробное подразделение будет в каждом отдельном случае применимо лишь для местного стратиграфического расчленения тогда как спектры, охарактеризованные определением

до семейства или рода, могут иметь гораздо более широкое значение, но для обоснования менее дробного расчленения.

Примером могут служить следующие схемы распределения спорово-пыльцевых спектров.

1. Спектры представлены голосеменными (20%), покрытосеменными (45%), спорами папоротников (35%). Голосеменные в основном представлены пыльцой растений, принадлежащих к семействам *Araucariaceae*, *Podocarpaceae*, *Cupressaceae*, *Gnetales*, единично *Pinaceae* (преимущественно архаичные формы родов *Pinus* и *Picea*). Покрытосеменные представлены семействами *Mutaceae*, *Proteaceae*, *Gouddeniaceae*, *Leguminosae*, *Casuarinaceae*. Споры принадлежат растениям семейств *Suaeteaceae*, *Dicksoniaceae* и др. Такой спектр указывает на тропический облик флоры и характеризует нижнеолигоценовые отложения Приаралья, Казахстана, Западной Сибири, Тургайской впадины, отчасти южных районов Европейской части СССР.

2. Спектры представлены покрытосеменными (60%), голосеменными (25%) и спорами (15%). Покрытосеменные принадлежат к родам *Juglans*, *Pterocarya*, *Liquidambar*, *Nyssa*, *Betula*, *Alnus*, *Acer*, *Quercus*, *Ulmus*. Голосеменные преимущественно представлены пыльцой растений родов *Picea*, *Pinus*, *Taxodium*, с небольшой примесью *Cedrus*, сем. *Cupressaceae*, *Tsuga*. Споры в основном принадлежат родам *Dryopteris*, *Alsophylla*, *Gleichenia*, сем. *Polypodiaceae* и в небольшом количестве — *Sphagnum* (?). Эти спектры характерны для среднего олигоцена в Северном Прииртышье и Северном Приуралье (первая и вторая свиты континентального олигоцена), для Европейской же части СССР спектры, подобные этим, характеризуют миоцен.

3. Спектры в основном представлены покрытосеменными (88%), голосеменными (10%) и спорами (2%). Для покрытосеменных характерно присутствие *Artemisia* cf. *dracunculus*, *A.* cf. *pectinata*, *A.* cf. *sublessingiana*, *Calligonum* cf. *palotzkianum*, *Atriplex* cf. *cana*, *Koehia* cf. *separata*, *Salsola* aff. *sola*, *Ferula* aff. *assa foetida*, *Nitraria* cf. *Schoberi* при участии *Rhus* sp., *Proteaceae*, *Betula* sp., *Pinus* cf. *sibirica*, *Cottinus* и др. Такие спектры принадлежат ассоциациям полупустынных местообитаний верхнеолигоценового времени и характерны только для отложений несахо-алевритовой свиты верхнего олигоцена, на границе с нижним миоценом в Северном Прииртышье. Эти спектры по своему составу близки к спектрам четвертичных отложений этого района. Но современные спектры не имеют примеси тургайской флоры и гораздо беднее примесью пыльцы древесных пород, потому что в четвертичное время древесная растительность в Северном Прииртышье была представлена лишь галерейными лесами или рощами вдоль некоторых рек.

Приведенные спектры резко отличны от верхнеолигоценовых спектров южной части СССР (верхний майкон Северного Кавказа), которые имеют ничтожную примесь пыльцы трав, а в основном состоят из пыльцы древесных пород. Среди небольшого количества пыльцы трав обычно присутствуют некоторые роды сем. *Ctenopodiaceae*, но в основном пыльца трав принадлежит луговому комплексу.

Таким образом, мы наглядном примере можем убедиться в том, что спорово-пыльцевые спектры, при большей или меньшей детальности определений, представляют для целей стратиграфии большую, а порой незаменимую ценность, так как во многих случаях данные спорово-пыльцевой флоры являются единственной палеонтологической основой, при помощи которой можно синхронизировать отложения, определить стратиграфическое положение их и восстановить примерные черты растительного элемента ландшафта окружающей суши в период формирования изучаемых осадков.

Необходимо упомянуть о ландшафтных зонах и о растительности и флоре, восстановленной по данным спорно-пыльцевых анализов. В литературе, посвященной спорно-пыльцевым исследованиям и флористическим построениям, мы неоднократно встречаем такие выражения, как: «...в течение олигоценового времени на территории южной зоны Европейской провинции были распространены широколиственные леса» или «...на территории Казахской провинции произрастали широколиственные леса...» (Покровская, 1954, стр. 246). Это не точно! И вот почему. Анализируя спорно-пыльцевые спектры третичных отложений (или отложений иного эпохи), мы в ряде случаев имеем дело с морскими осадками, сформировавшимися в продолжение десятков тысячелетий на дне обширных морских бассейнов. Именно с такими морскими осадками связаны спорно-пыльцевые спектры олигоценового времени южной зоны Европейской провинции (майконское море) и большей части Казахской провинции (четанское море). Никакой растительности, разумеется, на этих пространствах в то время не было. Пыльца же и споры, обнаруженные в морских отложениях, принадлежали растениям, произраставшим на территориях материков или островов, берега которых омывались этими морями.

Таким образом, анализируя спорно-пыльцевые спектры из морских отложений, мощность которых на Кавказе, в Крыму и Приазовье достигает нескольких сотен метров, а в Северном Прииртышье и в Западной Сибири — нескольких десятков метров, следует учитывать, что флора, восстанавливаемая по этим спектрам, относится не к точкам находок, а к участкам суши, расположенным на расстоянии десятков, а может быть, и сотен километров от этих точек. Это следует учитывать при составлении карт распределения растительности, хотя бы и схематических, которые должны соответствовать общей палеогеографической схеме изучаемого района. Анализируя спорно-пыльцевые спектры, полученные из фациально различных континентальных отложений, мы имеем дело с комплексами пыльцы и спор растений, произраставших в основном вблизи от места формирования этих отложений. В этих случаях спорно-пыльцевые спектры более или менее точно отражают не только характер флоры, но и состав растительности территорий, ближайших к пунктам исследования.

Анализируя же морские отложения, особенно глубоководных фаций, мы выделяем спектры, дающие суммарное отражение характера растительного покрова суши, омываемой морем. При этом пыльца и споры, принесенные в море водным и воздушным путем, могут принадлежать растениям, входящим в состав самых разнообразных ценозов или групп их. Поэтому спектры из морских отложений обычно содержат наиболее богатые в видовом отношении комплексы пыльцы и спор, смешанный состав которых не дает твердых оснований к реконструкции растительности. Такие спектры дают в основном лишь флористические характеристики. На основании анализа спектров из глубоководных отложений сделать вывод относительно состава растительности ближайших территорий можно лишь в предположительной форме, и то имея материал по спорно-пыльцевым спектрам или по микроконическим остаткам из разновозрастных континентальных отложений ближайших территорий. Параллельные исследования растительных остатков из разновозрастных континентальных или прибрежно-водных отложений ближайших территорий могут помочь в отыскании источников сноса пыльцы и спор на место морских отложений.

Опыт таких параллельных исследований был произведен Н. А. Болховитиной (1953) для меловых отложений и автором настоящей работы, совместно с В. П. Барановым, — по району Северного Приаралья и западных склонов Мугоджар. Автор производила спорно-пыльцевой анализ отложений морского палеогена (тасаранская свита), В. П. Баранов — анализ отпечатков листьев и сохранившихся древесных остатков, а также

пыльцы и спор из континентальной фации этой же свиты. По флористической близости и по совпадению отдельных родов, к которым принадлежали растительные остатки в том и другом случае, можно было убедиться, что одним из основных источников сноса пыльцы в тасаранское море Северного Приаралья были отроги Мугоджар, которые в то время были суши (Баранов, 1953).

Вторая конференция по спорно-пыльцевому анализу 1953 г. показала, насколько продвинулось вперед изучение спор и пыльцы кайнозойских отложений вообще и, в частности, третичных. Огромный фактический материал, содержащийся в докладах представителей геологических научно-исследовательских институтов Академии наук СССР, Министерства геологии, Министерства нефтяной промышленности, университетов и др., может уже служить основой для больших сводных работ. Общим недостатком большинства исследований кайнозойских спорно-пыльцевых спектров является отсутствие морфологических описаний ископаемых пыльцы и спор. В этом отношении работы в области спорно-пыльцевого анализа несколько отстают от общей системы палеонтологических исследований. Между тем, занимаясь палеофлористическими реконструкциями, специалисты по спорно-пыльцевому анализу обязаны фиксировать и документировать свои находки, не ограничиваясь словесным перечнем обнаруженных форм, и создавать, таким образом, фонд для справочного материала.

Изучение растительных остатков в районах, соседних с Северным Приаралем и Приазовьем Прииртышья, ведется в течение многих десятилетий. Еще в 1858 г. Г. В. Абих опубликовал материал по растительным отпечаткам из киргизских степей, собранным А. П. Литвиным из углейстых отложений у источника Жар-Кую и определенным О. Георгом. Последующими работами в Приарале, Казахстане, Тургае, Прииртышье, в Средней Азии (Стер, 1858; Берг, обработка Налибина, 1906; Криштофович и Налибин, 1915; Нейбург, 1928; Борнунце, обработка Поирковой, 1932, 1935; Борнунце, 1935; Умадзе-Джебуадзе, 1948; Мведишвили, 1948 и 1959; Горюнова, 1950, 1952, 1955; и др.) было открыто большое разнообразие умеренно лиственных и жестколистных субтропических флор. Этими работами установлено бесспорное существование двух типов флор палеогена на территории Северного Приаралья, Тургаи и Закаспия и отчасти Центрального Казахстана. Более древний комплекс флор, по сходству их с жестколистной субтропической древней палеогеновой флорой Украины, А. П. Криштофович (1946) назвал подтаежкой флорой, или аналогичной ей. Более молодую умеренно лиственную, не включавшую элемент тропических жестколистных флор, А. П. Криштофович назвал тургайской флорой на основании главных находок этой флоры в Тургае.

К сожалению, не всегда было уделяемо стратиграфическое положение находок, и поэтому долгое время эти флоры имели сравнительно с известными. В основном определение находок велось по сравнению с известными и хорошо изученными флорами Западной Европы, и только А. П. Криштофович неоднократно отмечал различие в составе разновозрастных флор из фонич неоднократно отмечал различие в составе разновозрастных флор из фонич отстоящих одно от другого местонахождений. Однако и к А. П. Криштофовичу не всегда попадал надежный датированный материал. Обилие растительных остатков в отложениях континентальных фаций верхних горизонтов палеогена и многочисленные находки отпечатков растений в песчано-кварцитовых фациях его нижних горизонтов привлекали и привлекают по сию пору внимание многих палеоботаников, которые в большинстве случаев (по крайней мере так было до 40-х годов) полагались на определения возраста флороносных горизонтов, данные геологами, собравшими материал, а определения эти были не всегда точны.

Примером может служить не разрешенный до сих пор вопрос о соотно-

шений различных горизонтов континентальных отложений Тургай и соседних с ним районов. Некоторые геологи разделяют вторую свиту континентального олигоцена (индикотериевую свиту) на три подсвиты (Лавров, 1951; Абузярова, 1954), другие приходят к выводу о возможности двухчленного деления этой же свиты (Бойцова и Покровская, 1954).

Критический разбор различных схем стратиграфического расчленения континентальных отложений требует особого внимания, и ему будет посвящен специальный раздел в общей сводной работе, здесь же автор останавливается на нем лишь для демонстрации неосторожного применения палеонтологического метода обоснования стратиграфии, когда флористические данные привязываются к заранее составленной схеме. Схемы же эти еще требуют доработки.

Во всяком случае не будет ошибочным считать, что в 40—50-х годах началось систематическое изучение классических местонахождений флоры и появилось стремление к более точному определению ее стратиграфического положения, для того чтобы эта флора могла в дальнейшем быть действительно руководящей при расчленении осадочных отложений.

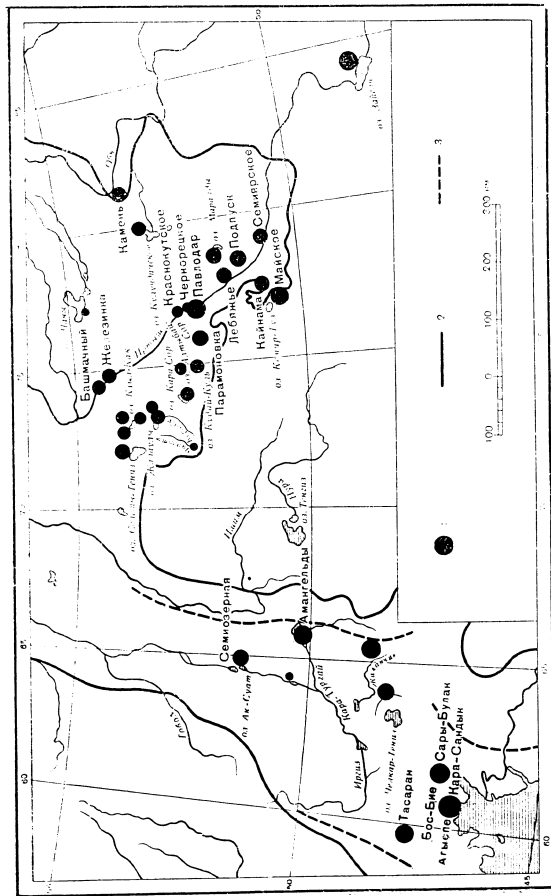
Систематическое изучение ископаемых растительных остатков совпадает с периодом развертывания работ по детальному изучению континентальных и морских отложений Тургай, Северного Приаралья, Северного и Центрального Казахстана и Западной Сибири, где ставится вопрос и ведется разведка полезных ископаемых, связанных с этими отложениями. В этот период, период наших дней, широко применяется метод спорно-пыльцевого анализа. Существующие в настоящее время схемы распределения руководящих спорно-пыльцевых спектров палеогена Тургай (Бойцова и Покровская, 1954; Абузярова, 1954<sup>1,2</sup>; Ракинникова, 1956) касаются в основном континентальных отложений и ставят перед собой задачу обоснования детального их расчленения.

В 1953 г. появляется первая работа автора о результатах спорно-пыльцевых анализов морских и континентальных отложений Павлодарского Прииртышья (Заклинская, 1953<sup>3</sup>), а затем — работа о спорно-пыльцевых спектрах морских отложений палеогена Северного Приаралья (Заклинская, 1953<sup>3,4</sup>). В этих работах автор делает попытку выделить характерные спорно-пыльцевые спектры, которые могли бы служить для характеристики изменения флоры в течение палеогена и отчасти палеогена и для корреляции разновозрастных отложений Арало-Тургайской и Прииртышской впадин.

В процессе дальнейших исследований автор пришел к выводу, что флористически близкие спектры Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья в ряде случаев различаются по своему составу. Корреляция таких спектров возможна лишь при тщательном изучении видового состава ископаемых спор и пыльцы и лишь путем сопоставления массового материала, собранного из различных фаций разновозрастных отложений. Такая работа автором ведется. В процессе ее вылилось самостоятельный раздел — изучение пыльцы голосеменных, которая, как это будет видно из дальнейшего изложения, может применяться для целей корреляции разновозрастных осадочных отложений.

Именно в своем расчленении местные схемы стратиграфического положения свит морского и континентального палеогена, используя полевые наблюдения и откинув на время определение возраста этих свит, автор попробовал произвести анализ последовательного распространения голосеменных, входящих в состав спорно-пыльцевых спектров, полученных в результате обработки опорных и сводных разрезов.

Преследуя от горизонта к горизонту схему типов спектров, характерных для времени формирования отложений каждой из исследованных



Фиг. 1. Основные пункты, в которых были исследованы третичные и четвертичные отложения. 1 — пункты работ; 2 — пункты «опытного» ядра; 3 — палеонтологическая граница совпадения флоры.

свит. В выделенных типах или группах спектров интересно было выявить роды или, где это было возможно, виды или секции голосеменных, которые играли роль руководящих в общей флоре и в растительном покрове различных ценозов. Таким представлялся путь, которым можно подойти к выделению видов и родов голосеменных, могущих иметь коррелирующее значение для стратиграфического расчленения кайнозойских, в данном случае — палеогеновых отложений.

В 1950 г. Отделом четвертичной геологии Института геологических наук Академии наук СССР под руководством К. В. Никифоровой было начато детальное изучение геоморфологии и геологического строения Прираральской впадины. Геология Северного Прираралья представлена в монографической сводке А. Л. Ишнина (1953), очерки геологического строения и палеогеографии Тургай дачи в статьях В. В. Лаврова (Лавров и Соболева, 1948; Лавров, 1949; Овечкина 1954, 1955).

Спорово-пыльцевые анализы велись по материалам, собранным К. В. Никифоровой, А. Л. Ишниным, В. П. Самодуровым и автором. Описание и разрезы обнажений и выработок, из которых серийно отбирались пробы для анализов, и данные по цифровым подсчетам, в настоящем сообщении не приводятся, так как этому отведена специальная глава в сводной работе. Описание же сводного опорного разреза, суммарные данные по распределению спорово-пыльцевых спектров в различных горизонтах этого разреза и основные палеофлористические выводы приводятся ниже для Павлодарского Прииртышья и Северного Прираралья, а также отчасти для некоторых пунктов Тургайской впадины.

Всего исследовано 42 естественных обнажения, 8 скважины и 5 зачеток; проанализировано 700 проб, из которых большинство оказались в той или иной мере пылеватыми. Дополнительно были проделаны единичные анализы из обнажений, расположенных на восточном борту Тургайского прогиба; на р. Дикалчаник (у мелиа Рахмет) — материалы В. П. Самодурова; уроч. Амангелды — материалы Н. А. Лисицкой; из месторождения Ашу-Тасты — материалы В. П. Разумовой; оз. Ашу-Таса — материалы М. Ф. Нейбург. Перечисленным коллектам приношу большую благодарность за интересный и ценный материал.

Все эти материалы были технически обработаны в лаборатории спорово-пыльцевого анализа Отдела четвертичной геологии Института геологических наук Академии наук СССР лаборантом Н. Н. Звездиной<sup>1</sup> при помощи сепарационного и ангидридного метода В. П. Гричука. Фотографирование объектов произведено заводской лабораторией Отдела стратиграфии ПГИИ АН СССР А. И. Шкитским и техником Гидропроекта Н. В. Смирновым. Все определения, подсчеты, описания и зарисовки произведены автором за время трехгодичной обработки материалов.

В Павлодарском Прииртышье изучены спорово-пыльцевые спектры из разрезов на оз. Селеты-Тениз (обн. 42, 1952 г.), оз. Каял-Как (обн. 44, 47, 48, 1952 г.), оз. Жалаулы (обн. 15, 16, 43, 1952 г.), оз. Кудай-Куль (шурф 1, скв. 1, 1951 г.), оз. Алтабай-Сор (обн. 102, 1953 г.), оз. Кемир-Туз (обн. 128, 129, 132б, 1951 г. и обн. 6, 6а, 7, 1952 г.), пос. Кайнама (скв. 181, 1951 г.), пос. Подпуск (скв. 3, 4, 5, 1950 г.), пос. Парамонова (скв. 1 и 2, 1951 г.), г. Павлодар (скв. 3, 1951 г.), оз. Маралды (обн. 177, 1951 г. и 66, 66а, 1952 г.), пос. Майское-Семирское (обн. 182, 1951 г.), р. Чидерты (обн. 55, 1951 г.), правый берег р. Иртыша (обн. 4, 10 и 12, 1952 г.) и ряд мелких обнажений, зачеток и шурфов в промежуточных пунктах между этими обнажениями (фиг. 1).

<sup>1</sup> Дополнительно серийно анализы по Прираралью производила старший лаборант Г. М. Братцева.

#### 1. КРАТКИЙ ОЧЕРК ГЕОЛОГИИ И ПАЛЕОГЕОГРАФИИ ПАВЛОДАРСКОГО ПРИИРТЫШЬЯ И СЕВЕРНОГО ПРИРАРАЛЬЯ И НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ГЕОЛОГИЧЕСКОМ СТРОЕНИИ ТУРГАЙСКОЙ ВПАДИНЫ

Павлодарское Прииртышье, так же как Тургайское плато и Северное Прираралье, было областью широкого развития осадочных отложений различного генезиса, с которыми связан ряд полезных ископаемых.

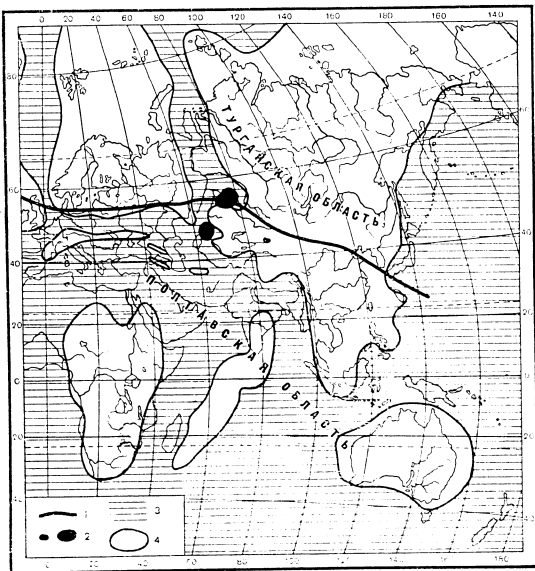
Общее направление в истории формирования осадочных толщ, связанных с единым палеогеновым морским бассейном, а также широкое развитие тектонических движений, синхронно развивавшихся во всех этих районах, позволяет проводить корреляцию осадочных отложений.

В нижнем палеогене перечисленные районы представляли в большей своей части дно обширных морей — эоценового, а затем аллювиогеоценового, связанных Тургайским проливом с северным океаном и древним средиземноморским бассейном. Моря эти омывали берега огромного полуострова, занимавшего территорию нынешнего Казахского нагорья (Киргизия), а также южные оконечности Европейского материка (Мугуджары). На юге располагались острова Большого Кавказа и Средней Азии.

Начиная со среднего олигоцена море начало регрессировать, освобождая постепенно все большие и большие участки суши и направляя на север и на запад от Казахского нагорья. Море неоднократно меняло свои очертания, и был период, когда оно снова заливало берега и снова отступало, оставив после себя мелководные осадки с фауной акул и раковинами моллюсков. Окончательно установился континентальный режим в Павлодарском Прииртышье в начале среднего олигоцена. В Северном Прираралье в среднем олигоцене еще существовали обширные солончатоводные бассейны, тесно связанные с обширным пра-Аральским озером-морем; здесь только к концу можно считать континентальный режим окончательно установившимся (Вахрамеев, 1941, 1949; Ишнин, 1953).

Северное Прираралье и границат с Казахским нагорьем, которое в течение всего кайнозоя было суше. Надо полагать, что в основном Казахское нагорье было центром распространения пшеницы и спор, связавшихся в морские и солончатоводные отложения этих районов. Поэтому можно было заранее предполагать, что во флористическом отношении спектры, выделенные из морских отложений Северного Прираралья и Павлодарского Прииртышья, должны иметь много общих форм. Однако западное положение Прираралья и относительная близость к нему восточной суши Мугуджар, растительность которых также была источником пыльцы и спор, позволяли полагать, что спектры Прираралья и Прииртышья будут отражать растительность различных формаций.

А. Н. Криштофович (1946) в своей работе об эволюции растительного покрова отмечал, что при сопоставлении флористических данных из удаленных районов необходимо давать себе ясный отчет о различии понятий «флора» и «растительность» и не упускать из вида существование в прошлом различных формаций, которые могли смениться в пределах одной и той же флоры.



Фиг. 2. Фитогеографические области в палеогене (по А. Н. Криштофовичу).  
1 — граница Тургайской и Полтавской фитогеографических областей; 2 — районы работ;  
3 — море; 4 — суша

В то время, когда на месте Павлодарского Прииртышья было расположено эоценовое море, граница между Полтавской тропической и Тургайской умеренной ботанико-географическими провинциями (областями) проходила примерно близ южной части долины нынешнего Иртыша и далее — к Среднему Уралу, Москве, Ленинграду, Дании и Британским островам (Фиг. 2). Таким образом, Северное Приаралье и Тургайское плато целиком входило в область тропическую; Павлодарское Прииртышье было расположено на границе этих двух областей; Западно-Сибирская низменность находилась несколько севернее этой границы, т. е. уже в Тургайской умеренной области (в южных ее пределах). Эти обстоя-

тельства на фоне некоторой общности физико-географической обстановки и тектонического режима создавали своеобразные условия формирования морских, континентальных и солончатых осадков в этих районах. Это необходимо учитывать при сопоставлении данных спорно-пыльцевых анализов с данными по макроскопическим растительным остаткам, так как состав растительности и даже флора Павлодарского Прииртышья, Северного Приаралья, Тургай и Западной Сибири в палеогене и неогене могли быть несколько различными.

#### ПАВЛОДАРСКОЕ ПРИИРТЫШЬЕ

Прииртышская впадина, частью которой является Павлодарское Прииртышье, расположена по северо-восточной границе Казахского нагорья. С востока она примыкает к Западно-Сибирской низменности, а с запада граничит с Тургайским плато и с Северным Приаральем.

Геоморфологическое строение Павлодарского Прииртышья, по данным К. В. Пинкфоровой (1953), представляется в следующем виде.

Граничащее на юге с Прииртышской впадиной Казахское нагорье состоит из двух структурных областей: горно-холмистой, сложенной палеозойскими породами и являвшейся в мезозое и кайнозое областью сноса, а в период палеогеновых морских трансгрессий оставившейся сушей, и области приподнятого плато, краевой зоны Казахского нагорья, которая была сушей вплоть до трансгрессии олигоценового моря.

По краю Казахского нагорья протягивается узкая полоса так называемая палеогеновая равнина, которая целиком заливается эоценовым и нижнеолигоценым морями. Далее к северу и северо-востоку расположена так называемая неогеновая озерно-аллювиальная равнина, которая заливается в эоценовом и олигоценном морями, а в миоцене была областью широкого развития озерных континентальных отложений, перекрытых в последующие века палеоценовыми и четвертичными осадками.

Горно-холмистая область и область приподнятого плато Казахского нагорья, а также палеогеновая равнина, расположенная по краю нагорья, в палеогене претерпевали тектонические поднятия, что послужило причиной того, что они, либо целиком, либо частично (как это отмечает К. В. Пинкфорова для области палеогеновой равнины), оставались сушей в период морских трансгрессий.

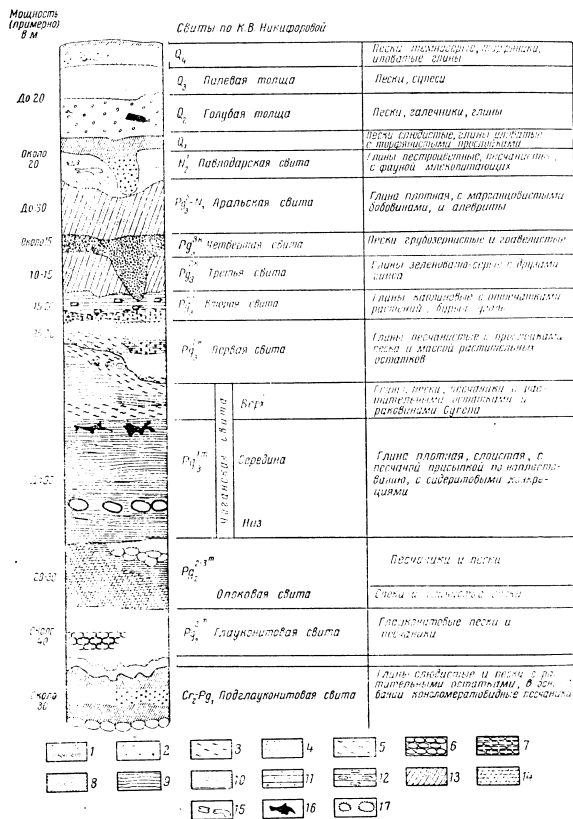
Область неогеновой озерно-аллювиальной равнины оставалась в состоянии относительного покоя, вследствие чего здесь шло более или менее непрерывное накопление как морских, так и континентальных осадков. К этой области в основном и приурочены все пункты, из которых производились спорно-пыльцевые анализы, так как в них наиболее полно представлены все фации морских и континентальных отложений, от палеогена до четвертичных.

Последовательное залегание пород в районе Прииртышской впадины, выраженное прекрасными разрезами в перечисленных пунктах и большим керновым материалом по скважинам, представляется (снизу вверх) в следующем виде (Фиг. 3).

#### Подглауконитовая свита (мсл — палеоген (?)

Тонкопесчанистые слоистые глины, алевролиты и пески, залегающие на конгломератовидных песчаниках. Фаунистических находок нет. Пыльцевая флора носит признаки переходной от меловой палеогеновой. Здесь обнаружено обилие спор, преобладающих над пылевой цветковых растений. Споры принадлежат к родам *Ceratopteris*, *Gleichenia*, *Dicksonia* и др. Голозосменные в основном представлены родами *Cedrus*, *Podocarpus*, *Dacrydium*





Фиг. 3. Палдарское Приаралье. Сводный разрез кайнозойских отложений.

и сем. Cupressaceae с примесью Araucariaceae (в основном пыльца рода *Agathis*). Покрытосеменные представлены сем. Magnoliaceae, Palmae, Myrtaceae, Moraceae, Lauraceae, Leguminosae и др. В то же время единично встречаются пыльцевые зерна *Ostrya* sp. и одного вида *Betula* sp. Материал по слюдистым глинам обрабатывался не только автором, но и в Лаборатории спорно-пыльцевого анализа Отдела стратиграфии ИГиН АН СССР, где определен комплекс, близкий к схематически охарактеризованному выше, и дано заключение о наличии субтропической флоры, содержащей виды и роды растений, встречающихся и в третичных и в верхнемеловых отложениях Казахстана и Сибири. Перечень всех форм, выделенных из слюдистых глин, помещен в работе автора по спорно-пыльцевым спектрам Северного Казахстана (Заклинская, 1953).

Условно толща слюдистых глин, богатых растительными остатками и пылью, отнесена ко времени переходному от мезо к палеоцену, и на общей схеме обозначена как мел — палеоцен. Мощность отложений этой толщи слюдистых глин около 30 м.

**Глауконитовая свита (палеоцен — эоцен)**

Глауконитовые пески и песчаники, часто кремнистые, приурочены на юге отчасти к центральным частям впадины, на севере же (низовый р. Селетя) — к приобтовой части впадины, где они представлены кремнисто-глауконитовыми песчаниками с горизонтом песчано-глауконитовых конкреций в низах. Микрофауна и флора в этих отложениях не обнаружена. Общая мощность отложений около 40 м.

Свита глауконитовых песков и песчаников названа К. В. Никифоровой «глауконитовой толщей» и выделена в самостоятельную свиту палеоцено-эоценового возраста (аналог тасаранской свиты Северного Приаралья).

Свита, литологически близкая к глауконитовой толще, развита в Северном Приаралье в приобтовых частях Аральской депрессии, а в центре сменяется с толщей опоки. По мнению А. Л. Яншина, опоковая толща и свита глауконитовых песков синхронны, и время их отложения относится к эоцену, но так как глауконитовая толща не имеет ни фаунистических, ни флористических остатков, то сопоставление ее с близкими литологическими свитами — условное.

**Опоковая свита (средний — верхний эоцен)**

Глинистые опоки и опоконидные глины с редкими прослоями кремнистого песчаника, с примесью зерен глауконита залегают в основном в центральных частях юга Приаральской впадины. Микрофауна не обнаружена. Анализ диатомовых водорослей указывает на верхнеэоценовый возраст этих отложений. В северных районах Приаралья, в низовьях р. Селетя, опоковая толща замещается плотными шлокоидными глинами, литологически близкими к глинам тасаранской или саксаульской свиты (средний — верхний эоцен) в Северном Приаралье.

Флора опоконидной толщи, выделенная по пылью, представлена субтропическим, возможно, и тропическим комплексом, с большим количеством спор древовидных папоротников. Голоосеменные представлены родами *Cedrus* (несколько видов), *Podocarpus*, *Araucaria*, *Agathis*. Покрытосеменные в основном представлены сем. Moraceae, Myrtaceae, Sapindaceae, Palmae, Diospyraceae, Lauraceae родами *Quercus* sp. и *Castanea* (?). В общем спектре характеризуют подтавскую субтропическую (или тропическую) флору, жестколистную и близкую к флоре западного склона Мугоджар, где В. П. Барановым описана флора прибрежморской фации осадков тасаранского моря, по датировке А. Л. Яншина, — средний эоцен —

верхнего эоцена. Подробный перечень всех форм, встречающихся в отложениях опоковой толщи, опубликован автором в работе 1953 г.

В верхних горизонтах толщи найдена пыльца *Cappariaceae*, *Leguminosae*, *Umbelliferae*, а также отмечена единичная находка пыльцы, морфологически близкой к пыльце современного рода *Welwitschia*. Находка пыльцы этого, до сих пор еще не разгаданного растения, которое в современной флоре известно только в пустыне Намиб в Южной Африке, чрезвычайно интересна. С точки зрения ландшафтных зон, Намиб — пустыня; по данным Кембела (1948), это пустыня с жарким климатом и особенно малым выпадением осадков. Е. В. Вульф (1944) отмечает, что в Намибе, несмотря на почти полное отсутствие осадков в виде дождей, весьма велика влажность воздуха и что гигантские листья величинны приспособлены к поглощению влаги из туманов и росы. На основании этого Е. В. Вульф приходит к выводу, что величинны является реликтовым растением, оставшимся от того времени, когда климат Южной Африки был более влажным. Во всяком случае находка пыльцы величинны в отложениях опоковой толщи Павлодарского Прииртышья представляет большой интерес и, по-видимому, должна послужить материалом для специального исследования, тем более, что произрастание ее в эоцене отмечено не впервые. А. А. Чигуревой (1951) описано зерно величинны из эоценовых горючих сланцев в Западном Казахстане, а в 1954 г. Р. И. Абузирова (1954) также отмечает находки пыльцы этого растения в отложениях Шинтузая в Тургае (по определению автора, эти отложения относятся к нижнему — среднему олигоцену). При этом Р. И. Абузирова отмечает, что находка величинны сопутствует флора *Sassafras*, *Sterculia*, *Cappariaceae* и *Cinnamomum*, свидетельствующая об аридности климата в период отложения осадков<sup>1</sup>.

С другой стороны, в спектрах из опоковой толщи среди пыльцы голосеменных найдены *Cedrus*, а среди покрытосеменных — *Alnus* и *Corylus*, присутствие которых должно свидетельствовать о наличии местообитаний с относительно большой влажностью. Можно допустить, что пустынный и ксерофильный элемент флоры был приурочен к каким-то локальным условиям и что пустынно-ксерофильные растения составили реликтовую ассоциацию, пережившие с верхнего мела (?).

Мощность отложений опоковой толщи около 25—30 м. Возраст свиты предположительно отнесен к верхнему эоцену. Составляется опоковая свита с отложениями саксаульской свиты А. И. Ишнина в Северном Приаралье. Одновозрастными с этой свитой следует считать континентальные отложения сливных дюратах песчаников Южного Урала, кварцитовых песчаников Северного Казахстана в пределах Казахского нагорья, возможно, и песчаников горы Ули на Среднем Поволжье, где неоднократно была найдена обильная флора жестколистного ксерофильного облика, свидетельствующая о засушливом климате, характеризующемся продолжительными периодами в году, лишенными каких-либо осадков.

В низовых р. Селеты, в северной части Прииртышской впадины, прослеживается свита белых, серых и желтоватых кварцевых песков, иногда цементированных в плотные кварцитовые песчанники или содержащих караван этих песчаников. Свита эта залегает непосредственно на покладных глинах, замещающих в низовых р. Селеты толщу опоковых глин.

По литологическому составу и залеганию на покладных глинах эту свиту песков К. В. Ниязфорова сопоставляет с саксаульской свитой Северного Приаралья, которая там охарактеризована своеобразными по

составу спорово-пыльцевыми спектрами, включающими элементы тропической лесной флоры с типичными травянистыми и кустарничковыми ксерофитами: *Nitraria* cf. *Schoberi*, *Chenopodiaceae*, *Myrtales*, *Caetaceae*(?). Наличие ксерофитов свидетельствует о пустынном режиме, возможно, в течение небольшого промежутка времени и на сравнительно небольшой территории.

#### Чеганекская свита (нижний олигоцен)

На всей территории южной части Прииртышской впадины на свите глинистых опок залегает чеганекская свита, представленная зеленовато-серыми глинами различных оттенков. Обычно эти глины слоисты, с присыпкой тонкого песка по напластованию; они расстанцовываются при выветривании.

В верхней части свиты проходит пропластка глины с многочисленными караванами сидеритовых конкреций. В самых же верхних горизонтах толщи сосредоточены многочисленные остатки древесины, стволов деревьев, торфянистые прослойки.

Мощность свиты глины у края Казахского нагорья не более 1—2 м, а в центральной части впадины доходит до 90 м. Глины содержат зубы акулы *Lamna tincotti* (W i n c l e r) W o o d n. и много пыльцы по всей толще.

Спорово-пыльцевые спектры, выделенные из ряда проб, содержат в основном пыльцу покрытосеменных растений с небольшой примесью голосеменных. Спектры отличаются от спектров опоковой толщи несколько меньшим участием пыльцы субтропических растений и в основном характеризуют лесные ценозы. Наиболее распространенными семействами и родами являются: *Engelhardtia*, *Araliaceae*, *Ilex*, *Staphyleaceae*, *Nyssa*, *Ostrya*, *Carpinus*, *Sapotaceae*, *Magnoliaceae*, *Diospyrus*, *Menispermaceae*, *Moraceae* с небольшой примесью *Buxaceae*, *Palmae*, *Oleaceae*, *Rhus*, *Euphorbiaceae*, *Myrtaceae*, *Leguminosae*, *Umbelliferae* и др. Среди голосеменных преобладает значение пыльцы *Taxodium* aff. *distichum* и увеличивается содержание пыльцы *Picea*, *Tilia*, *Acer*, *Ulmus*, *Carya*, *Pterocarya* и др. Период относительно влажного субтропического климата, по-видимому, вызывает усиленное распространение рода *Cedrus*, отдельные виды которого расселяются по повышенным местообитаниям. Однако, кроме пыльцы, характерной для лесных ассоциаций, спектры содержат и представителей семейств, которые известны для полупустынных элементов ландшафта, а именно: *Euphorbia*, *Sterculia*, некоторые виды сем. *Umbelliferae* и *Leguminosae*. Поэтому можно полагать, что на территориях, удаленных от моря, а возможно, и на приморских участках в зонах литоралей, могли располагаться и полупустынные ассоциации.

Забегая несколько вперед, отмечу, что в спектрах из литологически близких отложений по восточному борту Тургайской впадины (в районе Наурузького заповедника) выделены спорово-пыльцевые спектры, содержащие большое количество пыльцы полупустынных растений. Однако спектры, выделенные из толщи зеленовато-серых глин в Прииртышье, свидетельствуют о том, что климат в период их отложения был, по-видимому, более влажным, чем в предыдущую эпоху, а колебания температур в течение года были менее резкими. Об этом свидетельствует значительная примесь пыльцы растений тех семейств и родов (*Acer*, *Ulmus*, *Tilia*, *Quercus*, *Carya* и др.), которые играют преобладающую роль в тургайской флоре.

Свита слоистых серо-зеленых глин с караванами сидерита прекрасно сопоставляется с глинами чеганекской свиты в Северном Приаралье. О. С. Вялов (1930), впервые выделивший эту свиту для Приаралья, определяет ее возраст как верхний эоцен — нижний олигоцен исключительно:

<sup>1</sup> Определенные Р. И. Абузировой формы, отнесенные ею к роду величинны, по описанию и изображению их не принадлежат, так что находки, в особенности ввиду их высокого стратиграфического положения, следует подтверждать повторными анализами.

А. Л. Яшин (1953) считает, что время формирования ее целиком укладывается в нижний олигоцен; К. В. Никифорова в последнее время склоняется к тому же мнению; Н. К. Овечкин и группа ленинградских геологов с И. М. Покровской и Е. П. Бойцовой склонны присоединиться к мнению О. С. Вилова о более раннем начале формирования свиты; геологи Казахской ССР (Лавров и Соболева, 1948; Лавров, 1949) считают чеганские отложения нижнеолигоценными.

Если основываться на типах спорно-пыльцевых спектров, выделенных из более древних отложений (опиоковая толща, тасаранская и саксаульская свиты Павлодарского Прииртышья, Северного Приаралья и Тургай), и более молодых (чеганская свита), то можно допустить, что начало трансгрессии чеганского моря произошло несколько ранее того времени, когда на суше установилась растительность, сравнительно «умеренная» по сравнению с эоценовой, так как флора нижних слоев чеганских глин и верхних горизонтов саксаульских (кстати сказать, и литологически близких) очень близка.

#### Верх чеганской свиты — первая свита (верх нижнего — низ среднего олигоцена)

В прибрежных частях чеганского моря, близ границ его с Казахским нагорьем, на чеганских глинах залегают глины светлосерые, переслаивающиеся со светлосерыми или омарганцованными алевролитами, с прослоями песка, иногда с присыпками марганца, иногда с караванами марганцовистого сидерита.

К этой свите приурочены прослойки и линзы битой ракушки из створок *Cyrena* cf. *semistriata* Desh., сementированной марганцовистым сидеритом. Эта же свита содержит позвонки акулы и скатов и зубы акулы.

Пыльца и споры в отложениях свиты не обнаружены. Но в омарганцованных песчанках на оз. Джаман-Туз (к северо-востоку от оз. Кудай-Куль) найден обломок средней части кожистого листа *Quercus* sp., весьма близкого к виду рода *Quercus*, определенного В. А. Вахрамеевым в отложениях верхнего эоцена на Южном Урале, где остатки его были обнаружены совместно с листьями *Andromeda protogea* и *Cinnamomum* (Lauraceae), т. е. с флорой, близкой к флоре кварцитовых песчанок саксаульской свиты в Приаралье. Отложения на восточной части Устьурта, подобные описанным выше О. С. Вилковым (1930), относятся к верхам чеганской свиты, т. е. к верхам нижнего олигоцена. Находка остатков жестколистной флоры в олигоценных песчанках отчасти и не противоречит чеганскому возрасту свиты, так как в спектрах чеганских глин встречается пыльца дубов, обладающая бугорчатой структурой экватора, которая характеризует жестколистные виды этого рода.

Флора светлосерых глин и алевроитов у оз. Джаман-Туз (по данным К. В. Никифоровой, отложения эти относятся к первой свите континентального олигоцена) сопоставляется с флорой Шинтузая, которую Р. Я. Абузурова (1954) относит к серии гидрокотерпневых слоев Тургай, выделяя в отдельную подсерию гидрокотерпневой свиты — «пристинотерпневые слои». В списке флор, обнаруженных Р. Я. Абузуровой, значатся *Sterculia*, *Myrtaceae*, *Anacardiaceae*, *Platanus*, *Saprotidaceae*, *Cynnamomum*, *Laurus*, *Sassafras*, *Dierilla*, *Leguminosae*, *Webbi tschia*, а наряду с ними представители умеренной флоры: *Taxodium*, *Alnus* cf. *incana*, *Ostrya* cf. *virginica*, *Quercus* cf. *rex* и др.

Все это согласуется с данными В. А. Вахрамеева о жестколистной флоре песчанков Джаман-Туза. Находка такой флоры в отложениях, залегающих непосредственно на чеганских глинах и содержащих смешанную морскую и пресноводную фауну, заставляет полагать, что флора, близкая к

к ксерофитной флоре саксаульского времени, задержалась на территории Казахстана в олигоцене.

Можно допустить, что в олигоцене, в период отступления чеганского моря, эта растительность распространилась на прибрежных полосах суши. К сожалению, в отложениях на оз. Джаман-Туз не было обнаружено ни спор, ни пыльцы. В то же время в слоях с торфянистыми прослоями, в которые, по наблюдениям К. В. Никифоровой, переходит по простиранно глины и алевроиты с зубами акулы и позвонками скатов, найдена богатая пыльцевая флора. Слои глин с торфянистыми прослоями, прослойками песков и с растительной трухой К. В. Никифорова относит уже к первой свите континентальных отложений среднего олигоцена. Пыльцевая флора этих отложений также типична для континентальных отложений среднего олигоцена и прекрасно сопоставляется с пыльцевой флорой первой (кутан-булдакской) свиты в Северном Приаралье.

Следует отметить, что флора самых верхних горизонтов чеганских глин и слоев, относимых к первой континентальной свите, имеет много общих видов и родов, что не удивительно, так как время отложения этих осадков относится к самым верхам нижнего олигоцена и к самым низам среднего. Чеганское море отступало не одновременно на всей территории, и в то время, когда в районах, более удаленных от Казахского нагорья, еще распространялись границы мелководного моря, на территориях, свободных от моря, отлагались уже несомненно, богатые растительными остатками отложения континентального или дельтового происхождения.

В верхних горизонтах чеганской свиты морского олигоцена закономерно прослеживаются слои растительной трухи со стволами деревьев. В этих отложениях выделено огромное количество пыльцы древесных и недревесных растений.

Мощность свиты непостоянна — от 5 до 20 м. Формирование свиты связано с мелководными фазами уже отступающего моря и началом континентального режима в Павлодарском Прииртышье. Отложения эти К. В. Никифорова относит к первой свите континентального олигоцена (средний олигоцен).

У оз. Аксуат в отложениях первой свиты К. В. Никифоровой найдены оолитовые железники. Выходы оолитовых железняков обнаружены также в нижнем течении р. Карауэ.

Спорно-пыльцевые спектры, выделенные в большом числе пунктов выходов первой свиты континентального олигоцена (по р. Карауэ, у пос. Майского на р. Иртыш, у пос. Парамоновки и др.), свидетельствуют о близости растительных обитаний, так как содержат большое количество пыльным травянистых растений.

Основным фоном спорно-пыльцевых спектров служат пыльца древесных широколиственных пород, преобладающих над пыльной голоосемянных растений. Среди пыльцы голоосемянных значительно увеличивается значение болотного кипариса, присутствие которого отмечается уже со времени отложения чеганских глин (5—8%). Характерно присутствие пыльцы тугги, которая в более молодых отложениях встречается лишь в виде единичных зерен.

Флора совершенно отлична от флор предыдущих, более древних отложений и характеризует типичный комплекс умеренной листопадной флоры Тургайской провинции (области) с небольшой примесью ксерофитов. Однако спектры эти еще недостаточно богаты пылью различных видов *Juglandaceae*, *Tilia*, и *Ulmus*, что характерно для спектров вышележащей второй свиты континентального олигоцена.

Отложения свиты с растительной трухой и оолитовыми песчанками литологически и отчасти флористически могут быть сопоставлены с первой свитой континентальных отложений Северного Приаралья, отнесенных,

В. А. Вахрамеевым к солоноватоводным осадкам, а Л. П. Формозовой и А. Л. Липининым — к дельтовым выносам рек начала среднето олигоцене, знаменующегося отступанием олигоценового (четанского) моря.

#### Вторая свита (средний олигоцен)

В области приподнятой палеогеновой равнины, примыкающей к Казахскому нагорью, выходит на дневную поверхность слой шоколадных глин и песков с шпритом, ярозитом и гипсом, а также с включенными яштаря и с прослоями лигнита.

Местами эти глины приобретают оттенки темносерых тонов, местами же они коричневатые-серые, розовые или почти белые. Обычно глины эти тонкослоистые, с прослоями кварцевых алевритов (оз. Кемир-Туз). Такие глины содержат много растительного детрита и отпечатков листовой флоры. По простирацию эти глины иногда замещаются тонкими алевритами и песками. В верхней части они содержат прослой кварцевых песков и оолитов гидротермального происхождения. Свита эта хорошо соотносится со второй свитой континентальных отложений Северного Приаралья — «чилинтинской».

Из отложений второй свиты в обрывах р. Чидерты были выделены отпечатки растений, принадлежащие, по определению В. А. Вахрамеева, к *Cyperites* sp., *Salix tenera* A. Br., *Populus balsamoides* G o e r p., *Pterocarya* cf. *castaneaefolia* (G o e r p.) M e n z e l., *Salvinia Reussii* E t l. и *Adiantum* sp., возраст которых В. А. Вахрамеев не определяет точнее, чем миоцен — олигоцен.

Отложения второй свиты содержат богатый комплекс пыльцы и спор, характеризующий богатый расцвет широколиственной флоры с обилием хвойных, принадлежащих к различным родам, преимущественно *Pinus*, *Picea* и *Taxodium*. Появляется *Cedrus*. Иногда сем. *Pinaceae* преобладает над другими семейными и покрытосеменных и голосеменных растений.

Среди покрытосеменных подавляющее большинство принадлежит пыльце относительно мезофильных широколиственных пород с *Tilia*, *Quercus*, *Pterocarya*, *Juglans*, *Carya*, *Ulmus*, *Liquidambar*, *Acer*, *Alnus*, *Betula* и пр. Одновременно встречается большое количество травянистых ксерофитов с *Ephedra*, *Chenopodiaceae*, *Leguminosae*, *Artemisia* и других, присутствие которых свидетельствует о широком распространении открытых степных и полуоткрытых ассоциаций.

Флора этих слоев совершенно аналогична флоре второй и отчасти первой свиты в Северном Приаралье (кустанбулакская и чилинтинская), а также флоре пиндикотериевой свиты (включая болаттамские слои) в Тургае.

В этом случае уже можно говорить не только о флоре, но и о составе растительности, которая во время отложения глин с отпечатками растений и углестых пластов, по крайней мере на 90%, состояла из умеренных листопадных растений и была представлена широколиственными лесами, смешанными борами с обильным участием различных сосен и кедров, прибрежно-речными зарослями ольхи и тенистыми зарослями вокруг обширных лесных болот с болотным кипарисом.

#### Третья свита (средний олигоцен)

Местами на углесто-каолиновых глинах среднего олигоцене (вторая свита) в этих фациях, совпадающих с болаттамскими слоями Тургае которые В. В. Лавров выделяет в самостоятельную «падиндикотериевую» свиту, с размывом залегает глина зеленая или зеленовато-серая, песчаная

или мылистая, а также ожелезненные пески с друзами гипса и с марганцевыми бобовищами. Отложения эти сильно напоминают озерные глины нижнего миоцена, так называемые аральские слои. Флорой и фауной эти отложения не охарактеризованы, но по стратиграфическому положению выделены К. В. Никифоровой в третью свиту континентальных отложений (аналог «жаксыклячской» свиты Приаралья). Однако, за неимением флористических и фаунистических данных, стратиграфическое положение этой свиты еще окончательно не выяснено.

#### Четвертая свита (верхний олигоцен)

С размывом на слоях первой, второй или третьей свиты залегают плохо сортированные грубозернистые пески, травянистые, белые пески с лидами плотных или нестрых каолиновых глин. Эти отложения (четвертая свита) развиты в области приподнятой палеогеновой равнины, окаймляющей палеозой Казахского нагорья. К. В. Никифорова определяет их как отложения потоков, стекавших с Казахского нагорья. Характерной чертой несечно-гранитной свиты является отбеленность и выщелоченность.

В северной части Прииртышской впадины эти отложения (оз. Кемир-Туз) залегают непосредственно на слои второй свиты и содержат разнообразную и богатую по составу пыльцевую флору. Характеризует эта флора как лесные, так и открытые ценозы. В комплексе древесной растительности большое значение имеет сем. *Pinaceae*, в основном представленное сосной секцией *Strobus* S e h a w. и *Eurypitys* E n d l. *Taxodium* и *Tsuga* совершенно сходят на нет, но пыльца рода *Cedrus* (?) все еще встречается. Среди покрытосеменных в основном встречены представители родов *Betula*, *Alnus*, *Corylus*, *Salix* с незначительной примесью широколиственных пород — *Quercus*, *Ulmus* и *Pterocarya*. Одновременно присутствует пыльца травянистых ксерофитов, что свидетельствует о развитии открытых сухостепных ассоциаций, которые продолжают существовать на территории Прииртышской впадины в течение всего олигоцене. Здесь встречены несколько видов пыльцы *Plumbaginaceae*, *Ephedra* нескольких видов, а также злаки и несколько видов рода *Allium* с небольшой примесью пыльцы растений лугово-разнотравного комплекса. Можно полагать, что в период отложения четвертой свиты на территории Прииртышья были развиты различные типы растительного покрова, в том числе, возможно, и саванны.

Флора и литологический состав четвертой (несечно-гранитной) свиты Прииртышья хорошо соотносится с флорой и строением тургайской свиты В. В. Лаврова, выделенной им в 1951 г. в Тургае.

Списки флоры из Кумудка и Кызылжара, опубликованные Р. И. Абузаровой, расходятся со списками пыльцы четвертой свиты отсутствием в них *Cedrus*. Между тем, по данным автора и по последним данным Е. И. Бойцовой, эта свита содержит пыльцу *Cedrus*. В Приаралье четвертая (чагайская) свита, к сожалению, не содержит пыльцы (в материалах, собранных автором в районах залива Перовского). По данным же А. Л. Яншиной (1953), в отложениях чагайской свиты обнаружены отпечатки лиственницы: *Juglans acuminata* B r o n g., *Fagus antipoffii* H e e r, *Liquidambar europaeum* B r o n g., *Alnus nostrata* U n g., *Corylus macquarrii* Forbes., *Phragmites oeningensis* B r o n g., *Poacites* sp., *Monocotyledons* gen. sp.

На этом кончаются отложения палеогена в Северном Прииртышье. Выше залегает серия слоев различной мощности и генезиса, относящаяся уже к неогену.

#### Аральская свита (нижний миоцен?)

В центральной части Прииртышской впадины широко развиты отложения обширного пресноводного озера или ряда озер. Представлены эти отложения зелеными глинами с мергелями и гипсами и железистыми и марганцевыми бобовинами. В различных пунктах в толще этих глин обнаружены кости *Mastodon* sp., псорогов, хищников, грызунов, парнокопытных а также панцири наземных черепах. По заключению Е. П. Беляевой, палеонтологические находки относятся к миоценовому комплексу (от нижнего до среднего). В аналогичных глинах в Тургае, у развалин могилы Рахмет, Е. П. Беляевой определена разнообразная фауна, которую она также датирует как миоценовую(?): *Trilophodon (Serridentulus) inopinatus*, *Mastodon atavus*, *Aceratherium depereti*, *Brachypotherium aurelianense* var. *gailiti*, *Artiodactyla*, *Testudo turgaica*, *Anchitherium aurelianense*, *Dicroceros* sp., *Chalicotheridae*, *Mastodon* sp., *Rhinocerotidae* и черепахи.

К сожалению, все попытки обнаружить пыльцу в отложенных миоценовых мыльных глин не увенчались успехом и только в одной пробе из скв. 2 близ Павлодара в образце из серых глин со следами зеркала эволюции была выделена умеренная флора, представленная в основном пыльцой покрытосеменных. Участие хвойных ничтожно — единичные зерна *Pinus*, *Picea*, *Taxus*, *Cupressaceae*.

Покрытосеменные представлены пыльцой древесных с *Alnus*, *Betula*, *Carpinus*, *Corylus*, *Acer*, *Ostrya*, *Ulmus*, *Celtis*, *Ilex*, *Vixaceae*, *Rhamnus*, *Rhus* (3 sp.) и большим количеством мыльных трав и ползучестаричиков из семейств *Gramineae*, *Umbelliferae*, *Leguminosae*, *Euphorbiaceae* и рода *Artemisia*.

Состав спорно-пыльцевых спектров свидетельствует о широком распространении растительности открытых местообитаний и о существовании островных или галерейных лесов смешанного типа. Ксерофитность растительности сказывается на значительном участии пыльцы различных видов сумаха, котинуса, дельзовы.

#### Павлодарская свита (миоцен — плиоцен)

По долине Иртыша, от Павлодара до пос. Лебяжье, вскрываются мощные толщи мио-плиоценовых отложений с богатой гиппарионовой фауной, описанной Ю. А. Орловым (1930, 1937, 1939, 1941 и др.). Литологически эти отложения представлены неокрасившимися песчаными комковатыми глинами и алевроитами с несколькими горизонтами погребенных почв. Распространены иловатые суглинки и пески. Фауна представлена гиппарионом, псорогом, различными парнокопытными, черепахами и страусами.

Пыльцевая флора чрезвычайно бедна, но все же единичные спектры указывают на наличие типичного открытого сухостепного ландшафта с обилием травянистых ксерофитов и единичными экземплярами древесных растений из родов *Betula* и *Pinus*. Спектры, выделенные из плиоценовых отложений, на 80% состоят из пыльцы трав и ползучестаричиков, представленных сем. *Cyperofidiaceae*, *Graminea*, *Plumbaginaceae*, родами *Artemisia* и *Ephedra* и группой разнотравья с *Leguminosae*, *Ranunculaceae*, *Rosaceae*.

#### Четвертичные отложения

Отложения нижнечетвертичные или переходные от плиоцена к нижнечетвертичным представлены голубовато-серыми тонкослоистыми песками и иловатыми слоистыми глинами с торфянистыми прослоями. Развиты они

не повсеместно и тяготеют к правобережью р. Иртыш. Нижнечетвертичные отложения содержат фауну млекопитающих, определенных Е. П. Беляевой и В. П. Громовым как *Elasmotherium*, *Equus Stenonis* (возможно, *sussenbornensis*), *Rhinoceros* sp. Пыльцевые спектры содержат в основном пыльцу травянистых ксерофитов, по составу чрезвычайно близких к современной флоре. Но среди пыльцы древесных пород встречаются также роды как *Nyssa*, *Rhus*, *Carpinus*, а в числе голосеменных — *Pinus* семени *Strobilus* и сем. *Cupressaceae*. Таким образом, можно полагать, что растительность нижнечетвертичного периода, возможно, самых верхов плиоцена, была близка к современной, но отличалась примесью некоторых родов, игравших еще и нестепную роль.

Среднечетвертичные отложения, слагающие толщу второй надпойменной террасы Иртыша, обычно залегают с разрывом на подстилающих породах. Мощность этих отложений 20—25 м. Среднечетвертичные отложения представлены обычно песками и галечниками или серовато-голубыми глинами, что и послужило причиной того, что К. В. Никифорова выделила их под названием «голубой толща». Комплексе фауны, определенной В. П. Громовым, относится им ко времени, совпадающему с эпохой максимального оседления на русской платформе. Здесь встречаются *Elephas trogonterii*, *Elephas antiquus*, *Bison prisca longicornis*, *Cervus* sp., *Felis* sp., *Equus* sp. и др.

Пыльцевые спектры, по данным О. В. Матвеевой (1953), содержат пыльцу ели, что косвенным путем может отражать состояние некоторого похолодания на территории Казахстана в связи с продвижением льдов. Однако присутствие ели отмечено сравнительно в небольших количествах, и основной тип спектров остается по-прежнему степным с обилием травянистых ксерофитов. По-видимому, продвижение ели к югу происходило по речным долинам, как это и отмечает в своей работе О. В. Матвеева.

Так называемая палеваля толща, выделенная для Прииртышья К. В. Никифоровой как верхнечетвертичные отложения, сопоставляется с отложениями первой надпойменной террасы Иртыша. Представлена эта серия осадков песками и суглинками с кустами: *Elephas primigenius* (позидий), *Bison prisca longicornis*, *Equus caballus*, *Bos* sp., *Cervus* (cf. *elaphus*), *Carolus* sp., *Saiga tatarica*.

Пыльцевые спектры в основном представлены родами *Artemisia*, *Chenopodium*, *Atriplex*, *Salsola*, а среди древесных пород единично встречается пыльца *Picea* sp., *Pinus* aff. *silvestris*; во всех спектрах присутствует пыльца *Ephedra*.

Позднечетвертичные отложения широко распространены в долинах рек. Представлены они обычно тонкосерыми песками, торфяниками и иловатыми глинами. Среди этих отложений встречаются остатки домашних животных с *Equus caballus*, *Ovis aries*, *Bos taurus*, *Canis* и многочисленные остатки керамики.

Пыльцевые спектры весьма схожи со спектрами из поверхностных проб Павлодарского Прииртышья и содержат массу пыльцы трав со значительным участием *Ephedra*.

Сложная и своеобразная тектоническая обстановка в палеогене, выразившаяся в неодиократных поднятиях, изменивших рельеф Казахского нагорья и прилегающих к нему районов, послужила причиной того, что границы палеогеновых морских трансгрессий и регрессий были несплошными для различных участков Прииртышской впадины, а поэтому вполне возможно, что на сравнительно мало удаленных один от другого участках одного и того же района одновременно отлагались и морские и континентальные отложения.

Впервые мысль о динамичности границ выделяемых свит высказана К. В. Никифоровой.

Приведенный нами сводный разрез (см. фиг. 3) представляет схему стратиграфического соотношения различных свит Павлодарского Прииртышья. Таким образом, положение этих свит по отношению к общей стратиграфической шкале должно определяться для каждой свиты индивидуально, в зависимости от места и условий ее формирования. В то же время, как видно из приведенного сводного разреза, палеогеновые отложения в Прииртышье значительно беднее фауной, чем четвертичные и плиоценовые. Поэтому сопоставление их затруднено, и в связи с этим особенно серьезно следует подходить к интерпретации споро-пыльцевых спектров, зачастую являющихся единственными палеонтологическими находками.

СЕВЕРНОЕ ПРИИРТАШЬЕ

Наиболее древними третичными отложениями в Северном Прииртышье (фиг. 4) А. П. Янин считает тасаранскую свиту, которая формировалась во всех своих фациях — глинистой, муммулитовой и фосфатно-глауколитовой — в средней зоне и в начале верхнего эоцена.

Тасаранское море трансгрессировало в Северное Прииртышье, оставив незанятыми небольшие островки, расположенные меридионально от р. Иртыш до центральной части нынешнего Аральского моря. На востоке море граничило с западными окраинами Казахского нагорья, на северо-западе — с Мугоджарами.

В конце тасаранского века скрылись под воду и островки, и, таким образом, источниками пыльца и спор, поступающих в морские отложения, оставались лишь берега Мугоджар и Казахского нагорья.

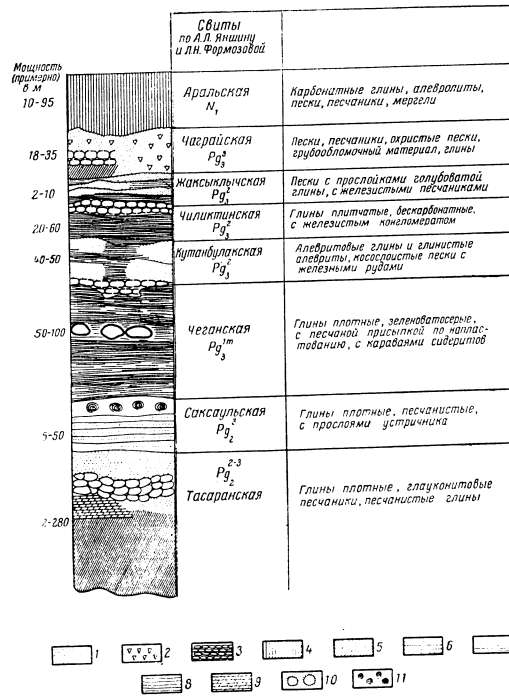
Основанием для определения стратиграфического положения отложений тасаранского моря А. П. Янин, естественно, принимает обильную морскую фауну, список которой приводится им в монографии (1953). При этом А. П. Янин отмечает, что фауна тасаранской свиты соответствует (по данным исследования фауны фораминифер) трем фораминиферовым зонам кавказского эоцена: а) зоне иланктонных фораминифер — слоям с *Lyrolepis* соответствует верхняя часть свиты; б) зоне *Globorotalia crassaformis* соответствует средняя часть свиты; в) зоне *Globorotalia aragonensis* соответствует самая нижняя часть свиты.

Итологически тасаранская свита представлена тремя типами отложений: глауколитово-песчанистыми, отлагавшимися в прибрежных, более мелководных участках моря, глинистыми — в глубоководных, муммулитовыми — в прибрежных зонах, вокруг островов.

Споро-пыльцевые спектры свидетельствуют о субтропическом, возможно, тропическом климате и о соответствующей флоре в пределах Мугоджар и в особенности — Казахского нагорья. Подробные данные о полойном изучении пыльценосных горизонтов морского палеогена Северного Прииртышья приводятся ниже, здесь же упомянем лишь, что среди пыльца покрытосемянных встречены представители сем. Myrtaceae, Moraceae, Vixaceae, Lauraceae, Diospyraceae, Palmae, Fagaceae (несколько видов *Quercus* и *Castanea*), а также обилие пыльца типа Leguminosae (возможно, *Dewalquea*), несколько видов которой приводит В. П. Баранов (1953) в списках флоры, обнаруженной им в отложениях континентальной фауны тасаранской свиты на западном склоне Мугоджар и для палеогеновой флоры Средней Волги.

Голосеменные, обычно составляющие меньший процент в спектрах, чем покрытосеменные, представлены различными видами рода *Pinus* (секции *Strobilus* S h a w., *Pseudostrobus* E n d l., *Cembrae* S p a c h. и др.) со значительной примесью *Podocarpus* и *Cedrus*.

Указанная флора близка к флоре континентальной фауны тасаранской свиты западного склона Мугоджар; она характеризует тропическую жестколистную флору полтавской провинции А. П. Криштофовича.



Фиг. 4. Северное Прииртышье. Сводный разрез палеогеновых отложений. 1 — песок; 2 — грубообломочный материал; 3 — песчаник; 4 — глина, суглинок; 5 — глина песчаная; 6 — глина плотная, песчанистая; 7 — глина плотная; 8 — глина слоистая; 9 — глина оползневая; 10 — стяжения сидерита; 11 — фауна устриц

По-видимому, основная масса пыльца в спектрах тасаранской свиты поступала именно с восточных склонов Мугоджар, обогащаясь также приносимым материалом с западных берегов Казахского нагорья. Например, пыльца *Zygophyllaceae* (*Vitraria Schoberi*), *Umbelliferae* (aff.

*Ferula*.) Nyctaginaceae, Cappariaceae, Myrtaceae, Anacardiaceae и проч., отдельные представители которых входят в состав пустынных ассоциаций палео- и неотропиков.

Спектры тасаранской свиты имеют много общих форм со спектрами из нижних горизонтов опоковой толщи Павлодарского Прииртышья, а также и со спектрами нижних горизонтов саксаульской свиты.

Стратиграфически выше отложений тасаранской свиты залегает комплекс песчано-глинистых слоев (саксаульская свита Яншина) с крупными караваями кварцитовых песчаников в основании. Для флористических построений особенно интересен тот факт, что основным источником сноса обломочного материала при формировании песчано-гравийной фации саксаульской свиты являлись Мугоджары, как это установлено петрографическим анализом.

Наиболее характерный представитель саксаульской фауны, по мнению А. Л. Яншина, — *Pectanculus aralensis* Rom., имеющий большое сходство со многими эоценовыми и палеоэоценовыми видами Западной Европы, а также Украины. Второстепенными являются: *Cymbulostrea multicostrata* Desh. (var. *turgaiica* Vital.), *Cubitostrea plicata* Sol., *C. flabellata* Lam., *Cubitus* Desh. и другие плоччатые устрицы, зубья акулы *Odontaspis hopei* Ag., *Od. winkleri* (Ag.) Ler., *Od. acutissima* Ag. и другие, а также различные виды рода *Nucula* (Яншин, 1953).

Комплекс фораминифер соответствует комплексу руководящих фораминифер верхних фораминиферных слоев Северного Кавказа (Яншин, 1953). В кварцитовых песчаниках континентальной фации саксаульской свиты у западного склона Мугоджар обнаружены богатые отпечатки листьев и других частей древесных и кустарниковых растений, характеризующих ксерофитную флору полтавской провинции с *Podocarpus coeneticus* Ung., *Sequoia couttsiae* Heer, *S. Sternbergii* (Goerpp.) Heer, *Sabal* sp., *Myrica angustata* Schimper, *Myrica uralica* sp. nov., *Quercus apocynophyllum* Eitl., *Q. bifurcatus* Wal., *Q. Elaenae* Ung., *Quercus* sp. (2 sp.), *Dryophyllum furcinervis* (Rossm.) Heer, *Ficus multinervis* Heer, *Ficus* sp., *Cinnamomum* sp., *Laurus* sp., *Terminalia* sp., *Apocynophyllum helveticum* Heer, *Myrthophyllum Warderi* Sap., *Myrsine doryphora* Ung., *Andromeda protogae* Ung., *Dalbergia cf. bella* Heer (определения М. Д. Узнадзе-Дребуадае, 1948), *Dryandra Schrankii* (Steinb.) Heer, *Pimelea* sp. (определение А. Н. Криштофовича), *Sequoia couttsiae* Heer, *Glyptostrobus parisiensis* Brongn., *Dryophyllum furcinervis* (Rossm.) Heer, *Laurus Omalii* Sap. et Mar., *Celastrorhynchium Benedonii* Sap. et Mar., *Aralia transversinervis* Sap. et Mar., *Andromeda protogaea* Ung., *Phyllites* sp.1.

По А. Л. Яншину, саксаульская свита относится к самым верхам эоцена.

Спорово-пыльцевые спектры из отложений саксаульской свиты на горе Бос-Бие в Северном Приаралье и на горе Кара-Сандык (верхние горизонты) из слоев несчаных глин, залегающих на кварцевых песках с зубьями *Myliobatus*, а также на западном чинке Термен-Бос, против станции Саксаульская, где толща саксаульских глин содержит прослой устричника, — несколько различаются по составу.

Нижние из последованных горизонтов наиболее богаты пыльной субтропических растений (роды *Myrtaceae* (роды *Fefhoa*, *Myrtanthes*, *Eucalyptus*, *Eugenia* и *Myrtus*), *Moraceae* (роды *Morus* и *Maclura*), *Buxaceae*, *Sterculiaceae*, *Anacardiaceae*, а также *Sacifaceae* (?), *Echinocactus* (?), *Rhypsales* (?), *Opuntia* sp.), *Zygophyllaceae*, *Plumbaginaceae*, *Euphorbiaceae*, *Proteaceae*, *Ephedra*, *Artemisia*, *Cheporodiaceae*, свидетельствующие о безусловном

наличии пустынных ассоциаций, которые, по аналогии с находками подобной флоры в верхних горизонтах опоковой толщи в Павлодарском Прииртышье, по-видимому, распространились со стороны Казахского нагорья и являлись реликтами более древних флор.

Среди древесных пород, характеризующих лесные ассоциации тропических и субтропических широт, изобилуют различные виды *Pinus*, *Dacrydium*, *Podocarpus*, *Cedrus* и др.

Более высокие горизонты свиты содержат уже примесь пыльца *Alnus*, *Betula*, *Corylus*, *Myrica*, *Juglans*, *Liquidambar*. Правда, участие этих родов незначительно, но наличие пыльца сближает тип спектров верхних горизонтов саксаульской свиты со спектрами нижних горизонтов чеганских глин, также содержащих небольшую примесь пыльца пустынных ксерофитов наряду с типичным комплексом субтропических лесов с небольшой примесью умеренно мезофильных пород. Причина такого смещения типов флоры заключается в принадлежности выделенных спектров к морским отложениям, в которых отражается множество различных типов растительного покрова в пределах одной палеогеографической зоны.

Та часть спорово-пыльцевых спектров, которая характеризует несчаные ассоциации, включает и пыльца, определенную как род *Guetum*, присутствие которого подтверждает субтропический или даже тропический характер растительности.

Флора саксаульских отложений особенно ярко отражает смешанный тип флоры верхнего эоцена, когда среди элементов древней средиземноморской флоры уже начали появляться единичные пришельцы с севера и изобилуют еще специфические представители туркменской провинции с *Rhus*, *Proteaceae*, *Myrtaceae* и *Ephedra*.

Выше залегают отложения чеганской свиты.

Палеогеография чеганского моря в Приаралье не везде ясна, так как отложения его частично смыты последующей эрозией. Во всяком случае распространение чеганского моря было значительным и его отложения и виде так называемой чеганской свиты широко распространены в Приаралье.

Представлены чеганские отложения зеленовато-серыми слоистыми глинами, плотными, тонко расчлененными при выветривании, глиноносными, с прослоями караваяев сидеритовых конкреций и с несчаной приемной по напластованию. Фауна чеганских отложений в Северном Приаралье особенно богата. Исчерпывающий список ее форм, насчитывающий не одну сотню видов, приведен в монографии А. Л. Яншина (1953).

По поводу возраста чеганской свиты твердого мнения еще нет. Вернее, остается ясной ее нижняя граница. По Н. К. Овечкину (1951, 1955), чеганская свита в Тургае захватывает верх эоцена. По данным же А. Л. Яншина, она начинается с нижнего олигоцена. Возникло это разногласие потому, что некоторые виды фауны чеганских глин известны с эоцена.

Флористические данные указывают на большое сходство флоры самых верхних горизонтов саксаульской свиты и низов чегана, которые, в свою очередь, близки к флорам хадумских спектров Северного Кавказа. По-видимому, нижние горизонты нижнего олигоцена еще содержали остатки тропической флоры, сохранившейся и постепенно исчезающей еще в течение всего олигоцена. Однако нижние горизонты чеганских глин в Северном Приаралье, так же как и в Павлодарском Прииртышье, уже содержат довольно большое количество пыльца *Taxodium*, который затем непрерывно развивается в течение нижнего и среднего олигоцена. Находки же пыльца этого рода в саксаульских и опоковых отложениях единичны. Чеганское время и средний олигоцен — пора развития *Taxodium* на материке Казахстана.

1 Списки флоры заимствованы из работы А. Л. Яншина.

Богатые спорово-пыльцевые спектры из чеганских глин в нижних горизонтах характеризуют флору субтропическую с Diospyraceae, Sterculiaceae, Murtaceae, Anacardiaceae, Vixaceae, Moraceae, Myricaceae, посещающую специфический оттенок общей ксерофитности, присущей, по-видимому, особой провинции палеогена, существование которой отмечает Е. П. Корюши (1939). В то же время в общем комплексе этой флоры уже имеется значительная примесь умеренного элемента.

Среди пыльцы голоосемянных отмечается, как уже говорилось выше, усиленное развитие *Taxodium* aff. *distichum* (L.) R. & H., рода *Picea* (*Picea tasarunica*), *Cedrus* (несколько видов) и большое разнообразие видов рода *Pinus*. В верхних горизонтах чеганских глин появляется примесь умеренно-листопадных видов из родов *Alnus*, *Betula*, *Tilia*, *Liquidambar*, *Ulmus*, *Corylus*, *Juglans*, *Pterocarya*. Одновременно появляется пыльца травянисто-кустарничкового комплекса, уже утерявшего субтропический облик.

В чеганских спектрах мы преимущественно находим пыльцу нескольких видов лебедовых, сложноцветных, гречишных и гвоздичных, которые встречаются и в миоценовых и в палеоценовых спектрах. Если сравнить флору чеганских глин Северного Приаралья и Павлодарского Прииртышья, то, пожалуй, можно отметить большую ксерофитность приаральской флоры. Это хорошо заметно по кривой пыльцы *Taxodium*, которая гораздо выразительнее и круче в спектрах Павлодарского Прииртышья.

В конце нижнего олигоцена, в связи с оживлением тектонической деятельности в полосе от Западной Сибири до Казахстана и Средней Азии, произошли поднятия. Чеганское море стало отступать, освободив всю территорию Приаралья, как это наблюдалось и в Прииртышье. Однако освобожденные от моря участки суши еще долгое время были дном огромного солоноватоводного бассейна, образовавшегося в результате последующего за поднятием опускания Арало-Тургайской впадины.

На территории Северного Приаралья в связи с существованием этого бассейна создались условия для накопления частью эстуариевых, частью речных и дельтовых осадков, а затем и для образования озерных водоемов.

В те отрезки геологического времени, когда под влиянием изменений базиса эрозии эти озерные водоемы получали возможность соединиться с основным солоноватоводным бассейном, в них проникала его своеобразная фауна. Таким образом, после ухода чеганского моря на территории Северного Приаралья началось накопление своеобразной, литологически нестройной серии солоноватоводных и пресноводных осадков, преимущественно песчаных, алевроитовых, супесчаных и гравийных, сильно ожелезненных, с прослоями глин, с обильными растительными остатками, с железными рудами оолитового типа и с горизонтами плитчатых железистых песчаников.

Все эти фаунально и литологически нестройные слои относятся к так называемой тургайской серии — первые подобные отложения были найдены в Тургайской депрессии. Эту серию перекрывают отложения нижнего миоцена с *Corbula helmerseni* Miers & Hall. Такая же серия слои в Тургае изучена В. В. Лавровым (1951) и другими исследователями. В Тургае всю серию делят на две основные свиты: нижнюю — гидробиотеревую (включающую болаттамские слои) и верхнюю — собственно тургайскую.

По исследованиям А. Л. Яшина (1940, 1953), Л. Н. Формозовой (1949, 1951) и В. А. Вахрамеева (1949), стратиграфия и флористическое обоснование тургайской серии осадков в Приаралье представляется в следующем виде.

Вся тургайская серия делится на четыре свиты (снизу вверх):

- А. Кутанбулакскую (Л. Н. Формозова) — первая (В. А. Вахрамеев)
- Б. Чиликтинскую » » — вторая »
- В. Якакыклякскую » » — третья »
- Г. Чаграйскую » » — четвертая »

В работах Л. Н. Формозовой (1949), В. А. Вахрамеева (1949), а затем А. Л. Яшина (1953) достаточно подробно описано стратиграфическое положение свит, их фаунальная характеристика, распространение и наиболее полные разрезы. Ниже дан сводный схематический разрез всей тургайской серии на основании работ этих авторов, с пометкой пунктов, в которых автором настоящего сообщения были лично описаны в 1953 г. некоторые обнажения и собраны образцы для спорово-пыльцевых анализов.

Самая нижняя, кутанбулакская свита представлена почкой переслаивающихся алевроитовых глин, глинистых алевроитов и мелкозернистых песков, желтовато-серых, косослоистых, содержащих железные руды.

Фауна кутанбулакской свиты бедна. Известны остатки пресноводных гастрондов, предположительно из рода *Volrala* и отпечатки чешуек осетра.

В конкретных железистых песчанниках обнаружена богатая флора, описанная В. А. Вахрамеевым (1949) и М. Д. Узнадзе-Дребуадзе (1948). Здесь определены: *Salix tenera* A. Braun, *Populus balsamoides* Goerpp, *Juglans acuminata* A. Braun, *Corylus turgaica* Pojark., *Alnus nostratum* Ung., *Alnus Feroniae* Czeczott, *Quercus* cf. *Gmelinii* A. Braun, *Liquidambar europaeum* A. Braun, *Prunus Scottii* Heer, *Cercis turgaica* Uzna d s z e (nom. nsc.), *Leguminosites* sp., *Zizyphus tiliacifolius* Heer, *Rhamnus Gaudinii* Heer, *Rhamnus Graefii* Heer, *Cornus orbifera* Heer, *Corylus insignis* Heer, *Nelumbium* sp., *Taxodium distichum miocenium* Heer, *Phragmites* sp., *Myrica oeningensis* Heer, *Juglans acuminata* A. Braun, *Carya bilinica* (Ung.) Kryshit, *Carpinus grandis* Ung., *Fagus Deucalionis* Ung., *Fagus Antipoffii* Heer, *Fagus* sp. и др.

Спорово-пыльцевые спектры, приведенные А. А. Чигурьевой (1951) из местонахождения Кутан-Булак (слон, покрывающие и подстилающие рудоносные пески) характеризуются преобладанием пыльцы хвойных, в основном — рода *Pinus*, при незначительном участии широколиственных пород. Там же А. А. Чигурьева упоминает о незначительной примеси пыльцы трав и *Ephedra*.

Автор настоящего сообщения исследовал серию образцов из кутанбулакской свиты: общ. 8, 1953 г., чик Кара-Сандык, алевроитовые глины, алевроиты и ожелезненные алевроиты; общ. 5, 1953 г., чик Сара-Булак, алевроитовые пески, песчаные глины, глинистый песок и железистый конгломерат с отпечатками флоры. Пыльцевая флора, выделенная в основном из ожелезненных алевроитов и алевроитовой глины кутанбулакской свиты в обнажении на Кара-Сандыке, чрезвычайно богата и насчитывает до 80 видов различных голоосемянных растений.

Действительно, как это отмечает А. А. Чигурьева, в спектрах преобладают голоосемянные, представленные в основном сем. Pinaceae, среди которых встречены шесть видов *Cedrus*, 12 видов *Pinus*, *Tsuga*, *Taxodium*, *Sciadopitys*, Cupressaceae, 3 вида *Podocarpus*, *Cycadaceae*, *Abies*, 2 вида *Picea* и единично *Ephedra*.

Покрытоосемянные принадлежат к сем. Betulaceae (*Alnus*, *Betula*, *Carpinus*), Juglandaceae, родам *Ulmus*, *Acer*, *Tilia*. Пыльца субтропических видов содержится в весьма небольшом проценте. Почти во всех спектрах встречаются представители водных растений *Nelumbo*, *Myriophyllum*, *Potamogeton*.



В общем спектры кутанбулакской свиты резко отличаются от спектров чеганской свиты, что становится особенно заметным при сопоставлении спектров из разреза Кара-Сандык, где они анализировались и из чеганских и из континентальных отложений.

Флора, представленная в этих спектрах, принадлежит к умеренному комплексу тургайской провинции А. Н. Криштофовича. При этом состав растительности, который в той или иной мере находит отражение в спектрах из континентальных отложений, свидетельствует о широком распространении смешанно-широколиственных лесов.

Списки кутанбулакской флоры, составленные по отпечаткам листьев, значительно пополняются видами различных голососемных растений, присутствие которых среди макроскопических остатков отмечено лишь находками *Taxodium mucronatum* Неег и древесины неизвестного хвойного.

На кутанбулакской свите с разрывом залегают тонкослоистые отложения чиликтинской свиты. Обычно это плитчатые бескарбонатные лилово-красные или коричнево-серые глины с тонкими прослойками слюдистого алевролита. Отмечена гипсоносность. В некоторых разрезах прослеживаются прослой углистых глин или глинистого бурого угля. В основании свиты часты линзы галек и грубообломочного материала.

В отложениях чиликтинской свиты отмечены находки устриц, остатков рыб, раковин остракод, зубов *Odontaspis* ex. gr. *cuspidata* А. Г., кости *Paraceratherinae* gen. ident. и *Schizotherium* cf. *turgaicum* В о г и с.

Растительные остатки из оливково-зеленых глин, обработанные А. И. Поляковой (1935) у ст. Чокор-Су и на восток от нее, содержат *Populus mutabilis* Неег, *Alnus nostratum* У н г., *Carpinus grandis* У н г., *Corylus turgica* Р о ж а р к., *Fagus Antipofii* Неег, *Ficus populina* Неег (?), *Liquidambar europaeum* А. В г а у н., *Juglans acuminata* А. В г а у н., *Corylus Macquarrii* (F o r b e s) Неег, *Quercus Alexeeri* Р о ж а р к., *Fagus Deucalionis* У н г. В оolitовых железняках чиликтинской свиты на горе Кара-Сандык И. В. Палибиним (1904, 1906), были определены: *Sequoia Langsdorffii* Неег, *Populus mutabilis* Неег, *Carpinus grandis* У н г., *Corylus insignis* Неег, *Fagus Antipofii* Неег, *Juglans acuminata* А. В г а у н., *Dryandra Ungerii* Е т т., *Zizyphus tiliacifolia* Неег и *Liquidambar europaeum* А. В г а у н.

Как видно из приведенных списков, флора чиликтинской свиты по составу обнаруженных растительных остатков подобна флоре кутанбулакских слоев. И в той и в другой свите представлена широколиственная листопадная мезофильная флора с ничтожной примесью хвойных, в данном случае одним видом *Sequoia Langsdorffii* Неег.

По предположениям А. Л. Янина, во время формирования чиликтинских слоев на большей части Северного Приаралья образовалась озерно-аллювиальная равнина с проточными озерами и болотами, которые имели непостоянный режим; кратковременные периоды их спокойного заполнения прерывались периодами размыва.

Пестроту литологического состава и частую фацциальную изменчивость отложений чиликтинской свиты отмечают также В. А. Вахрамеев и Л. Н. Формозова. Автору, к сожалению, не удалось вполне изучить отложения тургайской серии в целом и чиликтинской свиты в частности. Однако (при консультации Л. Н. Формозовой и А. Л. Янина) все же удалось собрать большое количество образцов из обнажений чинка Сары-Булак (обн. 1, 1953 г.), из белых алевролитов и песков с мелкими окислами железа и с прослойками темной углистой глины и из песчаных бурых глин с гипсами и зубами акул, а также из песчаных слоистых глин чинка Сары-

<sup>1</sup> *Fagus orientalis* Lipsqy forma fossilis P a l i b i n, по П. А. Мещадявляев.

Булак (обн. 5, 1953 г.), у покинутой триангуляционной вышки, и на горе Кара-Сандык (обн. 7, 1953 г.), из слоистых глин с прослойками тонкозернистого песка и из глины с прослойками сидерита и железистого конгломерата, венчающего свиту.

Спорово-пыльцевые спектры, полученные из этих проб, поражают насущностью пылевой и обилием видов покрытосеменных и голососемных. Среди серии спектров обычно преобладают голососемные.

Флористические спектры чиликтинской свиты чрезвычайно близки к спектрам из кутанбулакской свиты, так же как близки и по составу растительности, за исключением того, что в спектрах из чиликтинской свиты ярче выражена примесь субтропических видов и родов: *Laurus*, *Palmae* (*Trachycarpus*?), *Myrtaceae* (3 sp.), *Proteaceae*, *Rhus*, *Moraceae* (2 sp.), а также отмечен несколько больший процент пыльца травянистых растений с *Artemisia*, *Chenopodiaceae*, *Gramineae*, *Leguminosae* и *Ephedra*. По-видимому, на равнинных пространствах Северного Приаралья чиликтинского времени, которые А. Л. Янин (1953) сравнивает с современным ландшафтом Камыш-Самарского междуречья Урала и Волги, все же развился сухой степной или мелкорослый саванный ассоциация. Возможно, что травянистые и кустарничковые ценозы располагались по каменным склонам остаточных возвышенностей, сложенных палеозойскими породами. Во всяком случае, ассоциации открытых местообитаний здесь, безусловно, существовали. Следует отметить, что В. С. Корнилова и В. В. Лавров (1949), В. В. Лавров (1951) и Р. Я. Абузарова (1954) опубликовали данные о находках керофитной флоры в слоях с индикаторной фауной в Тургайской долине (р. Жаман-Каннды, в 75 км от пос. Амангельды и в округе у оз. Шин-Туз). Здесь ими были обнаружены: *Myrica turgica* К о р н и л о в а, *Rhus turcomanica* K r i s t l., *Aralia* sp., *Sassafras turgicum* К о р н и л о в а, *Cinnamomum Scheucheri* Неег, *Laurus prinigonia* и пр.

Таким образом, субтропические реликты полтавской керофитной флоры являлись себе убежища на территории Северного Приаралья и Тургай в эпоху наиболее интенсивного распространения широколиственной умеренной флоры. В то же время обилие пыльца хвойных указывает, что участие их в растительном покрове было значительным.

Особенно широко был распространен род *Alnus*, различные виды которого, по-видимому, соизготавливали растительности берегов озер. Обилие озерных или заболоченных волосов подтверждается значительным участием пыльца *Myriophyllum*, *Potamogeton* и *Spartanium*.

Комплексы пыльца голососемных представителем родами: *Pinus*, *Taxodium*, сем. *Cupressaceae*, несколькими видами родов *Cedrus*, *Tsuga*, *Podocarpus*, *Picea* и сем. *Cusacaceae*.

Кутанбулакскую и чиликтинскую свиты большинство исследователей относят к среднему олигоцену.

В конце периода формирования чиликтинской свиты произошла значительная трансгрессия солонатоводного бассейна, с которым в чиликтинский век сообщались пресноводные водоемы Приаралья. В результате этого сравнительно недолгого продвижения солонатоводного бассейна на север отложилась серия слоев третьей (В. А. Вахрамеев) или жаксыкычской (Л. Н. Формозова) свиты, представленной песками с прослойками железистого песчаника, иногда с линзочками кварцевого гравия и прослойками голубоватой глины. В отложениях этой свиты обнаружены остатки зубов акул и челюсти костистых рыб (щуги и окуни).

Ископаемая фауна доказывает связь, возможно кратковременную, внутреннего бассейна с открытым океаном. С этим временем А. Л. Янин связывает некоторое опускание северо-восточной части Приаралья.

По мнению Л. Н. Формозовой (1949), отложения жаксыкычской свиты являются непосредственным продолжением серии слоев чиликтинской свиты и представляют собой солоноватоводную фацию последней. К сожалению, отложения жаксыкычской свиты не охарактеризованы флорой.

Самой верхней свитой тургайской серии в Северном Приарале является четвертая, или чаграйская свита, отложившаяся в период интенсивного поднятия Мугоджар. Об этом свидетельствует обильный обломочный материал, отложенный вблизи их склонов.

Чаграйская свита представлена обычно песками, пачками переслаивающихся охристых песков, глин, а также охристых песчаников.

Фауна этих отложений, бедная, пресноводная, представлена пещерами из рода *Unio* и ядрами гастропод (*Viviparus?*). Флора также бедна. Известны остатки из железистых песчаников близ Мугоджар с *Fagus Antipoffii* Неег<sup>1</sup>, *Carpinus grandis* U n g., *Quercus Smelinii* А. Вгаиn, *Corylus insignis* Неег<sup>1</sup> (определены И. В. Палибиным, 1904) и *Liquidambar europaeum* А. Вгаиn, *Phragmites oningensis* А. Вгаиn, *Juglans acuminata* А. Вгаиn (определены И. В. Палибиным и А. Н. Криштофовичем).

В образцах, собранных нами в 1953 г. из обнажения № 6 (залит Перовского, близ рыбачьего пос. Агыспе), представленного пачкой нераспавшихся ожелезненных песков, белых, розоватых и красных, с прослоями сменстированных ожелезненных песков и серых глинистых участков, найдены единичные пыльцевые зерна *Pinus* секции *Strobus*, *Abies*, *Betula*, *Alnus*, *Carpinus*, *Myrica*, *Chenopodiaceae* (3 sp.) и *Artemisia*. Несмотря на то, что находки пыльцы рассеяны и малочисленны и не дают возможности получить полное представление о составе растительности чаграйского времени, все же можно полагать, что флора того времени была относительно умеренной, с участием широколиственных древесных пород, и что на открытых песчаных склонах развивались ассоциации полуустойчиво типа. Не следует думать, что эти типы ассоциаций были территориально близкими. Пыльца широколиственных пород могла быть принесена издалека речными водами к песчаным берегам чаграйского водоема.

Возраст чаграйской свиты А. Л. Яшин условно определяет как верхне-олигоценный — на основании наличия крупного размыва на границе чаграйской и жаксыкычской свит. Однако окончательное решение вопроса о возрасте этой свиты, как совершенно резюмирует А. Л. Яшин, следует отложить до того времени, когда удастся проследить протистинские отложения чаграйской свиты на запад и переход отложений тургайской серии слоев в осадки майконской толщи, содержащей морскую фауну.

Стратиграфически выше отложений тургайской серии (средний и верхний олигоцен) залегают слои солоноватоводных отложений, содержащих многочисленные остатки *Corbula helmerseni*. Итологически эта свита представлена чрезвычайно пестро. В основном это карбонатные породы, а также глины, зеленовато-серые, пестрые, пески — белые и серые, алевроиты, песчанники, известняки, мергелистые глины. Глины часто содержат кристаллы гипса.

Эту свиту А. Л. Яшин рассматривает как отложения солоноватоводного бассейна, распространявшегося в северном направлении до ст. Челкар, Тутуз, Аральск, и дельтовых выносов рек, впадавших в этот бассейн. Близ пос. Агыспе находятся крупные захоронения костей млекопитающих, содержащих остатки (Боляева, 1948) землеройки, грызунов (5 видов), хомякообразных, тушканчиков, бобров (2 вида), кошачьих (3 вида).

<sup>1</sup> *Corylus turgatica* P o j a k k., по П. А. Мечдлинвилли.

*Aceratherium aralense* B o r i s., *Aralotherium prochorovii* B o r i s., парнокопытных (кабарги), утки (*Anas oligocaena* T u g.), черепах *Testudo aralensis* K h o z. и *Chelonia aralis* K h o z. (первая — сухопутная, вторая — морская). Л. И. Хозацкий (1945) в этих же отложениях найдены остатки дельфинов и китообразных.

Флора, найденная в светлосерых песчанниках дельтовых выносов на горе Иаксы-Кулак, по определению В. А. Вахрамеева, представлена: *Taxodium distichum miocenum* H e e g., *Juglans cf. acuminata* А. Вгаиn, *Quercus Nimrodii* U n g. и *Fagus Antipoffii* H e e g.

А. А. Чигуряевой (1951) в глинах из средней части разреза на Кызыл-Булаке найдено значительное количество пыльцы различных семейств, родов и видов: *Pinus*, *Abies*, *Picea*, *Sciadopitilus*, *Gramineae*, *Onagraceae*, *Potamogeton*, *Stratiotes*, *Corylus*, *Juglans*, *Alnus*, *Zelkova*, *Carpinus*, *Tilia*, *Carya*, *Ulmus*, *Acer*, *Castanea*, *Liquidambar*, тип *Fagus*, тип *Ginkgo*, тип *Betula*, *Ulex*. Эту флору А. А. Чигуряева относит к типичному тургайскому комплексу.

Если проанализировать состав фауны из отложений близ пос. Агыспе и сопоставить с флористическими данными, полученными в результате изучения макроскопических растительных остатков и пыльцы, то станет ясно, что в этом случае флористические данные лишь частично отвечают комплексу фауны. Приведенные списки родов и видов растений характеризуют лесные ассоциации — их существование подтверждается находками костей бобровых. В то же время остатки хомяков, тушканчиков и ницухи говорят о наличии во флоре степного элемента.

К сожалению, все пробы, отобранные автором для спорово-пыльцевого анализа в Агыспе, оказались испыльцованными, но аналогичные осадки в Павлодарском Прииртышье и в Тургае содержат спорово-пыльцевые спектры, в которых наряду с единичными находками представителей широколиственных пород встречается довольно разнообразный комплекс пыльцы травянистых растений. Находки пыльцы трав из сем. *Chenopodiaceae*, *Compositae* (*Artemisia*), *Leguminosae*, *Gramineae* свидетельствуют о том, что в аральское время имелись большие открытые местообитания с растительностью, близкой к современным сухостепям Приаралья, т. е. по-видимому, и селились типичные степные грызуны.

Возраст аральской свиты, содержащей фауну, аналогичную корбулевым слоям нижнего миоцена Северного Кавказа, нижнемиоценовую фауну млекопитающих и залегающей стратиграфически выше верхнеолигоценной чаграйской свиты (аквитанский ярус), А. Л. Яшин считает нижне-миоценовым.

Таким образом, при беглом обзоре палеогеновых и отчасти неогеновых отложений Северного Приаралья (в основном по данным А. Л. Яшина) мы приходим к выводу, что стратиграфическое положение трех свит морского палеогена увязывается с положением свит морского палеогена Павлодарского Прииртышья.

Данные спорово-пыльцевого анализа (в особенности это хорошо выражено в спектрах из обнажения на горе Термен-Бес) подтверждают, что спектры саксаульской свиты отличаются от спектров чеганской свиты составом покрытосеменных и голосеменных. При этом нижние горизонты чеганских отложений содержат примесь пыльцы эоценовых керофитов, а верхние горизонты саксаульских отложений — примесь умеренной флоры. Однако общий характер флор чеганской и саксаульской свит различен. Спектры саксаульских отложений принадлежат целиком к флоре субтропической или тропической, керофитной, чеганские же спектры — типичные олигоценные, субтропические с примесью умеренных элементов, подобные спектрам хадумских отложений нижнего майкона Северного Кавказа.

## ТУРГАЙСКАЯ НИЗМЕННОСТЬ

Относительно геологического строения и палеогеографии Тургайской низменности существует большое количество работ. В 1930 г. О. С. Яковлев, в 1931 г. Н. Г. Касин, в 1932 г. А. Д. Архангельский, в 1935 г. М. В. Баярунас, в 1949 г. А. П. Яшин, в 1951 г. В. В. Лавров и Н. К. Овечкин и многие другие авторы дали интересные сообщения об исследованиях континентальных и морских отложений Тургай. Район Тургай не входит в рамки моей работы, но, вследствие того, что геологическая история Тургай теснейшим образом связана и с Прииртышской впадиной и с Приаральем, нельзя не остановиться, хотя бы в двух словах, на наиболее определенных взглядах на схему стратиграфического строения этого района.

По данным В. В. Лаврова, морской режим в Тургае устанавливается в нижнем олигоцене. Границы нижнеолигоценного моря проходили по краю Казахского нагорья. Широко развитые отложения морского олигодена — чеганские глины, серые, зеленовато-серые, тонкослоистые и расщепляющиеся при выветривании, знакомые нам по Павлодарскому Прииртышью, распространены далеко к северо- и юго-западу от восточного борта Тургайского прогиба, к оз. Челкар-Танга, Северному Приаралью и Устьорту, а также к Павлодарскому Прииртышью и Западной Сибири.

По восточному борту Тургайской впадины (в разрезах по р. Агутасти) выходят мелководные фаши этой свиты. Возраст их В. В. Лавров и Е. П. Бойцова и Н. К. Овечкин определяют как верхний эоцен — нижний олигоцен.

Вторым элементом третичных отложений В. В. Лавров выделяет так называемые «сарыинские слои» (по местонахождению на чике Сарыин, по правому берегу р. Сюреин), представленные голубовато-зелеными плотными глинами мощностью от 6 до 40 м.

Слои эти залегают на чеганских глинах без размыва. Обычно эти глины загипсованы и засолены. Фауна сарыинских слоев — кости грызунов и крупных млекопитающих и цитки наземных черепов. Фауна (по определению В. С. Корниловой) — *Phragmites oeningensis*, *Poacites laeviculus*, *Populus balsamoides*, *Pterocarya castanecifolia*, *Juglans acuminata*, *Magnolia ingliefeldii*, *Paliurus* sp., *Lizyphus lilaeifolius*, *Rhus turcomanica*, *Liquidambar*.

Возраст сарыинских слоев В. В. Лавров считает среднеолигоценовым, genesis их — лагунные отложения мелководного чеганского моря, стратиграфическое положение — отложения, промежуточные между чеганскими морскими и вышележащими континентальными отложениями. В. В. Лавров допускает, что эти отложения могут формироваться одновременно с континентальными, в зависимости от их местоположения.

На размытой поверхности чеганских глин или на сарыинских слоях залегают толща континентальных отложений, которые В. В. Лавров делит на две серии слоев: нижние — индрикотеревые, верхние — тургайские.

Индрикотеревые слои, или свита, представлены зеленовато-желтобурыми или голубыми глинами с костями индрикотерия. Переходят эти глины в горизонт слоистых лиловато-серых глин с прослоями угля (болаттамские слои).

В нижних слоях индрикотеревой свиты по реке Сары Тургай были обнаружены остатки индрикотерия.

Флора индрикотеревой свиты представлена двумя типами: а) керофильная [Жаман-Каянды; определена В. С. Корниловой (Корнилова и Лавров, 1949)] *Myrica turgaica*, *Laurus hydrophylla*, *Rhus turcomanica*, *Ara-*

*lia* sp.; б) мезофильная (в углито-каолиновых слоях) с *Taxodium*, *Alnus*, *Nyssa*, *Liquidambar*, *Phragmites*.

С отложениями, вмещающими мезофильную флору, связаны прослои бурого угля и оолитовых бурых железняков. Возраст свиты — средний олигоцен.

Индрикотеревая свита всюду по восточному борту Тургайского прогиба перекрывается отложениями песчано-глинистой свиты с резким неравномерным размывом, который местами почти до основания уничтожает индрикотеревую свиту. В основании это однотипные светлые породы, тонкослоистые, песчаные, плохо сортированные, иногда с липками железистых песчаников. Выше залегают неслоистые зеленовато-серые или пестрые глины. Породы этой свиты, как отмечает В. В. Лавров, сильно выщелочены.

В алевролитах и песчаниках тургайской свиты найдена широколиственная флора, лишенная субтропических керофитов.

Песчано-глинистую свиту В. В. Лавров параллелизует с четвертой свитой континентальных отложений Приаралья и возраст ее относит к верхнему олигоцену.

Над песчано-глинистой свитой В. В. Лавров выделяет еще одну свиту континентальных отложений, так называемую соленосную, выраженную зелеными глинами с друзами гипса и марганцовыми бобовинами, содержащую фауну, близкую к аральской свите в Северном Приаралье (бобровые, *Aceratherium deperti* и др.). В. В. Лавров параллелизует свою соленосную свиту с аральской свитой в Северном Приаралье.

Выше соленосной свиты В. В. Лавров выделяет свиту турме, которая представлена незасоленными глинами; встречается она не повсеместно и содержит кости *Miohippus* sp., *Hypodippus* (*Anchitherium*?), *Yctitherium* cf. *hipparionum*, *Rhinocerotoides*, *Testudinidae*. В. С. Богданов, автор определений, относит эту свиту к среднему миоцену. В недавно вышедшей работе Р. И. Абузировой (1954), посвященной флоре континентальных отложений Тургай, обосновывается разделение индрикотеревой свиты на три самостоятельные подсвиты, которые снизу вверх следуют в таком порядке: приртышская, индрикотеревая и болаттамская.

Возраст приртышской свиты определяется как верхний нижнего — низ среднего олигодена, индрикотеревой свиты — средний олигоцен, болаттамских слоев — как верхний среднего олигодена.

В заключение необходимо отметить, что многочисленные детальные исследования морских и континентальных отложений Северного Приаралья, Павлодарского Прииртышья и Тургай пока не привели исследователей к общему мнению относительно синхронизации выделенных свит в каждом из этих районов. Между тем накопленный материал уже достаточен, чтобы это сделать. Пока же, на основании изложенного материала, на территории Северного Приаралья, Павлодарского Прииртышья и Тургай выделяются следующие отложения:

а) Морские в Прииртышье, прибрежноморские и морские в Тургае и морские в Приаралье отложения среднего и верхнего эоцена с тропической керофильной флорой (Полтавской провинции (в понимании А. П. Криштофовича), по имеющей своеобразный облик, приближающийся эту флору к флоре Туркменской провинции (в понимании Е. П. Корниловой).

б) Морские отложения нижнего олигодена (по мнению некоторых исследователей, верхнеэоценовые — нижнеолигоценовые), так называемая чеганская свита, с богатой пылевой флорой, но с бедной фауной в Прииртышье, с богатой фауной, но с более бедной флорой в Приаралье и с бедными и флорой и фауной в Тургае. Отложения эти литологически и палеонтологически прекрасно сопоставляются. Флора чегана

субтропическая, с примесью умеренной в верхних горизонтах, характеризующая климат более влажный, чем в эоцене.

в) Отложения мелководных фаций чеганского моря (ащайрыкская свита О. С. Вилова) — замкнутых опресненных бассейнов и континентальные отложения — первая и вторая свиты Северного Приаралья, Павлодарского Прииртышья, Тургай (припистоеривская и гидрикотериевая свиты) повсюду с богатой флорой, характеризующей сравнительно умеренный климат и температуры более низкие, чем в нижнем олигоцене. Листовидный комплекс широколиственных лесов, наиболее широко представленный в отложениях этих свит, сменяется комплексом с примесью большого числа субтропических ксерофитов. Кустарниковые и травянистые ксерофиты временами дают всыпки, как это наблюдается в спектрах второй свиты Приаралья и Прииртышья, или в болотамских слоях гидрикотериевой свиты в Тургае, или во второй свите Прииртышья. Флоры первой и второй свит богаты хвойными и серожкоцветными растениями. Возраст свит всеми исследователями признан среднеолигоценовым.

г) Отложения, переходные от средне- к верхнеолигоценовым или относящиеся к верхним горизонтам среднего олигоцена, — жаксыкыльская свита Северного Приаралья и третья свита Прииртышья — плохо охарактеризованы и фауной и флорой. Если в дальнейшем не удастся палеонтологически изучить эти отложения, то только фациальный анализ может установить их твердое стратиграфическое положение.

Возможно, что отложения эти имеют «динамическую» границу, зависящую от времени начала интенсивной эрозионной деятельности речных потоков верхнеолигоценового времени.

д) Отложения песчано-гравийные или песчаные, сформировавшиеся в результате глубоких размывов, связанных с тектоническими поднятиями в Мугоджарах и по окраинам Казахского нагорья и в Тургае. Флора этих отложений умеренная, разнообразная по составу, отражающая различные типы растительности, в зависимости от типов местообитаний, вблизи которых отлагались осадки. В Павлодарском Прииртышье это четвертая свита К. В. Никифоровой, в Северном Приаралье — чагайская свита Л. Н. Формозовой, или четвертая свита В. А. Вахрамеева, в Тургае — тургайская свита В. В. Лаврова.

е) Отложения аральской свиты с *Corbula helmersoni* и с обильной фауной млекопитающих в Приаралье, глины, песков и супесей с нижнемиоценовой фауной млекопитающих в Тургае и Прииртышье; они слабо охарактеризованы флорой (за исключением Тургай), но богаты фауной.

ж) Отложения более высоких горизонтов миоцена и плиоцена и покрывающие их четвертинные.

На этом, по-видимому, можно закончить краткий, схематический очерк геологии и палеогеографии районов, в основном являющийся реферативным изложением работ исследователей Приаралья, Прииртышья и Тургай, материалы которых послужили основой для спорово-пыльцевых исследований.

## II. К ИСТОРИИ ФЛОРЫ И РАСТИТЕЛЬНОСТИ КАЗАХСТАНА В ТРЕТИЧНОЕ ВРЕМЯ

Развитие и распространение голосеменных на территории Казахстана является частью истории флоры и растительности этой страны, в открытое от которой изучение голосеменных невозможно.

Общую характеристику развития флоры Казахстана дает А. Н. Криштофич в своих работах 1941 и 1946 гг., но делает это очень скупо, так как во времени составления его монографии об эволюции растительного покрова было чрезвычайно мало материала по ископаемым остаткам Казахстана.

В большой литературе, посвященной истории флоры и растительности земного шара вообще и территории нашего Союза в частности, не встречается специальных разделов, касающихся изучения развития голосеменных на территории Центрального и Северного Казахстана в третичный период.

В основном во всех работах, специально или косвенным образом касающихся истории развития флоры этого района, заостряется вопрос о происхождении, миграции и становлении современных пустынных флор Средней Азии и Казахстана, развитию же флоры голосеменных внимания не уделяется.

По-видимому, это происходит вследствие двух основных причин. Во-первых, обычно история развития флоры определенной ботанической провинции или области изучается на основании анализа ареалов современных и реликтовых видов, входящих в состав растительности большей части или области. Как известно, современная растительность большей части равнинного и мелкосопочного Казахстана и Северного Приаралья, в особенности тех районов, которые исследовались автором, совершенно лишена участия каких-либо представителей голосеменных, за исключением спорадически разбросанных островных сосновых массивов (типа Борового) или подкустарничков рода *Ephedra*. Во-вторых, история флоры, ее миграционные пути и центры возникновения устанавливаются по ископаемым растительным остаткам. На территории же Северного Казахстана и южной части Приаралья почти полностью отсутствуют макроскопические остатки голосеменных в ископаемом состоянии. Все богатые флористические находки на территории Тургайской депрессии, Зайсана и Северного Приаралья в основном содержат богатую листовую флору широколиственных лесов, в период развития которых были широко распространены известные всем виды *Taxodium cf. distichum* (болотный кипарис), который и фигурирует обычно в списках ископаемых флор.

Во флорах умеренных и субтропических упоминаются иногда находки *Ginkgo* и *Sequoia* и, за редким исключением, *Glyptostrobus*.

Между тем спорово-пыльцевые спектры нижних и верхних горизонтов палеогена и отчасти неогена изобилуют пылью голосеменных самых разнообразных семейств, родов и видов.

Может возникнуть предположение, что пыльца в морские отложения занесена и не отражает растительности изучаемой территории. Но это предположение отпадает потому, что, кроме пыльцы сем. Pinaceae и Podocarpaceae, большинство видов которых имеют пыльцу с воздушными мешками, в спектрах присутствует пыльца сем. Cupressaceae, Taxodiaceae, Taxaceae, Ginkgoaceae, Araucariaceae, Cupressaceae, не имеющих воздушных мешков. Кроме того, особенно обильна пыльца голосеменных именно в спектрах из континентальных отложений Казахстана, т. е. в тех спектрах, которые значительно более специализированы, чем морские, и отражают не только флору, но и растительность. Предположение о возможности массового заноса отпадает также и потому, что пыльца голосеменных встречается в спектрах, одновременно изобилующих пылью покрытосеменных древесных растений, т. е. в спектрах, характеризующих лесной тип растительности.

Следовательно, обилие пыльцы голосеменных не есть результат дальнего заноса, подобного заносу пыльцы рода *Pinus* в открытых степях типа казахстанского мелкосопочника. Голосеменные в спектрах из Северного Казахстана и Северного Приаралья, а также из Тургай и Западной Сибири — явление закономерное, свидетельствующее о широком распространении голосеменных растений в палеогеновой, а отчасти и в неогеновой флоре этих районов. Вопрос этот, безусловно, представляет большой научный интерес и должен быть предметом специального изучения флористов и палеоботаников.

Для того чтобы ясно представить, какие участки суши мы имеем в виду, когда говорим об истории палеогеновой флоры и растительности Казахстана, восстановим в памяти палеогеографию палеогена на территории Азиатской и юга Европейской части СССР.

В палеогене, когда воды обширного моря Тетис отделили северные материк от южных в пределах от Индийского океана до Центральной Америки, территория современного Казахстана (Прикаспийская низменность, часть Западно-Сибирской низменности, Казахская складчатая страна), Тургайская депрессия и пустыня Бет-Шак-Дала (Голодная степь), кроме Казахского нагорья и части Мугоджар, была занята морем.

В течение среднего олигоцена площадь материка Киргизия расширилась за счет поднятия Памирской страны, Мугоджар и зоны, окаймляющей Казахское нагорье.

Таким образом, говоря о растительности Казахстана, мы должны иметь в виду сушу древней Киргизии, известную связь с восточными, азиатским и антарктическим, центрами распространения флор, и Мугоджары, связанные с Европейским материком и его флорой. Как полагают некоторые исследователи, казахстанский участок палеогенового моря изобилует архипелагами островов, по которым шло расселение растительности и которые отчасти служили источниками пыльцы и спор в морских отложениях.

Киргизия еще в древние времена была сушией, которая с мезозоя не заливалась морем, следовательно, растительность на этом материке развивалась издавна, и растительные семейства, роды и виды имеют здесь гораздо более глубокие связи, чем растительность тех участков суши, которые вскрылись лишь в конце палеогена. Таким образом, флора Киргизии была в своем роде самобытной и имела, по-видимому, связь с древней флорой Средиземноморья и с более древними, возможно гондванскими, флорами (Вульф, 1944).

На основании палеоботанических данных можно предполагать, что в эоцене в Казахстане, до района оз. Селеты, была распространена тропическая

пическая пачнозеленая флора, отнесенная А. Н. Криштофовичем к «полтавской», с родами: *Ficus*, *Quercus*, *Laurus*, *Cinnamomum*, *Oreodaphne* и сем. Proteaceae (*Banksia*, *Dryandra*), Myrtaceae, а из голосеменных — *Sequoia Coultisae* и *Sequoia Sternbergii* (*Sequoia Lankesterii* характерна уже для более умеренных флор). В этот же комплекс входят некоторые представители сем. Cupressaceae и род *Pinus*, а также большое разнообразие видов тропических папоротников из родов: *Chrysodium*, *Gleichenia*, *Adiantum*, *Woodwardia*, *Osmunda*, *Aneides*, *Lygodium*, *Marrattia*. Эта тропическая флора все больше и больше обогащается ксерофитами по направлению к восточным границам ее распространения, т. е. к Туркмении, где она уже насчитывает большое число видов *Dryandra*, *Celastrorhynchum* и *Rhus*.

К северу от оз. Селеты территории Азии имела совершенно иной флористический облик. Это эоценовая «тургайская» флора А. Н. Криштофовича. Прототипом этой лесной флоры в Азии была тагайская флора (верхнемиоценовая). Характерными элементами этой флоры А. Н. Криштофович считал лаван. Характерными элементами этой флоры (верхнемиоценовая) являются: *Ginkgo* (так как этот род отсутствует в полтавской флоре), *Sequoia Langsdorffii*, *Taxodium distichum*, *Glyptostrobus*, *Fagus*, *Carpinus*, *Alnus*, *Betula*, *Castanea*, *Populus*, *Liquidambar*, *Juglans*, *Pterocarya*, *Zelkova*. В олигоцене, в Закавказской котловине и на востоке до Иртыша, а на запад — до Аральского моря распространялась тургайская умеренная субтропическая флора, включающая некоторые элементы полтавской субтропической флоры и ее наиболее ксерофитных вариантов. В миоцене в Средней Азии уже развиты открытые ландшафты с растительностью типа ксерофитных низкорослых саванн.

Работы И. Борцова (1865), Е. В. Вульфа (1944), М. М. Ильина (1936, 1937, 1945 и др.), Е. П. Коровина (1935), И. М. Криштофовича (1925), В. П. Малеева (1940), П. П. Овчинникова (1940), М. Г. Попова (1927) и других дают огромный материал, позволяющий проследить историю формирования флор Средней Азии и отчасти Казахстана, причем большинство авторов, с М. М. Ильиным и Е. В. Вульфом во главе, приводят вполне убедительный материал, основанный на флористическом анализе ряда пустынных и полупустынных родов, о раннем возникновении пустынных и полупустынных формаций Туркмении из древних средиземноморских флор.

Историческая география растений Е. В. Вульфа (1944) и ряд работ М. М. Ильина значительно пополняют и, как сказала, подкрепляют и расширяют схему развития третичной флоры, парированную А. Н. Криштофовичем. По мнению этих исследователей, в областях, окружающих Среднее море Тетис, а следовательно, и в южных пределах Киргизского третичного материка, основной флорой была древняя средиземноморская флора, включающая и субтропические элементы лесной флоры и ксерофитные формации третичного периода.

В течение второй половины третичного периода древняя средиземноморская флора приняла с востока элементы умеренной тургайской флоры «гинкго». По всей вероятности, та же самая средиземноморская флора послужила основой при формировании саванного и пустынного ландшафта Казахстана. О раннем же развитии пустынной флоры говорит А. Н. Криштофович (1936), предполагая, что в пределах Азии еще в начале третичного периода были широко развиты пустынные ландшафты, которые узкой полосой разделяли области полтавской и тургайской флор. Данные спорово-пыльцевых анализов по Северному Приаралю и Павлодарскому Прииртышью также указывают на раннетретичное происхождение пустынных и саванных ландшафтов, что подтверждается находками пыльцы *Zygophyllaceae*, *Chenopodiaceae*, *Ephedra* и *Welwitschia* в эоценовых, олигоценных и миоценовых отложениях.

Для познания состава и путей формирования лесных формаций данные спорово-пыльцевого анализа также представляют не только богатый, но и новый материал, освещающий с совершенно новой точки зрения состав лесных формаций палеогена. Широколиственные, листопадные леса олигоцена в Казахстане, по данным пыльцевого анализа, были смешанными хвойно-широколиственными, а местообитания с высокими отметками над уровнем моря, по-видимому, населяли хвойные леса, которые имели широкое распространение в Казахстане, Приаралье и на Мугоджарах, во всяком случае, до миоцена. Под влиянием общей аридизации климата и усилившейся континентальности его после окончательного отступления олигоценного моря и миоценового солоноватоводного бассейна леса постепенно уступали место степным и полупустынным ассоциациям.

### III. ЗНАЧЕНИЕ ПЫЛЬЦЫ ГОЛОСЕМЕННЫХ ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПАЛЕОЛАНДШАФТА ПАЛЕОГЕНА И ОТЧАСТИ НЕОГЕНА

Работ, посвященных специальному изучению ископаемой пыльцы голосемных растений, в нашей отечественной литературе очень мало. Между тем морфологические особенности большинства родов пыльцы голосемных, в особенности относящихся к сем. Pinaceae, Podocarpaceae и отчасти Taxodiaceae, настолько характерны, что они, пожалуй, легче могут быть распознаваемы, чем какие-либо из представителей покрытосеменных. Кроме того, пыльца голосемных, как правило, наиболее часто встречается в ископаемом состоянии.

При изучении спорово-пыльцевых спектров палеогена и отчасти неогена обнаружено большое число пыльцевых зерен прекрасной сохранности, принадлежащих видам, которые в большинстве своем уже неоднократно отмечались в третичных отложениях различных районов СССР и за рубежом. К сожалению, в большинстве работ по спорово-пыльцевому анализу третичных отложений пыльца и споры определялись обычно только по роду или семейству. Лишь в отдельных случаях давались видовые названия, но при этом зачастую одно и то же видовое название придавалось разными авторами пыльце, принадлежавшей в действительности к различным систематическим единицам. Происходило это вследствие ограниченности наших знаний в области морфологии пыльцы современной растительности. Таким эти знания были к моменту составления описательной части настоящей работы, но все же они значительно больше, чем, скажем, 10—15 лет назад.

Достаточно напомнить, что за последние годы появились работы М. Х. Молосозин-Смолиной (1949, 1950, 1952), Л. А. Кузнецовой (1945), З. П. Губониной (1952), А. Н. Сладкова (1953, 1954), Е. Д. Заклинской (1953). Наконец, в 1954 г. вышла прекрасная работа В. В. Зауера и работа И. С. Штэпа. За рубежом в этот же период вышли работы Эрдмана (Erdtman, 1943, 1947, 1952), Селлинга (Selling, 1947) и ряд других, посвященных морфологии пыльцы ныне живущих растений. Однако в большинстве перечисленных работ содержится описание пыльцы покрытосеменных, а сравнительный материал для описания и определения ископаемой пыльцы голосемных растений все еще остается очень ограниченным. В 1952 г. вышла работа Н. А. Болховитиной, в которой она предлагает новую классификацию пыльцы хвойных растений, снабженных воздушными мешками, выделенных из мезозойских отложений Казахстана, Сибири и Русской платформы. Там же дана краткая характеристика морфологических рядов и типов пыльцевых зерен в генетической последовательности. Н. А. Болховитина пытается дать схему изменения строения и пыльцевых зерен хвойных от верхнего палеозоя до верхнего мела и

кайнозой, выделяя морфологические типы зерен, характерных для спектров отдельных эпох. К сожалению, автор не продолжил своих работ в сторону большей детализации в изучении эволюции структурных элементов пыльцы голосеменных.

В 1954 г. опубликована работа В. В. Зауер, посвященная значению ископаемых видов рода *Cedrus* для целей стратиграфического расчленения континентальных отложений. Автор приводит данные о строении пыльцы современных видов рода *Cedrus* и приходит к выводу, что морфологические особенности пыльцы тесно увязаны с морфологическими признаками растения в целом, а затем приводит описание различных ископаемых видов пыльцы рода *Cedrus* и прослеживает их широтное и вертикальное распространение в мезозойских отложениях. В. В. Зауер удалось установить, что кедр производит так же много пыльцы, как и прочие роды сем. Pinaceae, за исключением рода *Pinus*, и что пыльца рода *Cedrus* не различается далеко от производящего растения. Установлено также, что по морфологическим признакам пыльца кедр генетически близок к роду *Picea* и некоторым представителям рода *Pinus* из подрода *Haploxylois*.

Проследив местонахождение пыльцы и макроскопических остатков кедр, В. В. Зауер пришла к выводу, что этот род, появившийся впервые в перми, достиг своего развития к концу нижнего мела. Концом расцвета рода *Cedrus* следует считать верхнетретичное время.

Весьма интересна выявленная В. В. Зауер приуроченность ископаемых видов рода *Cedrus* к местообитаниям с высокими отметками, в районах с расчлененным рельефом, и совершенное отсутствие его на равнинных местах и в областях депрессий. В заключение автор приходит к выводу, что ископаемые виды кедров могут быть использованы для стратиграфии континентальных отложений. Работа В. В. Зауер является, по-кажущему, образцом как морфологических описаний видов ископаемой пыльцы, так и историко-флористического исследования при помощи спорово-пыльцевого анализа. Наши наблюдения относительно распространения голосеменных в Павлодарском Прииртышье и Северном Приаралье в кайнозое, естественно, не претендуют на столь глубокое исследование, тем более, что объектом является не один род, а большое число различных видов пыльцы голосеменных, принадлежащих к большому же числу семейств. Уже одно это исключает возможность в краткой работе дать глубокий анализ истории целого класса растений, хотя бы на ограниченной территории. Представленная работа является одной из первых попыток флористического подхода к истолкованию данных по спорово-пыльцевому анализу и этим самым — научного обоснования метода использования их для стратиграфической цели.

При этом автору хотелось бы показать, что пыльца голосеменных (в общем комплексе ископаемой пыльцы) позволяет проследить, пока только схематично, некоторые этапы в истории флоры и растительности больших территорий. Занимаясь изучением спорово-пыльцевых спектров морских или континентальных кайнозойских отложений (в основном палеогеновых) Павлодарского Прииртышья, Северного Приаралья и ряда районов юга Европейской части СССР, автор смог выделить большое количество видов пыльцы и спор, характеризующих разнообразие флоры, типы растительных ассоциаций, группы их и флористические комплексы.

Спорово-пыльцевые спектры палеогеновых отложений Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья содержат значительное количество пыльцы голосеменных растений, процентное содержание которой закономерно изменяется от горизонта к горизонту и различно в широтном направлении. Во многих спектрах, в частности в выделенных из континентальных отложений среднего олигоцена, пыльца голосеменных преобладает над пыльной покрытосемянных. Последнее отмечалось в ряде работ,

по спорово-пыльцевому анализу олигоцена (Северный Казахстан — Заключинская, 1953; Центральный и Западный Казахстан — Покровская, 1954; Приаралье — Чигурьева, 1948; Тургайская впадина — Войцова и Покровская, 1954; Абузярова, 1951, и др.).

Следует отметить, что при сопоставлении данных спорово-пыльцевого анализа с данными по ископаемой лиственной флоре голосеменных. В основном это относится к представителям сем. Pinaceae и рода *Pinus* в частности.

Еще в 1948 г. А. А. Чигурьева в своей работе по флоре Аму-Таса указывала, что на основании микроанализа список ископаемой флоры, определенной М. Ф. Нейбург (1928), пополняется такими родами, как *Pinus*, *Picea* и др.

Автор настоящей работы также может привести примеры, подтверждающие это положение. При сопоставлении данных по лиственным отпечаткам из эоценовых отложений западного склона Мугоджар (Баранов, 1953) с составом спорово-пыльцевых спектров из однообразных морских отложений Северного Приаралья (Заключинская, 1953) оказалось, что флористические комплексы, выявленные обоими методами исследования, весьма близки в отношении состава покрытосемянных растений, представленных в основном богатым комплексом жестколистных древесных ставленцев с дубами, каштанодубами, лаврами и др. Но данные спорово-пыльцевых анализов дополнили список растений большим количеством видов хвойных (*Pinus*, *Picea*, *Cedrus* и др.), входивших, по-видимому, в состав растительных ассоциаций тех участков суши в эоцене, которые были в значительной мере удалены от места непосредственного захоронения лиственных остатков.

Далее, как известно, тургайская флора на территории северной части Казахстана, по палеоботаническим данным, характеризуется преобладанием бука, граба, ольхи, ореха, липы, дуба и прочих широколиственных листопадных растений. В то же время данные спорово-пыльцевого анализа показывают, что флора Тургайской палеогеографической области, помимо широколиственных листопадных пород, была весьма богата различными видами хвойных, которые в некоторых случаях даже преобладали над лиственными породами.

Расхождение данных спорово-пыльцевых анализов с анализами ископаемых макроскопических остатков объясняется тем, что условия их захоронения совершенно различны. Находясь лиственных отпечатков и растительного детрита обычно приурочены непосредственно к местам захоронения, расположенным, в свою очередь, в непосредственной близости к месту обитания производящих растений. Пыльца же, разносясь по воздуху, оседает на некоторых растениях от производящих растений, причем радиус разноса некоторых видов голосеменных растений достигает нескольких десятков километров. Таким образом, в отложениях, сформированных в водоеме, где захоронялись макроскопические растительные остатки, мы можем обнаружить пыльцу не только тех растений, которые непосредственно окружали место захоронения, но также и тех, которые входили в состав ассоциаций достаточно удаленных территорий.

Способность к разносу по воздуху особенно сильно развита у пыльцы хвойных с воздушными мешками. К ним относятся различные виды рода *Pinus*, *Picea*, *Podocarpus*, *Abies* и др. Отсюда становится понятным тот факт, что в осадочных отложениях, которые содержат обильные остатки растений с крупной лиственной, прозрастивших на территории ближайших местообитаний, встречается пыльца тех растений, которые входят в состав ассоциаций более удаленных территорий.

Хвойные, принимавшие, по-видимому, значительное участие в составе наземной растительности той части суши, которая примыкала к

территории нынешнего Прииртышья и Северного Приаралья в палеогене, не везде сохранились в виде микроскопических остатков. Пыльца же этих растений встречается в больших количествах и представляет значительное число родов и видов.

В палеогене различные виды рода *Pinus*, вероятно, занимали, в отличие от болотного кипариса, дрепированные местообитания с высокими отметками. Накопление же основных флоросных горизонтов происходило в условиях пониженного рельефа и защищенных местообитаний, где преимущественно селились лиственные породы.

Листовые отпечатки характеризуют, так же как и карпологические остатки, растительность более узких регионов, чем спорово-пыльцевые спектры. Кажущееся же расхождение данных спорово-пыльцевых анализов и микроскопических остатков является, собственно говоря, не расхождением, а взаимодополнением. Поэтому объединенное и комплексное исследование всеми методами палеоботаники дает наиболее полный материал для восстановления истории флоры и растительности, а следовательно, и для целей стратиграфии.

Ископаемые пыльца и споры, в дополнение к разбросанным находкам микроскопических остатков, дают массовый статистический материал, пригодный для восстановления последовательной смены флористических комплексов и типов растительности.

Следует отметить, что о микроскопических остатках голосеменных палеогена в Казахстане имеется сравнительно немного сведений; в сводке А. Н. Криштофовича (1941) значится всего двенадцать видов, найденных на территории Казахстана. Среди них отмечены роды *Abies*, *Araucaria*, *Cupressinoxylon*, *Ginkgo*, *Glyptostrobus*, *Pinus*, *Sequoia* и *Taxodium*. За последнее время список находок голосеменных, за исключением видов рода *Cedrus*, по данным В. В. Зауера (1954), пополнился незначительно. В известных до сих пор работах (Чигурьева, 1951, 2; Покровская, 1954; Лавров, 1951, 1953; Абузярова, 1954; Зауер, 1954; Покровская и Бойцова, 1954 и др.), в которых приводятся списки спорово-пыльцевых комплексов различных горизонтов третичных отложений (от эоцена до миоцена включительно), содержится не более пяти наименованных родов голосеменных.

Автору настоящего сообщения удалось установить для палеогена изучаемых районов более ста видов пыльцы голосеменных, относящихся к сем. *Ginkgoaceae*, *Cycadaceae*, *Araucariaceae*, *Taxodiaceae*, *Cupressaceae*, *Podocarpaceae*, *Pinaceae*, а также пыльцу родов *Ephedra*, *Wehliaceia* и *Gnetum*.

Представители отдельных семейств и родов обширного класса голосеменных развивались по-разному в различные отрезки кайнозоя на территории, примыкающей к палеогеновому морю Приаралья и Казахстана, а затем на участках суши, освободившейся от морских вод.

Об истории развития и «регрессии» голосеменных растений во флоре нынешнего Приаралья и Северного Казахстана будет сказано ниже, здесь же только отметим, что в настоящее время голосеменные в Казахстане представлены лишь тремя семействами: *Pinaceae*, *Cupressaceae* и *Ephedraceae*, из которых, как отмечает в своей сводке Н. В. Павлов (1947), в Казахстане известны следующие виды:

#### Семейство *Pinaceae*

*Pinus silvestris* L.— сосна обыкновенная, обитающая в основном на равнинно-песчаных участках — в виде боров, или singly — на скалах мелкосопочников.

*Pinus sibirica* (R и r g.) M a u g.— кедр сибирский, ограниченно распространенный только в Восточном Казахстане, у верхней границы леса на Алтае.

*Picea Schrenkiana* F i s c h. et M e y.— ель тяньшаньская, в основном заселяющая горные районы Джунгарского и Заилийского Ала-Тау и другие горы.

*Larix sibirica* L e d b.— лиственница сибирская, которая обильна только в горах Восточного Казахстана (Алтай, Саур, Тарбагатай).

*Abies sibirica* L e d b.— пихта сибирская, растущая только в лесном поясе гор Восточного Казахстана и Алма-Атинской области (Алтай, Джунгарский Ала-Тау).

*Abies Semenovii* B. F e d t s c h.— пихта Семенова, которая известна только в горах Южно-Казахстанской области и спорадически встречается среди елового леса.

#### Семейство *Cupressaceae*

Известен только один род — *Juniperus*, представленный восемью видами:

*Juniperus communis* L.— можжевельник обыкновенный, горнолесной или горный вид в Западном Казахстане.

*Juniperus pseudosabina* F i s c h. et M e y.— можжевельник алтайский, распространенный только по верхней границе лесного пояса Алтай, Тарбагатай, Джунгарского Ала-Тау.

*Juniperus sabina* L.— можжевельник казацкий, горностенной вид, наиболее широко распространенный в Казахстане на мелкосопочнике, а также в кустарниково-стенном поясе гор.

*Juniperus semiglobosa* R g l.— можжевельник полшаровидный, горнолесной вид, обитающий только в горах южной области.

*Juniperus seravschanica* K o m.— можжевельник зеравшанский, нагорный вид, обитавший только в Южном Казахстане.

*Juniperus sibirica* B u r g e t.— можжевельник приземистый, горнолесной, широко распространенный вид в лесостепи и субальпийском поясе гор Восточного Казахстана.

*Juniperus talassica* L y p s k y.— можжевельник таласский, который растет только в высокогорных районах Южного Казахстана.

*Juniperus turkestanica* K o m.— можжевельник туркестанский, высокогорный субтропический вид, обитающий только по верхней границе лесного пояса гор ряда областей.

#### Семейство *Ephedraceae*

Представлено четырьмя видами степных и горностепных местообитаний:

*Ephedra distachya* L.— эфедра обыкновенная, степная, распространенная в Северном Казахстане, не идущая к югу за пределы ковыльных и ковыльно-степных степей.

*Ephedra equisetina* V g e.— эфедра хвощевая, горностенной вид, обитающий только в горах на южных каменистых склонах кустарникового и лесного пояса.

*Ephedra intermedia* S c h g e n k. et C. A. M e y.— пустынно-степной и пустынный вид Центрального и Южного Казахстана. Растет в полярных и каменистых пустынях везде, кроме полярно-злаковых степей.

*Ephedra lomatolepis* S c h g e n k.— эфедра окаймленная, пустынная, растущая в основном в песчаных пустынях Южного Казахстана и Карагандинской области (встречается и в Алма-Атинской области).

Как следует из приведенных данных, в настоящее время на территории Северного Казахстана и в особенности Северного Приаралья голосеменные представлены очень слабо. Участие их в растительном покрове ограничивается лишь представителями родов *Ephedra*, *Pinus*, *Juniperus*. При этом род *Pinus* на изучаемой территории имеет только одного



представителя, а именно — *Pinus silvestris*. Остальные виды рода *Pinus* представлены лишь горными видами, приуроченными в основном к южным и восточным районам Казахстана.

Широко распространенные в палеогене и отчасти в неогене представители сем. Podocarpaceae, Araucariaceae, Taxodiaceae, Cupressaceae, Ginkgoaceae, не говоря уже о Gnetales и Welwitschiaceae, в современной флоре Казахстана отсутствуют. Исчезли они не одновременно, так же как не в одно время появились и достигли кульминационного пункта своего развития.

По данным спорно-пыльцевого анализа выясняется продолжительная и разнообразная история голосеменных, безусловно связанная с общей историей флоры и растительности, которая в свою очередь развивалась в связи с изменениями общей физико-географической обстановки. Так например, появление пыльцы *Tsuga* приурочено к спектрам континентальных отложений, в комплексе с возросшим распространением смешанных лесов, где значительное участие принимают роды *Pinus* и *Picea*.

Ограниченный цикл развития *Taxodium*, безусловно, связан с общим понижением температур и увеличением влажности в нижнем и среднем олиоцене, когда в пределах суши на месте Казахского нагорья, а возможно, и в некоторых районах Западной Сибири начали появляться элементы широколиственной мезофильной флоры. В дальнейшем максимальный расцвет *Taxodium* приурочен ко времени особенно интенсивного распространения умеренной лесной флоры, пришедшей с востока и севера (максимум пыльцы *Taxodium* в спектрах из континентальных отложений второй ситы Северного Прииртышья вместе со значительным преобладанием пыльцы широколиственных пород).

Неоднократное увеличение процентного содержания пыльцы рода *Cedrus* связано с тектоническими поднятиями, и полное исчезновение его совпадает с эпохой выравнивания страны и с общей аридизацией климата, когда на кристаллических останках уселению развивались сосны из секции *Eurpitys* (по-видимому, *Pinus aff. silvestris*).

Мы полагаем, что при внимательном изучении отдельных представителей пыльцы родов и видов голосеменных можно выделить определенные группы их, а возможно, и отдельные виды, которые могут быть использованы для корреляции как морских, так и континентальных отложений палеогена и неогена Северного Прииртышья и примыкающего к нему с востока участка Западно-Сибирской низменности, а также Северного Приаралья и смыкающегося с ним Тургайского прогиба.

Интересно, что при анализе пыльцы голосеменных и при сравнении ареалов их современного распространения в пределах Казахстана выясняется, что флора в палеогене была действительно смешанной, как это отмечал и А. Н. Криштофович (1946). Разнообразный комплекс ее свидетельствует также о том, что палеогеновая казахстанская флора состояла из австрийских, африканских, монголо-китайских, североамериканских и южноамериканских представителей, не считая флоры Сибири и Гренландии. Это может быть подтверждено анализом ареалов современного распространения ряда семейств и родов.

Относительно смещения экологически различных типов флоры палеогена, которое также отмечает А. Н. Криштофович, данные пыльцевого анализа дают дополнительный материал. По-видимому, в основном это происходит вследствие того, что Казахстан, включая и территорию, скрытую в начале палеогена под морской трансгрессией, находился как бы на рубеже границ распространения двух основных флор — полтавской и тургайской (в понимании А. Н. Криштофовича). Именно в течение палеогена эти флоры изменяли свой первоначальный облик. Вся территория Казахстана претерпевала существенные перестройки — регрессивные и

трансгрессивные движения моря, тектонические поднятия, смену веков интенсивной эрозии веками относительного покоя. Все это делало территорию Казахстана ареной борьбы за существование в растительном мире, относительно частых изменений ландшафта и смены экологических типов растительности. Естественно, что в это время были также промежуточные периоды, когда на одной территории одновременно уживались растительные формы, экологически различные. Поэтому нам не представляются невозможными одновременные находки в морских отложениях пыльцы относительно влаголюбивого кедрового дерева с пыльцой типичного ксерофита *Nitrraria Schaberi* и с пыльцой миртовых.

Кедровые, заканчивающие свое развитие в неогене, в верхнепалеогеновой флоре (суши) играли подчиненную роль, отсутствовали в горные районы, где несли убежища в местах, защищенных от аридных влияний.

Флора *Nitrraria* заселила открытые местообитания с песчаными, местами засоленными грунтами, располагавшимися в прибрежно-литоральных зонах теплого палеогенового моря. Миртовые, самые разнообразные, входили в состав ассоциаций юго-восточных флор с *Podocarpus*, *Dacrydium* и *Dammara*, доживающих свой век на территории Казахстана.

В то же время в пределах северных границ Полтавской ботанико-географической провинции (области) начали появляться первые представители умеренных мезофильных флор с северо-востока Сибири с *Betula*, *Yuglans* и *Carpinus*, которые иногда в виде единичных пыльцевых зерен встречаются в спорно-пыльцевых спектрах вместе с единичными же зернами пыльцы *Pinus protovembra* (pollen) из секции *Cembrae* (возможно, прародитель *Pinus sibirica*).—

#### IV. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЫЛЬЦЫ ГОЛОСЕМЕННЫХ В КАЙНОЗОИКСИХ ОТЛОЖЕНИЯХ НАВОДОРСКОГО ПРИПЯТШЫИ И СЕВЕРНОГО ПРИПЯТШЫИ

Предельное содержание пыльцы голоосеменных (включая сем. *Eurycarpus* и рода *Wolffia* и *Saxifraga*, поскольку более точно их систематическое положение еще не определено), начиная от южной до верхней палеогена до Северному Припятью и от палеогена-эоцена до неогена включительно — для Наводорского Припятья, и сравним его с распространением в современных отложениях (табл. 1).

##### СЕВЕРНОЕ ПРИПЯТШЕ

В свитсах тасаранской (Фиг. 5) свитсы содержание пыльцы голоосеменных доходит в нижних горизонтах до 85%, а затем резко снижается до 30—50% и в этих пределах доходит до своего нуля. Несомненно более пыльной голоосеменной свитсы савкульской свитсы, содержание в ее средней части свитсы 30%, и верхних же и нижних частях повышается до 50%.

В свитсах чечанской свитсы содержание пыльцы голоосеменных более равномерно, оно колеблется от 40 до 50%, за исключением верхних горизонтов (верхних, исследованных автором), где голоосеменных всего 8—10%.

Наиболее богатыми в отношении содержания пыльцы голоосеменных являются свитсы первой, кутабульской свитсы, здесь пыльца голоосеменных в некоторых горизонтах достигает 80%. Несомненно более пыльной свитсы, пыльной свитсы, содержание пыльцы голоосеменных в ней равномерно по всей толще и колеблется лишь в пределах 40—50%, за исключением отдельных горизонтов, где она достигает 80%.

В общем свитсы и лореховых и континентальных отложений богаты пыльной голоосеменной, и их содержание колеблется несущественно. По составу же представленных семейств, родов и видов голоосеменных свитсы различны свитсы значительно отличаются друг от друга.

Свитсы тасаранской свитсы характеризуются преобладанием пыльцы рода *Pinus*, содержание которой в отдельных горизонтах (средняя часть) доходит до 85% (от общего числа зерен пыльцы голоосеменных). Представитель рода *Pinus* в основном *Семблин С р а с а* (*Pinus protobambur* sp. nov. (pollen) и другие виды — до 40%), *Ванкья Ма у г* — до 20%; *Pseudotsuga Е n d l* — менее 20%; *Strobilus S c h a w* — менее 20%; *Abies L o n d* — менее 10%. Остальные роды сем. *Pinaceae* представлены малым количеством видов.

Род *Cedrus L i n k.* представлен четырьмя видами, из которых преобладают два (*C. longicauda* sp. nov. (pollen) и *C. lauricinctata Z a n e g*

СВИТШ	Компоненты	
	Савкульская	Чечанская
Р <sub>1</sub> Кутабульская	+	+
Р <sub>2</sub> Чечанская	+	+
Р <sub>3</sub> Савкульская	+	+
Р <sub>4</sub> Тасаранская	+	+

Фиг. 5. Схема распространения пыльцы голоосеменных в кайнозойских отложениях Северного Припятья  
Составила Е. Д. Зисманова

Таблица 1  
Распределение пыльцы голосеменных в морских и континентальных  
отложениях палеогена Северного Приаралья

Сбиты по А. Л. Яншину и Л. Н. Формозовой

Голосеменные	тасаран- ский	сансауль- ский	чеганский	нутанбу- ланский	чилин- тинский
Суммарно, % . . . . .	30—85*	30—50	0—50	58—80	40—80
Преобладает, % . . . . .	60—80	50	40	70	50
Cycadactes . . . . .	+**	+	—	+	—
Cycadaceae . . . . .	0—5	3—5	—	<5	+
<i>Zamites</i> sp. (pollen) . . . . .	—	—	+	—	—
<i>Ginkgoites</i> sp. . . . .	0—5	—	—	—	—
Ginkgoaceae					
<i>Ginkgo bilobaeformis</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	—	0—5	0—10	—	—
<i>Ginkgoites</i> sp. (pollen) . . . . .	—	—	+	+	+
<i>Taxites</i> sp. . . . .	+	+	+	+	+
Taxaceae					
<i>Taxus baccataeformis</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	—	—	—	5—10	5—10
<i>T. cuspidataeformis</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	+	+	+	—	—
<i>Torreya californiformis</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	0—10	0—10	0—10	—	—
Podocarpaceae					
<i>Podocarpites kazakhstanica</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	—	—	—	+	—
<i>P. gigantea</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	—	<5	0—1	<1	—
<i>Podocarpus sellowiformis</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	—	<1	—	<1	—
<i>P. andiniiformis</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	—	<1	<1	<1	<1
<i>P. nageiaformis</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	<12	—	<5	<1	<1
<i>Dacrydium elatumiformis</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	<10	0—10	—	+	—
Araucariaceae					
<i>Araucaria</i> sp. . . . .	—	—	5—10	—	—
<i>A. elegans</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	0—5	—	—	—	—
<i>Agathis</i> sp. . . . .	—	—	<1	—	—
<i>Agathis ovataeformis</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	—	<10	+	—	—
Pinaceae					
<i>Abies</i> sp. . . . .	+	—	—	—	—
<i>Abies sibiriciformis</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	—	—	+	+	+
<i>A. protefirma</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	+	+	+	—	—
<i>Keteleeria davidianaeformis</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	—	+	+	+	+

Таблица 1 (продолжение)

Голосеменные	Свиты по А. Л. Яншину и Л. Н. Формозовой				
	тасаранская	саксаульская	чеганская	кутаубуланская	чилинтинская
<b>Pinaceae</b>					
<i>Picea tataranica</i> sp. nov. (pollen)	+до 3	<1	—	—	—
<i>P. alata</i> sp. nov. (pollen)	—	+	+	+	—
<i>P.</i> секции <i>Eupicea</i> Willkm.	—	—	+	+	+
<i>Cedrus lazireticulata</i> Zauer (pollen)	+до 10	+до 10	—	—	—
<i>C. piniiformis</i> sp. nov. (pollen)	—	5—12	—	1—5	0—1
<i>C. longisaccata</i> sp. nov. (pollen)	8—10	0—1	0—1	0—1	—
<i>C. Janschinii</i> sp. nov. (pollen)	+до 5	2—20	0—25	—	—
<i>C. pusilla</i> Zauer (pollen)	+	0—10	0—12	1—3	—
<i>C. aff. libani</i> Loud.	—	—	0—1	+	—
<i>C. aff. deodara</i> Loud.	—	—	0	<10	—
<i>C. aff. atlantica</i> Manetti	—	—	0	+	—
Род <i>Pinus</i> (суммарно)	60—85 20—40	40—50 5—25	30—80 5—60	50—80 20—30	40—60 <25
<i>Pinus</i> секции <i>Cembrae</i> Shaw.	—	—	—	—	—
<i>P. aff. koraiensis</i> Sieb. et Zucc.	—	—	—	1—10	1—10
<i>P. sibiriciformis</i> sp. nov. (pollen)	+	—	—	—	—
<i>Pinus protocebra</i> sp. nov. (pollen)	5—15	5—15	5—12	8—13	5—15
<i>P.</i> секции <i>Strobus</i> Shaw.	0—20	10—30	<20	<20	<20
<i>P. strubiformis</i> sp. nov. (pollen)	—	+	+	+	+
<i>P. peuceformis</i> sp. nov. (pollen)	—	+	+	+	+
<i>P. exelsaformis</i> sp. nov. (pollen)	—	+	—	+	—
<i>P. ponderosaformis</i> sp. nov. (pollen)	+	—	—	—	—
<i>P. bicornis</i> sp. nov. (pollen)	+	+	—	—	—
<i>P. minutus</i> sp. nov. (pollen)	—	—	—	+	+
<i>P. taedaformis</i> sp. nov. (pollen)	—	<20	<10	+до 20	+до 20
Секция <i>Australes</i> Loud.					
<i>Pinus singularis</i> sp. nov. (pollen)	<10	<5	<10	>10	<10
<i>Pinus banksianaformis</i> sp. nov. (pollen)	10—20	0—1	0—1	0—1	0—1
<i>P. halepensisformis</i> sp. nov. (pollen)	+	—	—	—	—
<i>P.</i> секции <i>Eupitys</i> Spach.	0—5	0—5	0—5	1—32	5—35
<i>Tsuga crispata</i> sp. nov. (pollen)	—	—	—	0—5	0—5
<b>Taxodiaceae</b>					
<i>Sciadopitys tuberculata</i> sp. nov. (pollen)	—	—	+	+	+
<i>Sequoiites</i> sp.	+	+	+	+	+
<i>Sequoia sempervirensformis</i> sp. nov. (pollen)	—	<5	<5	<5	<5

Таблица 1 (окончание)

Голосеменные	Свиты по А. Л. Яншину и Л. Н. Формозовой				
	тасаранская	саксаульская	чеганская	кутаубуланская	чилинтинская
<b>Taxodiaceae</b>					
<i>Taxodites</i> sp.	+	+	+	+	+
<i>Taxodium aff. distichum</i> L. (Rich.)	—	—	5—12	5—15	5—12
<i>Cupressacites</i> (pollen)	+	+	+	+	+
<i>Cupressaceae</i>	0—5	+до 30	20—60	15—60	5—25
<i>Ephedraceae</i> (суммарно)	—	+до 5	+	+до 5	0—5
<b>Gnetaceae</b>					
<i>Gnetumites</i> sp. (pollen)	<5	<5	0—5	—	—

\* Процентное содержание голосеменных суммарно дано по отношению к общей сумме сосчитанных пыльцевых и спорных зерен. Цифры обозначают содержание отдельных видов, даны в процентах по отношению к сумме голосеменных.

\*\* Знак + обозначает присутствие в виде единичных находок; знак — обозначает отсутствие.

(pollen)], которые не имеют аналогов среди пыльцы современных видов рода *Cedrus*. Общая сумма их не превышает 10%. Род *Picea* Dietr. (также не более 10%) представлен новым видом *P. tataranica* sp. nov. (pollen), впервые выделенным из отложений тасаранской свиты. Иногда встречаются не определенные до вида единичные пыльцевые зерна *Keteleeria* и *Abies*. Пыльца рода *Tsuga* отсутствует. Редко, обычно не более чем 5—10%, встречается пыльца сем. *Cupressaceae*, *Taxaceae* [*Torreyaites* sp., *Taxus cuspidataformis* sp. nov. (pollen)], *Araucariaceae* [*Araucaria elegans* sp. nov. (pollen)], *Gnetaceae* *Gnetumites* sp. (pollen)] и *Podocarpaceae*. Содержание последнего в спектрах тасаранской свиты больше, чем во всех остальных свитах (до 12%). Сем. *Podocarpaceae* представлено несколькими видами рода *Podocarpus* L. Herit. [*P. nageiaformis* sp. nov. (pollen) и др.], пыльца которых отличается рядом признаков от пыльцы современных видов этого рода и одним видом рода *Dacrydium* [*D. elatumiformis* sp. nov. (pollen)]. В спектрах саксаульской свиты род *Pinus* суммарно представлен 40—50%. Одновременно значительно снижается содержание пыльцы *Pinus* секции *Cembrae* (5—25%), представленной в основном, так же как и в тасаранской свите *Pinus protocebra* sp. nov. (pollen) — 5—15%. В спектрах из самых верхних горизонтов свиты встречается пыльца, несколько напоминающая *P. koraiensis* и *P. cembra*, отмеченные при подсчете в секции *Cembrae*. Секция *Strobus* представлена значительно богаче, чем в тасаранской свите (до 35%). В нижних горизонтах свиты впервые появляется пыльца, подобная *Pinus exelsa* Wall., — *Pinus exelsaformis* sp. nov. (pollen), *P. peuceformis* sp. nov. (pollen) и *P. taedaformis* sp. nov. (pollen). Общее содержание пыльцы рода *Pinus* в саксаульской свите довольно постоянно и колеблется в пределах от 40 до 50%. Род *Cedrus* в саксаульской свите представлен пятью видами: *Cedrus Janschinii* sp. nov. (pollen) — 2—20%, *C. pusilla* Zauer (pollen) — 0—10%, *C. piniiformis* sp. nov. (pollen) — 5—12%. *C. lazireticulata*

Зауег (pollen) — около 10% и *C. longisaccata* sp. nov. (pollen) — единично. Значительно увеличивается количество пыльцы сем. Cupressaceae (около 30%) и впервые отмечена пыльца Taxodiaceae, принадлежащая, по-видимому, роду *Sequoia*. Среди пыльцы сем. Podocarpaceae также впервые появляются три новых вида: *Podocarpus andiniiformis* sp. nov. (pollen), *P. sellowiformis* sp. nov. (pollen) и *Podocarpites gigantea* sp. nov. (pollen). Общее содержание пыльцы сем. Podocarpaceae не превышает 12%. В верхних горизонтах свиты впервые появляется пыльца *Ginkgo* (менее 5%), возможно, *Ginkgo* aff. *biloba*. В общем спектры саксаульской свиты более бедны пыльцой голосеменных, чем спектры тасаранские, но богаче в видовом отношении и характеризуются относительно большим числом новых видов, которые не встречаются в спектрах предыдущих свит. Несмотря на это, спектры тасаранской и саксаульской свит флористически близки между собой. Представляют они флору тропическую (или субтропическую) и включают представителей таких семейств, которые ныне обитают в тропических и субтропических широтах южного полушария, а, судя по ареалам их современного распространения, имеют древнее происхождение, еще от гондванской флоры [сем. Araucariaceae и Podocarpaceae с родом *Dacrydium*, род *Torreya* (*Torreyites*), *Pinus protocembra* sp. nov. — вид, близкий к *P. haploxyloides*, отмечающийся и в спектрах нижнего мела и в более древних отложениях, род *Gnetum* и сем. Cupressaceae и др.].

В верхах саксаульской свиты обнаружена пыльца *Ephedra*. Появление пыльцы *Ephedra* совпадает с обилием пыльцы травянистых растений и кустарничковых ксерофитов в комплексе покрытосеменных, что косвенным образом указывает на усиление аридности климата и на наличие цустиных ассоциаций (возможно, на литоральных морях).

Спектры чеганской свиты значительно отличаются от спектров отложений тасаранской и саксаульской свит. Вызвано это значительным изменением климатических условий (некоторое похолодание и увеличение влажности) и наступлением новой наиболее интенсивной трансгрессии моря. В связи с этим изменился и растительный покров окружающей суши. Содержание пыльцы различных видов рода *Pinus* в чеганских спектрах неравномерно и колеблется от 30 до 80%. В нижних горизонтах свиты колебания резко выражены, в верхних — идет постепенное увеличение — от 40 до 80%.

Не останавливаясь на перечислении процентного содержания пыльцы различных видов хвойных и прочих голосеменных, встреченных ранее в спектрах саксаульской свиты и повторяющихся в спектрах тасарана, отметим, что в чеганских спектрах впервые появляется пыльца болотного (?) кипариса (*Taxodium distichum*) и устойчиво удерживается от средних горизонтов до верхов чеганской свиты. В верхних горизонтах появляется пыльца *Cedrus* aff. *libani* и *C. aff. atlantica*. Виды, встречающиеся в тасаранской свите, также встречаются и в чегане. Общее количество пыльцы *Cedrus* возрастает в верхних горизонтах свиты до 25%. Увеличивается содержание пыльцы рода *Picea* (до 12%), среди которой появляется пыльца, близкая к пыльце современной ели. Значительно увеличивается количество пыльцы сем. Ginkgoaceae (до 10%) и в то же время исчезают *Dacrydium* и *Podocarpus sellowiformis* sp. nov. (pollen). В общем в спектрах чеганской свиты заметно преобладание древних средиземноморских форм и примесь форм, идущих, по-видимому, из азиатских центров.

В период отложения чеганских глин на Киргизском материке, по-видимому, начали распространяться смешанные леса с участием в виде примеси умеренного листопадного комплекса с обилием хвойных деревьев, частью (как *Picea* и некоторые виды сосен) входивших в состав смешанных лесов, частью заселявших повышенные обитания на кристаллическом массиве Казахского нагорья. В пониженных обитаниях начали развиваться шп-

роколиственные и хвойно-широколиственные леса, в пределах которых среди болотистых водоемов начал селиться болотный кипарис (единичные находки).

Чеганские спектры Северного Приаралья отличаются большим количеством ксерофитов, что, по-видимому, обусловливается тем, что суша, прилегающая с востока к Северно-Приаральскому морю, в основном входила в пределы Туркменской ксерофитной провинции Полтавской обл., которую выделил для палеогеновой растительности Средней Азии (северные берега моря Тетис) Е. П. Коровин в 1935 г.

Континентальные отложения Северного Приаралья обычно содержат небольшое количество пыльцы и спор, за исключением отдельных горизонтов с растительными остатками, трухой и стволами растений, где удается выделить огромное количество пыльцы самого разнообразного состава, значительно отличающегося от состава спектров чеганской свиты.

Пыльца голосеменных вообще и различных видов рода *Pinus* в частности преобладает в спектрах первой свиты (кутаббулакской) и значительно превышает относительное содержание ее в спектрах всех остальных свит морского и континентального палеогена Северного Приаралья, кроме самых верхних горизонтов чеганской свиты.

Разнообразие видов рода *Pinus*, а также рода *Cedrus* — значительно. Кроме 12 определенных видов *Pinus*, в спектрах много различных разновидностей одних и тех же видов. Род *Pinus* представлен видами *P. exelsiformis* sp. nov. (pollen), *P. peuceformis* sp. nov. (pollen) секции *Taeda Sprucei*, среди представителей которой впервые появляется мелкая пыльца, определенная как *P. minutus* sp. nov. (pollen), *P. секции Australis Loud.*, секции *Banksia Murrayi*, секции *Cembrae Sprucei*, представленной видами *P. protocembra* sp. nov. (pollen), *P. aff. koraiensis Sieber et Zucc.* и *P. секции Cembrae*, и особенно *Pinus aff. koraiensis*, — значительно. Отмечено большое количество (до 30%) пыльцы *Pinus* секции *Eurypus*. Такое разнообразие пыльцы рода *Pinus* составляет отличительную черту всех спектров кутаббулакской свиты. Род *Cedrus* в кутаббулакской свите пополнился видом *Cedrus aff. deodara*. Общее содержание пыльцы всех видов *Cedrus* доходит в нижних горизонтах до 18%.

В более высоких горизонтах пыльца рода *Cedrus* уже не превышает 5 — 8%. Древние виды — *C. pusilla Zauer* и *C. piniformis* sp. nov. (pollen) — встречены единично.

В спектрах кутаббулакской свиты впервые появляется пыльца рода *Tsuga* (*Tsuga crispa* sp. nov.). Содержание пыльцы *Taxodium* колеблется в пределах от 3 до 8% в верхних горизонтах и достигает 15% в нижних горизонтах свиты. В нижних же горизонтах содержится пыльца *Ephedra* (до 2%) и отмечаются единичные находки *Dacrydium* sp. (?) [возможно, *D. chatunifolium* sp. nov. (pollen)]. Вообще содержание пыльцы сем. Podocarpaceae значительно снижается по сравнению со спектрами морских отложений.

Таким образом, состав пыльцы голосеменных кутаббулакской свиты представлен значительно более умеренным комплексом, чем в спектрах из морского палеогена. Выпадение ряда видов *Podocarpus*, *Cedrus* и сем. Araucariaceae, появление пыльцы *Tsuga* и значительное участие *Taxodium* рода *Alnus* секции *Semibrae* совпадает с обогащением спектров пыльцы широколиственных листопадных растений и сержокоцветных, в особенности рода *Alnus*. Это свидетельствует о распространении широколиственных лесов по пониженным обитаниям, а также говорит о наличии озерно-болотных водоемов с зарослями болотного кипариса и большим количеством прибрежно-водных и погруженных растений.

На повышенных местах распространялись хвойные и смешанные широколиственные леса, сохранившие большое число субтропических видов, о чем свидетельствует большое участие различных видов пыльцы *Cedrus*, *Sequoia* и многих видов рода *Pinus*.

Однако регрессирующее море освобождало большие пространства суши, которые заселялись травянистыми и кустарничковыми комплексами с лебедовыми, *Zygophyllaceae* и *Ephedra*. Эти полупустынные ассоциации литоралей палеогеновой суши, возможно, и были местом, где возникали предки тех обширных полупустынных ценозов, которые представляют основную фон ландшафта современного Северного Приаралья.

Спектры чиликтинской свиты в общем менее богаты пыльцой голосеменных, по видовое содержание пыльцы рода *Pinus* в них остается почти таким же разнообразным. Здесь впервые появляется пыльца, весьма близкая к *Pinus silvestris* L., а также впервые отмечена находка *P. strobiformis* sp. nov. (pollen) и много пыльцы *P. singularis* sp. nov. (pollen); продолжает в одиночных экземплярах встречаться *P. minutus* sp. nov., которая впервые появилась в спектрах кутанбулакской свиты. В то же время пыльца рода *Cedrus* представлена гораздо слабее. Окончательно выпадают виды *Cedrus longisaccata*, *C. Janschinii*, *C. piniformis*, *C. pusilla* и др., которые доминировали в спектрах морского олигоцена и еще единично встречались в кутанбулакских. Сем. Podocarpaceae представлено двумя видами рода *Podocarpus*. Исчезла пыльца *Podocarpus kazakhstanica*, *P. gigantea* и *Dacrydium*. Из спектров также выпали виды *Araucariaceae*, *Gnetales* (*Gnetumites*) и *Ginkgo*. Пыльца *Taxodium* aff. *distichum* L. (Rich.) встречается во всех спектрах в пределах 12%, вместе с *Tsuga*, *Picea* и *Taxus* (возможно, *Taxus baccataeformis* — вид пыльцы, не встречающийся в спектрах более низких горизонтов).

Судя по присутствию пыльцы *Ephedra*, которая спорадически появляется в различных горизонтах чиликтинской свиты, по-видимому, вне зависимости от широкого распространения лесов по долинам рек (по пониженным защищенным местообитаниям, в районах с повышенным рельефом), на побережьях солонатоводных бассейнов и озер и на междуречных плоских пространствах имели широкое распространение открытые ассоциации. Об этом также говорит большое участие пыльцы травянистых и кустарничковых видов различных керофитов, многие виды которых отмечены в составе спорово-пыльцевых спектров.

К сожалению, наши исследования не простираются выше чиликтинской свиты, так как пробы, отобранные из верхних свит континентального олигоцена и из аральских слоев, оказались непользованными.

ПАВЛОДАРСКОЕ ПРИАРАЛЬЕ

Спектры морских и континентальных отложений в Павлодарском Приаралье в общем значительно беднее пыльцой голосеменных, чем однообразные спектры в Северном Приаралье, причем пыльца распределяется от свиты к свите неравномерно (табл. II). Наиболее богаты пыльцой голосеменных спектры континентальных отложений, где общее количество ее доходит до 75—80%. В спектрах морских отложений содержание пыльцы голосеменных колеблется обычно в пределах от 10 до 60%, в чеганских спектрах не поднимается выше 30% и в спектрах опоковой свиты и в мелтапоценовых отложениях, залегающих под глауконитовой свитой, — не выше 60%.

Грубая схема, намечающаяся в результате анализа изменения процентного содержания общей суммы голосеменных по вертикали, детализируется при анализе их состава. Для нижних горизонтов палеогена (мел-

Таблица 2

Распределение пыльцы голосеменных в морских и континентальных отложениях кайнозоя в Павлодарском Приаралье

Голосеменные	Свита по К. В. Шиндлеровой									
	подару-коптанов	опоков	чеган-ская	первая	вторая	чеган-ская	аральская	павлодар-ская	Q	современ-ная отложения
Суммарно, %	25-40	18-60	10-28	38-80	18-50	65	+	10	18	25
Проболванец, %	25	18-30	15-20	<10	30-50	65	+	10	10	20
Сундучко и Cycadites	√	—	1-10	+10 10	+	—	—	—	—	—
Zanites sp.	—	—	+	—	+	—	—	—	—	—
<i>Ficoidites</i> <i>epitaxoides</i> sp. nov. (pollen)	—	—	+	—	+	—	—	—	—	—
Ginkgoaceae и Ginkgoites	—	—	+	+	+	—	—	—	—	—
<i>Ginkgo bilobefornis</i> sp. nov. (pollen)	—	—	+	+	+	—	—	—	—	—
Taxus	—	—	+	+	+	—	—	—	—	—
Taxaceae	—	—	+	+	+	—	—	—	—	—
<i>Taxus baccataefornis</i> sp. nov. (pollen)	—	—	+	+	+	—	—	—	—	—
<i>T. cuspidataefornis</i> sp. nov. (pollen)	—	—	+	+	+	—	—	—	—	—
<i>Torreya californifornis</i> sp. nov. (pollen)	—	—	+	+	+	—	—	—	—	—
Podocarpaceae и Podocarpaceae	—	—	+	+	+	—	—	—	—	—
<i>Podocarpites kazakhstanica</i> sp. nov. (pollen)	—	—	+	+	+	—	—	—	—	—
<i>P. gigantea</i> sp. nov. (pollen)	—	—	+	+	+	—	—	—	—	—
<i>Podocarpus setlowifornis</i> sp. nov. (pollen)	—	—	+	+	+	—	—	—	—	—
<i>P. andiniifornis</i> sp. nov. (pollen)	—	—	+	+	+	—	—	—	—	—
<i>P. naegataefornis</i> sp. nov. (pollen)	—	—	+	+	+	—	—	—	—	—
<i>P. aff. dacrydioides</i> A. Rich.	—	—	+	+	+	—	—	—	—	—
<i>Dacrydium etatunifornis</i> sp. nov. (pollen)	—	—	+	+	+	—	—	—	—	—

Таблица 2 (продолжение)

Голосеменные	Самка по К. В. Ишигурован									
	подсла- жончан	онодон	чешу- чат	перлап	вторяп	четвер- тая	эральсип	пальсуп- сип	Q	сопчен- ные отто- лиши
Аруцелесо и Аруцелитес										
<i>Arucaria elegans</i> sp. nov. (pollen)										
<i>Algidia ovaliformis</i> sp. nov. (pollen)										
Пинцесу										
<i>Abies sibirica</i> sp. nov. (pollen)										
<i>A. piceiformis</i> sp. nov. (pollen)										
<i>Keteleeria davidiana</i> sp. nov. (pollen)										
<i>Picea</i> sp.										
<i>P. tsaratanica</i> sp. nov. (pollen)										
<i>P. schrenkianae</i> sp. nov. (pollen)										
<i>P. alta</i> sp. nov. (pollen)										
<i>Cedrus</i> (суммарно)										
<i>Cedrus</i> aff. <i>deodara</i> L. ou d.										
<i>C. lasiocarpa</i> Zauer (pollen)										
<i>C. pini</i> sp. nov. (pollen)										
<i>C. janshinii</i> sp. nov. (pollen)										
<i>C. pusilla</i> Zauer (pollen)										
<i>C. parvicauda</i> sp. nov. (pollen)										
<i>C. aff. libani</i> L. ou d.										
<i>C. longicauda</i> sp. nov. (pollen)										
Род <i>Pinus</i> (суммарно)										
<i>Pinus</i> секция <i>Gambro</i> и <i>P. cembra</i> sp. nov. (pollen)										
<i>P. aff. koraiensis</i> Sieb. et Zucc.										

Таблица 2 (продолжение)

Голосеменные	Самка по К. В. Ишигурован									
	подсла- жончан	онодон	чешу- чат	перлап	вторяп	четвер- тая	эральсип	пальсуп- сип	Q	сопчен- ные отто- лиши
<i>P. sibirica</i> sp. nov. (pollen)										
<i>P. procumbens</i> sp. nov. (pollen)										
<i>P. coccinea</i> Strobus и <i>P. stradiiformis</i> sp. nov. (pollen)										
<i>P. peuce</i> sp. nov. (pollen)										
<i>P. exilis</i> sp. nov. (pollen)										
<i>P. coccinea</i> Farncombe										
<i>P. gerardi</i> sp. nov. (pollen)										
<i>P. longipolia</i> sp. nov. (pollen)										
<i>P. coccinea</i> Pseudostrobus										
<i>P. ponderosa</i> sp. nov. (pollen)										
<i>P. bicolor</i> sp. nov. (pollen)										
<i>P. mitis</i> sp. nov. (pollen)										
<i>P. coccinea</i> Taeda										
<i>P. taeda</i> sp. nov. (pollen)										
<i>P. coccinea</i> Australis и <i>P. sibirica</i> sp. nov. (pollen) coccinea Danstet										
<i>P. banksiana</i> sp. nov. (pollen)										
<i>P. protostictica</i> sp. nov. (pollen)										
<i>P. aff. sibirica</i> L.										
<i>P. sibirica</i> L.										
<i>Tsuga</i> aff. <i>canadensis</i> (L.) Carr.										
<i>T. crispata</i> sp. nov. (pollen)										
<i>T. lowiana</i> sp. nov. (pollen)										





палеогеновые спектры) Павлодарского Прииртышья характерно наибольшее содержание пыльцы таких семейств и родов голосеменных растений, которые в спектрах олигоцена уже играют подчиненную роль или совершенно исчезают (фиг. 6).

Наиболее разнообразно представлена в прииртышских спектрах пыльца сем. Pinaceae, в частности род *Pinus*, различные виды которого по вертикали распространяются неодинаково. В мел-палеогеновых спектрах общее содержание пыльцы рода *Pinus* не превышает 20% от общего числа зерен голосеменных. Род в основном представлен небольшим количеством видов секций *Strobilus* и *Cembrae*; последняя представлена одним видом *Pinus protocembra* sp. nov. Другие секции присутствуют спорадически, составляя не более 1—3%. Отсутствует секция *Eurpitys*.

Более обильно представлен род *Cedrus*, содержание представителей которого достигает 28%. В основном род представлен двумя видами: *Cedrus pusilla* Z a u e r и *C. parvisaccata* Z a u e r с незначительной примесью *C. laxireticulata* Z a u e r, *C. longisaccata* sp. nov. (pollen). Род *Picea* представлен одним определенным видом, не имеющим аналогов среди пыльцы современных видов этого рода, — *Picea tasarunica* sp. nov. (pollen) и небольшим количеством пыльцы *Picea* sp.

Роды *Tsuga*, *Abies* и *Keleleeria* отсутствуют. Значительное количество пыльцы сем. Cupressaceae (50%) и Podocarpaceae (30%), которое в основном представлено пыльцой *Dacrydium* sp., *Podocarpus* (3 sp.), *Phyllocladus*? (вид не описан). Единично встречаются пылинки *Ephedra* (*Ephedra coccinipites* W o d.).

Таким образом, спектры мел-палеогеновых отложений по своему составу значительно отличаются от всех более молодых спектров подавляющим большинством форм, имеющих своих предков еще в меловых комплексах. Если сравнить эти спектры с чеганскими, то разница будет весьма заметной; со спектрами же из опоковой свиты, несмотря на большое различие в составе, они имеют и объединяющие их черты.

В спектрах из опоковой свиты также присутствует в сравнительно небольших количествах пыльца рода *Pinus*, представленного в основном секциями *Strobilus* и *Cembrae*, но здесь впервые появляются единичные виды, принадлежащие к секции *Eurpitys* (?), полностью отсутствующей в мел-палеогеновых спектрах.

Пыльца *Cedrus* несколько меньше, чем в спектрах мел-палеогеновых, но в видовом отношении род представлен богаче. Здесь прибавляются единичные находки *Cedrus Janschinii* sp. nov. (pollen). Большинство видов рода *Cedrus* не имеют аналогов среди современных. Наибольшее число видов и общее количество пыльцы приурочено к нижним горизонтам свиты. В верхних горизонтах находят пыльцы *Cedrus* единичны, что совпадает с находкой пыльцы, подобной *Welwitschia*, с *Welwitschites* sp. Род *Picea* так же как в мел-палеогеновых спектрах, представлен только видом *Picea tasarunica* sp. nov. (pollen). *Tsuga* по-прежнему отсутствует. В средних горизонтах опоковой свиты обнаружены единичные зерна, принадлежащие сем. Taxodiaceae (по-видимому, *Sequoia*). Для нижних горизонтов опоковой свиты характерно также большое количество (до 50%) пыльцы сем. Cupressaceae и Podocarpaceae (до 15%), среди которой встречены общие с приаральскими тагарскими видами: *Podocarpites kasakhstanica* sp. nov. (pollen), *P. nageiaformis* sp. nov. (pollen), *Dacrydium elatumiformis* sp. nov. (pollen), сем. Araucariaceae [*Araucaria elegans* sp. nov. (pollen)], *Agathis ovataeformis* sp. nov. (pollen).

Спектры опоковой свиты по составу пыльцы голосеменных хорошо сопоставляются со спектрами тагарской и отчасти саксаульской свиты Северного Приаралья. Находки же в верхних горизонтах опоковой свиты

пыльца, подобной роду *Welwitschia*, указывает на существование режима влажности, способствовавшего развитию беслесных пространств, что позволяет синхронизировать время отложения верхних горизонтов опокковой толщи со временем формирования саксаульской свиты. Спектры саксаульской свиты, если вспомнить общее описание флористических комплексов, содержат большое число различных видов пыльцы пустынных растений и кустарничковых узколистных ксерофитов из сем. Myrtaceae и др., о чем подробно написано автором в специальной работе (Заклинская, 1953).

Спектры чеганских отложений значительно отличаются от спектров двух предыдущих свит по целому ряду признаков; при этом различия эти выражены ярче, чем между эоценовыми и олигоценовыми спектрами в Северном Приаралье.

Род *Pinus* развивается в чеганское время различно от горизонта к горизонту и содержание его неодинаково по вертикали, что позволяет выделять нижние, средние и верхние горизонты в этой свите. В самых нижних горизонтах (глины с сидеритом) процентное содержание пыльцы рода *Pinus* колеблется от 5 до 60%, с преобладанием спектров, в которых *Pinus* составляет не менее 50%. В средних горизонтах (глины слоистые, со столбами деревьев, растительными остатками и фауной чегана) род *Pinus* составляет 20—25%, а в верхних горизонтах не больше 40%.

Род *Pinus* обогащается появлением представителей новых видов — *Pinus* aff. *koraiensis*, *P. exelsaeformis* sp. nov. (pollen), *P. strobiformis* sp. nov. (pollen), *P. longifoliaformis* sp. nov. (pollen), *P. protosilvestris* sp. nov. (pollen), *Pinus* секции *Banksia* M a y r. и др. Одновременно в чеганских спектрах появляется пыльца родов *Abies* [*Abies proteiformis* sp. nov. (pollen); *Keteleeria*]; участие же рода *Cedrus* значительно слабее, чем в спектрах чеганской свиты в Приаралье, но все же оно обычно около 10%.

Самым характерным для чеганских спектров Прииртышья, так же как и для синхронных отложений Северного Приаралья, является появление и широкое (ярче выраженное, чем в Приаралье) развитие пыльцы *Taxodium* aff. *distichum* L. (R i c h.), что, в сочетании со значительной примесью пыльцы широколиственных листопадных растений в составе пыльцы покрытосеменных, указывает на увлажнение климата и некоторое похолодание его по сравнению с жарким климатом эоцена. Одновременно с появлением пыльцы *Taxodium* в спектрах значительно увеличивается количество пыльцы *Ginkgo* (до 18%).

Следует отметить, что чеганские спектры Прииртышья в общем близки по составу однообразным спектрам Приаралья, но характеризуют флору более умеренную, в которой сказывается влияние азиатских центров с так называемой «флорой гинкго» А. Н. Криштофовича. Спектры же приаральские несут в себе больше представителей древней средиземноморской флоры в ее ксерофильной вариации.

Спектры лагуно-континентальной первой свиты и континентальных, второй и четвертой, в общем близки по составу компонентов, имеют свои характерные черты, позволяющие отличать их один от другого. Спектры самых нижних горизонтов первой свиты континентальных отложений, представленных озерной или лагуной фауны серни песков и слоистых глин с пролитом и массой растительных остатков в виде трухи и остатков веточек и стволов, характеризуются самым большим содержанием пыльцы голосеменных — до 60—80% (от общего числа подсчитанных зерен спор и пыльцы), которая почти целиком представлена различными секциями рода *Pinus*: *Strobus* (*P. exelsaeformis* sp. nov., *P. peuceformis* sp. nov., *P. strobiformis* sp. nov.), *Pseudostrobus*, *Taeda*, *Australes* (*P. singularis* sp. nov.), *Sula*, *Banksia*. Особенно широко распространена секция *Cembrae*, которая в основном представлена *Pinus cembraeformis* и *P. aff. koraiensis* S i e b.

ет *Z u e t*. Впервые появляются *Pinus protosilvestris* sp. nov. (pollen) и *P. minutus* sp. nov. (pollen).

В спектрах первой свиты пыльца *Tsuga* представлена тремя видами; впервые появляется *Picea schrenkianaeformis* sp. nov. (pollen), а также *Picea alata* sp. nov. (pollen) и *Abies sibiriciformis* sp. nov. Пыльца же *Taxodium* aff. *distichum* составляет не более 30%, т. е. значительно меньше, чем в чеганских спектрах. Здесь же встречается пыльца *Sciadopitys*, *Taxus baccataeformis* sp. n. (pollen) и единично — *Podocarpus*, *Agathis*, *Gnetum* и *Cycadaceae*.

В общем спектры нижних горизонтов первой континентальной свиты имеют совершенно иной облик, чем чеганские спектры, обогащаясь большим числом новых видов. Верхние горизонты первой свиты содержат большое количество пыльцы *Taxodium* (до 25—30%) и значительно меньше пыльцы различных представителей рода *Pinus*. Выпадают роды *Taxus*, *Sciadopitys*, *Gnetum* и встречающиеся спорадически в нижних горизонтах свиты представители рода *Podocarpus*, кроме одного вида. Исчезает *Picea tasarianica* sp. nov. (pollen) и не встречается пыльца *Tsuga* и *Cedrus*.

Таким образом, анализ состава пыльцы голосеменных позволил выделить горизонты первой свиты, что не удавалось сделать ни литологическим методом, ни при помощи стандартного спорно-пыльцевого анализа без флористического разбора представленных родов и видов.

Для второй свиты континентальных отложений характерно уже небольшое содержание пыльцы *Taxodium* (менее 10%) и значительное количество пыльцы рода *Pinus*, а также некоторое увеличение содержания *Cedrus*, среди представителей которого снова появляется вид *Cedrus piniformis* sp. nov. (pollen). Одновременно с этим выпадает из спектра пыльца *Pinus* aff. *silvestris*.

Спектры второй свиты континентальных отложений вообще характеризуются широким развитием древесной растительности, в основном представленной широколиственными и хвойно-широколиственными лесами. Но в то же время в спектрах первой и второй свит появляется пыльца *Ephedra* (для спектров второй свиты характерно появление *E. aff. Przewalski* S t a r h.), которой сопутствует значительное увеличение пыльцы травянистых растений в комплексе покрытосеменных.

Спектры четвертой свиты континентальных отложений значительно беднее спектров первых двух свит. Характеризуют эти спектры прогрессирующее осушение климата, что отразилось на повышении содержания пыльцы *Ephedra* (преобладает *E. aff. intermedia* S c h r.), почти полном исчезновении пыльцы *Taxodium* и на понижении содержания пыльцы *Cedrus*.

По единичным анализам миоценовых отложений, в которых находки пыльцы голосеменных значительно скуднее, чем в спектрах четвертой свиты, можно полагать, что древесная растительность, сильно разреженная и бедная видами, была в основном представлена лиственными деревьями. Голосеменные в миоценовых спектрах представлены единичными зернами *Picea* секции *Strobus*, *P. cf. sibirica*, *Pinus* секции *Eupitys*, *Taxodium*, *Picea*, *Cupressaceae* и *Tsuga*.

В миоцено-плиоценовых отложениях состав пыльцы голосеменных окончательно беднее и общее содержание их в спектрах не превышает 5—10%. Представлены голосеменные родом *Pinus* (единично секция *Strobus* и *Pinus* aff. *silvestris* L. — до 40%). Пыльца *Tsuga*, *Taxodium*, *Picea*, *Taxus* и *Cupressaceae* встречается спорадически в виде единичных зерен. Пыльца *Ephedra* временами выпадает из спектров за счет появления пыльцы луговых трав; временами содержание ее поднимается до 25%. Возможно, что в миоцен-плиоцене на территории Прииртышья развивались не только полупустынные, но и степные или саванного типа ландшафты,

за что говорит и фауна млекопитающих. Растительность Прииртышья в плиоцене по-видимому представляла тип мелкорослых саванн с редко разбросанными кустарниково-лесными массивчиками.

В спектрах нижнечетвертичных отложений пыльца голосеменных составляет не более 20% от общего числа зерен. Попадают единично представители *Pinus* aff. *strobus*, *P.* aff. *cembra*, *P.* aff. *silvestris*, *Ephedra*. В более высоких горизонтах четвертичных отложений, так же как и в поверхностных (современных) пробах, встречаются только *Pinus* aff. *silvestris* и *Ephedra*.

#### У. РУКОВОДЯЩИЕ СПОРОВО-ПЫЛЬЦЕВЫЕ СПЕКТРЫ ГОЛОСЕМЕННЫХ ДЛЯ СТРАТИГРАФИЧЕСКОГО РАСЧЛЕНЕНИЯ КАЙНОЗОЙСКИХ ОТЛОЖЕНИЙ ПАВЛОДАРСКОГО ПРИИРТЫШЬЯ И СЕВЕРНОГО ПРИАРАЛЬЯ

Если все изложенные выше данные по Северному Приаралью и Северному Прииртышью представить в виде схемы или стратиграфических таблиц и проследить встречаемость отдельных родов и видов голосеменных от самых нижних свит до современных осадков, то наглядно выявится определенная закономерность в их распространении.

Флора и растительность каждой из охарактеризованных свит имеют свой особый облик. Различие в составе и количестве пыльцы голосеменных позволяет выделить для Северного Приаралья следующие группы спектров.

1. Для группы Podocarpaceae, самой древней, характерно большое процентное содержание представителей гондванской (?) флоры (возможно, реликтового происхождения) с Araucariaceae, *Podocarpus*, *Dacrydium*, Cupressaceae в сочетании с голосеменными древнего Средиземноморья. В спектрах этой группы присутствуют единично виды: *Podocarpus nageiaformis* sp. nov. (pollen), *Podocarpus sellowiformis* sp. nov. (pollen), *Podocarpus andiniiformis* sp. nov. (pollen), *Podocarpus pites gigantea* sp. nov. (pollen), *Agathis ovataformis* sp. nov. (pollen), *Araucaria elegans* sp. nov. (pollen) — единично, *Dacrydium elatumiformis* sp. nov. (pollen), *Cedrus Janschinii* sp. nov. (pollen), *Cedrus pusilla* Z a и e r (pollen), *Cedrus longisaccata* sp. nov. (pollen), *Cedrus laxireticulata* Z a и e r (pollen) — единично, *Picea tataranica* sp. nov. (pollen) и некоторое количество Cupressaceae, *Cycadacites*, *Welwitschicites*, а также *Pinus ponderosaeformis* sp. nov. (pollen), *Pinus* секции *Banksia*, *Torreya californiiformis* sp. nov. (pollen), *Taxacites* и др.<sup>1</sup>. Одновременно в спектрах намечается значительное участие различных видов сосны.

Эта большая группа спектров охватывает все нижние палеогеновые отложения Северного Приаралья, т. е. тасаранскую и саксаульскую свиты, которые на основании фаунистических находок датируются средним и верхним эоценом (Ишнин, 1953). Спектры эти близки к спектрам опоковой толщи Павлодарского Прииртышья, подстилающей чеганские отложения нижнего олигоцена.

Группа спектров Podocarpaceae хорошо подразделяется на две подгруппы: нижнюю (тасаранскую) и верхнюю (саксаульскую).

Тасаранские спектры голосеменных значительно беднее саксаульских в видовом отношении и представлены всего 29 видами (в основном —

<sup>1</sup> Все перечисленные виды в большинстве своем — новые, получившие название по морфологическим признакам пыльцы.

древняя флора). В саксаульских спектрах большее участие принимают различные виды сем. Pinaceae и отмечаются первые находки *Sequoia*, *Pinus ezelsaeformis*, *P. peuceformis*, *Picea* секции *Omorica* [*Picea alata* sp. nov. (pollen)].

II. Группа *Taxodium — Pinus* объединяет спектры чеганской свиты и двух свит континентальных отложений Северного Приаралья. В спектрах этой группы выпадает значительное количество видов<sup>1</sup> из предыдущих подгрупп, а именно: *Dacrydium elatumiformis*, *Podocarpus sellowiformis*, *Cedrus laxireticulata*, *Picea tasaranica*, *Pinus bicornis*, *Pinus ponderosaeformis* и др. Взамен появляются новые виды, роды и семейства — значительно более умеренного облика. Именно по появлению нового комплекса голосеменных вторая группа легко разбивается на две подгруппы: нижнюю (чеганскую): *Cedrus — Taxodium* и верхнюю (две нижние свиты солончатоводных и континентальных отложений): *Pinus — Taxodium — Tsuga*.

Подгруппа спектров *Cedrus — Taxodium* приобретает девять новых видов: *Cedrus* aff. *libani* L a w s., *C.* aff. *atlantica* L o u d., *Taxodium* aff. *distichum* L. (R i c h.) и др. — и представляет смешанную флору голосеменных, имеющих большую часть видов от группы Podocarpaceae, но в иных процентных соотношениях. Таким образом, подгруппа *Cedrus — Taxodium* менее резко отличается от группы более древней — Podocarpaceae, чем подгруппа *Pinus — Taxodium — Tsuga*. Различия между ними выражены слабее, чем между аналогичными группами и подгруппами в Северном Прииртышье.

Спектры верхней подгруппы приобретают семь новых видов голосеменных и в то же время из состава их выпадают многие виды, встречающиеся в спектрах предыдущей подгруппы. Здесь, кроме тех видов, которые встречаются во всех трех нижних подгруппах, появляются (или увеличивается их содержание): *Podocarpites kazakhstanica*, *Taxus baccataeformis*, *Pinus* aff. *koraiensis*, *Tsuga crispa*, *Cedrus* aff. *deodara*. К тому же спектры верхней подгруппы отличаются исключительным богатством видов рода *Pinus*.

В верхней подгруппе спектров выделяются два типа: спектры первой свиты — кутанбулакские и спектры второй свиты — чиликтинские, отличающиеся один от другого по содержанию пыльцы рода *Pinus*. Кроме того, чиликтинские спектры отличаются от спектров кутанбулакских отсутствием или малым содержанием пыльцы *Cedrus* aff. *libanii*, *C.* aff. *atlantica*, *C.* aff. *deodara* и *Abies sibiriciformis*. Общее содержание пыльцы рода *Pinus* в чиликтинской свите значительно меньше, чем в спектрах кутанбулакской свиты. Вообще кутанбулакские спектры содержат пыльцу рода *Pinus* в большем количестве, чем во всех других свитах.

Для Павлодарского Прииртышья схема построена значительно полнее. Здесь выделяются не две, а три группы спектров, из которых две нижние, более древние, могут сопоставляться с группами, выделенными для Северного Приаралья.

I. Группа Podocarpaceae — *Cedrus* — наиболее древняя; в ней среди голосеменных преобладают семейства Podocarpaceae, Cupressaceae, Araucariaceae и Pinaceae, представленные различными видами родов *Dacrydium*, *Cedrus*, *Podocarpus* и не имеющие аналогов среди современных видов этого рода, а также родом *Pinus*, представленным в основном видом *Pinus protocembra* sp. nov. (pollen). В этих же спектрах встречается пыльца *Gnetum* (*Gnetumites*) и *Welwitschia* (*Welwitschites*) и *Phyllocladus*, пыльца которого не вошла в описание.

Группа спектров Podocarpaceae — *Cedrus* включает две подгруппы: подгруппу *Dacrydium* и подгруппу *Podocarpus*.

<sup>1</sup> В отдельных горизонтах эти виды могут встречаться как единичные находки, но это явление случайное.

Подгруппа *Dacrydium* наиболее бедна видами голосеменных; представлена она всего 24 видами, принадлежащими к сем. Podocarpaceae, Cupressaceae, Welwitschiaceae, Euphorbiaceae и Pinaceae, из которых наибольший процент падает на представителей рода *Cedrus* и *Dacrydium*. Эта подгруппа охватывает всю серию отложений, залегающих под глауконитовой толщей и отнесенных предположительно к мелу — палеоцену.

Подгруппа *Podocarpus* представлена 23 видами голосеменных, которые в основном принадлежат сем. Pinaceae, Cupressaceae и Podocarpaceae. Здесь впервые обнаружена пыльца *Welwitschiacites*, *Araucaria elegans* sp. nov. (pollen), *Cedrus piniformis* sp. nov. (pollen) и др., присутствует *Cedrus Janschinii* sp. nov. (pollen), *Cedrus longisaccata* sp. nov. (pollen), *C. pusilla* Z a u e r (pollen), *Podocarpus nageiaformis* sp. nov. (pollen), *Podocarpites kazakhstanica* sp. nov. (pollen). Единично встречается пыльца *Dacrydium*, *Agathis*, Cycadaceae (*Lamites?*). Одновременно присутствует пыльца *Pinus protocembra* sp. nov. (pollen), *Pinus ponderosaeformis* sp. nov. (pollen), *P. bicornis* sp. nov. (pollen), *P. protocembra* sp. nov. (pollen) в общем составляет не более 25% от общего числа пыльцы голосеменных.

Подгруппа *Podocarpus* близка по составу к группе *Podocarpus* Северного Приаралья, отличается от нее лишь несколько более высоким содержанием пыльцы родов *Cedrus* и *Podocarpus*. Подгруппа *Podocarpus* включает целиком все спектры олоковой свиты и хорошо сопоставляется со спектрами тасаранской и отчасти саксаульской свит в Северном Приаралье.

II. Группа *Taxodium — Pinus* Северного Приаралья, отличается от последней несколько большим участием представителей умеренных флор с *Taxodium* (до 40%) и *Tsuga* (до 10%), а также присутствием ряда видов рода *Pinus*, принадлежащих к американским и азиатским флорам: *Pinus* aff. *koraiensis*, *P.* aff. *sibirica* и *Abies* aff. *sibirica* [*Abies sibiriciformis* sp. nov. (pollen)]. Группа эта наиболее богата видами голосеменных, общее количество которых составляет от 22% (спектры чиликтинской свиты) до 36% (спектры чеганской свиты). В спектрах группы *Taxodium — Pinus* выпадает представители таких древних флор, как *Welwitschia*, *Dacrydium elatumiformis* sp. nov. (pollen), *Cedrus Janschinii* sp. nov. (pollen), *C. laxireticulata* Z a u e r (pollen), *Picea tasaranica* sp. nov. (pollen), но в то же время многие из представителей этих флор еще присутствуют.

Группа *Taxodium — Pinus* подразделяется на две подгруппы: *Taxodium* и *Pinus — Taxodium — Tsuga*.

Подгруппа *Taxodium* целиком охватывает чеганскую свиту и сопоставляется со спектрами подгруппы *Cedrus — Taxodium* Северного Приаралья, отличается от нее большей мезофильностью, что в первую очередь сказывается на большем количестве пыльцы *Taxodium*, которой особенно много в верхних горизонтах чеганской свиты, непосредственно подстилающих отложения первой свиты континентальных отложений.

Подгруппа *Pinus — Taxodium — Tsuga* включает спектры нижних и верхних горизонтов первой свиты, а также спектры второй свиты. Спектры солончатоводных или дельтовых отложений первой свиты содержат большое количество пыльцы рода *Pinus*, много пыльцы *Taxodium* aff. *distichum* (L.) R i c h. Различаются спектры нижних и верхних слоев первой свиты следующими признаками: нижние слои содержат максимум Pinaceae и не включают пыльцу Podocarpaceae, Cupressaceae и *Gnetum*; верхние слои содержат мало (до 5%) Pinaceae, но в них снова появляется пыльца Podocarpaceae (*Podocarpus* aff. *dacrydioides*), Cupressaceae, *Gnetum* (?) (*Gnetumites*). В остальном спектры чрезвычайно близки.

Спектры второй свиты содержат пыльцу *Taxodium* до 20%, в них несколько возрастает процентное содержание пыльцы *Cedrus* и появляется

*Tsuga aff. canadensis* (L.) Carr. В видовом отношении эти спектры значительно беднее, чем спектры первой свиты.  
 III. Группа *Ephedra* включает спектры с сильно обедненным видовым составом пыльцы голосеменных. Содержат они максимум 12 видов, в число

*rus* обычно отсутствует. Единично встречается пыльца *Tsuga* и *Taxodium*, но неизменным членом является пыльца *Ephedra* (до 26%).  
 Эта группа спектров свидетельствует о значительном осушении климата, понижении температур и, в соответствии с этим, о значительном разреживании древесной растительности. Все данные указывают на то, что в период формирования III группы спектров преобладала растительность открытых местообитаний.

Павлодарское Прииртышье Северное Приаралье

Спектры голосемен			Спектры голосем		
Группы	Подгруппы	Типы	Группы	Подгруппы	Типы
Ephedra	Pinus-Ephedra	Современные аллювиальная и позднечетвертичные			
		Четвертичные			
	Pinales	Палеовая толща			
		Голубая толща (Хазарск)			
Pinales	Плодородные и непродуктивные	Нижнечетвертичные отложения и павлодарская свита			
	Милые и вежливые	Аральская свита			
Taxodium - Pinales	Pinus-Taxodium-Tsuga	Олигоцен-новое	Pinus-Taxodium-Tsuga	Олигоцен-новое	
		Третья свита (флора окрестности озера Слабо)			
	Вторая свита				
	Первая свита (верх) (низ)				
Taxodium	Олигоцен-новое	Верх	Pinus-Taxodium-Tsuga	Олигоцен-новое	Чиликтинская
		Середина			
Podocarpus	Эпиченовые	Опокая	Podocarpus-Taxodium-Tsuga	Эпиченовые	Кутандуланская
		гладкокрылатая (флора окрестности озера Слабо)			
Podocarpus	Эпиченовые	Подгладкокрылатая	Podocarpus-Taxodium-Tsuga	Эпиченовые	Саксаульская
		Подгладкокрылатая			
Podocarpus	Эпиченовые	Подгладкокрылатая	Podocarpus-Taxodium-Tsuga	Эпиченовые	Тасаранская
		Подгладкокрылатая			

Фиг. 7. Сопоставление групп, подгрупп и типов спектров голосеменных палеозойских отложений Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья. (Составила Е. Д. Закинская).

которых входят 11 видов, сохранившихся от первой группы. Значительное участие в составе спектров принимает пыльца сосен из секции *Euripitys*: *Pinus aff. silvestris*, *P. protosilvestris* sp. nov. (pollen). Встречается пыльца *P. aff. koraiensis* Sieb. et Zucc., *Abies sibiriciformis* sp. nov. (pollen), *Picea schrenkianaeformis* sp. nov. (pollen). Из сем. Podocarpaceae сохранились лишь один вид *Podocarpites gigantea* sp. nov. (pollen). Пыльца рода *Ced-*

Группа *Ephedra* включает спектры четвертой свиты континентальных отложений миоценовые, миоцен-плиоценовые и четвертичные спектры, которые, в свою очередь, весьма близки к современным, отличаясь от них лишь тем, что в современных спектрах род *Pinus* представлен только одним видом — *Pinus silvestris* L., а в спектрах миоцен-плиоценовых и нижнечетвертичных наблюдаются единичные находки *Pinus aff. strobis*, *P. cembrae*, *P. aff. koraiensis*.

Спектры группы *Ephedra* отличаются небольшим содержанием пыльцы голосеменных (порядка 10—25—30%). В миоцен-плиоценовых отложениях спектры представлены единичными зёрнами *Tsuga*, *Cupressaceae*, *Taxus*, *Taxodium*, *Cucurbitaceae* и *Ephedra* (до 25%), а в нижнечетвертичных отложениях — единичными находками *Pinus aff. koraiensis*, *P. aff. silvestris*, *P. aff. strobis*, *P. aff. cembrae*, *Picea*. В более высоких горизонтах четвертичных отложений выидают представители секции *Strobis* и совершенно не встречается пыльца *Tsuga* и *Taxodium*. В основном в верхних горизонтах четвертичных отложений пыльца голосеменных представлена лишь *Pinus aff. silvestris* и родом *Ephedra*. Это же наблюдается и в спектрах из современных отложений, где, кроме пыльцы *Ephedra*, голосеменных обычно нет, за исключением спорыно-пыльцевых спектров из поверхностных ирб в районе Борового или близ Долбишских гор, где количество пыльцы *Pinus aff. silvestris* равно или выше, чем *Ephedra*, так как сосна здесь селится на гранитах палеозоя, образуя среди голой степи острые боры.

Группа спектров *Ephedra*, таким образом, подразделяется на следующие подгруппы: Pinales, включающую два типа спектров — олигоцен-миоценовый (IV свита континентальных отложений) и миоценовый (аральская свита), и *Pinus — Ephedra*, включающую три типа спектров: миоцен-плиоценовый и нижнечетвертичный (павлодарская свита и нижнечетвертичные отложения); верхнечетвертичные; современные.

Сопоставление групп, подгрупп и типов спектров голосеменных дано на фиг. 7.

1 Отложения третьей свиты не охарактеризованы пыльцой, так как исследованные образцы не содержали пыльцы и спор.

## VI. ФЛОРИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СПЕКТРОВ И ИХ СТРАТИГРАФИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ

Как видно из материала, изложенного в предыдущих главах палеогеографические условия, в которых формировались осадочные отложения Северного Приаралья и Павлодарского Прииртышья, имея много общих черт, в то же время в целом ряде деталей были различными, в особенности в начале третичного периода. Поэтому, несмотря на то, что оба исследуемых района находились в близких широтных условиях, видовой состав их спорово-пыльцевых спектров имеет различия.

В самом деле, если подсчитать общее количество видов голосеменных, представленных в спектрах Приаралья и Прииртышья, и сравнить спектры их синхронно формировавшихся свит, то получаются следующие соотношения<sup>1</sup>:

а) тасаранская, саксаульская и опоконная свиты представлены всего 71 видами голосеменных (от 23 до 36 видов в каждой из свит в отдельности), из которых у тасаранских с опоконными спектрами 10 общих видов, у саксаульских с опоконными — 40 общих видов;

б) чеганская свита Приаралья и Прииртышья представлена также 59 видами голосеменных, из которых 12 видов общих;

в) ащайрыкеная и первая свиты Прииртышья и кутанбулакская (первая) свита Приаралья представлены 51 видом, из которых 12 видов общих;

г) вторая свита континентальных отложений в Прииртышье и чиликтинская (вторая) свита в Приаралье представлены всего 43 видами голосеменных, из которых 16 видов общих.

Если обратиться к ареалам современных родов и видов голосеменных, к которым принадлежит пыльца ископаемых видов или с которыми она имеет близкое сходство, то можно действительно прийти к выводу, что исходные флоры этих двух районов имели различные центры. Для Северного Приаралья, по-видимому, такой исходной флорой была древняя средиземноморская субтропическая, тропическая и умеренная флора, для Западной же Сибири и Прииртышского Казахстана — азиатская умеренная.

В то же время присутствие общих видов и родов в спорово-пыльцевых спектрах всех синхронно формировавшихся свит подтверждает положение Е. В. Вульфа и других о том, что третичный период знаменовался становлением новой смешанной флоры на огромных пространствах суши северного полушария. Для территории северных пределов Средней Азии и прилегающего к ней Казахстана эта флора развивалась на базе древне-

<sup>1</sup> Следует оговориться, что количество видов пыльцы голосеменных взято приближенно, в соответствии с числом видов, определенных при анализах. Вполне допустимо, что количество видов в отложениях аналогичных свит может несколько измениться при дальнейшем накоплении материала.

средиземноморского комплекса с большей или меньшей примесью умеренного азиатского, по-видимому, восточноазиатского, и умеренного же китайского элемента.

Кроме того, сходство и различие флористических элементов зависело и от различного географического положения участков палеогеновой суши и различного же рельефа и литологического состава субстрата, на котором формировались те или иные растительные элементы ландшафта.

Мугоджары и юго-западные берега Киргизской суши, непосредственно связанные со Средней Азией, были местом, где развивалась древняя тропическая средиземноморская флора, долгое время сохранявшая ксерофитный облик. На северо-восточных берегах Киргизского материка, ближе связанных с юго-восточной Азией, развивалась более умеренная флора — азиатско-американского типа. Древняя суша Киргизского материка была местом смещения этих флор, а в дальнейшем — местом формирования новой умеренной флоры своеобразного ксерофитного облика.

Существовавшая еще с нижних отделов палеогена, а возможно, и значительно ранее, вертикальная зональность в распространении растительности отразилась на составе спорово-пыльцевых спектров, полученных из третичных морских и континентальных отложений.

Спектры нижнего палеогена содержат и пыльцу вечнозеленых растений нижнего пояса горных склонов, и пыльду растений с опадающей лиственной из более высоких обитаний, и пыльду растений пояса хвойных лесов.

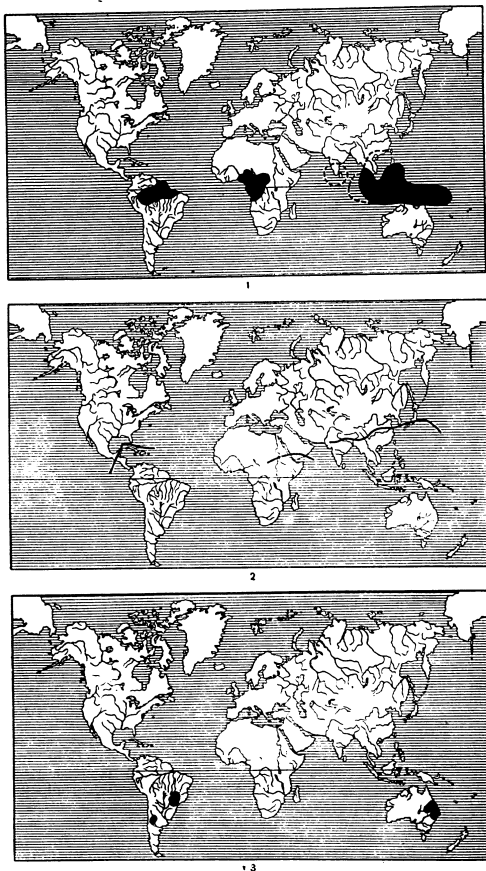
Нижнепалеогеновая флора Средиземноморья и Казахского материка, видимо, включала некоторое количество реликтов от древней тропической, возможно гондванской, флоры с *Phyllocladus*, *Arucaria*, *Gnetum*, *Casuarina*, *Welwitschia*, современные ареалы которых связаны в большинстве случаев с Южной Америкой, Африкой и Австралией (фиг. 8).

В начале палеогена климат Павлодарского Прииртышья, а в особенности Северного Приаралья, по-видимому, был жарким и влажным, о чем свидетельствует участие в спектрах большого количества пыльцы рода *Cedrus* (видов, не имеющих аналогов среди современной флоры), *Podocarpus* и ряда видов спор древовидных папоротников.

В эоцене, возможно во вторую половину его, изменение физико-географических условий повлекло за собой осушение климата, возможно региональное, что сказалось на составе растительности участков суши, прилегающих к приаральскому и прииртышскому морям. Особенно сказалось это осушение климата на территории юга Мугоджар и, возможно, западных берегов Киргизской суши в период отложения тасаранской и нижних горизонтов саксаульской свит. Об этом говорят обилие пыльцы и макроскопических остатков ксерофитов с жестко-кожистой лиственной, находки большого количества пыльцы растений из сем. Myrtaceae, Proteaceae, Euphorbiaceae и даже Sactaceae, находки пыльцы *Welwitschia*, *Ephedra* и др.

В период отложения нижних и средних горизонтов саксаульской свиты в Приаралье, а также песчанков опоконной свиты в Павлодарском Прииртышье на территории прилиitoralных зон Киргизского материка имелись пустынные ассоциации с *Zygophyllum*, *Cyperopodiaceae*, *Umbelliferae* и др.

Среди голосеменных в это время были широко развиты различные виды родов *Pinus*, *Dacrydium*, *Podocarpus* и сем. Araucariaceae. Отмечены единичные находки *Ephedra* таких видов, которые не имеют аналогов среди современных видов (*Ephedra cocconipites* W o d h. и др.). Возможно, что некоторые виды рода *Ephedra*, произраставшие на окраинах эоценового Киргизского материка, имели предков за пределами распространения древней средиземноморской флоры, так же как и род *Welwitschia*. Но этот вопрос

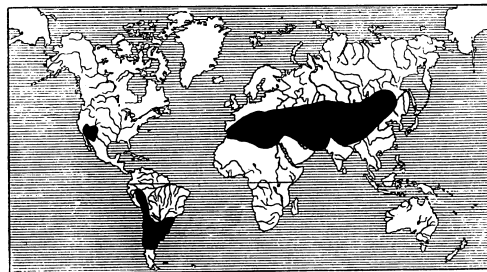


Фиг. 8. Ареалы современных видов рода *Gnetum* L., *Araucaria* Juss., *Podocarpus* L. Herit.

1 — *Gnetum* L.; 2 — *Podocarpus* L. Herit.; 3 — *Araucaria*

не входит в компетенцию автора и остается открытым. Исследования М. М. Ильина, П. П. Овчинникова и других ученых приводят к мысли, что флора *Ephedra* Казахстана, может быть, является дериватом древней средиземноморской флоры. Ареал современного распространения рода *Ephedra* разорван и имеет центры и в Средиземном море и в Азии, а также в Южной и Северной Америке (фиг. 9).

Заметное увлажнение и некоторое похолодание климата в нижнем и среднем олигоцене (в начале его) совершенно изменили облик растительного покрова суши, а последующие тектонические движения, изменившие размеры и конфигурацию материков, послужили причиной того, что изме-



Фиг. 9. Ареал современных видов рода *Ephedra* L.

нились флористический состав растительного покрова за счет мигрантов из северо-восточных районов, а также состав растительности за счет развития аутохтонных и аллохтонных умеренных элементов.

На Киргизском материке и на юго-западных участках Мугоджар начинают развиваться смешанно-широколиственные леса, в Мугоджарах, по-видимому, с преобладанием средиземноморских вечнозеленых и жестколистных элементов, на Киргизском материке — с преобладанием азиатских листопадных умеренных.

Спектры чеганских отложений Северного Приаралья — более ксерофитные, чем спектры Павлодарского Прииртышья. Леса с болотным кипарисом впервые появились на Киргизской суше, в северо-восточных ее районах. Последнее хорошо увязывается с флорой сравнительно умеренных смешанно-широколиственных лесов с *Taxodium* из олигоценовых отложений кулундинских степей Западной Сибири.

Развитие смешанно-широколиственных лесов с большим или меньшим участием болотного кипариса одновременно наблюдается и в Крымско-Кавказской области также с начала олигодена. Последние данные по Азово-Кубанской впадине несколько изменяют деталь нарисованной автором в 1953 г. схемы продвижения сравнительно умеренной флоры с *Taxodium* с востока и более раннее появление пыльцы *Taxodium* в спектрах азиатских.

Более детальное исследование массового материала по северному Предкавказью, а также новый материал по западному Предкавказью показали, что в ряде регионов появление большого количества пыльцы *Taxodium* приурочено не только к среднеолигоценовым, но и к нижнеолигоценовым отложениям, т. е. к хадумскому горизонту, который синхронизируется

с отложениями чеганских глин. Правда, принадлежность этой пыльцы именно к виду *Taxodium* aff. *distichum* еще не доказана, но находки пыльцы этого рода обычно связываются с эпохой развития широколиственных лесов, а спектры хадумских отложений, в которых обнаружено большое количество пыльцы *Taxodium*, содержат значительное количество пыльцы древесных пород, возможно, широколиственных.

Чеганское время в Приаралье и Прииртышье знаменуется притоком различных хвойных, в настоящее время приуроченных в основном к атлантическим берегам Северной Америки [сосны из секций *Strobus*, *Taeda Australis*, *Banksia*, а также *Taxodium* Rich. (фиг. 10).]

В конце среднего и в верхнем олигоцене облажаются большие пространства суши в связи с интенсивными поднятиями в области Мугоджар и окраин Казахского нагорья. В Северном Приаралье и в Павлодарском Прииртышье это время примерно совпадает с почти полным выпадением из спектров пыльцы *Taxodium distichum*. Этот период знаменуется широким распространением различных видов сосен и других родов сем. Pinaceae (роды *Picea*, *Keteleeria*, *Abies*, *Tsuga*), основное число видов которых в настоящее время приурочено к атлантическому побережью Северной Америки и Западной Европы, Средиземноморью и юго-востоку Азии (фиг. 11 и 12). При этом основная масса родов и видов, близких к ныне обитающим на востоке Азии, отмечена в спектрах Павлодарского Прииртышья. В спектрах Северного Приаралья их значительно меньше.

Спектры, содержащие наибольшее число видов сосен и характеризующиеся абсолютным преобладанием пыльцы рода *Pinus* над всеми видами других хвойных, обычно связаны с появлением и широким развитием широколиственной листопадной флоры со значительным участием серокоцедневных.

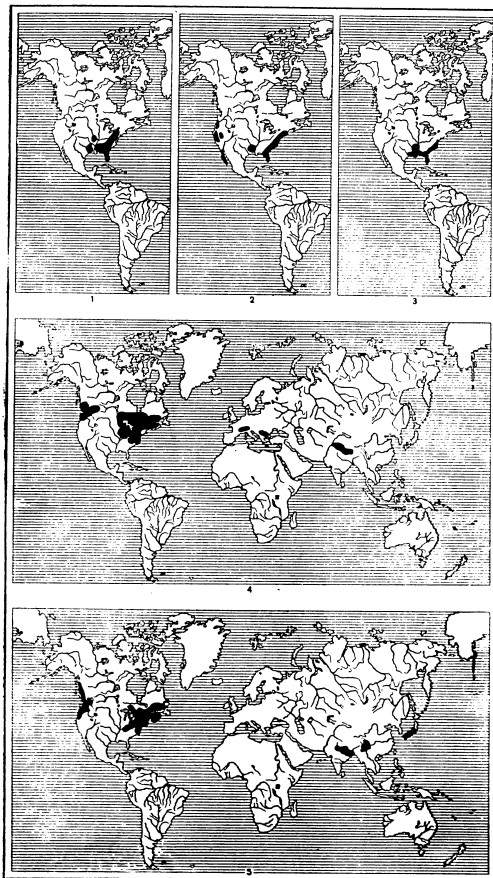
Волна распространения широколиственной умеренной листопадной флоры, в основном двигающаяся из азиатских центров (Китай?), охватила все пространство обширного Киргизского материка и Западной Сибири, от оз. Зайсан до оз. Чаны, и на запад — до Мугоджар. Но это широкое распространение широколиственной флоры нельзя рассматривать как сплошное покрытие, как это предполагали большинство исследователей на основании листовых отпечатков. Распространены были широколиственные породы на большой территории, но распространение это было не сплошным, а приуроченным к соответствующим высотным отметкам и к обитаниям с достаточно богатыми влагой почвами.

Одновременно с развитием широколиственных лесов распространены были обильно произраставшие хвойные: на песчаных террасах рек, на кристаллических массивах нагорья, на высоких берегах мелющего моря располагались самые разнообразные сообщества сосновых и смешанных хвойных лесов с различными видами елей, кедров, сосен, *Tsuga* и тиссов.

На литоральных моря и солончаковых почвах обильно развивались полупустынные и пустынные ассоциации с массой травянистых ксерофитов, которые проникали внутрь страны. В это время в северных и южных районах Казахстана, по-видимому, уже начали закладываться элементы саванного типа, в Приаралье же укоренились полупустынные сообщества.

В самых верхних горизонтах чеганской свиты и в нижних горизонтах первой свиты континентальных отложений Павлодарского Прииртышья, а также в нижних горизонтах кутаубулакской свиты Северного Приаралья спектры изобилуют пыльцой хвойных значительно более умеренного типа, чем в морских отложениях.

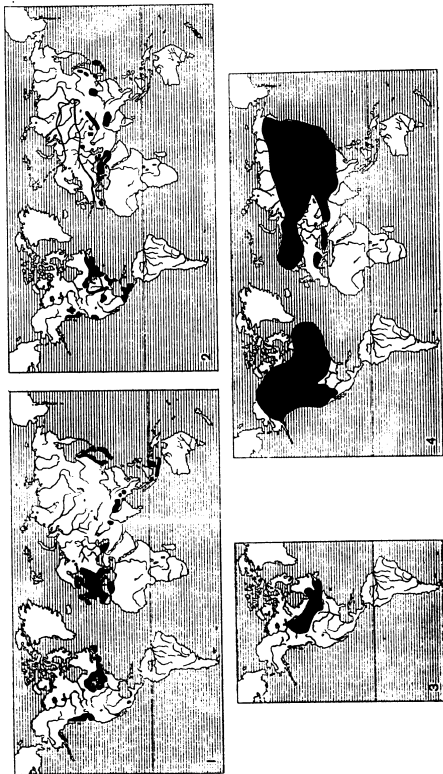
В верхних горизонтах среднего олигоцене и в верхнем олигоцене некоторое осушение климата и постепенное похолодание его сказываются в почти полном исчезновении пыльцы *Taxodium* и в постоянном участии пыльцы *Ephedra*.



Фиг. 10. Ареалы современных видов *Pinus* секции *Australes* L. o. u. d.; *Pinus* секция *Taeda* S p a c h., *Pinus* секция *Strobus* S h a w. и родов *Taxodium* R i c h. и *Tsuga* C a r r.

1 — *Pinus polastris* M.H.; 2 — *Pinus* секция *Taeda* Spach.; 3 — *Taxodium* R i c h.,  
4 — *Pinus* секция *Strobus* S h a w.; 5 — *Tsuga* C a r r.





Фиг. 11. Современное распространение рода *Pinus* L., сек. *Contorta* в Припятьском бассейне. 1 — *Pinus contorta* Banksia M & Y. F. и подг. *Pinus contorta* Banksia M & Y. F.; 2 — *Pinus contorta* Banksia M & Y. F.; 3 — *Pinus contorta* Banksia M & Y. F.; 4 — *Pinus contorta* Banksia M & Y. F.

Приток хвойных, приуроченных в настоящее время к восточным окраинам Азиатского материка, именно в это время особенно интенсифицирован. В составе спектров хвойно-широколиственных лесов умеренного типа особенно ярко выражено участие видов, подобных восточносибирским и азиатско-китайским: например *Picea alata* sp. nov. (pollen), подобная *Picea jezoensis* C a r t., *Keteleeria davidianaeformis* sp. nov. (pollen), *Abies protofirma* sp. nov. (pollen), *Abies sibiriciformis* sp. nov. (pollen) и др. Во всех спектрах второй свиты континентальных отложений Павлодарского Припятья широко распространена сосна типа *Pinus silvestris*. В спектрах синхронной ей чиликтинской свиты Северного Припятья участие азиатского элемента выражено значительно слабее.

К концу олигоцена в районе Припятья начинается значительное обеднение лесными формациями, которое становится еще заметнее в миоцене и уже к миоцен-плиоцену приводит к почти полной смене лесных ландшафтов открытыми сухостепными. Аналогичное явление наблюдается и в Приаралье, где миоценовая фауна указывает на значительное участие степных и полупустынных элементов в общем комплексе млекопитающих и птиц.

Можно представить себе, что волна наступающих с севера и северо-востока широколиственных листопадных представителей лесной флоры «тургайского типа» (в понимании А. Н. Криштофовича), двигавшаяся на окончательно освободившиеся от моря участки суши и отражившаяся в период повышения процентного содержания пыльцы широколиственных пород в спектрах, значительно ослабла.

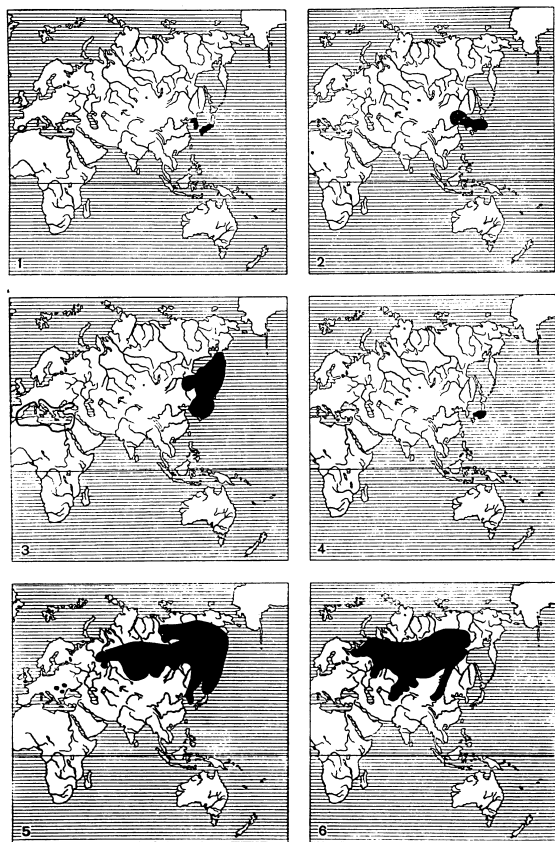
Произошло это, по-видимому, под влиянием общей аридизации и повышения континентальности климата и в связи с этим — распространения средне- и южноазиатских ксерофитов. Лесная растительность, распространявшаяся было на обширных территориях не смогла больше развиваться и отступила к западу, оставив в горных районах суши своих хвойных представителей. Отступала она, видимо, в направлении Тургайского пролива, на территории которого, по данным Е. П. Бойцовой<sup>1</sup>, И. М. Покровской, Р. Я. Абузаровой и других исследователей, еще в миоцене существовали большие массивы смешанно-широколиственных лесов с участием болотного кипариса. Широколиственные леса локального распространения существовали в Приаралье в миоценовую эпоху.

В спектрах Павлодарского Припятья находки пыльцы *Ephedra* cf. *distachya* L. и *Ephedra* aff. *intermedia* S c h r. становятся все более обычным явлением. Встречается вид *Ephedra* cf. *Przewalskii* S t a r f., находки которой еще раз подтверждают тесную связь припятьской флоры с пустынными областями Азии.

Время формирования осадков солоноватоводной аральской свиты в Приаралье и широко распространенных гипсоносных глин озерного происхождения в Припятье связано уже с ярко выраженным осушением климата и общим обеднением лесной растительности, которая, очевидно, в виде островов сохранялась вблизи озерных водоемов. Фауна этих отложений свидетельствует не только о наличии лесных массивов (бобры, медведи), но и о широком распространении открытых ассоциаций, где обитали пищухи, тушканчики, наземные черепахи и др.

Спорово-пыльцевые спектры олигоцена бедны видами голосеменных. Основная масса их уже перестала существовать на территории Приаралья

<sup>1</sup> По последним данным К. В. Накфоровой и А. Л. Янишина, отложения, относимые Е. П. Бойцовой к нижнему миоцену, являются верхнеолигоценными, соответствующими по возрасту четвертой свите континентальных отложений в Павлодарском Припятье. К сожалению, к моменту составления сводки по голосеменным вступу не удалось еще подтвердить это положение данными спорово-пыльцевого анализа.



Фиг. 12. Современное распространение *Pinus* секции *Cembrae*, *Sciadopitys*, *Picea jezoensis*, *Abies sibirica*, *Abies firma* и рода *Keteleeria*.  
 1 — *Abies firma* Sieb. et Zucc.; 2 — *Keteleeria* Carr.; 3 — *Picea jezoensis* Carr.; 4 — *Sciadopitys* Sieb. et Zucc.; 5 — *Pinus* секции *Cembrae* S p a c h.; 6 — *Abies sibirica* Ledeb.

и Казахстана. Голосеменные представлены всего пятью-шестью видами, встречающимися в спектрах спорадически.

Постепенное обеднение спектров пылью древесных пород и одновременное обогащение их различными видами травянистых и кустарниковых ксерофитов подводит нас к почти абсолютно «безлесным» спектрам миоцено-плицена. Здесь во время отложения павлодарской свиты и песков с обильной гиппарионовой фауной голосеменные играли незначительную роль. Находки пыльцы голосеменных в миоцено-плиценовых спектрах содержат единичные зерна *Picea*, *Pinus*, *Tsuga*, *Taxus*, *Ephedra*. Это совпадает с почти полным исчезновением пыльцы широколиственных и вообще всяких древесных пород. Флора *Ephedra* развивается параллельно с широким распространением травянистых ксерофитов различных семейств, родов и видов (Chenopodiaceae — 5 sp., Compositae — 3 sp., Plumbaginaceae, Gramineae, Umbelliferae (*Ferula* sp. (?) и др.).

Однако следует отметить, что, несмотря на то, что резко усилившаяся континентальность климата и значительная аридизация вели к полному исчезновению лесных формаций еще в раннечетвертичное время, — условия влажности и уровень грунтовых вод по долинам рек способствовали развитию галерейных лесов или роц.

В верхнечетвертичных отложениях мы уже находим лишь единичные зерна пыльцы *Pinus silvestris* и большое количество *Ephedra*.

Итак, флористический анализ пыльцы голосеменных, являющийся частью флористического анализа спорно-пыльцевых спектров вообще, дает возможность выделить руководящие спорно-пыльцевые спектры для целей дробного стратиграфического расчленения морских и континентальных отложений и сопоставить отложения как смежных, так и удаленных районов.

Прослеживая флористические комплексы голосеменных в спектрах из последовательно изученных опорных разрезов третичных и более молодых отложений Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья, можно подойти к обоснованию дробного стратиграфического расчленения осадочных отложений, чего не позволяет сделать стандартный анализ с простым подсчетом встречающихся форм и сопоставлением процентного содержания их. Так, наиболее трудная для расчленения толща солонатоводных и континентальных отложений Приаралья, Прииртышья и прилегающих к ним Тургай и Западной Сибири обычно делится на свиты на основании литологических особенностей, флористических находок и стандартных пыльцевых анализов, в результате чего возникают разногласия о количестве этих свит как в Тургае, так и в Прииртышье. Р. Я. Абузярова и В. В. Лавров от двучленного деления континентальных отложений Тургай перешли к четырехчленному. Е. П. Бойцова и И. М. Покровская для этого же района предлагают трехчленное деление континентальной толщи.

В Прииртышье при предварительных исследованиях К. В. Никифоровой выделено четыре свиты континентальных отложений. Проведение границы между первой свитой и верхними горизонтами чеганских отложений сильно затруднено в связи с исключительной фашиальной изменчивостью последних и значительным однообразием спорно-пыльцевых спектров этих отложений. В настоящее время К. В. Никифорова пришла к выводу, что отложения, залегающие непосредственно на верхних горизонтах чеганских глин с морской фауной и представленные обычно песками с маломощными прослойками глин и с обилием растительных остатков (как правило, в виде растительной трухи), следует относить к первой свите континентальных отложений. Это вполне совпадает с данными спорно-пыльцевого анализа. Большинство спектров из горизонтов песков и озерно-старичных глин с растительной трухой относятся к подгруппе *Pinus — Taxodium — Tsuga*, к которой принадлежит спектры континент-

гальных отложений среднего олигоцена. Все спектры континентальных свит в большей или меньшей степени богаты пылью широколиственных пород и сержкоцветных, а также содержат значительное количество пыльца хвойных. При помощи анализа пыльца голосеменных выделяются руководящие группы и подгруппы спектров, которые выдерживаются в стратиграфической последовательности и в Павлодарском Прииртышье и в Северном Приаралье.

Так, выясняется, что первая свита в Павлодарском Прииртышье (с растительными остатками и раковинами *Cyrena*), представленная мелко-слоистыми глинами, переслаивающимися с песком, и слоистыми глинами с ирозитом и массой растительной трухи, расчленяется на два горизонта. Нижние слои (горизонты) свиты содержат спектры с примесью некоторого количества ксерофитов и еще ближе к спектрам верхних горизонтов чеганских глин (оз. Селеты-Тенгиз, обн. 2, скв. 4, пос. Подлуск). В них содержится еще сравнительно небольшое количество пыльца голосеменных. Спектры более верхних горизонтов свиты (Аган-Сай, лог Кара-Кудук и др.) содержат спектры, аналогичные спектрам кутаббулакской свиты в Северном Приаралье с обилием голосеменных. Естественным выводом отсюда будет, что нижние горизонты первой свиты являются как бы переходными от морского к континентальному олигоцену. Основная масса отложений первой свиты отлагалась уже одновременно со слоями кутаббулакской свиты Северного Приаралья и содержит оолитовые железные руды (оз. Кара-Су, обн. 13, 14, 15). Спектры, выделенные из глин и песков в этих пунктах, содержат пыльца *Tsuga crisper* sp. nov. (pollen), *T. torulosa* sp. nov. (pollen), *Pinus minutus* sp. nov. (pollen). В Тургае (если сравнивать с данными Р. Я. Абузяровой, которая строит стратиграфическое расчленение континентальной толщи, придерживаясь схемы В. В. Лаврова, в последнем ее варианте) отложениями первой свиты Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья соответствует «пристиготериевая» свита с примесью ксерофильной флоры в нижних слоях.

К сожалению, мною лично еще не проделаны спорово-пыльцевые анализы континентальных отложений Тургайской впадины и поэтому пока нет достаточных данных, чтобы сопоставить их со свитами Приаралья и Прииртышья на основании руководящих форм голосеменных. Однако наблюдения К. В. Никифоровой и предварительный просмотр спорово-пыльцевых спектров, а также сравнение данных спорово-пыльцевых остатков флоры говорят в пользу того, что вторая свита Павлодарского Прииртышья, чидиктинская свита в Приаралье и индикотериевая свита (включая болаттамские слои) Тургайской впадины отлагались одновременно (фиг. 13).

Четвертая свита континентальных отложений в Прииртышье, несмотря на то, что она по возрасту относится к верхней группе спектров *Ephedra*, к которой также относятся миоценовые и миоцен-плиоценовые, а также и четвертичные спектры. В этой группе выделяется нижняя подгруппа спектров Рипасае, к которой относятся два типа спектров — олигоцен-миоценовый четвертой свиты и миоценовый — аральской. Группа спектров *Ephedra* выделена на основании того, что время формирования их характеризуется постепенным выпадением большинства видов и родов голосеменных, представленных в двух предыдущих группах. Начало обеднения спектров относится ко времени отложения четвертой свиты континентальных отложений.

Итак, судя по составу спорово-пыльцевых спектров морских и континентальных отложений и флористическому анализу состава пыльца голосеменных в этих спектрах, с учетом палеогеографических данных, выясняется следующее.

80

Павлодарское Прииртышье		Тургайская впадина			Северное Приаралье	
Возраст	Свиты по схеме К. В. Никифоровой	Свиты по схеме Р. Я. Абузяровой	Свиты по схеме В. В. Лаврова	Свиты по схеме Е. П. Войцовой и И. М. Покровской	Свиты по схеме А. Л. Филиппа и Л. И. Формозовой	
Четвертичные отложения	Q <sub>4</sub>					
	Q <sub>3</sub>	Палевои				
	Q <sub>2</sub>	Голубая				
	Q <sub>1</sub>					
Плиоцен	верхний	Павлодарская				
	нижний					
Миоцен	верхний		Павлодарская	Краснобурые пески и глины		
	средний			Зеленые гипсоносные глины (аральская свита)		
	нижний	Аральская	Аральская	Аральская	Грубообломочные породы	Аральская
Олигоцен	верхний	Четвертая	Тургайская (песчано-глинистая)	Тургайская	Лигитноносная, песчаная и песчано-глинистая свита	Чагайская
	средний	Третья Вторая Первая	Болаттамская Индикотериевые слои Пристиготериевые слои	Болаттамская Индикотериевая	Бурые и краснобурые алевролиты Глины карбонатные (малокарбонатные)	Жаксантыльская Чидиктинская Кутаббулакская
	нижний	Чеганская	Чеганская	Чеганская	Чеганская	Чеганская
	Эоцен	верхний	Оюковская	Свита кварцитовых песчаников		
	средний	Глаукоцитовая				Тасаранская
Мел-палеоген		Подглаукоцитовая				

Фиг. 13. Сопоставление свит морских и континентальных отложений Павлодарского Прииртышья, Тургайской впадины и Северного Приаралья

1. Голосеменные растения имели весьма существенное значение в палеогеновой растительности Киргизского материка, Мугоджар, а также близлежащих участков суши Средней Азии и восточных окраин Кавказа.

2. Для доэоценового времени характерно меньшее участие голосеменных в растительном покрове. Особенно сильного развития голосеменные достигают в верхнем эоцене и среднем олигоцене. В этот период в спектрах наблюдается особенное разнообразие пыльцы видов голосеменных. Наиболее широко в среднем олигоцене развиты представители рода *Pinus*. Начиная с верхнего олигодена наблюдается резкий спад в распространении голосеменных, продолжающийся в миоцене и плиоцене. К концу плиоцена голосеменные, по-видимому, были представлены в основном только двумя родами: *Pinus* и *Ephedra*.

3. Среди голосеменных палеогена основное место занимали различные представители класса Coniferales; в подчинении были Сусадасеае, Спкгоасеае, Снетасеае и др.

4. Состав голосеменных вообще и класса хвойных в частности был неодинаков в продолжение различных веков кайнозой; изменение состава голосеменных происходило под влиянием изменения климата, рельефа и расширения площади материков.

5. В более древних отложениях палеогена флористический облик спектров голосеменных был своеобразен. В них сочетались представители древних тропических и субтропических флор Гондваны (?) и древнего Средиземноморья при незначительном участии умеренного азиатского элемента.

6. В средне- и верхнеолигоценное время, под влиянием расширения материков Азии и Европы, а затем исчезновения Тургайского пролива, осуществляется смещение флор, происходящих от древнего субтропического средиземноморья, с флорами умеренными, происходящими из восточных и китайских центров Азии. В результате формируется новая флора, значительно более умеренная и более богатая родами и видами хвойных из сем. Pinaceae, чем флора эоцена.

7. В связи с общим осушением климата и прогрессирующим увеличением континентальности его, в особенности в Приаралье, растительность открытых местообитаний вытесняет древесные ассоциации. Приток хвойных растений из азиатских центров на территорию Киргизии приостанавливается. Хвойные постепенно отступают к горным районам.

8. В миоцен-плиоцене древесная растительность, в том числе и хвойная, почти полностью исчезает на изучаемых территориях и одновременно приобретает большое значение флора *Ephedra*.

9. Проследив последовательные этапы развития голосеменных на территории Приаралья и Казахстана, начиная от нижних горизонтов палеогена и до наших дней, удается выделить определенные этапы в ее развитии, которые отражаются на составе спектров, извлеченных из палеогеновых, неогеновых и четвертичных отложений последовательно. Эти спектры не только отражают историко-флористические этапы развития голосеменных, но имеют и коррелирующее значение. Выделены группы, подгруппы и типы спектров и некоторые руководящие формы для них (фиг. 14 и 15).

1. Для группы Podocarpaceae — *Cedrus* в Приртыше характерны:

а) Спектры подглауконитовой свиты

*Dacrydium clatumiformis* sp. nov. (pollen) — около 20%,  
*Podocarpus* (3 sp.);  
*Podocarpites kasakhstanica* sp. nov. (pollen),  
*Podocarpus sellowiformis* sp. nov. (pollen),  
*P. andiniformis* sp. nov. (pollen);  
*Cedrus* (5—6 sp.) — около 28%;

*Cedrus parvisaccata* Zauer (pollen),  
*C. longisaccata* Zauer (pollen),  
*C. laxireticulata* Zauer (pollen),  
*C. pusilla* Zauer (pollen),  
*C. aff. decodara* Loud.;  
*Picea tasaranica* sp. nov. (pollen),  
*Pinus gerardianaeformis* sp. nov. (pollen),  
*P. banksianaeformis* sp. nov. (pollen),  
*P. protoembra* sp. nov. (pollen), около 18%,  
*Welwitschiacites protomirabilis* sp. nov. (pollen),  
*Taxus cuspidataeformis* sp. nov. (pollen).

#### б) Спектры оококовой свиты

*Cedrus* (5 sp.) — около 12%:

*Cedrus Janchinii* sp. nov. (pollen),  
*C. pusilla* Zauer (pollen), около 5%,  
*C. longisaccata* Zauer (pollen),  
*Pinus ponderosaeformis* sp. nov. (pollen), около 10%,  
*P. bicornis* sp. nov. (pollen),  
*Picea tasaranica* sp. nov. (pollen),  
*Agathis ovataeformis* sp. nov. (pollen),  
*Araucaria elegans* sp. nov. (pollen);  
*Podocarpites kasakhstanica* sp. nov. (pollen),  
*Podocarpus nageiaformis* sp. nov. (pollen),  
*Torreya* и *Torreya californiformis* sp. nov. (pollen) — около 14%,  
*Pinus* секции *Combrae* — около 20%.

В Северном Приаралье верхней части этой группы (т. е. спектрам, оококовой свиты) соответствует группа Podocarpaceae, для которой характерно присутствие пыльцы следующих видов:

#### а) Спектры тасаранской свиты

*Cedrus laxireticulata* Zauer (pollen), около 10%,  
*C. longisaccata* sp. nov. (pollen), около 10%,  
*Dacrydium clatumiformis* sp. nov. (pollen), около 10%,  
*Podocarpus nageiaformis* sp. nov. (pollen), около 10%,  
*Picea tasaranica* sp. nov. (pollen),  
*Araucaria elegans* sp. nov. (pollen),  
*Pinus protoembra* sp. nov. (pollen), около 15%,  
*P. banksianaeformis* sp. nov. (pollen), около 20%,  
*Taxus cuspidataeformis* sp. nov. (pollen).

#### б) Спектры саксаульской свиты

*Dacrydium clatumiformis* sp. nov. (pollen),  
*Podocarpus sellowiformis* sp. nov. (pollen),  
*P. andiniformis* sp. nov. (pollen),  
*Podocarpites gigantea* sp. nov. (pollen),  
*Agathis ovataeformis* sp. nov. (pollen), около 10%,  
*Cedrus laxireticulata* Zauer (pollen), около 10%,  
*C. piniformis* sp. nov. (pollen), около 12%,  
*C. longisaccata* sp. nov. (pollen),  
*C. Janchinii* sp. nov. (pollen), около 20%,  
*C. pusilla* Zauer (pollen),  
*Picea tasaranica* sp. nov. (pollen),  
*Torreya californiformis* sp. nov. (pollen) и *Torreya*, около 10%,

*Podocarpites gigantea* sp. nov. (pollen),  
*Pinus* секции *Strobus*, около 30%,  
*Pinus taedaeformis* sp. nov. (pollen), около 20%.

II. Для группы *Taxodium* — *Pinaceae* в Прииртышье и *Taxodium* — *Pinus* в Приарале характерно появление пыльцы рода *Taxodium* Rich. *Tsuga* Сагг., *Pinus peuceformis* sp. nov. (pollen), *P. minutus* sp. nov. (pollen) и др., а также особенное обилие видов рода *Pinus*, представленного различными секциями.

В Павлодарском Прииртышье подгруппа *Taxodium* этой группы, к которой относятся спектры чеганской свиты, в основном представлена следующими видами:

*Zamites* sp. nov. (pollen),  
*Encephalarites cycadioides* sp. nov. (pollen),  
*Ginkgo bilobaeformis* sp. nov. (pollen), около 10%,  
*Ginkgoites* sp. (pollen),  
*Abies protofirma* sp. nov. (pollen),  
*Taxodium aff. distichum* L. (Rich.), около 44%,  
*Pinus strobiliformis* sp. nov. (pollen),  
*P. protosilvestris* sp. nov. (pollen), около 12%,  
*P.* секции *Banksia* Мауг., около 18%.

Подгруппа *Pinus* — *Taxodium* — *Tsuga*, к которой относятся спектры первой и второй свит, в основном содержит:

#### а) Спектры первой свиты

*Podocarpus aff. dactyloides* A. Rich.  
 Максимум пыльцы рода *Pinus* (до 80%), в том числе:  
*Pinus peuceformis* sp. nov. (pollen), около 15%,  
*P. protosilvestris* sp. nov. (pollen), около 12%,  
*P. minutus* sp. nov. (pollen),  
*Picea schrenkianaeformis* sp. nov. (pollen),  
*P. alata* sp. nov. (pollen)  
*Keteleeria* gen.,  
*Tsuga crispa* sp. nov. (pollen),  
*Tsuga torulosa* sp. nov. (pollen),  
*Taxodium aff. distichum* L. (Rich.).

#### б) Спектры второй свиты

*Pinus singularis* sp. nov. (pollen), около 10%,  
*Tsuga aff. canadensis* (L.) Сагг.,  
*T. crispa* sp. nov. (pollen),  
*T. torulosa* sp. nov. (pollen),  
*Pinus exelsaeformis* sp. nov. (pollen), около 20%,  
*P. longifoliaeformis* sp. nov. (pollen), около 10%,  
*Ephedra aff. Przewalskii* Staph.,  
*E. aff. distachya* L.

В Северном Приарале подгруппа *Cedrus* — *Taxodium*, соответствующая подгруппе *Taxodium* Прииртышья и включающая спектры чеганской свиты, в основном представлена следующими видами:

*Ginkgo aff. biloba* L. и *G. bilobaeformis* sp. nov. (pollen), около 10%,  
*Arucaria elegans* sp. nov. (pollen), около 10%,  
*Podocarpus nageiaeformis* sp. nov. (pollen),  
*Cedrus aff. libani* Laws.,  
*C. aff. atlantica* Maletti,  
*C. pusilla* Zaueг (pollen), около 12%.

Максимум пыльцы рода *Pinus* (около 60%), среди них:  
*Pinus singularis* sp. nov. (pollen),  
*Taxodium aff. distichum* L. (Rich.), около 12%,  
*Gnetumites* sp. (pollen).

Подгруппа *Pinus* — *Taxodium* — *Tsuga*, к которой относятся спектры кутанбулакской и чиликтинской свит, в основном содержит:

#### а) Спектры кутанбулакской свиты

*Taxus baccataeformis* sp. nov. (pollen), 5—10%,  
*Pinus aff. koraiensis* Sieb. et Zucc. (около 10%),  
*P. minutus* sp. nov. (pollen),  
*P.* секции *Eupitys*, около 30%,  
*P. singularis* sp. nov. (pollen),  
*Taxodium aff. distichum* L. (Rich.),  
*Tsuga crispa* sp. nov. (pollen),  
*Podocarpites kasakhstanica* sp. nov. (pollen),  
*Abies sibiriciformis* sp. nov. (pollen).

#### б) Спектры чиликтинской свиты

*Pinus taedaeformis* sp. nov. (pollen),  
*P. singularis* sp. nov. (pollen), от 10 до 5%,  
*P.* секции *Eupitys*,  
*P. minutus* sp. nov. (pollen),  
*Ephedra* gen. (2 sp.),  
*Taxodium aff. distichum* L. (Rich.),  
*Taxus baccataeformis* sp. nov. (pollen), 5—10%.

III. Для группы *Ephedra*, выделенной только для Прииртышья, характерно прогрессирующее обеднение видового состава голосеменных, выделение члеников родов и семейств их и особенно интенсивное развитие *Pinus aff. silvestris*, а затем *P. silvestris* и рода *Ephedra*.

Основными руководящими видами для подгруппы *Pinaceae* этой группы, включающей спектры четвертой и аральской свит, являются:

*Ephedra aff. intermedia* Schг.,  
*Picea alata* sp. nov. (pollen),  
*Picea schrenkianaeformis* sp. nov. (pollen),  
*Pinus* секции *Cembrae*,  
*P. aff. silvestris* L.,  
*P. aff. exelsa* Wall.

Для подгруппы же *Pinus* — *Ephedra*, в которую включены спектры павлодарской свиты и всех свит четвертичных отложений, основными руководящими видами являются:

а) Для спектров павлодарской свиты и нижнечетвертичных отложений —  
*Ephedra* gen. (3 sp.), около 26%,  
*Pinus aff. koraiensis* Sieb. et Zucc.,  
*P. aff. strobus* L.,  
*P. aff. silvestris* L.,  
*Tsuga aff. canadensis* (L.) Сагг.,  
*T. crispa* sp. nov. (pollen),  
*T. torulosa* sp. nov. (pollen), +<sup>1</sup>  
*Taxodium aff. distichum* L. (Rich.) +

б) Для спектров свит голубой, палеовой и позднечетвертичных отложений —

<sup>1</sup> Знак + обозначает единичные находки.

*Picea* секции *Euricea*,  
*Pinus* aff. *cembra* L.,  
*P.* aff. *strobis* L.,  
*P.* aff. *silvestris* L.,  
*Ephedra* (2 шр.), около 22%.

10. Коррелирующие группы спектров позволяют выделить подглаукозитовую толщу песков и глин в Прииртышье в самостоятельную, наиболее древнюю свиту — мел-палеоценовую; сопоставить опоковую свиту Прииртышья с саксаульской и отчасти с тасаранской свитами Приаралья; сопоставить верхние горизонты ащайрыкской свиты О. С. Вялова (?) в Тургае с нижними горизонтами кутанбулакской свиты в Приаралье и с нижними слоями первой свиты в Павлодарском Прииртышье, а континентальные озерные отложения первой свиты в Прииртышье — со средними и верхними горизонтами кутанбулакской свиты в Приаралье; выделить в отдельную группу свиты: четвертую, аральскую, павлодарскую и свиты четвертичных отложений. Для этой группы характерен упадок развития голосеменных. По видимому составу голосеменных следует выделить отложения четвертой свиты в особую подгруппу олигоцен-миоценового возраста, а отложения аральской свиты — в подгруппу миоценового возраста; выделить на основании видového состава голосеменных ряд типов спектров, характеризующих миоцен-плиоценовые, нижне-, средне- и верхнечетвертичные и современные отложения.

11. Границы флористических групп спектров совпадают с границами свит, выделенных при помощи фацеального анализа. Флористический анализ спорово-пыльцевых спектров даст возможность детально расчленить эти свиты в тех случаях, когда изучение их литологического состава не даст должного эффекта.

12. Схема стратиграфического положения руководящих групп пыльцевых спектров голосеменных является частью общей схемы стратиграфического положения руководящих спорово-пыльцевых спектров и голосеменных, покрытосеменных и спор в комплексе; в настоящей работе автор сделал попытку выявить возможность разработки такой схемы на примере изучения пыльцы голосеменных, выделенных из третичных и более молодых отложений Северного Приаралья и Павлодарского Прииртышья.

В дальнейшем эта схема должна быть значительно расширена и уточнена при помощи изучения спорово-пыльцевых спектров неогеновых и верхнепалеогеновых отложений Северного Приаралья, а также в процессе пересмотра материалов по Тургайскому прогибу, с проведением анализа состава пыльцы голосеменных по той схеме, которой придерживался автор при изучении голосеменных в Приаралье и Прииртышье.

В заключение следует отметить совершенную необходимость введения в практику спорово-пыльцевых исследований третичных отложений флористического анализа. Последнее позволит использовать ареалы современных видов и родов для решения вопросов о происхождении и миграции флор, а также облегчит сопоставление одновозрастных отложений на территориях, значительно удаленных одна от другой.

Надо полагать, что это в настоящее время единственно правильный путь к расшифровке данных спорово-пыльцевого анализа и к расширению возможностей применения его в области стратиграфии.



Литологический состав	Связи по к.в. выщерфовкой	Основа (по к.в. выщерфовкой)	Фацна (по данным к.в. выщерфовкой и к.в. выщерфовкой)	Макрокосмические составы флоры (по данным Р.А. Баранова и А.П. Музы)	Данные спорова-пыльцевых анализов	характер флоры и тип растительности	Рассеяние							Ручководные роды и виды																						
							Род <i>Dasycarpus</i>	Род <i>Phytocladus</i>	Род <i>Cedrus</i>	Род <i>Pinus</i>	Род <i>Taxodium</i>	Род <i>Tsuga</i>	Род <i>Ephedra</i>																							
	I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI, XVII	I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI, XVII	I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI, XVII	I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI, XVII	I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI, XVII	I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI, XVII	I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI, XVII	I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI, XVII	I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI, XVII	I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI, XVII	I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI, XVII	I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI, XVII	I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI, XVII	I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI, XVII	I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI, XVII	I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI, XVII	I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI, XVII																			
																		Палеовалдая	Гайльваля	Иммер-Иммер-Иммер	Павлодарская	Аральская	Четвертая	Третья	Вторая	Первая (континентальная)	Верхняя горизонтальная	Средняя	Низ	Олоковая	Глауколитовая	Подлепунитовая				

Фиг. 15. Ручководные спектры головок пылевых зерен различных отложений Павлодарского Предгорья. Составляющие: 1-17 - различные виды пыльцевых зерен; 18 - споры; 19 - споры; 20 - споры; 21 - споры; 22 - споры; 23 - споры; 24 - споры; 25 - споры; 26 - споры; 27 - споры; 28 - споры; 29 - споры; 30 - споры; 31 - споры; 32 - споры; 33 - споры; 34 - споры; 35 - споры; 36 - споры; 37 - споры; 38 - споры; 39 - споры; 40 - споры; 41 - споры; 42 - споры; 43 - споры; 44 - споры; 45 - споры; 46 - споры; 47 - споры; 48 - споры; 49 - споры; 50 - споры; 51 - споры; 52 - споры; 53 - споры; 54 - споры; 55 - споры; 56 - споры; 57 - споры; 58 - споры; 59 - споры; 60 - споры; 61 - споры; 62 - споры; 63 - споры; 64 - споры; 65 - споры; 66 - споры; 67 - споры; 68 - споры; 69 - споры; 70 - споры; 71 - споры; 72 - споры; 73 - споры; 74 - споры; 75 - споры; 76 - споры; 77 - споры; 78 - споры; 79 - споры; 80 - споры; 81 - споры; 82 - споры; 83 - споры; 84 - споры; 85 - споры; 86 - споры; 87 - споры; 88 - споры; 89 - споры; 90 - споры; 91 - споры; 92 - споры; 93 - споры; 94 - споры; 95 - споры; 96 - споры; 97 - споры; 98 - споры; 99 - споры; 100 - споры.



## VII. MORFOЛОГИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПЫЛЬЦЫ ГОЛОСЕМЕННЫХ, ВЫДЕЛЕННОЙ ИЗ КАЙНОЗОЙСКИХ ОТЛОЖЕНИЙ ПАВЛОДАРСКОГО ПРИИРТЫШЬЯ И СЕВЕРНОГО ПРИАРАЛЬЯ

Спорово-пыльцевые спектры, выделенные автором из палеогеновых отложений Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья, разнообразны по составу; они содержат более 300 различных видов пыльцы и спор, среди которых пыльца голосеменных играет немалую роль, и участие ее в спектрах, принадлежащих различным стратиграфическим горизонтам, во многих случаях может иметь коррелирующее значение.

Так как использование данных спорово-пыльцевого анализа для стратиграфического расчленения третичных отложений с каждым годом расширяется, а отсутствие соответствующих атласов и справочников заметно затрудняет аналитическую работу, автор решает опубликовать данные по пыльце голосеменных до завершения всей предпринятой им работы по морфологическому описанию третичных пыльцы и спор Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья.

К сожалению, до сих пор еще нет схемы порядка описания и наименования ископаемых пыльцы и спор, но, по-видимому, одним из правильных методов является сравнение ископаемых форм с известными формами ныне живущих растений. Конечно, это применимо лишь при описании пыльцевых оболочек, извлеченных из отложений послепалеозойского времени, когда уже появились растения, принадлежащие к тем же семействам, а может быть, и родам, что и многие растения современных растительных ассоциаций. В частности это применимо к ископаемым оболочкам пыльцы и спор третичных растений, так как флора третичного периода в основной массе была уже близка к современной флоре тропиков, субтропиков и, отчасти, умеренных зон.

Поэтому, описывая формы пыльцевых зерен голосеменных, выделенных из третичных отложений, и по возможности приводя их к естественной системе, автор прибегал к употреблению наиболее распространенных в палеонтологии обозначений. Для обозначения предположительной принадлежности к современному семейству, роду или виду употреблялись окончания *ites*, например *Pinites*. Сходство с пыльцой современного вида достаточно близко по совокупности признаков обозначалось сокращенно «aff» (*affinis*); при близком сходстве, но невозможном полном сравнении из-за плохой сохранности — «cf.» (*conformis*). Морфологическое сходство с современным видом обозначалось окончанием *formis* при условии установленного рода, например *Pinus longifoliaformis*. В том же случае, если ископаемые формы были тождественны с формами современными, им придавалось современное наименование, но после него в скобках ставилось *fossilis*. Обычно это употребляется для наименования плиоценовых и четвертичных видов. Этим автор указывал на принадлежность

формы к ископаемому растению. Такой способ характеристики ископаемых пыльцевых зерен, с одной стороны, приближает определение к естественной системе, а с другой — показывает, что автор не считает возможным полностью отождествлять по пыльце ископаемый вид растения с современным даже и в том случае, если морфологическое сходство пыльцы их очевидно.

Только в тех случаях, когда встречена хорошая сохранность ископаемая форма пыльцевой или споровой оболочки имела характерные (выделяющие ее среди прочих известных ископаемых форм) и повторяющиеся морфологические особенности, но не имела аналогов среди пыльцы современных видов растений, ей придавалось новое название, основанное на характере этих морфологических особенностей. При этом чтобы показать, что вид описан только по пыльце, добавлялось в скобках слово «pollen»<sup>1</sup>. Впоследствии, когда будут созданы систематические справочники по морфологии пыльцы современных растений, наименования ископаемых форм в большей мере могут быть уточнены. В настоящее же время очень важно, чтобы одни и те же формы всегда имели одно и то же название и ископаемый материал был бы сравним.

Автор полагает, что, возможно, им допущены некоторые погрешности в определении пыльцы, а поэтому замечания, которые могут возникнуть у лиц, использующих его работу, он с готовностью примет во внимание при дальнейшей работе.

Описание встреченных форм делалось параллельно с подсчетом зерен при анализе. Поэтому выявление основных морфологических признаков ископаемых пыльцевых зерен (оболочек) зачастую было сделано по одному-двум экземплярам. Все пробы обрабатывались ацетилирующей смесью, так что ископаемая пыльца была приведена в состояние, сравнимое с эталонным материалом. Большинство описанных форм документировалось при помощи микрофотографирования или зарисовок. При дальнейших аналитических работах вносились поправки на уклонения в размерах и в характере структурных элементов. Такой метод описания допускает, конечно, пробелы и неточности определения, которые должны исправляться по мере накопления фактического материала.

Комплекс пыльцы голосеменных, встреченных в спорово-пыльцевых спектрах палеогена, содержит три морфологически различных типа зерен (фиг. 16):

I. Пыльцевые зерна сфероподобные, однокамерные, без воздушных мешков, однопоровые или беспоровые (фиг. 16, графа I, 1—8). К этому типу относятся пыльца Taxaceae и *Taxacites*, Taxodiaceae, Pinaceae (род *Tsuga*), Araucariaceae и *Araucarites*; Cupressaceae и *Cupressites*; Gnetaceae (*Gnetumites*).

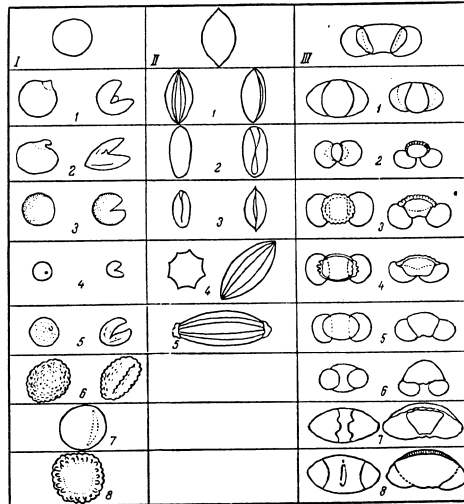
II. Пыльцевые зерна эллипсоидальные, беспоровые, однобороздные или безбороздные, без складок или со складками, без воздушных мешков или с зачаточными воздушными мешками (фиг. 16, графа II, 1—5). К этому типу относятся пыльца Ginkgoaceae, Cupressaceae, *Ephedraceae* и *Ephedrites* и *Welwitschiaceae* и *Welwitschiacites*.

III. Пыльцевые зерна сложной формы, обычно трехкамерные, в отдельных случаях четырехкамерные, с центральным телом и воздушными мешками (фиг. 16, графа III, 1—5). К этой группе относится пыльца Pinaceae (роды *Pinus*, *Picea*, *Abies*, *Cedrus*, *Keleceeria*), *Podocarpus* и *Dacrydium*.

Пыльца семейства гинкговых и цикадовых в настоящей работе охарактеризована недостаточно полно из-за редкости ее находок в кайнозойских спектрах. Кроме того, современная флора дает для них очень бедный сравнительный материал, значительно беднее, чем для других семейств. До-

<sup>1</sup> Аналогично «sp.» Эрдмана (Erdtman, 1947).

статочно напомнить, что из обширного ранее рода *Ginkgo* в настоящее время известен только один вид — *Ginkgo biloba* L. Пыльца сем. Pinaceae охарактеризована полнее, так как сравнительный материал давал возможность довольно широкого сопоставления с пыльцой современных растений. Отождествление описываемой пыльцы с видами или родами ископаемой пыльцы, упомянутой в литературе, производилось не по голотипам,



Фиг. 16. Схематическое изображение различных морфологических типов пыльцы голосеменных.

I — пыльца сфероподобная, однопоровая или беспоровая (1—8), однобороздная или безбороздная (6—8); 1 — тип *Taxoditum*; 2 — тип *Styracis*; 3 — тип *Taxa*; 4 — тип *Torreya*; 5 — тип *Cupressaceae*; 6 — тип *Scedobolus*; 7 — тип *Araucariaceae*; 8 — тип *Tsuga*. II — пыльца эллипсоидальная, однобороздная (1—3) или безбороздная (4—5); 1 — тип *Ginkgoaceae*; 2, 3 — тип *Cupressaceae*; 4 — тип *Ephedra*; 5 — тип *Welwitschia*. III — пыльца сложной формы с воздушными мешками: 1 — тип *Pinus procumbens*; 2 — тип *Podocarpus*; 3 — тип *Pinus* секция *Strobus*; 4 — тип *Pinus sibirica*; 5 — тип *Pinus sibirica*; 6 — тип *Pinus* секция *Banksia*; 7 — тип *Cedrus*; 8 — тип *Picea*.

а по описаниям или микрофотографиям. Голотипы в большинстве случаев оставались для нас недоступными.

Все препараты, по которым велось описание ископаемых форм, относятся к коллекции ГИН АН СССР № 3082. Препараты из Павлодарского Прииртышья имеют индекс  $\frac{3}{K}$  и  $\frac{H}{K}$ , а из Северного Приаралья  $\frac{3a}{K}$ .

Микрофотографии сделаны в фотолaborатории Отдела стратиграфии ГИН АН СССР заведующим лабораторией А. И. Никитиным при непосредственном участии автора. Зарисовки выполнены автором.

ОБЩИЙ СПИСОК ВИДОВ, ПРИВЕДЕННЫХ  
В ОПИСАНИЯХ

КЛАСС CYCADALES  
СЕМ. CYCADACEAE

*Zamites* (pollen).  
*Encephalartes cycadioides* sp. nov. (pollen).

КЛАСС GINKGOALES  
СЕМ. GINKGOACEAE

*Ginkgo bilobaeformis* sp. nov. (pollen),  
*Ginkgoites* (pollen).

КЛАСС CONIFERALES  
СЕМ. TAXACEAE

*Taxus cuspidataeformis* sp. nov. (pollen).  
*T. baccataeformis* sp. nov. (pollen).  
*Taxites* (pollen).  
*Torreya californiformis* sp. nov. (pollen).

СЕМ. PODOCARPACEAE

*Podocarpus sellowiformis* sp. nov. (pollen).  
*P. andiniiformis* sp. nov. (pollen).  
*P. nageiaformis* sp. nov. (pollen).  
*Podocarpites kasakhstanica* sp. nov. (pollen).  
*P. gigantea* sp. nov. (pollen).  
*Podocarpus* aff. *dacrydioides* A. R i g h.  
*Dacrydium elatumiformis* sp. nov. (pollen).

СЕМ. ARAUCARIACEAE

*Araucaria elegans* sp. nov. (pollen).  
*Agathis ovataeformis* sp. nov. (pollen).

СЕМ. PINACEAE

*Abies sibiriciformis* sp. nov. (pollen)  
*A. protofirma* sp. nov. (pollen).  
*Keleleeria davidianaformis* sp. nov. (pollen).  
*Picea lasaranica* sp. nov. (pollen).  
*P. schrenkianaformis* sp. nov. (pollen).  
*P. alata* sp. nov. (pollen) (ex. gr. *P. jezoensis* C a r r.).  
*Cedrus* aff. *deodara* L o u d.  
*C. laxireticulata* Z a u e r (pollen).  
*C. piniiformis* sp. nov. (pollen).  
*C. Janschinii* sp. nov. (pollen).  
*C. parvisaccata* Z a u e r (pollen).  
*C. pusilla* Z a u e r (pollen).  
*C.* aff. *libani* L a w s.  
*C. longisaccata* sp. nov. (pollen).  
*Pinus cembraeformis* sp. nov. (pollen).  
*P.* aff. *koraiensis* Sieb. et Z u c c.

30

*P. microsibirica* sp. nov. (pollen).  
*P. sibiriciformis* sp. nov. (pollen).  
*P.* ex. gr. *sibirica* (R u p r.) M a y r.  
*P. protoembra* sp. nov. (pollen).  
*P.* ex. gr. *protoembra*.  
*P. strobiformis* sp. nov. (pollen).  
*P. peuceformis* sp. nov. (pollen).  
*P. ezelsaeformis* sp. nov. (pollen).  
*P.* ex. gr. *ezelsa* W a l l.  
*P. gerardianaformis* sp. nov. (pollen).  
*P. longifoliaformis* sp. nov. (pollen).  
*P. ponderosaeformis* sp. nov. (pollen).  
*P. bicornis* sp. nov. (pollen).  
*P. minutus* sp. nov. (pollen).  
*P. taedaeformis* sp. nov. (pollen).  
*P. singularis* sp. nov. (pollen).  
*P. banksianaformis* sp. nov. (pollen).  
*P. halepensisformis* sp. nov. (pollen).  
*P. protosilvestris* sp. nov. (pollen).  
*P.* aff. *silvestris* L.  
*Tsuga crispa* sp. nov. (pollen).  
*T. torulosa* sp. nov. (pollen).

СЕМ. TAXODIACEAE

*Sciadopitys tuberculata* sp. nov. (pollen) [ex. gr. *S. verticillata* S i e b. et Z u c c.].  
*Sequoia semperviriformis* sp. nov. (pollen).  
*Taxodium* aff. *distichum* L. (R i c h.).  
*Taxodiumites* sp.  
*Cunninghamia* aff. *lanceolata* L a m b.

СЕМ. CUPRESSACEAE

*Thuoyites* (pollen).  
*Libocedrus* sp. (pollen).  
*Cupressites* (pollen).  
*C.* sp. (pollen), (aff. *Cupressus pallens* B o l c h.).  
*Chamaecyparites* (pollen).

КЛАСС GNETALES

СЕМ. WELWITSCHIACEAE

*Welwitschites protomirabilis* sp. nov. (pollen).

СЕМ. EPHEDRACEAE

*Ephedra eocenipites* W o d e h o u s e.  
*E.* aff. *Przewalskii* S t a p f.  
*E.* aff. *distachya* L.  
*E.* aff. *intermedia* S c h r.  
*Ephedrites trinata* sp. nov. (pollen).

СЕМ. GNETACEAE

*Gnetumites* (pollen).

91

## 1. КЛАСС CYCADALES САГОВЫЕ

## СЕМ. CYCADACEAE — САГОВНИКОВЫЕ

*Zamites* pollen

Пыльца сем. Cycadaceae и Ginkgoaceae относится к типу эллипсоидальных, беспоровых, однобороздных (или с одной складкой).

*Zamites* sp. (pollen)

Табл. I, рис. 1—3

Препарат № 191  $\frac{H}{K}$ 

Пыльца имеет сходство со следующими формами, известными по литературным данным:

1933. *Cycadopites* sp. Wodehouse. Tertiary pollen. The oil shales of the eocene Green River formation, p. 485, fig. 1—3.  
 1949. *Bennettitaceae* — *Pollenites lucifer* sp. Thiergart. Der stratigraphische Wert mesozoischer Pollen und Sporen, Taf. IV/V, Fig. 12.  
 1950. Cycadeen (oder Ginkgoaceen) Pollen Reissinger. Die «Pollenanalyse» ausgeführt auf alle Sedimentgesteine der geologischen Vergangenheit, Taf. XVIII, Fig. 16—22.  
 1950. Cycadeen (oder Ginkgoaceen) Pollen Reissinger. Там же, табл. XIII, фиг. 13—15.

Пыльцевое зерно эллипсоидальное, однобороздное. Длина зерна около 25 м, ширина около 16 м, отклонения в размерах в пределах от 3 до 5 м. Очертание в боковом положении овальное. На дистальной стороне от одного полюса к другому проходит продольная борозда. У некоторых зерен борозда почти скрыта под завернувшимися краями (табл. I, рис. 2), так как зерно часто сминается таким образом, что края его образуют нечто вроде завернувшегося лепестка. Экзина однослойная (при увеличении в 400 раз), в большинстве случаев гладкая или неяснобороздчатая. Контур зерна ровный или слабоволнистый.

Ископаемая форма, если судить по описаниям и рисункам, имеет сходство с пылью *Zamia muricata* Willd. в том случае, если зерно не смито и сохраняет округло-эллиптическое очертание. Пыльца ныне живущих *Zamia muricata* описана В. В. Зауер (1950) в числе прочих Cycadales. Автор отмечает, что пыльца *Zamia* имеет двуслойную оболочку, что различно при увеличении в 700 раз.

Если пыльцевое зерно *Zamites* деформировано и несколько сжато вдоль большой оси, оно имеет некоторое сходство с пылью растений семейства Umbelliferae или Leguminosae.

С. Н. Наумовой (1939) формы, подобные *Zamites* sp., включены в общую группу *Intorta*.

Все перечисленные выше синонимы не дают точного определения данной формы, так как авторы относят описанные ими пыльцевые зерна или к семейству цикадовых или к семейству бенинеттовых. Как известно, эти семейства являются наиболее древней ветвью голосеменных, ведущих свое начало еще с каменноугольного периода, причем Cycadales имели широкое распространение еще в юрское и меловое время. В более молодых отложениях значение их сильно снижается, и в верхнетретичных отложениях находят пыльца растений, принадлежащих к семейству Cycadales, уже единичны.

Местонахождение: Павлодарское Прииртышье, Пос. Паламоновка, скв. 1; верхние горизонты чеганских глин.

Распространение: чеганские глины в пределах Казахстана; зоцен — лйас в Германии; верхний и средний мел — в Центральной Сибири.

*Encephalartes cycadioides* sp. nov. (pollen)

Табл. I, рис. 4 и 5

Препараты № 149  $\frac{H}{K}$  и 233  $\frac{H}{K}$ 

Голотип: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз, чеганские глины и глины второй свиты континентальных отложений среднего олигоцена (препарат № 149  $\frac{H}{K}$ ).

Пыльца имеет сходство со следующими формами, известными по литературе:

1930. *Cycadopites* sp. Wodehouse. Tertiary pollen. The oil shales of the eocene Green River formation p. 485, fig. 1—3.  
 1953. *Encephalartes cycadiiformis* Болховитина. Спорово-пыльцевая характеристика меловых отложений центральных областей СССР, стр. 65, табл. X, рис. 17.

Пыльцевое зерно однобороздное, эллипсоидальное, беспоровое. Размер по большой оси около 30 м, по меньшей — около 20 м; встречаются зерна размерами не более 18 м по меньшей оси. Очертание в боковом положении эллиптическое. Борозда длинная, проходит от полюса к полюсу. Мембрана борозды гладкая. У большинства зерен края борозды в области экватора смыкаются. В результате этого края борозды образуют рисунок в виде восьмерки (табл. I, фиг. 4), что является одним из наиболее характерных диагностических признаков для пыльцы Cycadaceae. Экзина двуслойная, тонкая. Поверхность экзины неравномерно мелкобугорчатая. У краев борозды оба слоя экзины выклиниваются.

С пылью современного вида *Encephalartes Lehmanni* описанная ископаемая форма имеет большое сходство как по форме и очертаниям, так и по характеру поверхности экзины. Отличием ископаемого вида от современного является более тонкая экзина и меньшее количество ее слоев (в описании В. В. Зауер (1950) для пыльцевых зерен *Encephalartes Lehmanni* указаны три слоя экзины, а пыльцевые зерна ископаемого вида имеют лишь два слоя).

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: меловые отложения Казахстана и Сибири; зоцен Америки (флора Грин-Ривер), где пыльца описана под общим названием *Cycadopites*; нижний и средний олигоцен Казахстана.

Пыльца Cycadales трудно отличима от пыльцы Ginkgoales и в основном определения ведутся лишь до семейства. С. Н. Наумовой (1939) формы, подобные Ginkgoaceae и *Encephalartes Lehmanni*, вместе с пылью хвойных без воздушных мешков объединены в общую группу *Intorta*. Ископаемый вид близок к пыле современного рода *Encephalartes Lehmanni*, два вида которого описаны В. В. Зауер (1950). В наше время этот род распространен в Южной и Юго-Восточной Африке. Пыльца, подобная *Encephalartes* в третичных отложениях Казахстана, видимо, может рассматриваться как реликт меловой флоры.

Согласно данным В. В. Зауер (1950), наибольшего распространения саговниковые достигли в конце юрского и в начале мелового периода. Однако, по данным Крейзеля (Krausel, 1949), в третичное время они представлены еще 21 видом.

На территории Казахстана ни пыльцы, ни макроскопических остатков Сусадале до наших исследований не было найдено. В. В. Зауер отмечает обилие находок дикадовых (листовые отпечатки) в окраинных зонах Сибирской флористической провинции юрского периода (флоры Средней Азии).

В настоящее время семейство саговниковых объединяет 9 родов, причем большинство видов, относящихся к этим родам, являются обитателями тропиков.

Растения рода *Zamia* в настоящее время распространены в тропической и субтропической зонах Америки и представляют собой древовидные или кустарниковые формы, по внешнему виду несколько напоминающие кустарниковые формы пальмы или древовидные папоротники.

## 2. КЛАСС GINKGOALES — ГИНКГОВЫЕ

### СЕМ. GINKGOACEAE — ГИНКГОВЫЕ

На основании находок макроскопических остатков и пыльцы установлено, что гинкговые принадлежат к весьма древним семействам, ведущим свое начало еще с девона (Наумова, 1939; Болховитина, 1952). Наиболее широко гинкговые были распространены в юрское время. В меловом периоде число видов их значительно снижается, а в третичных отложениях встречаются представители только одного рода — *Ginkgo*. Один из видов этого рода, а именно *Ginkgo biloba* L., существует и в наше время — в субтропической зоне.

Пыльца ископаемых видов, относимых к семейству Ginkgoaceae, имеет однотипное строение, весьма близкое к строению пыльцевого зерна современного вида *Ginkgo biloba* L.

Пыльцевые зерна эллипсоидальные или округло-эллипсоидальные, односторонние и беспоровые. Размеры: 30—45 м по большей оси и 15—25 м — по меньшей. Очертание зерна в боковом положении округлое или эллиптическое. Контур зерна ровный или слегка волнистый. Борозда вытянута параллельно большей оси, широкая, имеет тонкую мембрану. Контур борозды иногда неровный. Экзина однослойная, тонкая (не более 2 м), значительно утончается и резко обрывается к краям борозды, не выклиниваясь. Поверхность зерна гладкая или неяснобугорчатая. Смятое пыльцевое зерно (смятие обычно происходит в направлении, параллельном большей оси) несколько напоминает пыльцу Сусадале. Наиболее распространенный тип ископаемых зерен, относимых к семейству Ginkgoaceae, ближе всего к пыльце современного вида *Ginkgo biloba* L. (табл. I, рис. 12—14). Ископаемый вид отличается от современного лишь более угловатыми очертаниями.

#### *Ginkgo bilobaeformis* sp. nov. (pollen)

Табл. I, рис. 6—11  
Препараты № 170  $\frac{H}{K}$ , 186  $\frac{H}{K}$  (рис. 6); 198  $\frac{H}{K}$ , 244  $\frac{H}{K}$  и 255  $\frac{3}{K}$  (рис. 7);  
191  $\frac{H}{K}$  (рис. 8 и 9); 334  $\frac{3}{K}$  (рис. 10 и 11)

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, пос. Парамоновка, скв. 1, слюдяные глины с растительными остатками; мел — палеоген (препарат № 186  $\frac{H}{K}$ ).

Пыльца имеет сходство со следующими формами, известными по литературе:

1933. *Cycadopsis* sp. Wodehouse. Tertiary pollen. The oil shales of the eosene Green River formation, p. 485, fig. 1—5.  
1939. *Ginkgo parva* Наумова (in litt.). *Ginkgo gibberosa* Наумова (in litt.).  
1949. *Auminella marginata* Маливкина. Определитель спор и пыльцы Юр — мел., табл. 3, рис. 58.  
1950. Cycadeen (oder Ginkgoaceen) Pollen Reissinger. Die «Pollenanalyse» ausgehend auf alle Sedimentgesteine der geologischen Vergangenheit, S. 124, Taf. XIII, Fig. 13—23.

Строение пыльцевого зерна подобно приведенному в общей характеристике семейства. Размеры: 35—45 м по большей оси и 16—22 м — по меньшей.

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: наиболее достоверны данные о находках пыльцы *Ginkgo* из юрских отложений Урала и Западной Сибири, а также из меловых и третичных отложений от эоцена до среднего олигоцена Казахстана, Среднего Урала и Западно-Сибирской низменности.

Присутствие пыльцы *Ginkgo* отмечено в эоцене Западной Германии и Грин-Ривер в Америке, где пыльцевые зерна типа Ginkgoaceae многие авторы относили к группе «Cycadeen oder Ginkgoaceen pollen».

#### *Ginkgotes* (pollen)

Табл. I, рис. 15, 16  
Препарат № 193  $\frac{H}{K}$

Пыльцевые зерна по внешнему облику подобны пыльце *Ginkgo*. Отличаются значительно большими размерами (до 60 м и более по большей оси). Экзина часто имеет разрывы по борозде.

М е с т о н а х о ж д е н и е: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз; четвертая свита континентального олигоцена (верхний эоцен).

## 3. КЛАСС CONIFERALES — ХВОЙНЫЕ

### СЕМ. TAXACEAE — ТИССОВЫЕ

Пыльца тиссовых относится к типу сферидальных, безбороздных, беспоровых или односторонних пыльцевых зерен.

Размеры варьируют в пределах от 16 до 30 м, в зависимости от принадлежности к роду или виду. Очертания обычно округлые или неправильные в связи со вторичной деформацией. Пыльцевое зерно безбороздное, часто имеет трещину (*Torreya*), разрывающую его от центра к периферии. Повидному, трещины образуются в местах, предназначенных для прорастания пыльцевой трубки. Некоторые зерна имеют складки (*Taxus*). Экзина пыльцевых зерен одно- или двуслойная. Поверхность экзины обычно гладкая или имеет бугорчато-шиповатые выросты. В зависимости от наличия или отсутствия скульптурных выростов контур зерна гладкий или неровный. Ископаемая пыльца семейства Taxaceae, так же как и пыльца современных растений этого семейства, имеет морфологическое сходство с пыльцой растений семейства Cupressaceae. Пыльца, отнесенная нами к роду *Taxus*, отличается от пыльцы, отнесенной к семейству Cupressaceae, более толстой и всегда скульптурной экзиной, а также отсутствием трещины.

В третичных отложениях Северного Казахстана автором была найдена пыльца тиссовых, представленная тремя видами, довольно близкими по морфологическим признакам к пыльце современных родов *Taxus* L. и *Torreya* Agnott.

В. В. Зауер (1950) отмечала, что пыльца тиссовых в ископаемом состоянии встречается довольно редко, но, по-видимому, это верно только для некоторых ботанико-географических провинций, так как, например, в палеогене Нижнего Дона и Кавказа пыльца тиссовых была обнаружена неоднократно.

Род *Taxus* L. — Тисс

*Taxus cuspidataeformis* sp. nov. (pollen)

Табл. I, рис. 17, 18  
Препарат № 186  $\frac{H}{K}$

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, Парамоновка, скв. 2; слюдяные глины подглауконитовой свиты (верхний мел).

Пыльцевое зерно сферидальное, безбороздное, беспоровое; размер 16—20 м; очертание округлое или эллиптическое. Экзина двуслойная (?), скульптура мелкобугорчатая, что обуславливает точечный рисунок на поверхности зерна. Некоторые зерна имеют бугорки с заостренными вершинами, что создает впечатление шпиговатости. Экзина часто смыкается в мелкие складки, при этом зерно не теряет первоначальной формы и остается сферидальным. Контур зерна — мелкофестончатый.

Пыльца описанного вида имеет большое сходство с пыльцой *Taxus cuspidata* Sieb. et Zucc., характеристика которой дана в работе В. В. Зауер (1950). Сходство отмечается как по общим морфологическим признакам, так и по размерам.

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: ископаемые остатки тисса известны еще в юрское и меловое время на островах Дальнего Востока. Веточки и отпечатки листьев (хвои) тисса найдены в ряде пунктов СССР, где они известны начиная от отложений датского яруса до сармата включительно. В палеогене пыльца тисса обнаружена по рр. Уралу, Волге и Дону и на Северном Кавказе. В виде единичных находок пыльца *Taxus* отмечена в палеогене и неогене Среднего Поволжья вместе с пыльцой *Sciadopitys*. А. Н. Криштофовичем (1941) отмечены находки тисса в неогене Дона. В Казахстане пыльца тисса встречается в верхнемеловых и третичных отложениях. Эрдман (1943) указывает на находки пыльцы *Taxus* в межледниковых отложениях Польши. В настоящее время вид *Taxus cuspidata* Sieb. et Zucc. растет в лесах Дальнего Востока, в Китае, Маньчжурии и Японии.

*Taxus baccataeformis* sp. nov. (pollen)

Табл. I, рис. 19 и 20  
Препараты № 193  $\frac{H}{K}$ , 165  $\frac{H}{K}$  (рис. 19); 334  $\frac{H}{K}$  (рис. 20)

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, пос. Парамоновка, скв. 1 опокые глины, верхний — средний эоцен (препарат № 193  $\frac{H}{K}$ ).

Пыльцевое зерно сферидальное, безбороздное, беспоровое. Размер от 25 до 29 м. У большинства зерен образуется клиновидная трещина от

96

периферии к центру, но при этом зерна не сминаются и сохраняют первоначальные округлые очертания. Экзина толстая (до 2 м), двуслойная, верхний слой ее имеет бугорчато-шпиговидные выросты, расположенные равномерно по всей поверхности зерна. У некоторых зерен выросты расположены радиально. Контур зерна неровный.

От пыльцы *Taxus* aff. *cuspidata* Sieb. et Zucc. пыльца *Taxus baccataeformis* отличается строением поверхности, более толстой экзиной и несколько большей величиной.

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: эоцен, нижний и средний олигоцен Павлодарского Прииртышья, средний олигоцен Северного Приаралья. Единичные находки в палеоцен-эоценовых и верхнемеловых отложениях Казахстана.

В настоящее время *Taxus baccata* L. — тисс ягодный или европейский — распространен спорадически почти по всей Западной Европе, по Черноморскому побережью, Кавказу и Малой Азии и в горах Северной Африки. В горных районах тисс доходит до высоты 2300 м над уровнем моря. Характерен для лесной зоны; растет под пологом хвойно-широколиственных лесов.

*Taxites* (?) (pollen)

Табл. I, рис. 21  
Препарат № 193  $\frac{H}{K}$

Пыльцевое зерно сферидальное; размер его от 26 до 36 м. Иногда наблюдается трещина от периферии к центру. Экзина толстая (до 3 м). Поверхность экзины мелкошпиговатая. У некоторых зерен выросты расположены радиально. По величине зерна имеют сходство с пыльцой современного вида *Taxus baccata* L.

М е с т о н а х о ж д е н и е: Павлодарское Прииртышье, пос. Парамоновка, скв. 1; опокые глины среднего эоцена. В палеогеновых спорово-пыльцевых спектрах Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья встречается в комплексе с различными видами *Cedrus*, *Sciadopitys*, *Pinus* и представителями ксерофитной флоры покрытосеменных.

*Torreya californiformis* sp. nov. (pollen)

Табл. I, рис. 22 и 23  
Препараты № 198  $\frac{H}{K}$  (рис. 22), 259  $\frac{3}{K}$  (рис. 23)

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз; глины с отпечатками растений, вторая свита континентальных отложений среднего олигоцена.

Пыльцевое зерно сферидальное, безбороздное, беспоровое или с одной мало заметной порой. Величина пыльцевого зерна 22—27 м. Экзина тонкая, однослойная или двуслойная, гладкая, иногда сминающаяся в мелкие, произвольно расположенные складки. Контур ровный.

С *Torreya californica* Togg., изученным автором по гербарному материалу из коллекции Н. А. Болховитиной, имеет большое сходство по всем морфологическим признакам за исключением небольших отклонений в размерах. Отдельные ископаемые пыльцевые зерна *Torreya californiformis* достигают величины 27 м, пыльца же ныне живущей *T. californica* Togg. не превышает 25 м.

От описанной В. В. Зауер (1950) пыльцы *Torreya nucifera* Sieb. et Zucc. ископаемая пыльца, определенная как *T. aff. californica*, отличается следующими признаками:

7 Труды ГИН, вып. 6

97

1) диаметр пыльцы *T. aff. californica* не превышает 27  $\mu$ , а большинство пыльцевых зерен *T. nucifera* достигает 33  $\mu$ ;

2) пыльцевые зерна *T. aff. californica* имеют округло-правильные очертания, а *T. nucifera* — округло-неправильные;

3) пыльцевые зерна *T. californiformis* (так же как и у ныне живущей *T. californica* T o r r e y a) — гладкие, лишенные каких-либо выростов, пыльца же *T. nucifera* имеет мелкие бугорчатые выросты. Кроме того, толщина экзины *T. nucifera* значительно превышает толщину экзины пыльцы *T. californiformis*.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: Павлодарское Припутье, нижний эоцен, низы среднего олигоцена. Северное Приаралье, верхний эоцен — нижний олигоцен. Единичные находки известны из олигоцен-миоценовых отложений Воронежской обл.

Растения, принадлежащие к роду *Torreya* A g r o t e., относятся к палеозеленым формам. В настоящее время *Torreya californica* произрастает в Калифорнии. Представляет собой дерево, высотой до 35 м; приурочено к лесной зоне. Некоторые виды *Torreya* приурочены к южным широтам. Часть из них произрастает в Южном Китае, в Японии и на п-ове Флорида.

#### СЕМ. ПОДОСАРАСЕАЕ — ПОГОПЛОДНИКОВЫЕ

Ископаемые растительные остатки растений из сем. Podocarpaceae, описанные до вида, на территории СССР известны еще с 1859 г., когда Г. В. Абилом были определены отпечатки листьев из третичных толщ Кивичины. Находки древесины и листьев *Podocarpus* обычны для эоцена и палеоцена Донбасса и Киевской обл. В более древних отложениях известны находки древесины различных *Podocarproxylon* в средней и верхней юре, в мелу (где в нижних и средних отделах этот род представлен наиболее широко). В своей книге, посвященной обзору растительности прошлых веков, А. Сьюорд (1936) упоминает о находках хвойного, так называемого *Archaeopodocarpus*, который может быть отнесен к наиболее древним представителям сем. Podocarpaceae.

Нигде в литературе не упоминается о находках листьев или древесины *Dacrydium*. Причиной этого может быть некоторое несогласие относительно систематического положения этого рода, который, как известно, некоторые авторы относят к семейству тиссовых. Возможно, что ранние находки «тиссовых» содержали в себе часть видов, принадлежащих к роду *Dacrydium*.

Пыльцевые данные свидетельствуют о чрезвычайно раннем появлении растений сем. Podocarpaceae. Пыльца типа *Podocarpus* найдена уже в пермских отложениях. Как отмечает В. В. Зауер, пыльца пермских Podocarpaceae отличается большей величиной, чем выделяемая из третичных отложений. Кроме того, пыльцевые зерна Podocarpaceae из перми имеют густую, часто двойную сетку на воздушных мешках, значительно более четкую, чем сетка у пыльцы Podocarpaceae из третичных отложений. По внешнему облику более древние формы пыльцы Podocarpaceae имеют большое сходство с *Podocarpites gigantea* и *P. kasakhstanica*, чем с *Podocarpus aff. Nageia* или с другими мелкими формами, обычно встречающимися в третичных отложениях.

Большое разнообразие пыльцы Podocarpaceae отмечается в меловых отложениях Казахстана, Приуралья, Сибири, Дальнего Востока, а также в южнотретичных отложениях Азиатской и юга Европейской частей СССР.

Недостаточное знакомство с морфологией пыльцы различных видов современных Podocarpaceae привело к неправильному взгляду на прекращение распространения погоплодниковых уже в олигоцене. Авторы многих

описаний спорово-пыльцевых спектров из кайнозойских отложений относили пыльцу, весьма близкую по морфологическим признакам к пыльце описанных видов *Podocarpus*, к особому виду *Pinus*, условно называемому ими *Pinus Haploxyton*. Так, например, пыльца, описанная Потонье, Тиргартом и др. под названием *Pinus Haploxyton*, или *Pinus Haploxyton* Тур., по-видимому, в действительности в большинстве случаев принадлежит к роду *Podocarpus*, что конечно не исключает возможности находок пыльцы сосен, принадлежащих к подроду *Haploxyton* в отложениях меловой и третичной систем.

Современное географическое распространение семейства, представленного в настоящее время шестью родами (*Podocarpus*, *Dacrydium*, *Phorphaera*, *Phyllocladus*, *Saxagothea*, *Microcachrys*), приурочено к тропическому поясу южного полушария. Многие виды Podocarpaceae, как *Podocarpus chilense* A. Rich., *P. dactyloides* A. Rich., *P. Totara* N. Don и роды *Saxagothea* Lindl. и *Dacrydium* Soland., составляют значительную часть хвойных и смешанных тропических и субтропических лесов тропической и южной части Южной Америки, Африки, Новой Зеландии. Многие виды деревьев, принадлежащие к роду *Podocarpus*, являются основными лесобразующими породами в горных частях Южной Африки, где они составляют массивы с подлеском из можжевельника.

Отдельные виды *Podocarpus* широко распространены в Австралии, Японии, Южном Китае и Южной Америке. Обычными спутниками различного рода *Podocarpus* во влажных тропиках является *Araucaria* и *Agathis*. Мушарниковые формы Podocarpaceae распространены в южном полушарии на юге умеренной зоны.

Все пыльцевые зерна, выделенные из палеогеновых отложений Павлодарского Припутья и Северного Приаралья, относящиеся к сем. Podocarpaceae, принадлежат к двум родам: *Podocarpus* L'Herit. и *Dacrydium* Soland. Пыльцевые зерна этих родов относятся к типу пыльцы хвойных, состоящей из центральной части, или тела, и двух или более воздушных мешков, прикрепленных к телу с брюшной стороны (фиг. 16, III). Величина пыльцевых зерен варьирует, в зависимости от принадлежности к виду, от 50 до 120  $\mu$ . Борозда, расположенная на брюшной стороне тела, выражена неясно или совсем не обнаруживается. Пор сет. Экзина тела обычно двух- или трехслойная на спинной части тела и однослойная или двуслойная на брюшной. Воздушные мешки представляют собой выросты экзины, обычно однослойные. Структура и скульптура экзины тела и воздушных мешков различны. Экзина тела обычно имеет крупнозернистую или столбчатую структуру и бугорчатую или лакунообразную скульптуру. На спинной поверхности зерна экзина утолщается подобно шпигу у пыльцы сем. Pinaceae. Утолщение это процируется в боковом положении в виде гребня. Экзина воздушных мешков имеет сетчатую структуру. Контур тела неровный, волнистый; контур мешков — обычно ровный.

Внешне пыльцевые зерна родов *Podocarpus* и *Dacrydium* сходны с пыльцевыми зернами сем. Pinaceae, в частности с видами родов *Pinus* и *Abies*. В отношении признаков морфологического различия между пыльцой Podocarpaceae, снабженной воздушными мешками, и Pinaceae, — специальных исследований нет. В. В. Зауер (1950) указывает следующие черты отличия пыльцевых зерен *Podocarpus* от сем. Pinaceae (в частности, рода *Pinus*): более мелкие размеры, резко очерченные зародышевые борозды, толстые, обычно смятые воздушные мешки.

Однако в ископаемом состоянии в спорово-пыльцевых спектрах встречаются такие пыльцевые зерна Podocarpaceae (в особенности рода *Podocarpus*), которые по ряду признаков значительно уклоняются от норм, приведенных В. В. Зауер для современной пыльцы рода *Podocarpus*. Также и среди ископаемой пыльцы рода *Pinus*, сходной с пыльцой рода *Podocarpus*.

carpus, встречено много форм, уклоняющихся от обычных норм для пыльцы современных видов этого рода. Поэтому для определения палеогеновой пыльцы этих родов пришлось заняться выявлением их основных, характерных диагностических признаков.

За основу диагностических признаков ископаемой пыльцы родов *Podocarpus* и *Dacrydium* брались следующие элементы:

1) форма и очертание тела пыльцевого зерна (в полярной и боковой проекциях);

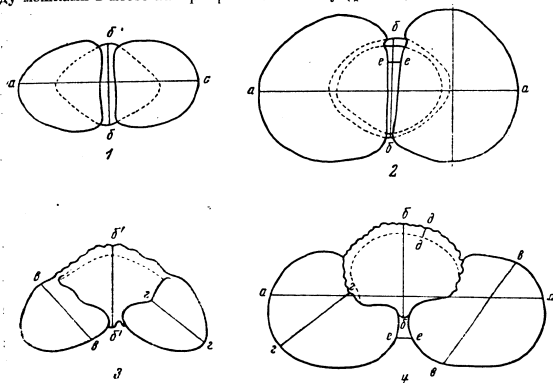
2) форма и очертание воздушных мешков;

3) способ прикрепления воздушных мешков к телу;

4) структура и скульптура оболочек тела;

5) характер сетчатости воздушных мешков;

6) размеры: а) общая длина пыльцевого зерна (наибольшая ось, проходящая через тело и мешки), б) ширина и высота тела, в) ширина (диаметр) и высота воздушного мешка, г) толщина эскины, д) расстояние между мешками в месте их прикрепления к телу (фиг. 17).



Фиг. 17 Основные элементы измерения пыльцевых зерен сем. Podocarpaceae, имеющих воздушные мешки.

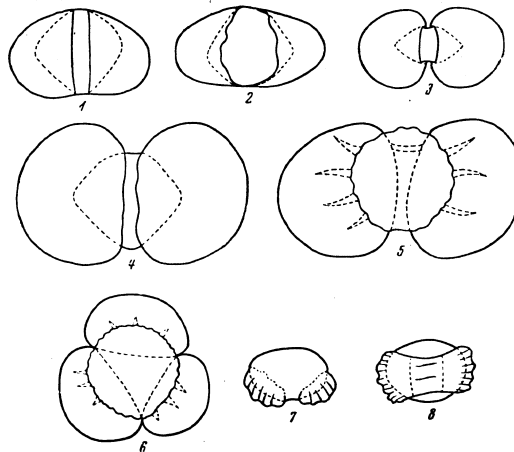
1, 2 — полярная проекция; 3, 4 — боковая проекция; а—а' — общая длина зерна; б—б' — ширина тела; в—в' — высота тела; с—с' — ширина воздушного мешка (диаметр); е—е' — высота воздушного мешка; д—д' — ширина (толщина) эскины тела — высота гребня; е—е' — расстояние между мешками в месте их прикрепления к телу

Разумеется, измерения имеют значение только в случае, если пыльцевое зерно не деформировано, не смято и не разорвано. Замеры производились при строго полярном или строго боковом положении зерна, в зависимости от того, какие элементы его требовалось измерить (см. фиг. 17). Так как описание пылинки велось по глицериновым препаратам, т. е. в жидкой среде, то можно было расположить пыльцевые зерна в нужном положении при помощи легкого постукивания карандашом или препаровальной иглой по поверхности покровного стекла.

Все описанные в настоящей работе пыльцевые зерна Podocarpaceae не имели ясно выраженной зародышевой борозды.

По форме и очертанию все выделенные нами виды родов *Podocarpus* и *Dacrydium* можно разбить на следующие группы (фиг. 18):

1. Пыльцевые зерна с округло-ромбовидным очертанием тела в полярной проекции, с двумя воздушными мешками, прикрепленными к телу широкими основаниями на его брюшной части. Границы прикрепления мешков к телу проецируются либо в виде двух параллельных линий, либо в виде двух кривых, составляющих дуги эллипса.



Фиг. 18. Схема очертания различных видов пыльцевых зерен сем. Podocarpaceae (роды *Podocarpus* и *Dacrydium*).

1, 2 — пыльцевые зерна с округлым телом ромбовидного очертания и с двумя воздушными мешками, прикрепленными широкими основаниями (полярная проекция); 3, 4, 5 — пыльцевые зерна с округлым телом и ромбовидным очертанием в полярной проекции, с двумя воздушными мешками, диаметр которых превышает высоту тела; мешки прикреплены узкими основаниями; 6 — пыльцевое зерно с округлым телом и тремя воздушными мешками (полярная проекция); 7 — пыльцевое зерно с правильно эллипсовидным телом и двумя воздушными мешками, диаметр которых меньше высоты тела (боковая проекция); 8 — то же в полярной проекции.

Высота тела и диаметр мешков приблизительно равны. В полярной проекции (когда пыльцевое зерно обращено к наблюдателю спинной или брюшной стороной!) линии очертания тела и мешков не образуют угла (фиг. 18, 1, 2). Размер пыльцевых зерен этого типа от 50 до 80 м. Пыльцевые зерна имеют сходство с пыльцой современного вида *Podocarpus Selowii* Klotzsch.

2. Пыльцевые зерна с округлым телом, несколько сдвинутым по оси, перпендикулярной к полярной, и с ромбовидным очертанием в боковой

1 Брюшная сторона, по Вудхаузу, наружная, по Козо-Полянскому, — дистальная (внешняя) по отношению к положению микроспоры в тетраде. Спинная сторона, по Вудхаузу, внутренняя, по Козо-Полянскому, — проксимальная (внутренняя) по отношению к положению микроспоры в тетраде.



проекции. Воздушных мешков два, диаметр их значительно превышает высоту тела. Мешки прикрепляются суженными основаниями к боковым частям тела и сильно сдвинуты один к другому. Внутренняя линия прикрепления воздушных мешков на брюшной части тела процируется в виде двух параллельных прямых. Внешняя линия очертания воздушных мешков образует с линией очертания тела значительный угол, приближающийся к прямому. Сетка на мешках четкая и крупная. Поверхность тела мелкобугорчатая или неравномерно крупнобугорчатая. В некоторых случаях поверхность мешков собрана в радиально расположенные складки, отходящие от места прикрепления мешков. Величина (общая длина) пыльцевых зерен в зависимости от их видовой принадлежности варьирует от 50 до 150  $\mu$ . Пыльцевые зерна этого типа имеют сходство с пылью *Podocarpus Nageia* R. В г., но в большинстве случаев значительно крупнее их (фиг. 18, 3, 4, 5).

3. Пыльцевые зерна с округлым телом и с тремя воздушными мешками, прикрепленными с брюшной поверхности тела. Величина мешков равна или несколько превышает величину тела. Очертание тела — почти правильная окружность, очертания воздушных мешков также округлы. Сетка на мешках мелкая (4–5  $\mu$ ), поверхность спинной части тела неравномерно бугорчатая. Размеры тела 45–47  $\mu$  (см. фиг. 18, 6). К этому типу зерен относится *Podocarpus dacrydioides*, описанный Эрдтманом по коллекционным материалам из Новой Зеландии (Erdtman, 1943, табл. XXV, фиг. 429).

4. Пыльцевые зерна с правильно эллипсоидальным телом. Мешки прикреплены суженным основанием к боковым частям тела и сильно сдвинуты к брюшной части его. В полярной проекции прекрасно видна внутренняя граница прикрепления воздушных мешков, которая процируется в виде двух параллельных линий, близко расположенных одна к другой.

Диаметр мешков несколько превышает высоту тела. Основными морфологическими признаками пыльцы этого типа являются крупная сетка мешков и сборчатая складчатость их экзины. Складки расположены радиально. Кроме того, этот тип зерен выделяется своей четкой и рельефной скульптурой экзины тела, которая представляет собой морщиноподобные выросты на его поверхности. Скульптура тела обуславливает его волнистый контур. Величина пыльцевых зерен от 40 до 80 или до 90  $\mu$ . Схематически зерна изображены на фиг. 18, 7 и 8.

У мелких зерен этого типа мешки значительно меньшего размера, чем тело. Камеры мешков не целиком заполнены воздухом и несколько обвисают, собираясь в складки и морщины. В проекции воздушные мешки кажутся свисающими в виде бахромок, обычно прозрачной и слабо окрашенной. К этому типу зерен относится пыльца современного рода *Dacrydium* S o I a n d.

Сетчатая структура экзины мешков, процирующаяся на их поверхности в виде более или менее четкого сетчатого рисунка, не отражается на строении поверхности их, так как представляет собой шнуровидные утолщения экзины на внутренней стороне (Монозон-Смолина, 1949).

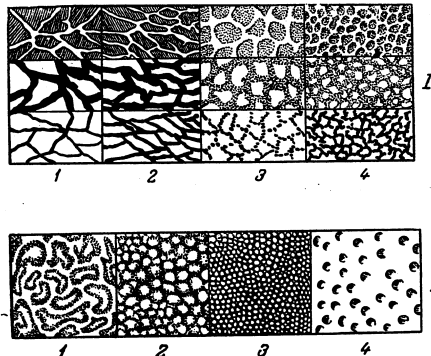
Воздушным мешкам пыльцы *Podocarpus* присуща сетка двух типов: четкая, крупная, обычно с продольно вытянутыми ячейками (фиг. 19, I, 1, 2); менее четкая, часто тупоугольная, с ячейками различной конфигурации (фиг. 19, I, 3, 4).

Кроме того, при описании пыльцевых зерен иногда встречаются промежуточные и комбинированные типы сеток.

Скульптура поверхности тела пыльцы хвойных с воздушными мешками обуславливается характером строения одного или двух верхних слоев экзины, облегающей его. Тело пыльцы *Podocarpus* обычно покрыто двумя слоями экзины, несколько более толстой на спинной поверхности и более тонкой на брюшной стороне. Характер складок экзины, смятой,

бугорчатости или ямчатости является также диагностическим признаком при определении видов пыльцы и всегда выдерживается одинаково у представителей одних и тех же видов.

Пыльца *Podocarpus* встречается мною в меловых, палеогеновых и неогеновых отложениях Северного Приаралья и Павлодарского Прииртышья, не отличается большим многообразием. Скульптура ее поверхности в основном может быть трех типов: мраморовидно-складчатая (фиг. 19, II, 1), бугорчатая (фиг. 19, II, 2, 3), мелкоямчатая (фиг. 19, II, 4).



Фиг. 19. Строение различных типов сетки воздушных мешков и скульптур поверхности тела пыльцы ископаемых видов сем. *Podocarpus*. I — строение сетки воздушных мешков: 1 — сетка четкая с правильными, беспорядочно расположенными или продольно вытянутыми ячейками различной величины и различных очертаний; 2 — сетка четкая с неравномерными, обычно крупными ячейками, вытянутыми продольно от линии прикрепления мешков к их периферии; 3 — сетка крупная, более или менее четкая, или прерывистая, с толстыми, набухшими рельефными тычками. Очертание ячеек неправильно-округлое; 4 — сетка мелкая, прерывистая, с неправильными и разнообразными очертаниями ячеек, часто несловными из-за того, что тычки, составляющие сетку, прерываются. II — скульптура поверхности тела: 1 — мраморовидно-складчатая; 2 — бугорчатая; 3 — мелкобугорчатая; 4 — мелкоямчатая.

В общем можно прийти к выводу, что среди всего разнообразия форм ископаемой пыльцы сем. *Podocarpus*, относимой в основном к родам *Podocarpus* и *Dacrydium*, выделяются следующие характерные особенности, позволяющие одновременно отличать ее от пыльцы сем. *Pinaceae*:

- 1) диаметр воздушных мешков обычно превосходит высоту тела; исключением является род *Dacrydium*, пыльца которого не имеет аналогов среди сем. *Pinaceae*;
- 2) мешки сильно сдвинуты к брюшной стороне тела;
- 3) мешки в большинстве случаев несколько собраны в складки, радиально расходящиеся от центра к периферии;
- 4) линия прикрепления мешков четко выражена на брюшной стороне зерна, тесно сдвинуты и представляют собой две параллельные линии или овал с вытянутыми вершинами;

5) сетка мешков четкая, крупная и процирующаяся в виде двойных линий, с ячейками, обычно вытянутыми продольно, или нечеткая, прерывистая и мелкая;  
6) скульптура экзины тела мраморовидно-складчатая, или неравномерно бугорчатая, или мелкоямчатая.

Род *Podocarpus* L. Herit. — Ногоплодник

Пыльцевые зерна относятся по морфологическим признакам к третьей группе (фиг. 16, III). Тело округло-ромбовидальное, мешки крупные, плотно надвинутые на тело с брюшной стороны, прикреплены к телу широкими или узкими основаниями. Внутренние границы прикрепления воздушных мешков близко сходятся и процируются в виде двух параллельных прямых. Экзина тела бугорчатая, сетка на мешках четкая, с продольно вытянутыми ячейками.

Ископаемая пыльца Podocarpaceae (род *Podocarpus*) выделена С. Н. Наумовой (1939) в отдельную подгруппу *Platysaccus* из группы хвойных с воздушными мешками — *Saccata*.

*Podocarpus sellowiformis* sp. nov. (pollen)

Табл. II, рис. 1  
Препараты № 188  $\frac{H}{K}$  и 170  $\frac{H}{K}$

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, скв. 1, 2; слюдяные глины с растительными остатками подглаукозитовой свиты, верхний мел (препарат № 188  $\frac{H}{K}$ ).

Длина зерна 50—70  $\mu$ , высота тела около 35  $\mu$ , ширина воздушных мешков 32—36  $\mu$ , высота мешков около 35  $\mu$ .

Тело округло-ромбовидальное, очертание в боковой проекции — ромбическое. Мешки прикреплены к брюшной поверхности зерна, плотно охватывают поверхность тела широкими основаниями. Линии прикрепления воздушных мешков на брюшной стороне, при полярном положении, процируются в виде двух четких параллельных линий с небольшим промежутком между ними.

Экзина тела двуслойная, тонкая, оба слоя на спинной и боковых сторонах зерна одинаковой толщины. Граница между нижним и верхним слоями экзины просматривается с большим трудом. На некоторых экземплярах наружный слой экзины, более толстый на спинной части тела и более тонкий на брюшной и боковых сторонах его, постепенно переходит в экзину мешков. Поверхность бугорчатая, на плотно расположенных бугорках. Контур тела слегка волнистый. Сетка на мешках четкая, крупно-продольно-ячейчатая.

Пыльцевое зерно по морфологическим признакам довольно близко к *Podocarpus Sellowii* Klo t s c h., приведенному в работе В. В. Зауер (1950), но не имеет четко выраженного шита. У пыльцы *Podocarpus sellowiformis* выделить границы шита не удалось.

По общим морфологическим признакам пыльца *Podocarpus sellowiformis* несколько приближается к форме, описанной Н. А. Болховитиной как *Podocarpus gracilentia* из комплекса спор и пыльцы верхне- и средне-меловых отложений Казахстана и Центральной Сибири (1953, стр. 77, табл. XI, фиг. 15).

От пыльцы сем. Pinaceae описанный вид отличается ромбовидным очертанием тела в боковой проекции, плотной насадкой воздушных мешков на тело зерна и отсутствием четкой границы между утолщенным слоем экзины спинной части зерна и более тонкой на боковых и брюшных сторонах его.

В тех же отложениях встречается пыльца того же вида, но значительно худшей сохранности (табл. II, рис. 2; препараты № 170 и 186).

Границы прикрепления воздушных мешков у этой формы процируются прямыми параллельными линиями, расстояние между которыми достигает 12  $\mu$ .

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: Северный Казахстан, мел — палеоген — олигоцен; Северное Приаралье, нижний палеоген.

В настоящее время растения из сем. Podocarpaceae приурочены к тропическим и субтропическим зонам Америки, Африки и Австралии.

*Podocarpus andiniformis* sp. nov. (pollen)

Табл. II, рис. 3—7  
Препараты № 170  $\frac{H}{K}$ , 161  $\frac{H}{K}$ , 364  $\frac{3}{K}$

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, скв. 1, 2; слюдяные глины датского (?) яруса верхнего мела (препарат № 170  $\frac{H}{K}$ ).

Пыльца имеет близкое сходство со следующими формами, известными по литературным данным:

1934. *Pinus edulis* P o l o n i e. Zur Mikrobotanik der Kohlen und ihrer Verwandten, zur Morphologie der fossilen Pollen und Sporen, Taf. 2, Fig. 4.

1935. *Pinus haploxylo* — Typ. R u d o l p h. Mikrorfloristische Untersuchung tertiärer Ablagerungen im Nördlichen Böhmen, Taf. IV, Fig. 1, 2.

1940. *Pinus haploxylo* — Typ. T h i e r g a r t. Die Mikropaläontologie als Pollenanalyse im Dienst der Braunkohlenforschung, Schrift., Taf. IV, Fig. 11; Taf. VII, Fig. 2.

1949. *Pollenites cf. atabus* R o b. P o l o n i e — T h i e r g a r t. Der Stratigraphische Wert mesozoischer Pollen und Sporen, Taf. II, Fig. 20, 22.

1949. *Pinus Haploxylo* — Typ. R u d o l p h T h i e r g a r t. Там же, табл. III, фиг. 17, 18, 41.

1950. Coniferpollen verschiedener Arten von Podocarpaceen — Typ. R e i s s i n g e r. Die «Pollenanalyse» ausgedehnt auf alle Sedimentgesteine der geologischen Vergangenheit, Taf. XV, Fig. 12.

1950. Podocarpaceenpollen R e i s s i n g e r. Там же, табл. XVIII, фиг. 38.

1950. Cf. *Podocarpus* sp. K i r c h e i m e r. Mikrofossilien aus Salzablagerungen des Tertiärs, Taf. XX.

1953. *Podocarpus cretaceae* Н а у м о в а, Болховитина. Споры-пыльцевая характеристика меловых отложений центральных областей СССР, табл. XI, фиг. 10, стр. 76.

1953. *Pinus*, подрод *Haploxylo*. З а н д л и с к а я. Материалы к истории флоры и растительности палеогена Северного Казахстана в районе Павлодарского Прииртышья, табл. V, рис. 20.

Длина зерна около 73  $\mu$ ; высота тела 45—48  $\mu$ , ширина тела равна его высоте; ширина воздушных мешков около 50  $\mu$ , высота — 35—38  $\mu$ ; расстояние между линиями прикрепления мешков 6—9  $\mu$ .

Тело сферидальное, очертание в боковой проекции несколько угловатое — приближается к ромбу. Общая толщина экзины около 4  $\mu$ . Экзина тела двуслойная; слои, как правило, равной толщины, но на некоторых экземплярах внешний слой несколько тоньше внутреннего. На спинной и боковых сторонах общая толщина оболочки несколько больше, чем на брюшной. Шит неясно выражен. Поверхность тела неравномерно бугорчатая, скульптура шита трудно различима, на брюшной стороне поверхность мелко- и редкобугорчатая, бугорчатость процируется (при высоком положении тубуса) в виде мелко- и редкоточечного рисунка.

Форма мешков приближается к сферидальной. У большинства экземпляров мешки несколько сдавлены по высоте и оттянуты по направлению от брюшной поверхности. Мешки прикреплены или широким, или несколько суженным основанием. Границы прикрепления мешков в полярной проекции (мешками кверху) четко выделяется в виде двух параллельных

линий или правильного овала. Сетка на периферийных поверхностях мешков крупная, четкая и у некоторых экземпляров состоит из двойных линий, рельефно выделяясь при обычном увеличении. Форма ячеек сетки округло-прямоугольная. Величина ячеек резко уменьшается к внутренней поверхности мешков и становится мелкой, до точечной, в месте прикрепления мешков к телу.

По морфологическим признакам (форма, размеры, характер сетки мешков и пр.) описанный вид чрезвычайно близок к пыльце *Podocarpus spicata* (Podocarpus andinus) Роерр, изученной по гербарному материалу Эрдтмана (Erdtman, 1943, табл. 25, фиг. 430). Величина пыльцы современного вида *Podocarpus andinus* варьирует в пределах от 56 до 70 м, причем крупные зерна встречаются чаще, чем мелкие.

От *Podocarpus* aff. *Sellowii* зерно *Podocarpus andinus* отличается большей округлостью мешков, наличием более ясной сетки на них и более частой встречаемостью зерен с мешками, прикрепленными к телу несколько суженным основанием.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: пыльца *Podocarpus andiniformis* (или морфологически подобная ей) отмечена различными авторами в отложениях среднего и верхнего мела Западной Европы (Германии, Дании), Сибири, Казахстана, а также в третичных отложениях (от эоцена до нижних горизонтов миоцена включительно) в Казахстане, на Южном Урале, в Башкирии, в Приаралье, в Эмбенском районе, на Северном Кавказе, в Среднем и Нижнем Поволжье, на Нижнем Дону и в Прикаспии. В Приртышье отмечена автором в чеганских глинах (нижний олигоцен) и в палеоцен-эоценовых отложениях. В последнее время пыльца, подобная описанной выше, встречается в верхнемеловых отложениях Приднестровья.

Родина *Podocarpus andinus* Роерр. [*P. spicata* Роерр., *Nageia andinus*, *Podocarpus valdiviana* (Nelson) Senilis] — Чилийские Анды. Растение является одним из наиболее устойчивых видов из семейства ногоплодных.

*Podocarpus nageiaformis* sp. nov. (pollen)

Табл. II, рис. 8—11

Препарат № 191

Голотип: Павлодарское Приртышье, пос. Парамоновка, скв. 4; чеганские глины с зубами акул (нижний олигоцен).

Пыльца морфологически близка к следующим формам, известным по литературным данным:

1939. Класс Aporosa, группа Saccata, подгруппа Platysaccus Наумова. Споры и пыльца углей СССР, стр. 355.
1940. Cf. *Podocarpus* Thiergart. Die Micropaläontologie als Pollenanalyse im Dienst der Braunkohlenforschung, Schriftl., Taf. IV, Fig. 9.
1943. *Pollenites macroalatus* Stocmans. Les lignites inéniens de Mol (Belgique), tab. 2, fig. 11.
1949. Cf. *Podocarpus* Thiergart. Der stratigraphische Wert mesozoischer Pollen und Sporen, Taf. IV—V, Fig. 40.
1950. Coniferpollen verschiedener Arten von Podocarpaceen.—Typ Reissinger. Die «Pollenanalyse» ausgedehnt auf alle Sedimentgesteine der geologischen Vergangenheit, Taf. XV, Fig. 11.
1950. *Podocarpus* sp. Зауер. Морфологическое описание пыльцы Gymnospermae. В кн. «Пыльцевая аналитика», табл. II, фиг. 15 и 16.
1953. *Podocarpus* Зякина и сына. Описание некоторых видов пыльцы и спор, выделенных из третичных отложений Пасековского карьера Воронежской области, стр. 104, табл. I, фиг. 4.
1953. *Podocarpus kairarensis* Болховитина. (*Platysaccus kairarensis* Болховитина). Спорно-пыльцевая характеристика меловых отложений центральных областей СССР, стр. 76, табл. XI, фиг. 13.

Общая длина зерна 75—82 м, средняя — 80 м; ширина — 35 м; ширина воздушных мешков (около 38 м) равна его высоте. Встречаются мелкие

экземпляры, размеры которых близки к размерам пыльцы современного вида *Podocarpus Nageia* R. В г.

Тело зерна округло-ромбовидальное. На спинной и боковых частях эскина двуслойная, а на брюшной — однослойная. Эскина на спинной стороне образует утолщение, подобное щиту у пыльцы Pinaceae. Внешний слой эскины значительно тоньше внутреннего и не имеет структуры. Внутренний слой эскины имеет складчато-столбчатую структуру, которая выражается на спинной и боковой поверхностях тела в виде бугристости. На границе, которую можно мысленно провести между спинной и брюшной поверхностями тела, внешний слой эскины прекращается, образуя едва заметный узкий шнуровидный валик, различимый только в боковой проекции. Внутренний слой эскины к этой границе несколько утоняется и теряет структурность.

Воздушные мешки имеют сфероидальную форму. Диаметр (ширина) мешков превышает диаметр (ширину и высоту) тела. К телу мешки прикреплены сильно суженными основаниями и значительно сдвинуты к брюшной стороне тела. Внутренняя граница прикрепления мешков с брюшной стороны прорисовывается в виде двух параллельных или слегка изогнутых в форме овала линий, расстояние между которыми равно 5—15 м.

Сетка на воздушных мешках мелкая и у большинства экземпляров четкая, с округлыми ячейками, величина которых не превышает 3,2 м. Тяжи сетки тонкие и ровные, и при высоком подвиге тубуса микроскопа, при обычном увеличении, кажутся темными (см. табл. II, рис. 11). Ячейки сетки по всей поверхности мешков равномерны и уменьшаются только в области прикрепления мешков к телу.

Угол в месте пересечения контура мешков и тела приближается к прямому. У некоторых экземпляров мешки несколько вытянуты по длине, но можно допустить, что это результат деформации при изготовлении препарата (погружение в глицерин-желатиновую среду).

При любом положении зерна, в полярной или боковой проекции, контуры тела ясно просвечивают сквозь нежную и прозрачную ткань воздушных мешков.

У некоторых экземпляров пыльцевых зерен эскина на спинной поверхности несколько сминается в продольные складки. У некоторых экземпляров такие же складки образуются и на брюшной части. Последнее обуславливает более темную окраску вдоль длинной оси тела.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: пыльца типа *Podocarpus nageiaformis* имеет довольно широкое распространение как по вертикали (от верхней юры до сармата), так и в широтном направлении. В литературе пыльца *Podocarpus* под различными названиями (см. синонимнику) упоминается в верхней юре Башкирского Приуралья, в меловых отложениях Сибирской платформы, Казахстана и Западной Европы, в палеоцене Среднего Поволжья, эоцене и олигоцене Дальнего Востока (Эльен), Казахстана, Прикаспия, Приаралья, Урала, среднего и нижнего течения Волги, нижнего Дона, Приазовья, Северного Казахстана, Западной Украины и Западной Европы, в сарматских отложениях низовьев Днепра, Северного Кавказа и Западного Прикаспия.

Такое широкое распространение и устойчивость описанной формы позволяют полагать, что растение, продуцировавшее эту пыльцу, обдало широким ареалом и широкой экологической амплитудой. Возможно, это растение входило в состав полихронных флор А. Н. Криштофовича (1946), которые особенно долго существовали на обширных пространствах материковой суши с конца мезозоя. Впоследствии, как полагал А. Н. Криштофович, такие полихронные флоры конца мезозоя положили начало со-

временной растительности земного шара (в различных его ботанико-географических провинциях.)

Современное распространение *Podocarpus Nageia* R. В г. (*P. Nagi P i l g.*) ограничено горными районами Южной Японии и Южного Китая. Устойчивость против низких температур у *P. Nageia* несколько ниже, чем у *P. andinus* Р о е р р., что и обуславливает его узкий современный ареал.

*Podocarpites kazakhstanica* sp. nov. (pollen)

Табл. II, рис. 12—15

Препарат № 255  $\frac{3}{K}$

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз, лигнитовые глины второй свиты континентальных отложений олигоцена (средний олигоцен).

Пыльца *Podocarpites kazakhstanica* sp. nov. относится к типу зерен сем. Podocarpaceae с резко ограниченным телом и мешками, превышающими своими размерами величину тела (фиг. 18, 3, 4, 5). Подобные формы пыльцевых зерен, но не тождественные им, отмечались в значительно более древних отложениях, чем третичные.

Рейссингер (Reissinger, 1950) описывает форму, близкую к нашей, под названием «Pollen Podocarpaceen — Turus (Reissinger)».

С. Н. Наумова (1939) пыльцу, подобную *Podocarpites kazakhstanica*, в числе прочих Podocarpaceae относит к группе *Saccata*.

В. С. Малявкиной описана и изображена пыльца значительно более крупных размеров, но по формам тела и воздушных мешков имеющая большое сходство с пылью *Podocarpites kazakhstanica*. Форму эту по морфологической номенклатуре В. С. Малявкина назвала *Dipterella tricocca* cf. *typica* (1949, табл. 3, фиг. 7).

Однако, как это будет видно из приводимого ниже описания, выделенный нами вид из третичных отложений обладает достаточно характерными морфологическими особенностями, чтобы отнести его к роду *Podocarpus*.

Общая длина зерна 125—128 м; ширина тела, около 67 м, равна его высоте; высота воздушных мешков около 70 м, ширина — около 80 м.

Форма тела близка к сферической. Очертание в полярной проекции ромбoidalно-округлое.

Экзина, покрывающая тело, двуслойная; у большинства зерен двуслойность экзины просматривается слабо. Структура экзины столбчатая, что обуславливает наличие поперечной штриховатости спиной области и бугорчатую поверхность зерна. На спиной поверхности зерна экзина толще, чем на брюшной. Границы шита не удалось обнаружить, так как пыльцевые зерна в большинстве случаев ложатся в полярной проекции. Наличие же и границы шита, если он действительно ясно выражен, обычно просматриваются лишь при боковом положении зерна.

Воздушные мешки почти правильно сферические. Ширина их превышает ширину тела. Мешки прикреплены к телу суженным основанием и сдвинуты на его брюшную сторону. Границы прикрепления мешков к телу с брюшной стороны прощупываются в виде двух дугообразных линий, наибольшее расстояние между которыми достигает 15 м. У большинства зерен концы этих линий сходятся и тогда внутренняя линия границ прикрепления воздушных мешков прощупывается в виде овала.

Сетка на воздушных мешках мелкая, прерывистая, неясная. Ячейки сетки заметно мельчают в месте прикрепления мешков на брюшной стороне. На спиной поверхности, ближе к месту прикрепления мешков,

сетка имеет такой же мелкий, неясный рисунок, как и вся поверхность мешков.

Линии очертания воздушных мешков и тела при пересечении образуют угол, близкий к прямому. Контуры тела — неровные, иногда фестончатые, прекрасно просматриваются сквозь прозрачную ткань воздушных мешков.

Пыльца *Podocarpites kazakhstanica* в составе олигоценового комплекса встречена автором впервые. Все формы, перечисленные выше в числе морфологически близких, относятся к формам, выделенным из более древних отложений.

Место нахождения: см. голотип.

Распространение: как упоминалось выше, пыльца, весьма близкая по морфологическим признакам к описанному виду, отмечена еще в спорово-пыльцевых спектрах юрского и мелового комплексов Сибири, Казахстана и Урала. В Павлодарском Прииртышье известны единичные находки в верхнем мелу, эоцене и нижнем олигоцене. В Северном Приарале основные находки приурочены к среднему олигоцену. Распространение пыльцы *Podocarpites kazakhstanica* в третичных отложениях прослеживается впервые. Можно полагать, что производившее пыльцу растение, было в палеогене одной из реликтовых флор мезозоя.

*Podocarpites gigantea* sp. nov. (pollen)

Табл. III, рис. 1—4

Препарат № 255  $\frac{3}{K}$

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, обл. 6, песчано-глинистые отложения четвертой свиты континентального олигоцена (верхний олигоцен).

Общая длина зерна 112—120 м; ширина тела 65—75 м, высота тела около 80 м, ширина воздушных мешков около 85 м, высота 65—70 м.

Тело сферическое, округлое в очертании. Экзина тела толстая, значительно толще экзины мешков; двуслойность экзины при увеличении в 400 раз трудно различима. На спиной части тела экзина имеет столбчатую структуру, что обуславливает ее поперечную штриховатость. На спиной же части тела структурные элементы выделяются в виде тесно расположенных бугорков с вдавленными вершинками, вследствие чего поверхность зерна имеет мелкоямчатую скульптуру.

На брюшной стороне поверхность тела почти гладкая или плоскобугорчатая, что различимо лишь на тех препаратах, у которых воздушные мешки не близко сдвинуты к центру.

Воздушные мешки почти правильно сферические. Сетка на мешках четкая, двойная. Крупная основная сетка хорошо выступает в виде рельефных тлжей с угловатыми ячейками; промежуточная сетка мелкая, с неравномерными ячейками. В местах прикрепления мешков к телу сетка становится мельче.

Расстояние между местами прикрепления мешков на брюшной стороне не более 3—5 м; чаще мешки смыкаются. Границы прикрепления мешков в полярной проекции обычно прощупываются в виде двух параллельных прямых или слегка расходящихся линий.

По форме и очертанию тела пыльца *Podocarpites gigantea* очень близка к *P. kazakhstanica*. Отличиями первого вида являются: более правильное очертание, более толстая экзина, яснее выраженная скульптура поверхности тела, более четко выраженная сетка на мешках, которая у *P. gigantea* всегда имеет двойной рисунок.

Наличием двойной сетки, размером и формой тела *P. gigantea* очень похожа на пыльцу современного рода *Abies* Hill., но отличается от по-

следнего отсутствием гребня и правильным округлым очертанием воздушных мешков; у пыльцы *Abies Hill* мешки несколько вытянуты по высоте, а тело снабжено широким, ясно выраженным гребнем с мелкофестоночатым контуром.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: Павлодарское Прииртышье, нижние горизонты палеогена — олигоцен. Северное Приаралье, эоцен — олигоцен. Основная масса находок связана с отложениями эоцена и нижнего олигоцена.

*Podocarpus* aff. *dacrydioides* A. Rich.

Табл. III, рис. 7

Препарат № 331  $\frac{3}{K}$

Пыльцевое зерно, в отличие от предыдущих видов, имеет три воздушных мешка. Общий диаметр зерна, включая тело и мешки, при строго полярной проекции 80—85 м, диаметр тела около 45 м, ширина воздушных мешков 30—40 м, высота около 30 м.

Сетка на воздушных мешках мелкая, с толстыми тяжами; ячейки сетки радиально вытянуты. Поверхность тела мелкобугорчатая, на спинной стороне смята в произвольные складки.

Пыльца описанной формы почти тождественна пыльце современного вида *Podocarpus dacrydioides* A. Rich., описанного Эрдтманом (1943, табл. XXV, фиг. 429).

Местонахождение: Павлодарское Прииртышье, р. Кара-Су, континентальные отложения среднего олигоцена.

Распространение: пыльца *Podocarpus* aff. *dacrydioides* отмечена в верхнеюрских отложениях близ г. Тюмени и в палеогеновых отложениях юга Европейской части СССР (единичные находки), в олигоценых спектрах Павлодарского Прииртышья встречается впервые.

Род *Dacrydium* Soland.—Дакридиум

Пыльца *Dacrydium Soland.* относится к типу пыльцевых зерен (фиг. 18, 7, 8), для которых характерны мелкие размеры (до 50 м) и особое строение воздушных мешков: мелких и не вздутых, а морщинистых и с бороздчатых в складки.

*Dacrydium elatumiformis* sp. nov. (pollen)

Табл. III, рис. 8—12

Препараты № 170  $\frac{H}{K}$  и 186  $\frac{H}{K}$

Голотип: Павлодарское Прииртышье, г. Павлодар, скв. 1, слюдистые глины датского (r) яруса (препарат № 170  $\frac{H}{K}$ ).

Длина зерна около 50 м, ширина около 35 м, высота около 35 м; ширина мешков около 30 м.

Тело эллипсоидальное, в боковой проекции — овального очертания. Экзина тела тонкая, однослойная, с зернистой структурой. Поверхность тела на спинной стороне мелко- и редкобугорчатая. Воздушные мешки небольших размеров, округлые, несколько сплюснутые и чаще всего, из-за смятия, имеют неправильные очертания; прилегают они к телу суженным основанием и сильно сдвинуты на брюшную сторону. Граница между мешками и телом не всегда ясно выражена. Экзина между мешками

на брюшной стороне часто бывает смята в продольные складки. Контур тела и воздушных мешков неровный.

Пыльца *Dacrydium elatumiformis* имеет большое сходство с пыльцой современного вида *D. elatum* Wall., описанного В. В. Зауер (1950) и Эрдтманом (1943), отличающаяся от нее лишь более четко выраженными воздушными мешками. Форма мешков у современного вида *D. elatum* несколько напоминает форму мешков пыльцы *Cedrus*. В то же время пыльца *D. elatumiformis* имеет некоторое сходство с пыльцой современного вида *D. Franclini*, отличающаяся от него менее четкой границей прикрепления воздушных мешков и значительно более тонкой экзиной тела.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: пыльца *Dacrydium* отмечалась в третичных и меловых отложениях СССР в виде единичных находок. Автором найдена в верхнемеловых и палеогеновых отложениях Северного Казахстана, в палеоэне Северного Кавказа (форамниферовые слои) и в палеоэне средней Волги.

Современное распространение рода *Dacrydium* — о-в Тасмания, тропики Австралии, Новой Зеландии. Типичное хвойное горных районов влажной субтропической зоны.

СЕМ. ARAUCARIACEAE — АРАУКАРИЕВЫЕ

Семейство Araucariaceae — древнейшее из класса голосеменных и имеет, по-видимому, южное происхождение. Растительные остатки *Araucarites* отмечаются еще с нижнего карбона.

С. Н. Наумовой (1939, табл. I) пыльцевые зерна, подобные *Araucaria*, были выделены в особую группу под рубрикой: «пыльца из группы *Infrata*, подгруппа *Psophosphaera*».

Остатки *Araucaria* встречены и в пермских отложениях, но наибольшего распространения это семейство достигло в триасе. В юре и в мелу найдены разнообразных видов Araucariaceae известны в Сибири и Казахстане. В третичных отложениях сохранились, по-видимому, только два рода Araucariaceae, с небольшим количеством видов. Отдельные находки остатков *Araucaria* отмечались для палеоэна и олигоэна Украины.

В настоящее время араукариевые имеют ограниченное распространение в Австралии, Южной Америке, на островах Полинезии и в Новой Гвинее. Здесь они составляют светлые тропические леса паркового типа, без густого подлеска. В основном все представители этого семейства имеют ксерофильный облик (в особенности это относится к роду *Araucaria* Juss.) и обладают кроной с вечнозеленой листвой.

Пыльца растений сем. Araucariaceae встречена автором в меловых и нижнетретичных отложениях Казахстана и Приаралья. Пыльцевые зерна Araucariaceae относятся к типу одноклеточных, сферидальных, липких воздушных мешков, однобороздных с двуслойной скульптурной экзиной.

В палеогеновых отложениях изучаемого района выделяются два вида пыльцы Araucariaceae, по морфологическим признакам близкие к пыльце рода *Araucaria* Juss. и *Agathis* Salisb.

*Araucaria elegans* sp. nov. (pollen)

Табл. III, рис. 13

Препараты № 193  $\frac{H}{K}$ , 165  $\frac{H}{K}$  и 182  $\frac{H}{K}$

Голотип: Павлодарское Прииртышье, пос. Парамоновка, скв. 2, опочковные глины среднего — верхнего эоцена (препарат № 182  $\frac{H}{K}$ ).

Формы, морфологически близкие, известные по литературным данным: 1953. *Araucaria incisa* Болховитина. Спорово-пыльцевая характеристика меловых отложений центральных областей СССР, стр. 67, табл. X, фиг. 24—26.

Пыльцевое зерно сферическое, округлое в очертании, однобороздное. Диаметр зерна от 46 до 60 м, средний — около 50 м.

Зародышевая борозда меридиональная, не доходит до полюсов. Поверхность борозды гладкая, затянутая тонкой бороздной мембраной. Экзина образует ластообразный выступ над одним из краев борозды. Если пыльцевое зерно расположено сверху бороздой, то ластообразный выступ экзины процируется в виде кольцеобразного утолщения — валика. Экзина двуслойная, тонкая. Внутренний слой экзины толще внешнего и структура его неясна; внешний слой — тонкий с мелко- или крупноватчатой структурой. В проекции стенки ямок (лакун) выступают по краю зерна в виде шпиговатых выростов, что придает контуру зерна ложношпиговатый вид.

Описываемая пыльца по морфологическим признакам сходна с пыльцой современного вида *Araucaria brasiliana* A. R. I. s. h., но несколько меньше ее по размерам (Зауер, 1950).

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: в ископаемом состоянии встречается очень редко, возможно вследствие плохой сохранности. (В литературе присутствие пыльцы *Araucaria* в спорово-пыльцевых спектрах палеогена отмечается очень редко.) Автором *Araucaria* найдена в отложениях бурой свиты (верхний эоцен), в глинах верхнего майкопа (средний олигоцен) Северного Кавказа; в опокидных глинах (эоцен) и в отложениях нижнего олигодена Северного Кавказа.

В настоящее время род *Araucaria* распространен в Южной Америке, Австралии и на архипелагах южной части Тихого океана. *A. brasiliana* A. R. I. s. h. — светолюбивое ксерофитное растение, образует в южной умеренной зоне светлые леса со слабо выраженным подлеском (чаще всего *Ilex*). В Чили араукария распространена совместно с *Podocarpus*, *Libocedrus*, *Saxegotha*.

*Agathis ovataformis* sp. nov. (pollen)

Табл. III, рис. 14  
Зя  
Препарат № 2 К

Голотип: Северное Приаралье, г. Тас-Аран, тасаранская свита, средний эоцен.

Пыльцевое зерно сферическое, в очертании — правильная окружность. Диаметр зерна около 35 м. Зародышевая борозда — меридиональная, расположена далеко от полюсов. Экзина двуслойная; внутренний слой ее более толстый, чем внешний. Поверхность зерна мелкобугорчатая. Бугорчатые выросты представляют собой правильные полушария, расположенные плотно одно к другому, что придает контуру зерна правильную фестончатую очертания. Высота бугорков 0,5—0,8 м. Рисунок на поверхности зерна крупносетчатый. Экзина образует ластообразный выступ по одному из краев борозды. Если зерно расположено бороздой вверх, то ластообразный выступ процируется в виде дугообразного утолщения. Если же зерно лежит не бороздой вверх, а в любом другом положении, то борозда часто не видна за ластообразным выростом экзины.

С пыльцой современной *Agathis ovata* W a g b. ископаемый вид почти тождествен; лишь в единичных случаях встречаются расхождения в величине зерна.

112

От пыльцы *Araucaria* J u s s. описанный вид отличается меньшим размером, более толстой экзиной, наличием бугорчатых выростов и более четкой выраженной бороздой.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: пыльца *Agathis (Damara)* отмечена в юрских отложениях средней полосы СССР, в палеоцен-эоцене юга Европейской части СССР, в эоцене и олигоцене Павлодарского Прииртышья, в отложениях среднего и верхнего эоцена и нижнего олигодена Северного Приаралья и в бурой свите Северного Кавказа. Также отмечено присутствие ее в виде единичных зерен в бучакских слоях (палеоцен-эоцен?) нижнего Дона.

СЕМ. PINACEAE — СОСНОВЫЕ

Третичные отложения (в особенности это относится к верхним отделам палеогена и к неогену) чрезвычайно богаты пыльцой растений из сем. Pinaceae. В отличие от юрских и меловых хвойных, большинство родов, а в ряде случаев и видов их имеет весьма близкое родство с современными представителями флоры южных широт. Сем. Pinaceae в третичных отложениях Северного Казахстана и Приаралья представлено шестью родами (*Keteleeria*, *Abies*, *Tsuga*, *Picea*, *Pinus* и *Cedrus*), которые, в свою очередь, представлены большим числом видов. Род *Pinus* в кайнозое насчитывает до девяти видов. Как упоминалось ранее, голосеменные в настоящее время занимают весьма скромное место во флоре изучаемой территории. Сем. Pinaceae, например, представлено всего двумя видами *Pinus*, одним видом *Picea*, одним видом *Larix* и двумя видами *Abies*. При этом основная масса видов приурочена к горным местообитаниям. Лишь один вид — *Pinus silvestris* L. — обитает на северной окраине Казахстана, в равнинной его части.

Pinaceae на территории Казахстана и в Приаралье особенно разнообразно были представлены в середине олигодена, что, возможно, объясняется возобновлением общей аридизации климата, которая несколько приостановилась в начале олигодена, и в связи с оживлением тектонических явлений. Ассоциации, в которых сочетались различные виды сосен, развились, по-видимому, на участках суши с высокими отметками; в это же время влажные широколиственные леса заняли пониженные участки.

Если проследить последовательную эволюцию голосеменных на территории Казахстана, то станет очевидным, что сем. Pinaceae представляет особый интерес и для стратиграфических построений и для палеофитологических целей. К тому же пыльца Pinaceae в достаточной мере обладает характерными признаками для ее распознавания. Поэтому морфология пыльцы современных и ископаемых растений Pinaceae посвящено немало трудов, из которых следует отметить работы М. Х. Моносова-Смолиной (1949), В. В. Зауер (1950, 1954), Н. А. Волховитиной (1952, 1953) и И. С. Штана (1954).

Пыльца всех родов и видов сем. Pinaceae, за исключением *Larix* и *Tsuga*, состоит из центрального тела и двух воздушных мешков. Эта особенность сближает пыльцу большинства видов Pinaceae с пыльцой Podocarpaceae.

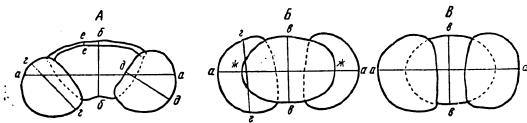
Пыльца Pinaceae, имеющая воздушные мешки (кроме *Cedrus*), обладает некоторыми общими характерными особенностями. В большинстве случаев эта пыльца имеет достаточно хорошо выраженную зародышевую борозду на брюшной (дистальной) стороне тела и утолщенный слой экзины, образующий так называемый «щит» на спинной (проксимальной) стороне. Воздушные мешки представляют собой разрастающиеся экзины в виде полых камер, обычно формы, близкой к сферической. Расположены воздушные мешки в большинстве случаев по бокам тела.

8 Труды ГИН, вып. 6

113

Пыльца *Cedrus* не имеет резко ограниченного шита. Утолщенный слой экзины на спинной поверхности тела обычно непосредственно, без резких границ, переходит в ткань воздушных мешков, которые образованы во внутреннем слое экзины, а внешним. Воздушные мешки *Cedrus* не являются обособленными образованиями на теле пыльцевого зерна, а составляют с ним как бы единое целое.

При определении пыльцы Pinaceae, снабженной воздушными мешками, за основные диагностические признаки принимались: 1) общие размеры зерна и размеры его отдельных частей (центрального тела, воздушных мешков); 2) форма и очертание зерна и форма и очертание основных частей его; 3) структурные особенности отдельных частей зерна.



Фиг. 20. Основные элементы измерения пыльцевых зерен Pinaceae, имеющих воздушные мешки.

A — боковая проекция; B — полярная проекция при положении телом вверх; B' — полярная проекция при положении телом вниз; a — a — общая длина пыльцевого зерна; б — б — высота тела; e — e — ширина тела; e — e — ширина мешков; d — d — высота мешков; e — e — высота гребня; ж — ж — длина тела

Так как форма и размеры отдельных частей пыльцевого зерна могут меняться в зависимости от его положения, то при определении ископаемых пыльнок хвойных все измерения и наблюдения производились либо в строго полярном положении зерна, либо в строго боковом. Направления, по которым велись основные измерения при определении видов, схематически изображены на фиг. 20<sup>1</sup>.

Измерения велись при положении пыльцы в боковой проекции (A), в полярной проекции, спинкой вверх (B), и в полярной же проекции — воздушными мешками вверх (B'). К сожалению, не всегда удавалось одно и то же зерно измерить во всех трех позициях; в этих случаях замеры производились по нескольким зернам и затем брались крайние отклонения и средняя величина для каждого элемента замеров.

Почти для всех родов, пыльца которых снабжена воздушными мешками, удалось установить ряд таких устойчивых величин (размеров) отдельных элементов, которые могли быть приняты за диагностические эталоны. К сожалению, для пыльцы *Keteleeria*, из-за ее редкой встречаемости, устойчивого эталона размеров не выведено. Поэтому определения пыльцы *Keteleeria* велись по тем диагностическим признакам, которые даны в ключе В. В. Зауера (Пыльцевой анализ, 1950).

Весь комплекс диагностических признаков для определения видов и родов пыльцы хвойных с воздушными мешками, выделенных из кайнозойских отклонений, сводится к следующим элементам:

1. Форма тела и его очертание (второе является функцией первого). Основные формы тела можно характеризовать как сфероидальные и эллипсоидальные; отклонения определяются рисунком очертаний тела в полярной или в боковой проекциях (фиг. 21).

<sup>1</sup> При микрофотографировании, которое делается с постоянных препаратов, не всегда удается найти пыльцевое зерно, расположенное в строго полярном или строго боковом положении, и поэтому размеры их на снимках могут несколько уклоняться от тех, которые указаны на основании измерений пыльцевого зерна в подвижной среде.

Сфероидальное тело может иметь следующие очертания:  
 а) округлое в полярной и боковой проекциях (*Pinus ponderosa*);  
 б) ромбовидно-округлое — в полярной проекции, трапециевидно-округлое — в боковой (*Pinus Gerardiana*).  
 Эллипсоидальное тело может иметь следующие очертания:  
 а) эллиптическое в полярной проекции (*Pinus taeda* L.);  
 б) угловато-эллиптическое в боковой проекции (*Cedrus pusilla* Z a u e r);  
 в) эллиптическое в полярной проекции и трапециевидное в боковой (*Abies Hill*);

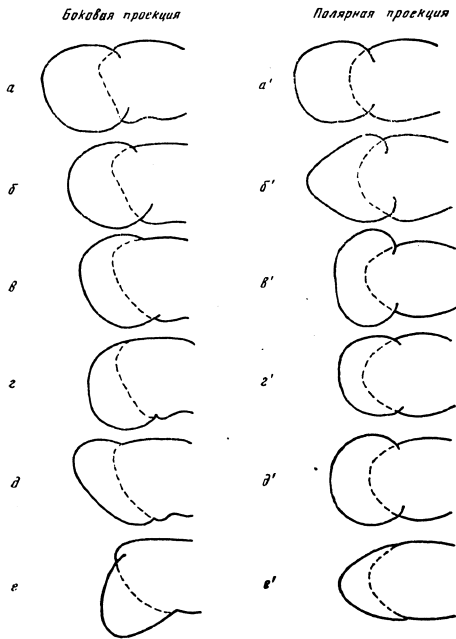
I. Сфероидальная форма тела		II. Эллипсоидальная форма тела	
Проекция:		Проекция:	
полярная	боковая	боковая	полярная:
a	a'	b	b', e'
b	b'	c	d
		d	d'
		e	e'
		ж	ж'
		з	з'

Фиг. 21. Схематическое изображение очертания тела пыльцы с воздушными мешками у различных видов сосен

a — a' — округлость в боковой и полярной проекциях; б — трапециевидно-округлые очертания в боковой проекции; б' — ромбовидно-округлые очертания в полярной проекции; e' — e' — эллиптическое очертание в полярной проекции; e — e' — угловато-эллиптическое очертание в боковой проекции; d — трапециевидное очертание в боковой проекции и d' — эллиптическое очертание в полярной проекции; e — e' — треугольное очертание в боковой проекции и e' — эллиптическое очертание в полярной проекции; ж — трапециевидно-округлые очертания в боковой проекции и ж' — эллиптическое очертание в полярной проекции; z — z' — трапециевидное очертание в боковой проекции и z' — угловато-овальное очертание в полярной проекции

г) эллиптическое в полярной проекции и треугольное в боковой (*Cedrus longisaccata* Z a k l.);  
 д) эллиптическое в полярной проекции и трапециевидно-округлое в боковой (*Pinus silvestris* L.);  
 е) угловато-овальное в полярной проекции и трапециевидное в боковой (*Pinus* секции *Australes* L o u d.).

2. Форма воздушных мешков и их очертания. Форма воздушных мешков в основном близка к сфероидальной, но, в зависимости от принадлежности к тому или иному роду или виду, конфигурация их несколько уклоняется от этой формы, что нередко определяется способом прикрепления мешков к телу зерна. Можно выделить следующие основные формы мешков (фиг. 22):

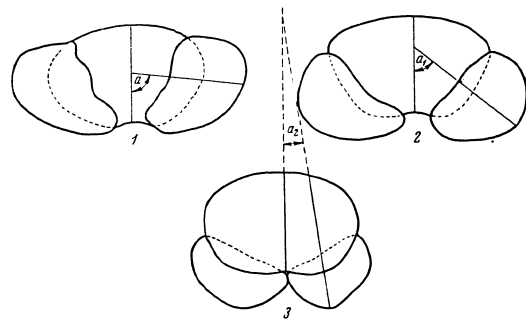


Фиг. 22. Схематическое изображение очертаний воздушных мешков в различных типах их прикрепления к телу.  
 а-а'—сфероидальные; б-б'—угловато-сфероидальные; с-с'—эллипсоидальные; д-д' и е-е'—полусфероидальные; е-е'—конусообразные

- а) сфероидальные, прикрепленные к телу несколько суженными основаниями (мешки значительно больше полусферы); в боковой и полярной проекциях — почти правильная окружность (фиг. 22, а, а');
- б) угловато-сфероидальные, прикрепленные к телу суженными основаниями; очертание в полярной проекции почти треугольное, в боковой проекции — окружность (фиг. 22, б, б');

- в) эллипсоидальные, прикрепленные к телу суженным основанием; очертание в полярной проекции — правильный овал, в боковой — полуокружность (фиг. 22, в, в');
- г) полусфероидальные, прикрепленные к телу широким основанием; очертание в полярной проекции — почти правильная полуокружность; в боковой проекции — полуокружность или полуовал (фиг. 22, г, г', д, д');
- д) конусообразные, прикрепленные к телу широким основанием; в боковой и полярной проекциях — треугольные очертания (фиг. 22, е, е').

3. Прикрепление воздушных мешков к телу. Воздушные мешки, образованные внутренним или внешним слоем экзины, отходят от тела у пыльцы различных родов или видов в различных ме-



Фиг. 23. Схема прикрепления воздушных мешков:

- 1 — воздушные мешки прикреплены к боковым сторонам тела, угол  $\alpha$  близок к прямому;
- 2 — мешки несколько сдвинуты к брюшной стороне тела, угол  $\alpha$  меньше прямого;
- 3 — мешки прикреплены к брюшной стороне тела, угол  $\alpha$  небольшой, острый

стах. В зависимости от этого ось мешков (высота их) находится в различных соотношениях с осью симметрии тела (высотой его). Если мешки отходят от боковых сторон зерна, то линия высоты мешка образует внутренний угол с высотой тела, близкий к прямому (фиг. 23, 1, а).

Если мешки несколько сдвинуты к брюшной стороне, то внутренний угол между высотой мешков и высотой тела будет меньше прямого (фиг. 23, 2, а).

И, наконец, если мешки прикреплены к брюшной стороне зерна, то угол между высотой тела и высотой мешка будет острым, небольшим (15—20°), чем теснее будут сдвинуты к брюшной стороне мешки, тем меньше будет угол (фиг. 23, 3, а<sub>2</sub>). Точка пересечения высот мешков и высоты тела в этом случае находится вне зерна.

4. Структура экзины мешков. Экзина воздушных мешков пыльцы Pinaceae обладает сетчатой структурой, весьма схожей с Podosaraceae. Сетка мешков вырисовывается на их поверхности в виде более или менее четкого рисунка (фиг. 24). Рисунок сетки может быть ясным или неясным. Среди ясно выраженной, четкой сетчатости можно выделить:

- а) неравномерную чешую (фиг. 24, 1);
- б) равномерно-прямоугольную чешую с крупными или мелкими ячейками (фиг. 24, 2, 3);

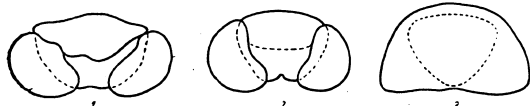


в) округлоячейчатую с крупными или мелкими ячейками (фиг. 24, 4, 5);  
 г) неравномерноячейчатую с крупными или мелкими вытянутыми ячейками (фиг. 24, 6).  
 К неясно выраженной можно отнести одинарную или комбинированную сетчатость — крупная сетка налагается на мелкую (фиг. 24, 7, 8).



Фиг. 24. Схема различных типов сетки воздушных мешков у пыльцы сем. Pinaceae.  
 1 — сетка четкая, равномерноячейчатая; 2 — то же, равномерноячейчатая, с крупными ячейками; 3 — то же с мелкими ячейками; 4 — сетка четкая, округло-ячейчатая, с крупными ячейками; 5 — то же с мелкими ячейками; 6 — сетка четкая, неравномерноячейчатая с вытянутыми ячейками; 7 — сетка неясно выраженная, прерывистая, одинарная; 8 — сетка неясно выраженная, комбинированная.

Обычно величина ячеек сетки крупнее на периферийных частях воздушных мешков и мельче на участках, близких к границе с телом.  
 5. Структура и скульптура экзины тела. У большинства пыльцевых зерен Pinaceae с воздушными мешками поверхность тела на спинной и брюшной части не одинакова. Зависит это от того, что



Фиг. 25. Схематическое изображение различных видов пыльцы сем. Pinaceae (боковая проекция).  
 1 — пыльцевые зерна, тело которых слабо или выраженным щитом; 2, 3 — пыльцевые зерна, границы щита которых выражены неясно.

экзина неравномерно отслаивается от тела, имеет неодинаковую толщину на различных участках его и снабжена неодинаковыми скульптурными выростами. Брюшная поверхность тела имеет тонкую однослойную экзину (гладкую или снабженную мелкими, неравномерно разбросанными выростами, бугорками, извилистыми складками, ямками).

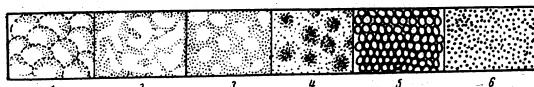
На спинной поверхности тела экзина двуслойная, структурная и имеет скульптурные выросты. Это так называемый щит. Одни ископаемые виды и роды имеют ясно выраженный щит (фиг. 25, 1), у других границы щита менее резко выражены или совпадают с границей прикрепления мешков, или перекрывают ее (фиг. 25, 2, 3). В частности, у пыльцы *Cedrus* ясно выраженной границы щита нет и утолщенная экзина спинной поверхности тела непосредственно переходит на мешки, являясь их оболочкой.

Щит у пыльцы Pinaceae может иметь резкие границы, с небольшим выгибом до края (род *Abies*), или границы без выгиба (*Pinus sibirica*). По своему строению двуслойный щит может иметь слой равной или неравной толщины.

В зависимости от ясности структуры или от наличия скульптурных выростов на поверхности экзины, поверхность щита бывает:

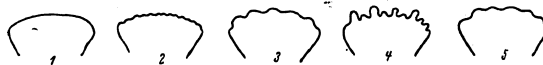
а) крупнобугорчатая, бугорчатость — неравномерная или равномерная (фиг. 26, 1);

б) мелкобугорчатая, бугорчатость — равномерная или неравномерная (фиг. 26, 3, 4);  
 в) мраморовидно-складчатая (фиг. 26, 2);  
 г) крупно- или мелкоямчатая (фиг. 26, 5);  
 д) неясно- или ясоточечная (фиг. 26, 6).



Фиг. 26. Скульптуры щитов пыльцы сем. Pinaceae.  
 1 — поверхность крупнобугорчатая; 2 — поверхность мраморовидно-складчатая; 3, 4 — поверхность мелкобугорчатая; 5 — поверхность мелкоямчатая; 6 — поверхность неясно- или ясоточечная.

6. Контур тела. Утолщенный слой экзины на спинной части тела при боковом положении зерна проницается в виде так называемого гребня. Ширина и контур гребня и контур тела зерна являются одним из диагностических признаков при определении и в значительной степени зависят от строения щита.



Фиг. 27. Типы очертания спинной части тела (контур гребня) пыльцы сем. Pinaceae:  
 1 — контур ровный; 2 — контур мелковолнистый; 3 — контур крупноволнистый; 4 — контур крупнозубчато-волнистый; 5 — контур неясно- или слабоволнистый.

В зависимости от структуры экзины и скульптуры поверхности щита гребень имеет различный контур: он может быть ровный, или волнистый (мелко или крупно), или зубчатый (фиг. 27, 1—5).



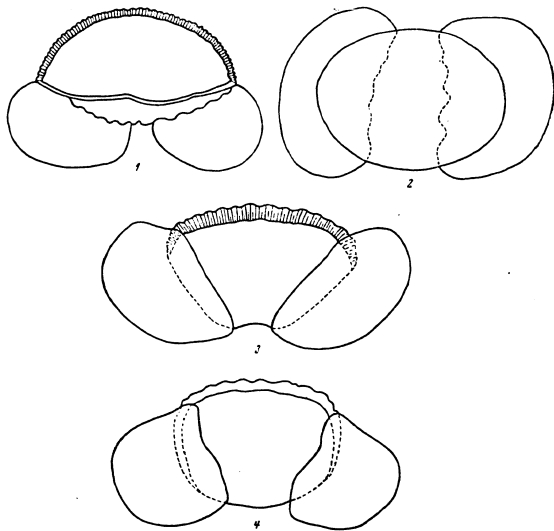
Фиг. 28. Схематическое изображение различных пыльцевых зерен сем. Pinaceae со щитом.  
 1 — контур тела ровный; 2 — контур тела волнистый только в области прикрепления воздушных мешков; 3 — контур тела волнистый.

В зависимости от того, прерывается щит до места прикрепления мешков или, несколько утолщаясь, перекрывает границу прикрепления мешков к телу, контур тела в полярном и боковом положениях различен у разных видов. Например, если щит прерывается у линии прикрепления мешков, как у пыльцы *Pinus sibirica* или у большинства *Pinus* (включая *Strobus*), то тело имеет волнистый контур лишь на спинной части (лучше

всего это наблюдается при боковом положении зерна, но различимо и в полярной проекции). Если же щит простирается за границу прикрепления воздушных мешков, то в боковой проекции контур спинной части зерна изображается волнистой линией, а над мешками заметно утолщение. В полярной же проекции контур тела изображается волнистой линией и на спинной и на боковой частях (фиг. 28). Это часто наблюдается у пыльцевых зерен некоторых представителей *Pinus* секций *Strobus*, *Sembrae*, *Pseudostrobus*, *Parasembrae* и некоторых других.

#### Род *Abies* Hill

В работе В. В. Зауер (1950) приведены достаточно четкие диагностические признаки, характеризующие пыльцу растений рода *Abies* и отличающие ее от пыльцы прочих родов сем. *Pinaceae*. Придерживаясь в основном



Фиг. 29. Схема строения пыльцы родов *Abies* и *Keteleeria*.  
1, 2 — *Abies sibirica* и *Keteleeria*; 3, 4 — *Abies firma* (1, 3 и 4 — боковая проекция, 2 — полярная проекция)

этих данных, удалось выделить из общего комплекса пыльцы *Pinaceae* кайнозой Приаралья и Казахстана два вида пыльцы *Abies*. Общие признаки обнаруженной нами ископаемой пыльцы *Abies* следующие.  
Общая длина пыльцевых зерен колеблется от 105 до 200  $\mu$ , высота тела — от 55 до 95  $\mu$ , высота воздушных мешков — от 50 до 75  $\mu$ , ширина гребня — от 5 до 12  $\mu$ .

120

Форма тела эллипсоидальная, в очертании овальная в полярной проекции и округло-трапецевидная — в боковой. Борозда расположена на брюшной стороне тела.

Экзина тела двуслойная, со столбчатой структурой. Щит ясно выражен. На спинной части зерна экзина щита сильно утолщается и в боковой проекции изображается в виде широкого гребня. Очертание гребня крупно или мелковолнистое. Поверхность щита мраморовидная, обусловленная шнуровидно-извилистой скульптурой. Поверхность брюшной части тела мелкобугорчатая. Структура экзины мешков четкая, крупно- или мелко-сетчатая.

Воздушные мешки сфероидальные, в очертании — почти правильная окружность. Мешки прикрепляются к телу суженным основанием, линия прикрепления четкая. Высота мешков всегда больше ширины их. В боковой проекции линия очертания тела и мешков образует угол, близкий к прямому.

Отличительными признаками, характеризующими пыльцу растений рода *Abies*, можно считать (фиг. 29):

- 1) наличие ясно выраженного щита и гребня на спинной части тела;
- 2) шаровидную форму воздушных мешков;
- 3) четкую границу прикрепления мешков к телу и наличие ясно выраженного угла между линиями контура тела и мешков;
- 4) величину пыльцевых зерен, обычно превышающую величину пыльцевых зерен *Picea*.

К сожалению, пыльца пихты ныне живущих видов описана весьма слабо, в литературе известны лишь описания пыльцы *Abies firma* Sieb. et Zucc. (Зауер, 1950), *A. sibirica* Ldb. (Erdtman, 1943), *A. cephalonica* Loud., *A. pinsapo* Boiss., *A. concolor* Muirg. (по зарисовкам автора). Поэтому для определения видов, выделенных из кайнозойских отложений Приаралья и Казахстана, имеется очень бедный сравнительный материал.

#### *Abies sibiriciformis* sp. nov. (pollen)

Табл. IV, рис. 1, 2

Препарат № 235  $\frac{3}{K}$

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз, глины с рыхлыми остатками второй свиты континентального олигоцена (средний олигоцен).

Формы, морфологически близкие, известные по литературным данным:

1940. *Abies*. Thiergart. Die Micropaläontologie als Pollenanalyse im Dienst der Braunkohlenforschung, Taf. I, Fig. 6, 8.

Общая длина зерна 112—122  $\mu$ ; длина тела 90—100  $\mu$ , высота 47—60  $\mu$ , высота воздушных мешков 47—50  $\mu$ , ширина 45—50  $\mu$ ; высота гребня 3,5—6  $\mu$ . Строение пыльцы — обычное для рода *Abies*.

По форме тела и очертаниям, а также по структуре щита и мешков ископаемая пыльца имеет большое сходство с пыльцой современного вида *Abies sibirica*. Небольшие расхождения отмечаются лишь в размерах пыльцевых зерен. По данным В. В. Зауер, пыльца *Abies sibirica* Ldb. имеет высоту мешков 51—69  $\mu$ , у ископаемой формы высота мешков не превышает 54  $\mu$ , а в среднем составляет 50  $\mu$ .

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.  
Р а с п р о с т р а н е н и е: пыльца *Abies sibiriciformis* под названием *Abies* sp. отмечена, судя по опубликованным иллюстрациям и спискам,

121

в пыльцевых спектрах плиоцена Западной Европы, Европейской части СССР, в третичных отложениях (преимущественно в миоценовых) Башкирии, Урала и в четвертичных отложениях севера Европейской части СССР, Зауралья, Сибири и на Дальнем Востоке. Кроме того, пыльца *Abies sibiriciformis* sp. nov. (pollen) и *Abies* aff. *sibirica* неоднократно обнаруживалась в олигоценовых (преимущественно в средней части) отложениях Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья. Ископаемые остатки растений рода *Abies* sp. найдены еще в меловых отложениях Сибири и Урала, в палеоцене Поволжья, в олигоцене и эоцене Украины и в миоцене Европейской и Азиатской частей СССР.

Современное распространение *Abies sibirica* — северо-восток Европейской части СССР, Восточная Сибирь, Казахстан, Монголия, Тувинская автономная область. Дерево приурочено обычно к долинам рек, растет в смеси с елью. В горных районах поднимается до высоты 1200—2000 м над уровнем моря. Растение морозоустойчивое, выносит континентальный климат. Возможно, что заметное увеличение континентальности климата, похолодание и уменьшение общей влажности воздуха в связи с отсутствием олигоценового моря и повлекло за собой распространение прародителя *Abies sibirica* на Казахском континенте.

*Abies protofirma* sp. nov. (pollen)

Табл. IV, рис. 3

Препарат № 1  $\frac{3\lambda}{K}$

Г о л о т и п: Северное Приаралье, г. Тас-Аран, тасаранская свита морского эоцена (средний эоцен).

Пыльца относится к типу зерен, изображенных на фиг. 29, 3, 4.

Общая длина зерна 112—120 м; длина тела 64 м, высота 48—50 м; ширина воздушных мешков 47—50 м, высота 50—60 м; ширина гребня 6,4 м.

Тело округло-эллипсоидальное, очертание в боковой проекции — гексагональное. Экзина тела двуслойная; нижний слой тоньше, чем верхний. Структура экзины на спинной поверхности зерна — столбчатая. Экзина на спинной части тела сильно утолщена и образует щит с довольно ясными гранями. В боковой проекции прекрасно выражен гребень с полными контурами. Поверхность тела на брюшной стороне неравномерно-мелкобугорчатая.

Мешки округло-овального очертания, вытянуты по высоте. В боковой проекции мешки имеют округло-треугольное очертание. Прикреплены мешки к телу чаще всего суженным основанием; линия очертания внешнего контура тела и мешков образует угол. Сетка на мешках комбинированная — в основном крупноячеистая, с мелкими добавочными ячейками.

Ископаемая пыльца несколько напоминает пыльцу ныне живущей *Abies firma* Sieb. et Zucc., описанную автором из гербарного материала Сухумского ботанического сада (сбори Н. А. Болховитиной). Отличается от нее формой воздушных мешков; у современного вида мешки имеют более правильную сфероидальную форму.

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: Павлодарское Прииртышье, нижнеолигоценовые отложения (чеганские глины); Северное Приаралье, отложения эоцена и нижнего олигоцена.

Родина современного вида *Abies firma* Sieb. et Zucc. — Центральная и Южная Япония. Распространена на южных островах, во влажных горных долинах, где растет совместно с *Chamaecyparis obtusa*, *Sciadopitys verticillata*, *Cryptomeria japonica*, *Torreya nucifera* и широколиственными породами.

Род *Keteleeria* Carr. — Кетелеерия

Общий тип, форма и очертания пыльцы *Keteleeria* изображены на (фиг. 29, 1, 2.) В схеме, как видно из приведенных рисунков, пыльцевые зерна *Keteleeria* весьма близки к *Abies*.

Пыльца *Keteleeria* относится к типу зерен с двумя воздушными мешками, имеет сходство с пыльцой *Picea* и *Abies*. Некоторые признаки сходства и различия пыльцы этих родов указаны ниже.

Из литературы известно, что пыльца *Keteleeria* почти всегда встречается в виде единичных зерен. Кроме того, во многих случаях принадлежность ее к роду *Keteleeria* подвергается сомнению.

*Keteleeria davidianaeformis* sp. nov. (pollen)

Табл. IV, рис. 4—6

Препарат № 198  $\frac{H}{K}$

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз, вторая свита континентального олигоцена (средний олигоцен).

Общая длина зерна 140—160 м; длина тела 118 м, высота тела около 80 м; ширина воздушных мешков около 70 м, высота около 65 м; толщина гребня около 32 м; диаметр ячеек сетки на мешках 3—5 м.

Тело округло-эллипсоидальное, очертание в боковой проекции угловато-овальное. Экзина тела имеет столбчатую структуру. На спинной части тела экзина резко утолщается и образует щит, который пронцируется в виде неширокого, но ясно выраженного гребня, покрытого поперечными штрихами.

Воздушные мешки имеют сетчатую экзину, сетка — округло-ячеистая, равномерна по всей поверхности мешков. Поверхность бугорчатая. Поверхность щита мелкобугорчатая, контур — мелковолнистый.

Пыльца *Keteleeria* имеет очень большое сходство с пыльцой *Abies* и отличается от нее лишь большей величиной зерна и наличием мелкобугорчатого (зернистого) рисунка на поверхности щита; у пыльцы *Abies* щит снабжен скульптурными шнуровидными выростами.

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: пыльца *Keteleeria* aff. *Davidiana* Beissn. обнаружена в виде единичных зерен в общем комплексе пыльцы Pinaceae в Северном Казахстане, в спектрах чеганской, первой и второй свит (верхней и средней олигоцен) и в некоторых горизонтах четвертой свиты континентального олигоцена (верхний олигоцен). В Северном Приаралье вид единично встречается от эоцена до среднего олигоцена. Присутствие пыльцы *Keteleeria* отмечается в палеоолигоценовых спектрах Западной Европы, в СССР, в неогене Азиатской части СССР, в верхнепалеоолигоценовых горизонтах Приаралья.

Родина *Keteleeria Davidiana* Beissn. — Юго-Западный и Западный Китай. В настоящее время этот род включает всего два вида, обитающих в Юго-Западном Китае в составе хвойных лесов; иногда образует самостоятельные рощи. Растет на высоте от 300 до 1500 м над уровнем моря.

*Keteleeria* sp. [(K.) aff. *Davidiana* Beissn.]

Табл. V, рис. 1

Препараты № 198  $\frac{H}{K}$  и 146  $\frac{H}{K}$

Размеры пыльцевого зерна — те же или несколько крупнее, чем у *Keteleeria davidianaeformis* sp. nov. (pollen). Плохая сохранность и некоторые отличия в строении оболочек не позволяют провести полную анало-

тию с предыдущим видом. Отличается от пыльцы *Keteleeria* aff. *Davidiana* наличием толстого слоя экзины на воздушных мешках.

Местонахождение: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемпартуз, глины с растительными остатками второй свиты континентального палеогена (средний олигоцен).

#### Род *Picea* Dietr.—Ель

Пыльца *Picea* относится к типу пыльцевых зерен Pinaceae с воздушными мешками. Имея много общих морфологических признаков, объединяющих эту группу, пыльца *Picea* довольно четко отличается от пыльцы родов *Pinus*, *Abies*, *Keteleeria* и других присущими только этому роду признаками.

Пользуясь имеющимися в литературе данными по морфологии пыльцы ныне живущих видов *Picea* (Зауер, 1950; Гричук и др. in litt.) нам удалось выделить несколько видов ископаемой пыльцы *Picea*, принадлежащих к двум секциям.

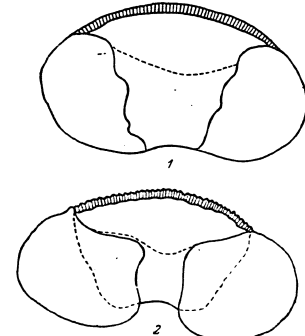
Пыльца рода *Piceae* состоит из центральной части, или тела округло-эллипсоидальной формы, с овальным или трапецевидным очертанием в боковой проекции, и из двух воздушных мешков. Общие размеры зерна колеблются от 80 до 120 м.

У пыльцы современной ели из секции *Euripiceae* Willk m. очертание тела в боковой проекции овальное (фиг. 30, 1), у пыльцы же из секции *Omogica* Willk m. — трапецевидное (фиг. 30, 2). В полярной проекции очертание тела пыльцы всех видов обеих секций обычно овальное. Воздушные мешки прикреплены к телу широкими основаниями и сдвинуты к его брюшной стороне.

У пыльцы обеих секций экзина тела образует ясно выраженный шит. Границы шита у пыльцы *Picea* секции *Euripiceae* слажены, а у шита пыльцы секции *Omogica* более четкие, причем на некоторых экземплярах удается наблюдать нежные, едва заметные утолщения по его краю.

Утолщение экзины на спинной части тела пыльцы обеих секций образует гребень, который более ярко выражен у пыльцы секции *Omogica*. Структура экзины шита у пыльцы обеих секций столбчато-зернистая. Поверхность шита мелкоямчатая, в отличие от мраморовидной у пыльцы *Abies*.

Воздушные мешки *Picea* имеют сетку, ячейки которой обычно мелкие и неясно выраженные; обычно ячейки сетки уменьшаются в размере при приближении к месту прикрепления мешков и переходят в точечный рисунок тела. Зародышевую борозду на ископаемых экземплярах наблюдать



Фиг. 30. Схематическое изображение пыльцы рода *Picea*:

1—*Picea* секции *Euripiceae* Willk m. (боковая проекция); 2—*Picea* секции *Omogica* Willk m. (боковая проекция)

приходится редко, так как выражена она нечетко. Характерным признаком пыльцы, относящейся к секции *Euripiceae*, является почти полное отсутствие угла между линией очертания тела и мешков. Поэтому пыльцевое зерно в боковой или полярной проекции имеет очертание, близкое к правильному овалу. У пыльцы же, принадлежащей к секции *Omogica*, линия прикрепления мешков выражена четко и линии внешнего очертания тела и мешков в боковой проекции образуют угол, вследствие чего пыльца *Picea* секции *Omogica* несколько напоминает пыльцу *Abies*.

С. Н. Наумова (1939) пыльцу, подобную пыльце современным елям, относит, в числе прочих пыльцевых зерен хвойных с воздушными мешками, нерезко отделяющимися от тела, к классу *Aragosa* Naum., группе *Saccata* Naum., подгруппе *Oedemosaccus* Naum.

Ископаемые остатки рода *Picea* известны с мелового периода. В больших количествах пыльца встречается начиная от верхнеюрских отложений. В третичных отложениях пыльца рода *Picea* широко распространена и является обычным компонентом лесных комплексов.

#### *Picea* секции *Euripiceae* Willk m.

##### *Picea tataranica* sp. nov. (pollen)

Табл. V, рис. 2, 3  
3я  
Препарат № 1 К

Голотип: Северное Приаралье, г. Тас-Аран, листоватые глины тасаранской свиты (средний эоцен).

Формы, имеющие некоторое сходство с описанной пыльцой, известны по литературным данным:

1949. *Pinojella sacculifera* М а л ь к и н а. Определитель спор и пыльцы. Юра — мел. Табл. 25, фиг. 4, 5.  
1950. Coniferpollen dem *Picea* typus R e i s s i n g e r. Die «Pollenanalyse» ausgedehnt auf alle Sedimentgesteine der geologischen Vergangenheit. Taf. V, Fig. 18.  
1953. *Picea* секции *Euripiceae* З а к л и н с к а я. Описание некоторых видов пыльцы и спор, выделенных из третичных отложений Пасековского карьера Воронежской области, стр. 67, табл. II, фиг. 16.

Перечисленные формы имеют некоторое сходство с пыльцой *Picea tataranica* sp. nov. лишь по внешнему облику и по очертаниям зерна в боковой проекции, но в деталях они отличаются от *P. tataranica*.

Пыльца *Picea tataranica* имеет следующие измерения: общая длина зерна 92,8 м; высота тела около 45 м, ширина около 60 м; ширина воздушных мешков от 45 до 48 м, высота около 30 м. Гребень неширокий.

Тело зерна — эллипсоидальной формы, с овальным очертанием в полярной проекции и трапецевидно-овальным в боковой. Борозда выражена слабо.

Воздушные мешки тесно насажены на боковые стороны тела, охватывая его большей своей частью с брюшной стороны. Граница прикрепления мешков неясная. Сетка на мешках мелкая и неясно выражена.

Шит на спинной поверхности зерна имеет четкую, но нерезкую гранити. Гребень узкий, поперечно исчерченный, сходящий на нет к месту прикрепления мешков. Поверхность шита мелкоямчатая. Поверхность тела на брюшной стороне неясноточечная.

По внешнему облику и по основным морфологическим признакам, приведенным в описании, пыльца *Picea tataranica* должна быть отнесена к секции *Euripiceae*. По общим очертаниям пыльца *Picea tataranica* несколько напоминает *P. excelsa* L i n e e., но отличается от нее по величине и форме воздушных мешков. У *P. tataranica* мешки несколько вытянуты по вы-

соте и в боковой проекции имеют округло-конусовидное очертание, а у *P. ezelsa* они уплощены.

Место нахождения: см. голотип.

Распространение: нижний и средний эоцен Приаралья. Пыльца, подобная *Picea lasaranica*, но иногда несколько больших размеров, отмечается в спектрах мел-палеоцена и единично в эоцене и нижнем олигоцене Павлодарского Прииртышья.

*Picea schrenkianaeformis* sp. nov. (pollen)

Табл. V, рис. 4

Препарат № 2  $\frac{3H}{K}$

Голотип: Северное Приаралье, г. Тас-Аран, тасаранская свита, листоватые глины, средний эоцен.

Общая длина зерна 115 м; высота тела около 55 м; ширина воздушных мешков 60 м, высота 45 м; высота гребня около 6 м.

Форма зерна приближается к овалу, так как граница прикрепления мешков к телу сглажена. Мешки насажены по бокам тела пыльцевого зерна широкими основаниями; граница линии прикрепления мешков уплощается плохо.

На спинной части зерна экзина щита сильно утолщена и образует поперечно исчерченный гребень, который, утоняясь к месту прикрепления мешков, постепенно сходит на нет. При боковой проекции хорошо видна двуслойность экзины гребня. Верхний слой экзины тоньше нижнего, он постепенно переходит на поверхность мешков. Щит на спинной части зерна имеет неясную ямчатую структуру. Рисунок на поверхности щита неясный, иногда поверхность его кажется просто исчерченной, иногда удается наблюдать мелкоямчатую скульптуру, но выражена она слабо.

Воздушные мешки снабжены мелкой сеткой, которая хорошо выражена на их боковых и брюшных поверхностях, но по мере приближения к границе прикрепления мешков к телу четкость рисунка сетки пропадет и постепенно переходит в мелкую исчерченность.

Пыльца *Picea schrenkianaeformis* по внешнему облику, величине, очертанию, характеру прикрепления мешков, по рисунку и ширине гребня и по форме и очертанию мешков очень близка к пыльце современной *Picea Schrenkiana* F. et M. Однако некоторые морфологические признаки обоих видов пыльцы остаются несходными. Например, щит пыльцы *Picea Schrenkiana* F. et M. имеет правильную мелкоямчатую скульптуру, а щит *P. schrenkianaeformis* sp. nov. — неясноямчатую скульптуру, переходящую в исчерченность. Граница прикрепления мешков у современной пыльцы выражена более четко, чем у ископаемого вида. Внутренний слой экзины гребня у *P. Schrenkiana* более толстый, чем внешний, а у *P. schrenkianaeformis* соотношения обратные. Все это заставляет относиться осторожно к проведению полной аналогии между современной и ископаемой формами. Поэтому и видовое название формы, описанной как *Picea schrenkianaeformis*, указывает лишь на большое сходство ее с современной пыльцей *P. Schrenkiana*, но не на полное их тождество.

Из песчано-гравийного горизонта континентальных отложений четвертой свиты олигоцена Северного Прииртышья неоднократно была выделена пыльца ели, весьма близкая к *Picea schrenkianaeformis*, но значительно худшей сохранности, что вызвано, по-видимому, условиями захоронения (см. табл. V, рис. 5, описание препарата № 259  $\frac{H}{K}$ ).

Общая длина зерна 110—120 м; высота тела 53—57 м; ширина мешков около 60 м, высота — около 45 м; высота гребня около 5 м.

Несмотря на плохую сохранность пыльцевых зерен, удалось установить, что ряд признаков сближает ископаемую пыльцу с *Picea Schrenkiana*. Например, высота гребня у ископаемой формы такая же, как и у современной; линия прикрепления воздушных мешков выражена яснее, чем у *Picea schrenkianaeformis* из эоценовых отложений, и сходна с линией прикрепления у *P. Schrenkiana*. На теле ископаемого зерна заметна мелкая точечность, подобная *P. Schrenkiana*. Скульптура щита неясноямчатая. Границы щита более ясно выражены, чем у *P. schrenkianaeformis* из эоценовых отложений.

Таким образом, сходство этой пыльцы из континентальных отложений олигоцена с пыльцой *P. Schrenkiana* выражено у некоторых зерен даже более ясно, чем у *P. schrenkianaeformis* из эоценовых отложений.

Место нахождения: см. голотип.

Распространение: пыльца, подобная *Picea schrenkianaeformis*, известна из эоценовых отложений Поволжья, в виде единичной находки отмечена в эоценовых отложениях Северного Приаралья. В Павлодарском Прииртышье в основном приурочена к олигоценным отложениям.

Родина *Picea Schrenkiana* — Джунгарский Ала-Тай, почти весь Тянь-Шань и Китайский Туркестан. Это типично горный вид, растущий на северных склонах горных ущелий совместно с *Abies sibirica*. По Ферганскому хребту *Picea Schrenkiana* образует густые насаждения в смеси с *Abies Semenovii*, *Acer turkestanica*, а на южной границе своего распространения встречается вместе с *Juglans regia*.

По данным Н. В. Павлова (1947), тяньшанская ель (*P. Schrenkiana*) на территории Казахстана в настоящее время является исключительно горным видом. Возможно, что описанная ископаемая пыльца *P. schrenkianaeformis* — далекий предок современной *P. Schrenkiana*, пришедший с южных гор древней Азии.

Секция *Omerica* Willkm.

*Picea atata* sp. nov. (pollen) ex gr. *P. jezoensis* Carr.

Табл. VI, рис. 1—5

Препарат № 255  $\frac{H}{K}$

Голотип: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз, глины с растительными остатками второй свиты континентальных отложений (средний олигоцен).

Общая длина зерна от 145 до 160 м, высота около 65 м; высота воздушных мешков от 40 до 50 м, ширина около 70 м; высота гребня 2—4 м.

Форма тела эллипсоидальная, очертание в боковой проекции трапециевидное. Гребень широкий, с волнистым краем. Высота гребня по мере приближения к месту прикрепления воздушных мешков постепенно уменьшается, но в некоторых случаях остается неизменной.

Экзина тела двуслойная, внутренний слой тонкий, наружный — толстый и имеет столбчатую структуру в области щита. На спинной части тела экзина образует ясно выраженный щит. На некоторых экземплярах щит по краю имеет рубчик, но у большинства зерен этот рубчик незаметен. Поверхность щита мелкобугорчатая. Щит, как видно, далеко заходит на боковые и брюшную части тела и поэтому боковые его границы при полярном положении зерна хорошо просматриваются сквозь контур тела. Брюшная поверхность тела имеет неясно выраженную мелкобугорчатую скульптуру, которая при высоком положении тубуса микроскопа прощипывается в виде редкой точечности. Воздушные мешки имеют сферондальную форму

с полукруглым очертанием в полярной и в боковой проекциях. Прикрепляются мешки к телу несколько суженными основаниями, вследствие чего контур тела и мешков образует угол. Этот признак сближает пыльцу *Picea alata* секции *Omorica* с пыльцой рода *Abies*. Прикреплены мешки к боковым сторонам тела и несколько сдвинуты к брюшной, линия прикрепления мешков на брюшной стороне неясная. У некоторых экземпляров мешки настолько сильно сдвинуты к брюшной стороне, что внутренние линии их прикрепления смыкаются.

Сетка на периферийных поверхностях мешков четкая и ясная; к брюшной и спиной поверхностям ячейки сетки сильно мельчают и переходят в мелкий извилистый рисунок, который сливается с рисунком поверхности тела.

По внешним признакам и по отдельным морфологическим особенностям пыльца *Picea alata* sp. nov., отнесенная нами к секции *Omorica*, имеет близкое сходство с современной пыльцой *P. jezoensis* Сагг., описанной В. П. Гринчук с соавторами (in litt.), отличающейся от нее лишь менее высоким гребнем.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: пыльца, подобная *Picea alata*, отнесенная нами к секции *Omorica*, встречается в высоких горизонтах континентального олигоцена в Казахстане. Отмечена автором в олигоцене и миоцене Северного Казахстана, в эоцене Поволжья и в олигоцене и эоцене Приаралья, а также в миоценовых отложениях Украины.

В настоящее время *Picea jezoensis* Сагг. обитает в горах Дальнего Востока (Приморье), на Сахалине, на о-ве Иезо в Северной Корее, в Восточной Маньчжурии и на юге Якутии. *P. jezoensis* — горное дерево, которое доходит до верхней границы лесной полосы, но местами его можно встретить спускающимся близко к морю. Растет *P. jezoensis* вместе с сахалинской пихтой, каменистой березкой и маньчжурским кедром. Южные варианты *P. jezoensis* на о-ве Иезо растут вместе с различными видами *Magnolia*, лианами и бамбуком.

Надо полагать, что пыльца *Picea* секции *Omorica*, выделенная из третичных отложений Казахстана, принадлежит растению, которое по своей экологии было наиболее близко к современному виду *Picea jezoensis*. Характерно, что появление и распространение пыльцы *P. alata* sp. nov. совпадает с почти полным исчезновением пыльцы болотного кипариса (*Taxodium*), что характеризует некоторое осушение климата. В то же время в спектрах отмечается обилие пыльцы *Pinus*, что, по-видимому, связано с тем же явлением.

#### Род *Cedrus* Link. — Кедр

В начале 1954 г. вышла в свет монографическая работа В. В. Зауер, посвященная изучению ископаемой пыльцы *Cedrus* и ее значению для стратиграфии. В этой работе приведено описание пыльцы современных видов рода *Cedrus*, а также дано описание 21 вида ископаемой пыльцы. Ископаемые формы *Cedrus*, описанные В. В. Зауер, относятся в основном к меловым и третичным отложениям. Большую часть находок пыльцы *Cedrus* в третичных отложениях Казахстана В. В. Зауер относит к верхнему олигоцену (лигнитовая свита восточного борта Тургайского прогиба). При этом автор отмечает, что в этих отложениях встречается в основном пыльца одного вида *Cedrus*, близкого по морфологическим признакам к пыльце современного вида *C. deodara*. В миоценовых отложениях Казахстана автор отмечает находки *C. deodariformis*, также близкого к

современному виду *C. deodara*<sup>1</sup>. В более древних третичных отложениях (палеоцен — эоцен) Казахстана автор не отмечает находок пыльцы кедра и относит это за счет того, что отложения доолигоценного времени представляются морскими фашиями.

На основании изученного материала по Павлодарскому Прииртышью и Северному Приаралю у нас создается иное представление о времени распространения рода *Cedrus* в палеогеновых флорах на территориях, прилегающих к палеогеновому морскому бассейну, в пределах современного Казахстана.

Пыльца рода *Cedrus* в третичных отложениях Казахстана встречается довольно часто, причем по количеству видов и по абсолютному содержанию наибольший удельный вес ее приходится на нижние горизонты палеогена (палеоцен — эоцен), а затем на более верхние его горизонты — средний олигоцен.

Виды пыльцы *Cedrus*, обнаруженные в эоценовых и палеоцен-эоценовых отложениях Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья, значительно отличаются от видов, выделенных из континентальных отложений олигоцена. Особенным разнообразием форм кедра отличаются свиты из тасаранской свиты Северного Приаралья (средний эоцен). Вторичный расцвет *Cedrus* в Казахстане связан со временем отложения первой и второй свит континентального олигоцена.

Для ископаемой пыльцы рода *Cedrus* в основном характерны те же признаки, которые присущи и пыльце современных видов (Зауер, 1954), но у ископаемых видов эти признаки более подчеркнуты и несколько усложнены в деталях.

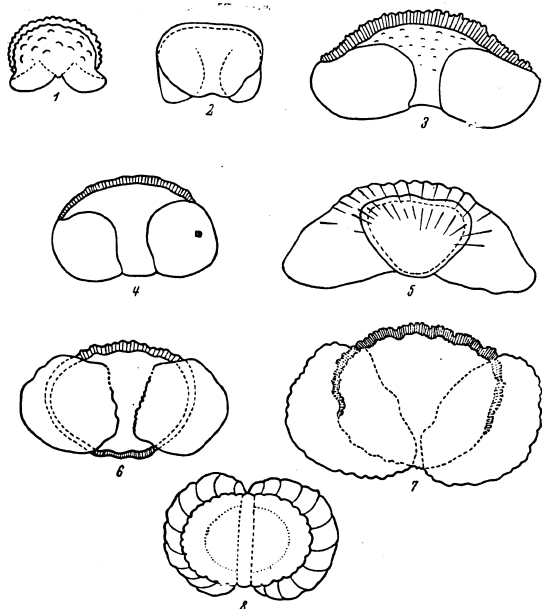
По основным чертам строения пыльцы растений рода *Cedrus* близка к пыльце всех двухмешковых *Pinaceae*, в особенности к пыльце рода *Picea*. Однако ряд совершенно специфических черт в строении пыльцы *Cedrus* все же позволяет четко выделить пыльцу всех видов рода *Cedrus* из общего комплекса двухмешковой пыльцы сем. *Pinaceae*. В общем, для пыльцы *Cedrus* характерны следующие признаки: тело эллипсоидальное с округло-треугольным, овальным или трапециевидно-овальным очертанием в боковой проекции (фиг. 31). Экзина тела двуслойная, наружный слой тоньше, чем внутренний. На спиной части зерна внутренний слой экзины сильно или незначительно (в зависимости от принадлежности к виду) утолщается, образуя гребень. На боковых частях зерна утолщение исчезает, а внешний слой экзины отслаивается в виде камер, исполняющих, по-видимому, функции воздушных мешков. Камеры сильно сдвинуты к брюшной части тела. Поверхность спиной части тела обычно крупнобугристая или складчатая, что обуславливает крупный мраморовидный рисунок и в большинстве случаев — деровный контур гребня. Последнее особенно хорошо заметно тогда, когда зерно расположено в боковой проекции.

Воздушные мешки, облеченные вместе с телом общим верхним слоем экзины, отходят от тела сильно расширенными основаниями и у большинства видов имеют округлые или овальные очертания. У некоторых видов *Cedrus* воздушные мешки несколько вытянуты по высоте и тогда в очертании они округло-треугольные. В том месте, где камера воздушных мешков отходит от тела, экзина в большинстве случаев собрана в складки, вследствие чего пыльцевые зерна некоторых видов *Cedrus* имеют неправильно-волнистый контур (фиг. 31, 6—8). В том случае, если складки экзины отсутствуют, контур и мешков и тела ровный (фиг. 31, 1—4).

<sup>1</sup> По данным Казахстанской экспедиции Академии наук СССР, лигнитовая свита относится к среднему олигоцену. Соответственно миоценовые находки кедра следует относить к верхнему олигоцену.

Экзина тела и мешков обычно имеет сетчатую структуру. При этом неравномерный крупосетчатый рисунок мешков постепенно переходит в мелкоячеистую структуру тела.

В общем очертания пыльцевых зерен *Cedrus* несколько напоминают очертания пыльцы рода *Picea*. У пыльцевых зерен рода *Cedrus*, так же как и у рода *Picea*, отсутствует угол между линиями очертания тела и воздушных мешков.



Фиг. 31. Схема различных типов ископаемой пыльцы [рода *Cedrus*.

(1, 2, 3, 4, 5, 7 — боковая проекция; 6 и 8 — полярная проекция)

1, 2 — *Cedrus* типа *Saccata*; 3, 5 — *Cedrus* типа *C. atlantica* M a n e t t i; 4 — *Cedrus* типа *C. libani* L a w' s.  
6, 7, 8 — *Cedrus* типа *C. deodara* L o u d.

Размеры пыльцевых зерен у *Cedrus* колеблются от 50 до 110 м по большей оси; при этом число видов пыльцы мелких размеров значительно преобладает над числом крупных.

Основными диагностическими признаками пыльцы ископаемых растений рода *Cedrus*, отличающими ее от пыльцы прочих *Pinaceae*, признаками:

130

- 1) отсутствие резкой границы щита на брюшной поверхности тела;
- 2) наличие ярко выраженного гребня (при боковом положении зерна), широкого или узкого, в зависимости от принадлежности к виду;
- 3) отсутствие резкой границы между мешками и телом в связи с тем, что мешки являются непосредственным продолжением общего с телом слоя экзины.

В. В. Зауер (1954) дополняет эти признаки еще деталями строения сетчатой структуры воздушных мешков, которая, по наблюдениям этого автора, обычно крупно- или мелкоячеистая, налегающая одна на другую.

В палеогене Казахстана автору удалось выделить восемь различных видов пыльцы рода *Cedrus*, схематическое изображение типов которой помещено на фиг. 31.

Находки пыльцы *Cedrus* в палеогеновых отложениях представляют значительный интерес, так как макрскопические остатки растений этого рода в Азиатской части СССР еще не известны.

Основная масса видов, открытых по находкам пыльцы, приурочена к самым нижним отделам палеогена. Следует отметить, что из выделенных верхнемеловых и палеогеновых форм *Cedrus* лишь немногие могут быть отождествлены с современными видами. В большинстве выделенные формы относятся к вымершим видам. Хотя общий характер строения пыльцевых зерен *Cedrus* и близок к современным видам, в деталях наблюдаются большие расхождения.

Находки пыльцы *Cedrus* в Европе и в Америке известны еще с юрского периода. Наиболее широкого распространения этот род достиг в меловом периоде, особенно в верхних его отделах. В верхнемеловых отложениях восточного склона Среднего Урала, по данным В. В. Зауера, в некоторых горизонтах пыльца *Cedrus* преобладает над пыльцой *Pinus* и представлена там большим многообразием форм. В верхнем мелу Западного Казахстана и юга Европейской части СССР отмечены два вида и шесть разновидности пыльцы *Cedrus*, так же как и в палеогене Северного Казахстана, принадлежащие к формам, сходным с современными видами *C. libani* и *C. deodara*.

В третичных отложениях Горьковской обл., Средней Волги, Нижнего Дона, Прикаспия, Северного Кавказа, Северного Казахстана, Среднего Урала и Башкирии пыльца *Cedrus* встречается в палеоцен-эоцене и единично — в нижнем и среднем олигоцене.

По-видимому, в верхних горизонтах олигоцена род *Cedrus* уже прекратил свое существование на равнинах Евразии в связи с общим осушением климата и отступил в горные районы, защищенные от сильных ветров. Как известно, почти все современные виды кедров очень чувствительны к изменению почвенных и климатических условий. Возможно, что и более древние представители этого рода были также требовательны к природным условиям и поэтому усиление континентальности климата в Казахстане привело к вымиранию многих видов, к сокращению их ареалов и к отступанию оставшихся видов в горные районы более южных широт.

В верхних горизонтах палеогена мы отмечаем уже лишь единичные находки одного или двух видов *Cedrus*. В олигоцене уже широко начали развиваться различные виды *Pinus*, совершенно оттеснив последних представителей кедров.

В настоящее время на всем земном шаре род *Cedrus* представлен всего четырьмя видами с изолированными и ограниченными ареалами в горах Ливана, горах Атласа, в Гималаях и на о-ве Кипр.

Основные типы пыльцевых зерен рода *Cedrus*, выделенных из третичных отложений исследованных районов, следующие:

9\* 131

1. *Cedrus* типа *C. deodara* L o u d. (фиг. 31, 6—8). Пыльцевые зерна преимущественно крупные (120 $\mu$  и более), по внешнему облику несколько напоминают пыльцу *Podocarpus* или *Abies*. Имеют ясно выраженный поперечно исчерченный гребень, обусловленный крупнобугорчатой скульптурой щита.

2. *Cedrus* типа *Cedrus libani* L a w s. (фиг. 31, 4). Пыльцевые зерна несколько меньшей величины (общая длина до 90 $\mu$ ). Экзина щита сравнительно тонкая. Гребень невысокий (до 4 $\mu$ ) со слегка волнистым или гладким контуром.

По внешнему облику пыльца этого типа имеет большое сходство с пыльцой рода *Picea* секции *Euripicea*: у нее мелкая сетка воздушных мешков и сравнительно сглаженное очертание, приближающееся в полярной проекции к овалу.

3. *Cedrus* типа *Cedrus atlantica* M a n e t t i (фиг. 31, 3 и 5, крайние вариации). У пыльцевого зерна этого типа сильно увеличенные по высоте воздушные мешки, несколько оттянутые по бокам, поперечно исчерченный, но слабо волнистый гребень и относительно небольшое, в сравнении с воздушными мешками, тело. Экзина воздушных мешков часто смята в произвольные складки. Общий размер зерна 50—90 $\mu$ .

4. *Cedrus* типа *Cedrus microsaccata* Z a u e r (фиг. 31, 1, 2). Пыльцевые зерна резко отличаются от предыдущих более нежной структурой экзины, мелкими размерами (до 50 $\mu$ ) и очень небольшими воздушными мешками, отслаивающимися на брюшной стороне тела. Пыльца этого типа сходна с пыльцой ископаемых видов *Cedrus parvisaccata* Z a u e r, а из современных хвойных более всего имеет сходство с пыльцой различных видов рода *Dacrydium*.

*Cedrus* aff. *deodara* L o u d.

Табл. VIII, рис. 1—6  
Н  
К  
Препарат № 170

Общая длина зерна около 120 $\mu$ ; высота тела около 95 $\mu$ , длина 98 $\mu$ ; высота воздушных мешков 48 $\mu$ ; ширина гребня около 10 $\mu$ .

Тело округлое, в боковой проекции — почти правильная окружность. Экзина тела толстая и скульптурная, состоит из двух слоев, из которых нижний значительно тоньше верхнего. Верхний слой экзины имеет сложную, видимо столбчатую, структуру, что обуславливает неравномерную поперечную штриховатость экзины, хорошо заметную при боковом положении зерна. Контур тела неровный, мелкобугорчатый. На спинной части зерна экзина сильно утолщается и образует неясно выраженный щит, который не имеет резких границ. Брюшная часть тела неравномерно мелкобугорчатая. Зародышевая борозда выражена неясно.

Экзина тела, не утоняясь к боковым частям, непосредственно переходит на мешки, которые и представляют собой разросшиеся выросты верхнего слоя ее. Камеры воздушных мешков крупные, в боковом сечении полуокругло-эллипсоидальные, отходят от тела широкими основаниями.

Границы мешков выражены неясно, так как экзина, образующая их, облекает общим покровом и мешки и тело. Структура экзины на теле и на мешках различна. На мешках структура сетчатая, сетка неравномерноячеистая, двойная (крупные ячейки налагают на мелкие). Ячейки сетки вытянуты по направлению от центра к периферии. Размеры ячеек сетки мешков по мере приближения к месту отделения мешков от тела постепенно уменьшаются и сетчатость переходит в мраморовидный рисунок поверхности тела (табл. VIII, рис. 5). Граница между мешками и телом зерна улавливается по наличию угла между линиями очертания спинной части тела и мешков.

132

Описанный В. В. Зауер (1950) ископаемый вид, названный *Cedrus* aff. *deodara* L o u d, по морфологическим признакам весьма близок к современному виду *Cedrus deodara* L o u d. (табл. VII, рис. 4), за исключением размеров, которые у первого значительно больше. Из ископаемых форм пыльцы *Cedrus* приведенная форма ближе всего к *C. lazireticulata* Z a u e r, отличающаяся от него большей величиной ячеек сетки на мешках, а также тем, что структура его щита не имеет сетчатого рисунка.

М е с т о н а х о ж д е н и е: Павлодарское Прииртышье, г. Павлодар, скв. 1, слюдистые глины подглауконитовой свиты (мел — палеоген).

Р а с п р о с т р а н е н и е: меловые отложения Среднего Урала, меловые и нижнетретичные отложения Павлодарского Прииртышья.

Родина ныне живущего гималайского кедра *Cedrus deodara* — горы Афганистана, Северо-Западные Гималаи, Северный Белуджистан. Растет на высоте от 1000 до 3000 м над уровнем моря совместно с *Pinus excelsa*, *Picea morinda*, *Abies Webbiani*, *Quercus incana* — наиболее засухоустойчивый вид из всех представителей рода *Cedrus*.

*Cedrus lazireticulata* Z a u e r

Табл. VIII, рис. 7, 8  
Н  
К  
Препараты № 170 3, 3и

Общая длина зерна от 80 до 90 $\mu$ ; длина тела около 64 $\mu$ , ширина около 54 $\mu$ ; высота воздушных мешков около 25 $\mu$ , ширина — около 60 $\mu$ ; толщина экзины на спинной части около 8 $\mu$ .

Тело эллипсоидальное, почти правильный овал в полярной проекции. Экзина трехслойная; нижний и верхний слои представляют собой пленчатые бесструктурные образования, плотно прилегающие к среднему толстому слою экзины. Средний слой экзины имеет сложную столбчатую (?) структуру. Поверхность тела — крупнобугорчатая; бугорчатость особенно резко выражена на спинной части тела, где средний слой экзины сильно утолщается, образуя щит — гребень. Гребень прекрасно виден при боковом положении зерна.

При увеличении в 750 раз можно обнаружить, что поверхность зерна сложная. Помимо крупных бугорков, она снабжена мелкими бугорками, которые пронизываются крупноточечным рисунком.

Средний слой экзины несколько утоняется к боковым частям зерна, а верхний и нижний отслаиваются в виде воздушных мешков. Границу между мешками и телом можно наблюдать только при строго полярном положении зерна — мешками вверх; в боковой же и полярной проекциях мешками вниз граница между телом и воздушными мешками неразличима. Граница между мешками и телом улавливается лишь по наличию угла в месте пересечения линии очертания тела и мешков. Наличие этого угла в служит одним из признаков для отнесения *Cedrus lazireticulata* к одной секции с современным гималайским кедром. Другим признаком, отличающим описываемый вид с гималайским кедром, является волнистая линия контура тела, а отчасти и мешков.

Воздушные мешки имеют крупноточечную структуру (ячейки сетки неравной величины), сильно вытянуты вдоль осей (высоты) мешков и образуют радиально расположенный рисунок.

М е с т о н а х о ж д е н и е: Павлодарское Прииртышье, г. Павлодар, скв. 1, слюдистые глины датского (?) яруса; Приаралье, гора Тас-Аран, тасаранская свита морского эоцена (средний эоцен).

Р а с п р о с т р а н е н и е: меловые и эоценовые отложения Урала, Северного Казахстана, Поволжья и Нижнего Дона; морские эоценовые отложения Приаралья.

133



*Cedrus piniformis* sp. nov. (pollen)

Табл. IX, рис. 1—4  
 Препараты № 198  $\frac{H}{K}$ , 146  $\frac{H}{K}$

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз, вторая свита континентального олигоцена (средний олигоцен, препарат № 198  $\frac{H}{K}$ ).

Общая длина зерна от 65 до 75  $\mu$ ; длина тела от 48 до 55  $\mu$ , высота от 40 до 50  $\mu$ ; высота воздушных мешков 25—30  $\mu$ , ширина их 30—40  $\mu$ .

Тело округло-эллипсоидальное, в очертании — правильная окружность или овал. Экзина тела мелкобугорчатая, образует щит на большей части тела. Щит переходит без резких границ на поверхность мешков, границы прикрепления которых на спинной и боковых частях тела плохо различимы. Брюшная часть тела имеет более тонкую экзину с бугорчатой скульптурой, отличающейся от плотной мелкой бугорчатости щита. Экзина мешков мелкосетчатая. Часто при увеличении в 450 раз сетчатость различима и рисунок мешков представляется неравномерноточечным. Структура мешков постепенно сливается со структурой щита, и точечный или веерообразный рисунок мешков без резкой границы переходит в бугорчатость щита.

У некоторых экземпляров щит несколько отслаивается в области прикрепления мешков и налегает на них в виде валиков, что создает впечатление определенной границы (табл. IX, рис. 4). Воздушные мешки, в том случае, если пыльцевое зерно расположено в полярной проекции мешками вверх, имеют округлые очертания. В боковой проекции мешки выдаются за пределы тела весьма слабо. Иногда можно наблюдать едва заметный угол между линиями очертания тела и воздушных мешков. Последнее и послужило причиной для того, чтобы назвать приведенный тип зерен *Cedrus piniformis*.

Пыльца *Cedrus piniformis* отличается от пыльцы современного вида — *C. deodara* — значительно меньшими размерами, менее резко выраженным гребнем, мелкобугорчатой структурой щита и отсутствием четкой сетчатой структуры воздушных мешков.

При беглом просмотре пыльца *C. piniformis* может быть легко принята за пыльцу *Pinus* из секции *Banksia* или *Australes*, но при более тщательном изучении удается обнаружить один наиболее резко отличающийся их признак: наличие верхнего слоя экзины, который общим покровом облекает и тело и воздушные мешки пыльцевого зерна.

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: эоцен — олигоцен Приаралья; эоцен — средний олигоцен Павлодарского Прииртышья; эоцен — олигоцен южной части Западно-Сибирской низменности.

*Cedrus Janschinii* sp. nov. (pollen)

Табл. IX, рис. 5—7  
 Препараты № 170  $\frac{H}{K}$

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, г. Павлодар, скв. 1, слоистые глины подглауконитовой толщи (верхний мел — палеоцен).  
 Общая длина зерна около 115  $\mu$ ; длина тела около 100  $\mu$ , высота около 79  $\mu$ ; высота воздушных мешков около 20  $\mu$ , ширина их около 60  $\mu$ . Гребень широкий.

Тело имеет эллипсоидальную форму, в очертании — овал (фиг. 31, 2). Очертание пыльцевого зерна в боковой проекции — эллипс с незначительными выпуклостями на брюшной стороне тела, образованными

отслоением экзины в виде воздушных мешков. Экзина двуслойная. Внешний слой тонкий и бесструктурный, нижний толстый и имеет столбчатую структуру. Экзина облекает все тело толстым слоем и только на брюшной стороне, в области зародышевой борозды, однослойна. Щит трудно выделить, так как граница между двуслойным участком экзины на спинной части зерна и однослойным на брюшной выражена неявно. Поверхность экзины мелкосетчатая на спинной стороне зерна и крупносетчатая на участках мешковидных отслоений экзины. В боковой проекции участки отслоившейся экзины изображаются радиально заштрихованными. В боковой проекции экзина гребня имеет четкую поперечную штриховатость, которая и переходит в крупную радиальную штриховатость воздушных мешков.

М е с т о н а х о ж д е н и е: пыльца описанного вида впервые обнаружена автором в отложениях верхнего мела Павлодарского Прииртышья.  
 Р а с п р о с т р а н е н и е: эоцен — нижний олигоцен Северного Приаралья, верхний мел — эоцен Павлодарского Прииртышья.

*Cedrus parvisaccata* Z a c h e r

Табл. IX, рис. 8—10  
 Препараты № 188  $\frac{H}{K}$

Общая длина зерна от 55 до 75  $\mu$ ; длина тела от 55 до 70  $\mu$ ; ширина его 45—50  $\mu$ , высота тела 50—60  $\mu$ ; высота воздушных мешков от 10 до 17  $\mu$ , иногда до 25  $\mu$ ; ширина от 25 до 30  $\mu$ , иногда до 35  $\mu$ ; ширина гребня около 2,5  $\mu$ , иногда до 4  $\mu$ .

Форма тела, в общем сфероидальная, в боковой проекции имеет очертание, близкое к трапеции, расположенной большим основанием к спинной части тела (фиг. 31, 2). Воздушные мешки отходят от брюшной части тела.

Экзина двуслойная. Верхний слой облекает и тело и мешки общим покровом. В боковой проекции можно наблюдать поперечную штриховатость на спинном участке зерна (щит?). Поверхность тела мелкобугорчатая, но бугорчатость не всегда четко выражена. Границы щита улавливаются плохо. Экзина на брюшной поверхности зерна покрывает равномерно разбросанными бугорками. Воздушные мешки имеют мелкосетчатую структуру. Зародышевая борозда довольно четко выделяется в виде гребня на брюшной стороне зерна при боковой проекции и в виде более светло окрашенного участка экзины — при полярной проекции, мешками вверх.

Воздушные мешки при боковом положении зерна имеют полуокруглые очертания. Высота мешков обычно меньше ширины их. Воздушные мешки отходят от тела широкими основаниями.

Н. А. Болховитина (1953, стр. 87, табл. XIII, рис. 9—12) приводит описание пыльцы *Cedrus libaniformis* из песков верхнего альба в Западном Казахстане. По очертанию тела пыльца *C. libaniformis* В о л с h. сходна с некоторыми разновидностями *C. parvisaccata* Z a c h e r, но по строению и форме мешков они значительно различаются. У пыльцы *C. libaniformis* В о л с h. мешки представляют собой выросты угольчатого и радиально исчерченного слоя экзины, подобно тому, как это наблюдалось у *C. Janschinii*. Воздушные мешки у *C. parvisaccata* имеют сетчатую структуру и, кроме того, они гораздо более четко отделяются от тела. Окраска пыльцевых зерен *C. libaniformis* В о л с h. значительно темнее, чем у *C. parvisaccata*.

М е с т о н а х о ж д е н и е: Павлодарское Прииртышье, пос. Параматовна, скв. 2, глины с растительными остатками из подглауконитовой толщи (верхний мел — палеоцен).

Распространение: верхний мел — нижний, средний олигоцен Павлодарского Прииртышья (глины с растительными остатками и лигнитовые глины из верхних слоев чеганской свиты). Подобная пыльца отмечается также в альбских горизонтах верхнего мела в Западном Казахстане, встречается также в песках нижнего готерива в Крыму, в альбских и сеноманских отложениях восточного склона Урала и в среднем меле Западной Сибири.

*Cedrus pusilla* Zaueer

Табл. X, рис. 1—5  
Препараты № 170  $\frac{3}{K}$  и 1  $\frac{3и}{K}$

Общая длина около 70  $\mu$ ; высота тела около 50  $\mu$ , ширина 50—60  $\mu$  (иногда больше); ширина воздушных мешков около 30  $\mu$ , высота от 20 до 30  $\mu$ ; ширина гребня 3—4  $\mu$ .

Тело имеет правильную эллипсоидальную форму, в очертании — правильный овал (см. табл. X, рис. 1—4). Мешки отходят от брюшной стороны тела, иногда несколько сдвинуты по бокам, что, повидимому, происходит в результате деформации (фиг. 31, J).

Экзина общим покровом облекает и тело и воздушные мешки. На спинной части тела экзина двуслойная, а на брюшной — однослойная. Верхний слой экзины непосредственно переходит на камеры воздушных мешков.

Поверхность тела крупнобугорчатая, бугорчатость переходит и на воздушные мешки, экзина которых имеет одновременно неясносетчатую структуру.

Вследствие того, что структура экзины тела и воздушных мешков различна, граница отслоения последних выражена довольно четко. Легче всего обнаружить эту границу при боковом положении пыльцевого зерна. Если же зерно расположено в полярной проекции, мешками вверх, то можно обнаружить зародышевую борозду, которая выделяется в виде светлой полосы между воздушными мешками. Контур тела на спинной части волнистый из-за бугристой поверхности экзины. У некоторых экземпляров экзина спинной части несколько утолщается в месте отслоения воздушных мешков и образует подобие валика над мешками. В таких случаях можно отметить наличие границы щита.

Форма воздушных мешков полусферовидная; высота мешков немного меньше ширины их. У большинства экземпляров мешки не заполнены воздухом и смяты в произвольные складки; это придает пыльце *C. pusilla* некоторое сходство с пыльцой *Dacrydium* из сем. Podocarpaceae. Пыльца *Cedrus pusilla* особенно близка к пыльце *Dacrydium elatum* Wall. по морфологическим признакам<sup>1</sup>. Различием пыльцы этих видов служит фесточатая складчатость у воздушных мешков *D. elatum*, у пыльцы же *C. pusilla* складки имеют произвольные направления, а мешки по форме близки к мешкам пыльцы рода *Pinus*.

Место нахождения: Павлодарское Прииртышье, г. Павлодар, скв. 1, глины с растительными остатками в подглауконитовой толще (предположительно датский ярус); Северное Приаралье, гора Тас-Арав, грубопесчаные глины среднего эоцена (тасаранская свита).

Распространение: по данным В. В. Зауер, вид *C. pusilla* в отличие от *C. parvisaccata* имеет ограниченное вертикальное распространение. Находки *C. pusilla* она отмечает лишь в палеоценовых отложениях Западной Сибири. По нашим наблюдениям, этот вид имеет не столь малое вертикальное распространение, он встречается в небольшом количестве

<sup>1</sup> Пыльца *Dacrydium elatum* описана Эрдином (1943) и Зауер (1950).

в эоценовых, палеоценовых и в массе в верхнемеловых отложениях Павлодарского Прииртышья, а также в эоцене и в нижнем олигоцене Северного Приаралья. Находки пыльцы, морфологически сходной с этой формой, но под иными названиями упоминаются разными авторами в спорно-пыльцевых спектрах Западного и Северного Казахстана, от верхнего мела до эоцена включительно.

*Cedrus aff. libani* L a w s.

Табл. X, рис. 6  
Препарат № 170  $\frac{H}{K}$

Общая длина зерна 80—90  $\mu$ ; высота тела около 50  $\mu$ ; высота воздушных мешков от 30 до 40  $\mu$ , ширина их 45—50  $\mu$ ; высота гребня 3—4  $\mu$ .

Тело эллипсоидальное. Очертание в боковой проекции овальное. Общее очертание пыльцевого зерна несколько приближается к очертанию пыльцы *Picea*. Зародышевая борозда неясно выражена.

Экзина двуслойная, внутренний слой значительно тоньше наружного, который имеет ясно выраженную столбчатую структуру, определяющую поперечную штриховатость гребня. Поверхность тела — мелкобугорчатая почти на всем зерне, за исключением брюшной стороны, где скульптура экзины резко меняется, переходя в неравномерную, редкую и мелкую, иногда плохо различимую бугорчатость, приближающуюся к шагреневатости. На боковых частях тела экзина не утолщается, у некоторых экземпляров она даже несколько утолщается и затем отслаивается в виде воздушных мешков.

Камеры мешков крупные, экзина их — с крупносетчатой структурой. На боковых частях мешков поверхность экзины имеет мелкобугорчатую скульптуру, вследствие чего граница отслоения мешков в этих участках незаметна. На брюшной поверхности бугорчатая скульптура на мешках исчезает, сетка видна более четко и поэтому граница между мешками и телом видна яснее. Сетка на мешках крупная, но не такая четкая, как у пыльцы *Pinus*. Ячейки сетки неправильной формы и размеры их неравномерны. Понадобятся экземпляры с неясно выраженной сеткой.

По общему облику пыльца *Cedrus aff. libani* почти тождественна пыльце ныне живущего *C. libani* L a w s. (табл. VII, рис. 5, 6), описанной В. В. Зауер (1950, 1954).

Место нахождения: Павлодарское Прииртышье, пос. Парамоновка, скв. 2, слюдяные глины с растительными остатками (верхний мел — палеоцен).

Распространение: Северный Казахстан, верхний мел — олигоцен; Приаралье, олигоцен.

Современный вид *Cedrus libani* L a w s. (табл. VII, рис. 5, 6) имеет ограниченное распространение. Растет в Малой Азии и Тавре. Относится к представителям высокогорной флоры и обитает на высоте от 1300 до 2000 м над уровнем моря, где образует леса вместе с *Abies cilicia* и *Juniperus foetidissima*. Современный ливанский кедр — наиболее холодоустойчивый из всех сохранившихся сейчас представителей рода *Cedrus*:

*Cedrus longisaccata* sp. nov. (pollen)

(ex. gr. *C. libaniformis* B o l e h.)

Табл. X, рис. 7  
Препарат № 170  $\frac{H}{K}$

Голотип: Павлодарское Прииртышье, пос. Парамоновка, скв. 1, слюдяные глины и глины с растительными остатками из датского яруса (мел — палеоцен).

Общая длина зерна от 70 до 90  $\mu$ ; длина тела 40—50  $\mu$ ; ширина 30—40  $\mu$ ; высота 50—52  $\mu$ ; высота воздушных мешков 35—40  $\mu$ , ширина 35—40  $\mu$ ; высота гребня 5—7  $\mu$ .

Тело округлое. Очертание тела в боковой проекции приближается к округло-треугольному, с широким основанием, обращенным к спинной части. Схематически общие очертания зерна изображены на фиг. 30, б. Экзина облекает все зерно, отслаиваясь в виде воздушных мешков, не имеющих четких внутренних границ. Экзина двуслойная: нижний слой — более тонкий; верхний, образующий камеры воздушных мешков, — более толстый.

Воздушные мешки находятся по бокам тела и сильно оттянуты в бока и вниз. В боковом сечении мешки имеют треугольные очертания. Сильно утолщенная экзина на спинной части зерна образует щит. Когда зерно расположено в боковой проекции, то ясно виден гребень, имеющий хорошо выраженную поперечную исчерченность. Контур гребня крупноволнистый. На теле зерна скульптура поверхности экзины складчато-бугорчатая, в месте отслоения воздушных камер бугорчатость исчезает. Экзина камер мешков имеет струйчато-сетчатую структуру, ячейки сетки сильно вытянуты по длинной оси камер — мешков.

Пыльца, подобная *Cedrus longisaccata*, описана Н. А. Болховитниной (1953, стр. 87, табл. XIII, рис. 9—12) из отложений серых косослоистых песков в глинистой толще верхнего альба (мел) под названием *C. libaniformis*. Безусловно, оба эти вида относятся к одной секции и принадлежат к растениям близких видов (возможно, разновидностям одного вида?), но большинство экземпляров пыльцевых зерен *Cedrus longisaccata* крупнее. Кроме того, камеры воздушных мешков *C. longisaccata* значительно сильнее оттянуты по высоте и отличаются характерным треугольным очертанием. В остальном пыльцевые зерна *C. longisaccata* sp. nov. и *C. libaniformis* V o l c h. близки.

Место нахождения: см. голотип.

Распространение: Крым, Северный и Западный Казахстан, от верхнего мела до эоцена; Приаралье — эоцен.

#### Род *Pinus* L. — Сосна

В спорово-пыльцевых спектрах палеогена Казахстана и Приаралья род *Pinus* представлен большим числом видов. Эти виды отличаются один от другого рядом специфических морфологических признаков, позволяющих в большинстве случаев сопоставлять их с современными видами. Конечно, далеко не все встречаемые формы удалось привести к естественной системе, но большая часть ископаемых форм все же настолько близка к современным видам, что нельзя не признать их родственных связей. Очевидно, что многие из обнаруженных форм принадлежали к растениям, которые были непосредственными предками ныне живущих видов. Наряду с ними встречаются и такие формы, которые не находят себе аналогов среди современной флоры. К последним принадлежит, например, пыльца, описанная издавна и подроду *Haploxylois*; у этой пыльцы воздушные мешки прикреплены к телу широкими основаниями, очертание тела (в полярной проекции) представлено почти правильным овалом, угла между линией очертания тела и мешков нет.

Рудольф (Rudolph, 1935) назвал пыльцу хвойных без ясно отделяющихся воздушных мешков — *Pinus Haploxylois* typ., подчеркивая этим сходство ее с пыльцой современных сосен, принадлежащих к подроду *Haploxylois*. Действительно, например, *Pinus pumila*, относящаяся к подроду *Haploxylois*, имеет пыльцу с воздушными мешками, нерезко отделяющимися от тела и прикрепленными широкими основаниями, а у *Pinus*

*silvestris*, относящегося к подроду *Diploxylois*, воздушные мешки резко отделяются от тела и прикреплены к нему суженными основаниями.

При сравнительно невысоком уровне изученности пыльцы современных растений к 1935 г., классификация ископаемой пыльцы сосен по признаку способа прикрепления воздушных мешков была приемлемой. В настоящее же время, когда изученность пыльцы современных растений сильно продвинулась, выяснилось, что пыльца различных видов сосен, принадлежащих к той или иной секции, имеет ряд других определяющих их систематическую принадлежность признаков, и способ прикрепления мешков к телу далеко не основной среди них. Выяснилось, например, что пыльца многих видов *Pinus*, принадлежащих к подроду *Diploxylois*, имеет мешки с широким основанием, а у пыльцы некоторых видов *Pinus* из подрода *Haploxylois* воздушные мешки прикреплены к телу суженными основаниями. Выяснилось также, что среди пыльцы современных видов сосен аналога ископаемым пыльцевым зернам, обозначившимся как *Pinus Haploxylois* — typ., нет, но, возможно, что эта пыльца принадлежит одному из предков современных кедровых сосен.

Все виды пыльцы рода *Pinus*, встречающиеся нами в кайнозойских отложениях Казахстана, можно разделить на две группы (фиг. 32):

1) пыльца с неясно выраженными границами между телом и мешками, с овальным очертанием, с плотно прилегающими к телу воздушными мешками (небольшое число видов);

2) пыльца с ясно выраженными контурами границ прикрепления воздушных мешков к телу (большинство видов).

Первая группа в изученных отложениях представлена только близкими по строению тремя разновидностями, отнесенными нами к одному виду — *Pinus protocembra* sp. nov. (pollen) (фиг. 32, 1, 2).

Вторая группа представлена десятью морфологически различными формами, принадлежащими, по аналогии с современными видами, к двум под родам — *Haploxylois* и *Diploxylois* (фиг. 32, 3—21). Некоторые виды пыльцы этой группы по ряду морфологических признаков определялись по естественной системе.

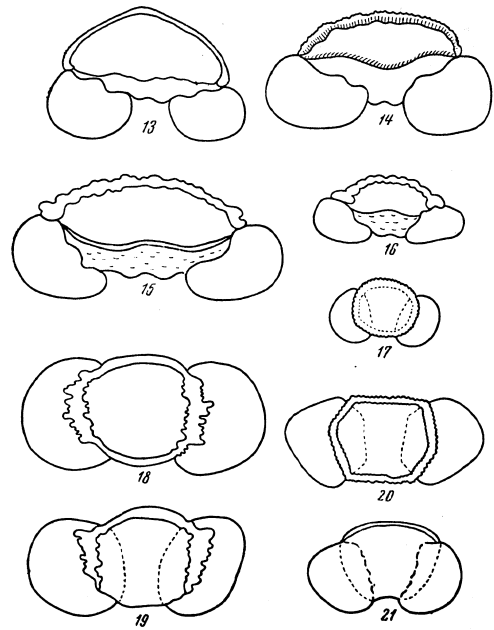
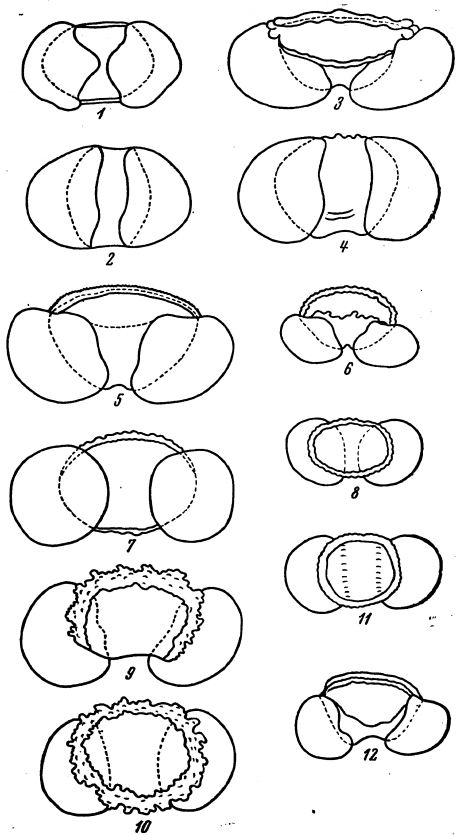
Таким образом, по аналогии с современными видами выделена пыльца сосен, принадлежащих к секциям *Cembrae* Spruce, *Strobus* Shaw, *Pseudostrobus* Endl., *Sula* Murray, *Banksia* Murray, *Taeda* Spruce, *Australes* Loud., *Eupitys* Spruce и *Paracembrae* Koehne (?). Эти секции включают представителей видов, аналогов которых в ряде случаев удалось найти среди ископаемой пыльцы.

За сравнительный материал брались также разновидности пыльцы современного вида, которые имели нестандартные признаки, так как именно такие разновидности всегда имеют большие сходства с ископаемой пыльцой. По-видимому, в большинстве случаев различные отклонения от стандарта в общем строении пыльцевых зерен служат проявлением «атавизма».

Некоторые виды ископаемой пыльцы остались непривязанными к естественной системе, так как им не были найдены аналоги среди современных представителей. Возможно, в дальнейшем, когда знание пыльцы современных сосен будет расширено, и эти виды смогут быть привязаны к естественной системе; в этом случае их видовые названия должны быть изменены.

#### ПОДРОД *HAPLOXYLOIS* КОЕННЕ Секция *Cembrae* Spruce.

Пыльцевые зерна, отнесенные к секции *Cembrae*, характеризуются следующими основными морфологическими признаками (фиг. 32, 1—3):



Фиг. 32. Схематическое изображение основных типов пыльцевых зерен рода *Pinus*, выделенных из палеогеновых отложений Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья.

1, 2—семянца *Sembrac*; 3, 4—*Pinus kochi*ensis; 5, 6—*P. sibirica*; 7, 8—*P. microsibirica* sp. nov. (pollen); 9, 10, 11—семянца *Strobus*; 12—семянца *Bankai*; 13—семянца *Taeda*; 14, 15—семянца *Sula*; 16—*Pinus minus* sp. nov. (pollen); 17, 18—семянца *Pseudostrobus*; 19—семянца *Australis*; 20—семянца *Eupitys*; (1, 2, 6, 8, 10, 11, 17, 18, 20 даны в полярной проекции, остальные — в боковой).

- 1) тело эллипсоидальной формы, очертание в боковой проекции округлое, овальное или близкое к трапециевидному;
- 2) экзина тела двуслойная, оба слоя обычно одинаковой толщины; образует ясно выраженный щит с достаточно четкой границей;
- 3) ниже щита, на брюшной части тела, обычно ясно выражена структура;
- 4) мешки прикреплены к телу широкими основаниями и сильно смещены к боковым сторонам тела;
- 5) гребень на спинной части тела волнистый, у большинства экземпляров несколько утолщается над границей прикрепления мешков, образуя так называемые «плечики»;
- 6) сетка на мешках крупная и четкая.

*Pinus cembraeformis* sp. nov. (pollen)

Табл. X, рис. 8—13  
 Препарат № 191  $\frac{H}{K}$

**Г о л о т и п:** Павлодарское Припгытьше, верхние горизонты чеганской свиты (нижний олигоцен).

Общая длина зерна около 75, иногда до 85  $\mu$ ; длина тела от 45 до 50  $\mu$ , ширина 45—50  $\mu$ , высота 44—48  $\mu$ ; ширина воздушных мешков 30—35  $\mu$ , высота их от 35 до 40  $\mu$ ; высота гребня 1,4—3  $\mu$ .

Тело эллипсоидальное, округлое, несколько уплощенное. Очертание в боковой или полярной проекциях округло-овальное или трапециевидно-овальное. Воздушные мешки — по сравнению с телом довольно крупные, иногда несколько уплощенные. Мешки прикреплены к телу широкими основаниями и сильно смещены к боковым сторонам тела. Экзина тела на спинной и большей части боковых поверхностей двуслойная, что обуславливает наличие щита. Контуры щита не всегда ясно выражены, на некоторых экземплярах край щита заметен в виде волнистой линии. На брюшной части тела экзина однослойная. При боковом положении зерна хорошо виден неширокий двуслойный поперечноштриховатый гребень равномерной ширины по всей длине тела. У некоторых зерен гребень сильно утолщается в области прикрепления воздушных мешков. Поверхность спинной и боковых частей зерна (поверхность щита) имеет мелкобугорчатую скульптуру. Контур гребня мелкофестончатый или ровный.

Сетка мешков четкая, у большинства экземпляров хорошо заметная. В основном сетчатость крупная, но мелче сетки у пыльцы современных видов секции *Cembrae*. Размеры ячеек сетки уменьшаются в направлении к основанию мешков.

По общим морфологическим признакам пыльца *Pinus cembraeformis* весьма близка к пыльце современного вида *P. cembra* L. Отличается ископаемый вид от современного несколько меньшей величиной и меньшим размером ячеек воздушных мешков (Гричук с соавторами, in litt., табл. III, фиг. 20—22).

От пыльцы *Pinus cembra* L., описанной Эрдтманом (1943), ископаемая пыльца также отличается величиной. Эрдтман для пыльцы *P. cembra* указывает общую величину зерна от 84 до 103  $\mu$ , что значительно превышает размеры как *Pinus cembraeformis*, так и *Pinus cembra* L. (recent).

По-видимому, отклонения размеров пыльцы отдельных разновидностей *P. cembra* велики, а потому величина зерна не может быть принята за основной морфологический признак при определении.

Между прочим, Эрдтман отмечает, что сильные колебания в размерах у пыльцы *P. cembra* замечены еще Фюрером (Furere, 1927), Хорманом (Hormann, 1929) и Кайном (Cain, 1940). Последний, по данным Эрдтмана.

отмечает, что размеры пыльцы различных видов сосен очень сильно варьируют, особенно это резко выражено у ископаемой пыльцы.

**М е с т о н а х о ж д е н и е:** см. голотип.

**Р а с п р о с т р а н е н и е:** пыльца *Pinus cembraeformis* широко распространена в третичных и четвертичных отложениях Европейской и Азиатской частей СССР. В Казахстане и Приаралье в основном приурочена к олигоценовым отложениям, достигая максимума в нижних и средних горизонтах. В миоцене пыльца, близкая по морфологическим признакам, упоминается как *Pinus aff. cembrae*.

В настоящее время *P. cembra* L. распространена в горах Средней Европы, в Альпах — от Приморских Альп до Нижней Австрии — и в Карпатах. Образует леса на склонах гор. Весьма морозоустойчивое и теплолюбивое дерево.

*Pinus aff. koraiensis* Sieb. et Zucc.

Табл. XI, рис. 1—5  
 Препараты № 161  $\frac{H}{K}$ , 162  $\frac{H}{K}$ , 163  $\frac{H}{K}$

Общая длина зерна от 87 до 100  $\mu$  (за редким исключением — 110  $\mu$ ); длина тела 55—70  $\mu$ ; высота 37—40  $\mu$ ; ширина воздушных мешков от 40 до 50  $\mu$ , высота около 40  $\mu$ ; высота гребня около 3  $\mu$ , у некоторых экземпляров до 4  $\mu$ .

Тело эллипсоидальное, несколько уплощенное. Очертание в боковой проекции трапециевидно-овальное (фиг. 32, 3, 4). Мешки прикреплены широкими основаниями к боковым сторонам тела. Экзина тела двуслойная, образует щит, который закрывает большую часть тела. Лишь на немногих экземплярах щит более короткий, оставляющий свободной всю брюшную часть тела (табл. XI, рис. 2). Двуслойность экзины не всегда четко выражена. Скульптура поверхности щита бугристая, а поэтому контур гребня мелковолнистый. Толщина гребня одинакова по всей длине за исключением небольших участков в месте прикрепления воздушных мешков, где экзина спинной части утолщается, образуя небольшие «плечики» гребня над мешками. На некоторых экземплярах эти утолщения образуют небольшие складки, радиально расходящиеся к красным зонам воздушных мешков (в месте их прикрепления к телу).

Воздушные мешки несколько уплощены и в боковой проекции имеют овальные очертания. Мешки прикреплены к телу несколько суженными или широкими основаниями и сильно раздвинуты по бокам тела. Сетка мешков имеет ячейки неравномерной величины. На некоторых зернах удается обнаружить двойную сетку: верхнюю — крупную и нижнюю — мелкую. Большие размеры пыльцевого зерна в целом и воздушных мешков отличают пыльцу *Pinus aff. koraiensis* от *P. cembraeformis*. У некоторых экземпляров мешки несколько сматы и сдвинуты к брюшной стороне, но чаще всего это объясняется деформацией зерна при приготовлении препарата.

По морфологическим признакам пыльца *P. aff. koraiensis* сходна с современным видом корейского кедра, пыльца которого описана В. П. Гричук (in litt.) и М. Х. Мовосзон-Смолиной (1949), она несколько отличается уплощенной формой мешков. М. Х. Мовосзон-Смолина характеризует воздушные мешки *P. koraiensis* как правильно сфероидальные, что обуславливается, по ее заключению, тем, что они прикрепляются к телу суженными основаниями.

В. П. Гричук с соавторами, между прочим, отмечает, что у некоторых разновидностей пыльцы *P. koraiensis* мешки действительно прикрепляются не расширенными, а суженными основаниями, но это является своего рода отклонением или исключением. Несколько отлична ископаемая

пыльца *P. aff. koraiensis* от современных видов тем, что мешки ее достаточно четко отделяются от тела, что не всегда наблюдается у пыльцы современного вида.

**Местонахождение:** Павлодарское Прииртышье, г. Павлодар, глины с растительными остатками из самых верхних горизонтов чеганской свиты (нижний олигоцен).

**Распространение:** пыльца *Pinus aff. koraiensis* распространена в основном в олигоценных отложениях Павлодарского Прииртышья, Западной Сибири, Дальнего Востока, в континентальном олигоцене Северного Приаралья и в отложениях миоцена и миоцен-плиоцена Западной Сибири и Павлодарского Прииртышья.

В настоящее время *P. koraiensis* L. (или *P. mandshurica* R u r g.) известна лишь на Дальнем Востоке — в Уссурийском крае, в горах Маньчжурии и на северо-востоке Кореи. В Японии («Древья и кустарники СССР», 1949) является одним из характерных представителей маньчжурской ботанико-географической провинции.

Растет в ассоциации с *Picea jezoensis*. Предпочитает сухие, открытые места, селится по склонам гор и на повышенных местах.

*Pinus microsibirica* sp. nov. (pollen)

Табл. XI, рис. 6, 7

Препараты № 162  $\frac{H}{K}$ , 163  $\frac{H}{K}$ , 164  $\frac{H}{K}$

**Голотип:** Павлодарское Прииртышье, близ г. Павлодара, чеганские глины (препарат № 164  $\frac{H}{K}$ ).

Общая длина зерна 50—60 м; длина тела 35—45 м; высота воздушных мешков около 30 м, ширина около 30 м; высота гребня около 3 м.

Строение зерна подобно пыльце *Pinus sibirica*. Различие заключается в величине, так как *P. microsibirica* значительно мельче, и в контуре тела, который у пыльцы *Pinus microsibirica* волнистый, что особенно хорошо заметно, если зерно расположено в строго полярной проекции. Тип зерен, подобных *P. microsibirica*, схематически изображен на фиг. 32, 7, 8.

**Местонахождение:** см. голотип.  
**Распространение:** Павлодарское Прииртышье и Северное Приаралье, олигоцен, преимущественно средний.

*Pinus sibiriciformis* sp. nov. (pollen)

Табл. XI, рис. 8—10

Препараты № 255  $\frac{3}{K}$ , 269  $\frac{3}{K}$

**Голотип:** Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз, вторая свита континентальных отложений, средний олигоцен.

Общая длина зерна от 89 до 100 м; высота тела около 50 м, длина тела 65—70 м, ширина 35—45 м; высота воздушных мешков 35—40 м, ширина около 45—50 м; ширина гребня около 3 м.

Тело угловато-эллипсоидальное, очертание в боковой проекции трапецеэвидное-овальное или овальное (см. близкое схематическое изображение на фиг. 32, 5, 6). Мешки прикреплены к телу широкими основаниями и несколько раздвинуты по бокам. Границы прикрепления мешков выделяются четко. Экзина тела двуслойная, слои экзины одинаковой толщины. Щит большей частью имеет ясную границу в виде волнистой линии. Брюшная поверхность тела имеет ясно выраженную бугристо-точечную скульптуру. Поверхность щита мелкобугристая, контур гребня несильно мелковолнистый. Гребень имеет поперечную изерченность на обоих

слоях экзины. У гребня одинаковая толщина по всей длине, лишь у некоторых экземпляров гребень несколько расширяется на концах (у места прикрепления воздушных мешков), образуя небольшие утолщения. Сетчатость на воздушных мешках крупная и четкая. Стенки ячеек сетки образованы толстыми шнуровидными выростами. Размеры ячеек одинаковы по всей поверхности мешков.

По внешнему облику и по основным соотношениям размеров элементов зерна пыльца *P. sibiriciformis* почти тождественна современной пыльце *P. sibirica* (R u r g.). Ма у г., которую неоднократно описывали В. В. Зауер (1950), М. Х. Монссон-Смолина (1949) и В. П. Гричук с соавторами (in litt.).

От вида, описанного В. В. Зауер, ископаемый вид *P. aff. sibirica* отличается лишь большей величиной, что, по-видимому, объясняется применением различных методов обработки. Пыльца, описанная нами, В. П. Гричуком и М. Х. Монссон-Смолиной, обрабатывалась ацетилирующей смесью, а у В. В. Зауера описана пыльца, обработанная щелочью.

**Местонахождение:** см. голотип.  
**Распространение:** Северное Приаралье, средний эоцен (нижняя тасаранская свита); Павлодарское Прииртышье, нижний и средний олигоцен; единично — континентальные отложения верхнего олигодена Западной Сибири, Тургая и Павлодарского Прииртышья.

В основном вид приурочен к континентальным отложениям — песчаным, гравийно-песчаным и грубообломочным. В морских отложениях находки единичны.

*Pinus sibirica* распространена в северо-восточной части СССР (до Енисея и до 68°30' с. ш.), в Северной Монголии, в Саянах, на Алтае и Урале.

*Pinus sibirica* — типичное равнинное растение. *P. sibirica* является в настоящее время одним из тех двух видов сосен, которые принимают участие в растительном покрове Казахстана. Кедровая сосна («сомырсы» по-казахски) в настоящее время в Казахстане распространена ограниченно и обнаружена только на востоке, у верхней границы лесного пояса на Алтае и в Сауре, у оз. Маркакуль (Павлов, 1947).

Разновидностью *Pinus sibiriciformis* sp. nov. (pollen) более древнего происхождения является, по-видимому, пыльца, обнаруженная в Приаралье, в слоях эоценовых глин горы Тас-Аран.

*Pinus ex gr.<sup>1</sup> P. sibirica* (R u r g.) Ма у г.

Табл. XI, рис. 11, 12

Препарат № 2  $\frac{3H}{K}$

Общая длина зерна около 75 м; высота тела около 45 м, ширина около 35 м; высота воздушных мешков около 40 м, ширина 30—35 м; ширина гребня около 3,5 м.

Тело угловато-эллипсоидальное. Очертание в боковой проекции трапецеэвидное-овальное, в полярной — овальное. Зародышевая борозда ясно выражена. Поверхность щита мелкобугорчатая. Граница щита ясно выражена в виде тонкого валика по краям его. Большая часть тела гладкая и лишена структуры. Мешки прикреплены к телу широкими основаниями и сильно раздвинуты по бокам. Сетка на мешках крупноячеистая, неравномерная. Гребень двуслойный, нижний слой несколько толще верхнего. Отличается от пыльцы *P. sibiriciformis* более толстым внутренним слоем экзины в области щита, вытянутыми по высоте воздушными мешками и меньшим размером пыльцевого зерна в целом.

<sup>1</sup> ex gr. (ex grege) — из группы.

Местонахождение: Северное Приаралье, гора Тас-Аран, тасаранские глины среднего эоцена. Пыльца встречена в общем комплексе тропической флоры с *Cedrus*, *Aracariaceae* и миртовыми.

По-видимому, к той же группе *Pinus ex gr. sibirica* (R u r r.) Ма у г. следует отнести пыльцевые зерна, обнаруженные в эоценовых отложениях также в Приаралье, несколько меньших размеров и худшей сохранности (табл. XI, рис. 13; препарат № 2  $\frac{3\mu}{K}$ ).

Общая длина зерна 96  $\mu$ ; длина тела 57  $\mu$ ; высота 38  $\mu$ ; высота воздушных мешков 45  $\mu$ , ширина 40  $\mu$ ; высота гребня 1,5—2  $\mu$ .

Тело неправильно эллипсоидальное, несколько уплощенное на спишной поверхности. Очертание в боковой проекции трапециевидно-овальное, в полярной — овальное. Мешки прикреплены по диаметру или несколько суженным основанием.

Граница щита ясно выражена, щит закрывает тело до половины. Нижне границы щита тело имеет точечную поверхность. Структура и скульптура эскина из-за плохой сохранности зерна выражены неясно. Эскина щита двуслойная, но двуслойность ее не всегда ясно просматривается. Сетка мешков неясная, ячейки сетки крупные, стенки ячейки иногда прерывистые.

Местонахождение: Северное Приаралье, гора Тас-Аран, тасаранские эоценовые глины.

Распространение: подобная пыльца, кроме эоценовых отложений в Приаралье, отмечена автором в нижнем и среднем палеоцене в Поволжье.

*Pinus protocembra* sp. nov. (pollen)

Табл. XII, рис. 1, 2

Препарат № 191  $\frac{H}{K}$

Голотип: Павлодарское Прииртышье, близ г. Павлодара, скв. 1, верх чеганских глин (верхние горизонты нижнего олигоцена).

Пыльца, подобная *P. protocembra*, известна по следующим литературным данным:

1935. *Pinus Haploxyylon* Typ. R u d o l p h. Microfloristische. Untersuchung tertiärer Ablagerungen im Nördlichen Böhmen, Taf. IX, Fig. 1.  
1940. *Picea Thiergart*. Die Mikropaläontologie als Pollenanalyse im Dienst der Braunkohlenforschung, Taf. IV, Fig. 13.

Общая длина зерна от 80 до 100  $\mu$ ; длина тела 60  $\mu$ , ширина 50  $\mu$ , высота 50  $\mu$ ; высота воздушных мешков около 40  $\mu$ , ширина 50—55  $\mu$ ; высота гребня около 3  $\mu$  (иногда до 5  $\mu$ ).

Форма зерна, включая и тело и мешки, эллипсоидальная; в очертании — правильный эллипс. Форма тела округло-овальная; очертание: в полярной проекции — правильный эллипс, а в боковой — угловато-овальное. Мешки имеют форму правильных полушарий, посаженных на боковые части тела по большему диаметру. Подобные пыльцевые зерна приближаются к типу, изображенному на фиг. 32, 1, 2.

Эскина облекает все тело. Границы щита не видно. Толщина эскина равномерна по всей поверхности тела; двуслойность обнаруживается редко. Контур тела мелковолнистый, иногда ровный.

Эскина мешков плотная и толстая, в поперечной проекции края ее обнаруживают исчерченность. Сетка мешков очень мелкая и равномерная. Величина ячеек сетки заметно уменьшается, переходя в неясноточечный рисунок по направлению к внутренней части мешков.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: Павлодарское Прииртышье, мел — средний олигоцен; Западная Сибирь, Северное Приаралье, эоцен — средний олигоцен; Дон и Нижняя Волга, олигоцен — миоцен; Северный Кавказ, Украина, Западная Германия, миоцен. Представитель растительности ксерофильного облика. Появление и распространение вида связано с некоторым осушением и похолоданием климата в палеогене. В плиоцене встречается в виде единичных зерен. В современной флоре аналогов нет.

По ряду морфологических признаков можно допустить, что пыльца описанной формы относится к растениям, которые были прародителями современной *Pinus cembra*. Пыльца, близкая по форме, но гораздо худшей сохранности, встречается в континентальных отложениях четвертой свиты в Павлодарском Прииртышье. Описание ее приводится ниже.

*Pinus ex gr. protocembra*

Табл. XII, рис. 3

Общая длина зерна 60—75  $\mu$ ; ширина тела 40—45  $\mu$ ; высота воздушных мешков около 40  $\mu$  (иногда 35  $\mu$ ), ширина 40—45  $\mu$  (иногда до 50  $\mu$ ); гребень не обнаружен. Форма всего зерна — в полярной проекции приближается к эллипсоидальной; очертание — почти правильный овал. Мешки имеют сетку, но не всегда ясно выраженную. В остальном пыльца близка по форме и очертаниям к пыльце *Pinus protocembra*.

У некоторых экземпляров сетка на мешках неясная и иногда прощупывается в виде штриховатого рисунка.

Местонахождение: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз, песчано-гравийные отложения четвертой свиты континентального олигоцена.

Распространение: вид широко распространен в континентальных отложениях от среднего мела до плиоцена Азиатской и особенно Европейской части СССР. Обычно этот вид пыльцы эоцен в списках ископаемых пыльцы и спор обозначается как *Pinus Haploxyylon*.

Секция *Strobis* Shaw.

Пыльца, отнесенная к секции *Strobis*, имеет следующие особенности (схематическое изображение пыльцы этого типа дано на фиг. 32, 9—12):

- 1) тело угловато-эллипсоидальное с трапециевидно-овальным очертанием в боковой проекции и с угловато-округлым — в полярной;
- 2) зародышевая борозда выражена неясно;
- 3) воздушные мешки прикреплены к телу суженным основанием и смещены к брюшной стороне тела;
- 4) эскина тела двуслойная; щит в большинстве случаев имеет довольно четкие границы;
- 5) гребень обычно волнистый, двуслойный; нижний (внутренний) слой значительно тоньше внешнего;
- 6) на брюшной части тела, свободной от щита, большей частью заметна структура;
- 7) сетка на воздушных мешках ясная и четкая.

*Pinus strobiformis* sp. nov. (pollen)

Табл. XII, рис. 4—8

Препараты № 170  $\frac{H}{K}$ , 161—163  $\frac{3\mu}{K}$  и 1  $\frac{3\mu}{K}$

Голотип: Павлодарское Прииртышье, пос. Парамоновка, скв. 1, глины с растительными остатками, верхний мел (препарат № 170  $\frac{H}{K}$ ).

Пыльца, имеющая морфологическое сходство, известная по литературным данным:

1933. *Pinus strobitipes* W o d e h o u s e. Tertiary pollen. The oil shales of the eocene Green River formation, p. 485, fig. 7.

Общая длина зерна 75—90 м; длина тела 47—55 м, высота 30—40 м; ширина воздушных мешков около 30 м, высота 30—45 м; высота гребня около 3 м.

Тело эллипсоидальной формы, очертание в боковой проекции овальное или трапециевидно-овальное.

Экзина тела двуслойная, образует щит на большей поверхности тела. На спинной части толщина щита значительно больше, чем на боковых. Щит несколько нависает над воздушными мешками в месте прикрепления их к телу и образует неравномерные складки. Гребень двуслойный, несколько расширяется в области прикрепления мешков. Поверхность щита мелкобугорчатая. Ниже щита поверхность тела неяснобугорчатая. Контур тела мелковолнистый, на боковых частях волнистость переходит в фестончатость, контур гребня волнистый.

Воздушные мешки сферические, прикреплены к телу суженными основаниями, несколько смещены на брюшную сторону. Сетка на мешках мелкая, равномерная, четкая. Ячейки сетки имеют округло-угловатые очертания.

Основные диагностические признаки описываемой пыльцы совпадают с признаками *Pinus strobus* L., приведенными в работе В. П. Гричука с соавторами. Пыльца современной *P. strobus* неоднократно микрофотографировалась и многие снимки почти тождественны с микрофотографиями ископаемых видов одноименной секции. Пыльца *P. strobus* характерна тем, что все основные морфологические признаки, принятые для пыльцы секции *Strobus* у нее сильно смягчены и выражены слабее, чем у остальных видов (*P. exelsa*, *P. ayacahuite*, *P. peuce* и др.). Среди пыльцевых зерен современной *P. strobus* много разновидностей, которые при беглом просмотре могут быть легко приняты за крупную пыльцу *P. silvestris*. Поэтому при определении ископаемого материала следует относиться чрезвычайно внимательно к замеру всех основных элементов зерна, а также тщательно рассмотреть способ прикрепления воздушных мешков и характер структуры щита и гребня. Как известно, щит и гребень у пыльцы *P. silvestris* выражены слабо, а мешки прикреплены на боковых частях тела. Эти признаки отличаются от пыльцы *P. strobus*. Кроме того, несмотря на то, что пыльца *P. strobus* является наиболее мелкой формой из секции *Strobus*, все же величина ее значительно превышает величину наиболее крупных пыльцевых зерен *P. silvestris*.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: пыльца *Pinus strobitiformis* встречается в основном в отложениях верхнего мела и в палеогене юга Азиатской и Европейской части СССР, а также в олигоцене Северной Америки. Прекрасной сохранности пыльца *P. strobitiformis* встречается в Приаралье (Тас-Аран, тасаранские глины, средний эоцен) и в континентальных эоценовых отложениях месторождения Аму-Тасты (восточный борг Тургайского прогиба). В более высоких горизонтах третичных отложений *Pinus strobitiformis* сменяется пылью *P. aff. strobus*, которая продолжает встречаться вплоть до нижнечетвертичных отложений.

В настоящее время *P. strobus* L. (веймутова сосна) растет в Северной Америке, в Манитобе (Канада), в Северной Индии, Иллинойсе, на о. Ньюфаундленд, вдоль Аппалачских Альп. По данным В. П. Малеева (1940), *P. strobus* образует леса преимущественно на песчаной или на

свежеглинистой почве. Дерево боится засух и чаще растет в зонах со сравнительно умеренными климатическими условиями.

*Pinus peuceformis* sp. nov. (pollen)

Табл. XII, рис. 9—12

Препарат № 1

3л  
К

Г о л о т и п: Северное Приаралье, Тас-Аран, глины морского среднего эоцена.

Общая длина зерна 70—90 м; высота тела 40—50 м, ширина 45—50 м; ширина воздушных мешков от 40 до 45 м, высота 35—40 м; ширина гребня от 3—4 м.

Форма тела — близкая к эллипсоидальной, в редких случаях несколько вытянутая. Очертание в боковой проекции трапециевидно-овальное, в полярной — округло-овальное (фиг. 32, II, 12).

Мешки сферические, прикреплены к телу суженными основаниями и несколько смещены на брюшную сторону тела. У некоторых экземпляров при полярном положении зерна создается впечатление, что мешки прикреплены к телу широким основанием. Экзина тела двуслойная и на большей поверхности его образует щит, который на спинной части несколько утолщается. Граница щита неясная. Гребень двуслойный, нижний слой тоньше верхнего. Поверхность тела в области щита сильно бугристая, что обуславливает волнистый контур гребня. На спинной части зерна контур гребня из волнистого становится правильнофестончатым. Сетка на мешках густая, некрупиная, с округлыми ячейками, размеры которых значительно уменьшаются к основанию мешков.

Пыльца из гербарного сбора (*Pinus peuce* G r i s.) описана сотрудниками Гидропроекта (in litt.). По очертанию и другим морфологическим признакам ископаемая пыльца, отнесенная к виду *Pinus peuce*, имеет большое сходство с современными представителями этого вида. Ископаемый вид отличается от современного большей величиной мешков. Некоторые экземпляры по относительно большой величине воздушных мешков сходны с пылью современной *Pinus taeda* L. Следует отметить, что среди пыльцы современной *P. peuce* также встречаются разновидности с крупными воздушными мешками, которые и имеют наибольшее сходство с пылью *P. peuceformis*.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: вид довольно широко распространен по вертикали. Первые экземпляры *P. peuceformis* встречены автором под г. Павлодаром, в глинах с растительными остатками, относимых К. В. Никитиной к верхнему мелу (табл. XII, рис. 9). В том же районе этот вид встречен в нижних горизонтах чеганских глин (табл. XII, рис. 10) и, наконец, тот же вид, с несколько более отгнутыми к брюшной стороне тела воздушными мешками, отмечен неоднократно в верхних горизонтах чеганских глин и в континентальных отложениях среднего и верхнего олигодена. Исследования приаральского палеогена несколько расширили границы распространения этого вида в широтном отношении — прекрасной сохранности пыльца *P. peuceformis* найдена в тасаранских глинах (средний эоцен А. Л. Яншина). Пыльца описанного вида отмечена в флювиэстических комплексах олигодена Северного Кавказа, Нижнего Дона, Приазовья, Украины и описана автором на олигоцен-миоценовых углях Пасеновского карьера Воронежской обл. Ряд авторов вид под названием *Pinus* sp. упоминают в составе спорово-пыльцевых спектров олигоцен-миоцена Германия.

В настоящее время *P. peuce*, или румелийская сосна, растет на горах Балканского п-ва, на высоте 750—2200 м над уровнем моря, образуя леса



с *P. exelsa*, *Abies alba* и *Pinus silvestris*. Считается выносливой породой в климате средних широт.

*Pinus exelsaeformis* sp. nov. (pollen)

Табл. XIII, рис. 1—3  
Препарат № 253  $\frac{H}{K}$

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз, глины с растительными остатками второй свиты континентального олигоцена (средний олигоцен).

Пыльца, близкая по морфологическим признакам, известная в литературе:

1953. *Pinus aralica* Б о л х о в и т и н а. Спорово-пыльцевая характеристика меловых отложений центральных областей СССР, стр. 83, табл. XII, фиг. 12 и 13.

Общая длина зерна 87—95  $\mu$ ; ширина тела около 50  $\mu$ , длина тела около 60  $\mu$ , высота 50—55  $\mu$ ; ширина воздушных мешков 55—57  $\mu$ , высота 46—52  $\mu$ ; ширина гребня 3,6—3,4  $\mu$ .

Форма тела близка к сфероидальной или эллипсоидальной. Очертание в боковой проекции округлое или округло-треугольное (на фиг. 31, 9 и 10 приведены близкие схематические изображения подобной пыльцы).

Мешки сфероидальные, прикреплены к телу несколько суженными основаниями и немного сдвинуты к брюшной стороне его. Зародышевая борозда неясно выражена. Экзина тела двуслойная, внешний слой значительно толще внутреннего. Утолщенный слой экзины на спинной и боковых частях зерна образует щит. Граница щита представляется в виде волнистой линии без какого-либо утолщения. У большинства зерен щит несколько нависает над мешками, образуя фестончатый край. Это хорошо наблюдается при полярном положении пыльцевых зерен.

Поверхность щита крупнобугорчатая, собранная в морщинноподобные складки, что особенно резко выражено на периферийных участках спинной части зерна.

Гребень широкий, с крупнофестончатым контуром. Экзина брюшной части тела имеет мелкозернистую структуру, исследованием рисунка этой части зерна мелкоточечный.

Экзина воздушных мешков снабжена ясно выраженной сетчатой структурой. Ячейки сетки вытянуты по высоте мешков. Ячейки крупные (до 5  $\mu$ ), но по направлению к месту прикрепления мешков размеры ячеек уменьшаются и постепенно сетчатость переходит в неясноточечный рисунок. На брюшной поверхности мешков сетка более четкая, чем на спинной.

Воздушные мешки в месте прикрепления к телу образуют радиально расходящиеся складки, которые пронцируются в виде конусообразных тяжей.

Описанный вид имеет большое сходство с пыльцой ныне живущего вида *Pinus exelsa*, а также некоторое сходство с *P. aralica* В о л с х. из верхне-меловых отложений Приаралья. От последнего вида отличается несколько большими размерами и более ясно выраженной границей щита, а также большими размерами воздушных мешков.

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.  
Р а с п р о с т р а н е н и е: вид имеет значительное вертикальное и широтное распространение. Встречается в Азиатской и Европейской части СССР — от верхнего мела до олигоцена включительно, упоминается в олигоцене Германии. В Павлодарском Прииртышье встречается от нижнего олигоцена до среднего, где особенно широко развита в отложениях

второй свиты. В Северном Приаралье спорадически встречается от верхнего эоплена до низов среднего олигоцена.

Современное распространение *Pinus exelsa* W a l l. ограничивается Гималаями, от Инда до Бутана, где образует высокогорные леса. Растет в сообществе с *Cedrus deodara*, *Pinus longifolia* и другими видами. Предпочитает влажные места обитания и боится открытых и сухих мест.

*Pinus* ex gr. *exelsa* W a l l.

Табл. XIII, рис. 4, 5  
Препарат № 259  $\frac{H}{K}$

Неоднократно при аналитической работе встречается форма, близкая к описанной *Pinus* aff. *exelsa* W a l l., но отличающаяся от нее размерами зерна и воздушных мешков, а также более ярко выраженной скульптурой щита. По аналогии она отождествляется с *P. exelsa* W a l l. Однако указанные выше различия, а также худшая, чем у предыдущего вида, сохранность не позволяют провести полного отождествления их.

Общая длина зерна не превышает 85  $\mu$ ; ширина тела 50—60  $\mu$ ; высота воздушных мешков около 35  $\mu$ ; ширина гребня 3—5  $\mu$ .

Весьма своеобразные для данного вида воздушные мешки прикреплены к телу суженным основанием к брюшной части тела с незначительным смещением на бока. Последнее несколько сближает форму с пыльцой *Pinus* секции *Banksia*. Гребень двуслойный, внешний слой значительно толще внутреннего. Граница щита выражена неясно. Поверхностный слой экзины щита образует крупнобугорчатую скульптуру, которая обуславливает фестончатую линию очертаний тела. Сетка воздушных мешков выражена неясно. На некоторых экземплярах она почти не определена и пропущена в виде неравномерно точечного рисунка. На таких экземплярах сетка иногда образована прерывистыми или точечными утолщениями. В отличие от пыльцы *P. aff. exelsa*, камеры воздушных мешков сильно смяты или образуют складки, радиально расходящиеся от границы с телом.

Некоторые экземпляры пыльцевых зерен *P. ex gr. exelsa* по внешнему облику несколько напоминают пыльцу *P. nigraeformis* В о л с х. или *Odemosaccus nigraeformis* N a u m. Сходство это обуславливается наличием складок на воздушных мешках. В то же время наши экземпляры отличаются от *Odemosaccus nigraeformis* крупными бугорками на щите и, как следствие этого, — крупнофестончатым контуром тела.

М е с т о н а х о ж д е н и е: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз, обл. 6, верхнеолигоценовые песчано-гравийные слои четвертой свиты континентальных отложений.

Секция *Paracembrae* К о е н н е (?)

Для пыльцы, отнесенной к секции *Paracembrae*, характерно угловато-эллипсоидальное тело с ромбидально-округлым очертанием в полярной проекции. Мешки крупные, округлые, несколько угловатые в очертании, прикреплены к телу широкими основаниями. Камеры воздушных мешков сильно надвинуты на тело. В ископаемом состоянии встречен только один вид из секции *Paracembrae* в меловых отложениях.

*Pinus gerardianaeformis* sp. nov. (pollen)

Табл. XIII, рис. 6  
 Препарат № 170  $\frac{H}{K}$

**Г о л о т и п:** Павлодарское Прииртышье, близ г. Павлодара, скв. 1, горизонт подглауконитовых слоистых глин (мел — палеоцен).

Общая длина зерна 75—92  $\mu$ ; ширина 40—55  $\mu$ ; ширина воздушных мешков 50—60  $\mu$ , высота до 50  $\mu$ .

Тело неправильно-эллипсоидальной формы, с ромбовидно-округлым очертанием при полярном положении зерна. Экзина двуслойная, с зернистой структурой и мелкобугорчатой скульптурой. Щит покрывает спинную часть тела. Контур тела волнистый или гладкий. Мешки широкие, несколько уплощенные, в полярной проекции имеют угловатые очертания, прикреплены к телу широкими основаниями и сильно надвинуты на тело. Если зерно расположено в полярной проекции мешками кверху, то граница прикрепления мешков просматривается довольно четко вследствие резкого различия в структуре мешков и тела.

Сетка воздушных мешков достаточно четкая, ячейки сетки несколько вытянуты; в области прикрепления мешков к телу они настолько суживаются, что представляются в виде параллельных линий, а не сетки.

**Местонахождение:** см. голотип.

**Распространение:** Ввиду того, что пыльца описанного вида несколько напоминает пыльцу сем. *Podocarpaceae* (ромбовидное очертание тела пыльцы в полярной проекции и диаметр мешков несколько превышающий диаметр тела), надо полагать, что наш вид был неоднократно отмечен многими авторами как *Podocarpus* в отложениях верхнего мела Западной и Восточной Сибири, Урала и Казахстана.

Пыльца типа *Pinus gerardianaeformis* встречается в комплексе с различными видами *Cedrus* и *Cupressaceae*, а также со спорами папоротников тех видов и родов, которые характерны для меловых отложений. Нами вид неоднократно обнаружен в отложениях нижнего палеогена Павлодарского Прииртышья, Приаралья, Тургая и Кара-Тау.

Родина современного вида *P. gerardiana* Wall. — Афганистан, Кафаристан и Западные Гималаи. Там она образует леса вместе с *Cedrus deodara*; предпочитает внутренние долины и приурочена к жаркому и засушливому климату.

ПОДРОД *DIPLOXYLON* КОЕВНЕ  
 СЕКЦИЯ *Sula* MAUG.

Пыльца, отнесенная к секции *Sula*, имеет сильно вытянутое эллипсоидально-веретенообразное тело с несколько уплощенной спинной частью зерна (схематическое изображение зерен этого типа дано на фиг. 32, 15, 16).

Борода выражена четко. Щит имеет ясно выраженную бугорчатость. Граница щита вырисовывается в виде четкого валика по периферийной части, толщина валика почти вдвое превышает толщину экзины щита.

Воздушные мешки имеют почти эллипсоидальную форму. Если зерно наблюдается в полярной проекции, то мешки представляются несколько сдвинутыми по бокам, если же оно наблюдается в боковой проекции, то обнаруживается, что мешки большей частью сильно сдвинуты к брюшной части тела. Основные морфологические признаки пыльцы, отнесенной к секции *Sula*, совпадают с признаками современной пыльцы этой секции, за исключением размеров. Пыльцевые зерна ископаемых видов значительно меньше (не превышают 50—60—65  $\mu$ ).

152

*Pinus longifoliaeformis* sp. nov. (pollen)

Табл. XIII, рис. 7—9  
 Препарат № 191  $\frac{H}{K}$

**Г о л о т и п:** Павлодарское Прииртышье, близ г. Павлодара, пос. Парамоновка, скв. 1, чеганские глины морского палеогена (нижний олигоцен).

Общая длина зерна 65  $\mu$ ; длина тела 48  $\mu$ , высота около 20  $\mu$ , ширина 22—25  $\mu$ ; высота воздушных мешков 25—28  $\mu$ , ширина их около 35  $\mu$ ; высота гребня около 3  $\mu$ .

Тело неправильно-эллипсоидальное, с трапециевидным очертанием в боковой проекции. Воздушные мешки эллипсоидальные, несколько уплощенные, прикреплены к телу суженным основанием и сильно сдвинуты к брюшной стороне тела. Экзина тела двуслойная, на большей части тела образует щит, границы которого у большинства зерен выражены четко в виде волнистой линии. Встречаются единичные экземпляры, у которых граница щита выражена нечетко, и тогда определение их затруднено. Бугорчатая скульптура щита постепенно теряет четкость в направлении к боковой поверхности тела. На брюшной поверхности экзина сохраняет нежную мелкобугорчатую и неясно выраженную скульптуру. Экзина щита двуслойная, нижний слой несколько толще верхнего. Встречаются зерна, у которых оба слоя экзины одинаковой толщины. Поверхность щита на спинной части тела крупнобугорчатая, что обуславливает крупно-фестончатый контур его. Гребень выражен четко и сохраняет равную ширину по всей длине; в боковой проекции — попеременно исчерчен.

Экзина воздушных мешков имеет мелкосетчатую структуру; в направлении к основанию мешков ячейки сетки значительно уменьшаются и постепенно переходят в точечный рисунок.

**Местонахождение:** см. голотип.

**Распространение:** пыльца, подобная описанной, встречается как в морских отложениях олигоцена, так и в континентальных горизонтах среднего олигоцена в Павлодарском Прииртышье и Западной Сибири. Присутствие ее отмечено в нижнетретичных отложениях Тургайской низины. В более древних отложениях не встречается.

Современное распространение *Pinus longifolia* Roxb. приурочено к горам Афганистана и Гималаев. Горный вид.

*P. longifolia* Roxb. образует чистые леса с подлеском из различных видов *Berberis*, *Cotinus coggigria* и др.

СЕКЦИЯ *Pseudostrobus* Endl.

Пыльца, отнесенная к этой секции, характеризуется эллипсоидальной или угловато-округлой формой тела. В полярной проекции тело имеет округлое очертание, в боковой — трапециевидно-овальное. Экзина тела обычно двуслойная, нижний слой значительно тоньше верхнего. Контур тела (в полярной проекции) волнистый. У некоторых видов волнистый контур приурочен лишь к боковым частям тела. Мешки эллипсоидальные, прикреплены к телу суженными основаниями. Схематическое изображение пыльцы секции *Pseudostrobus* (современной и ископаемой) приводится на фиг. 31, 18 и 19.

*Pinus ponderosaeformis* sp. nov. (pollen)

Табл. XIII, рис. 10—14  
 Препараты № 1  $\frac{3a}{K}$  и 186  $\frac{3}{K}$

**Г о л о т и п:** Северное Приаралье, гора Тас-Аран, тасаранские глины (эоцен), нижние отделы тасаранской свиты (препарат № 1  $\frac{3a}{K}$ ).

153

Общая длина зерна 60—85  $\mu$ ; длина тела 38—45  $\mu$ , ширина около 35  $\mu$ ; высота воздушных мешков около 35  $\mu$ , ширина 36—38  $\mu$ ; ширина гребня 1,5—2,5  $\mu$ . Встречаются формы значительно меньших размеров.

Тело округло-эллипсоидальное, в боковой проекции трапециевидно-овальное, в полярной — почти правильная окружность. Диаметр тела равен диаметру воздушных мешков или несколько меньше его.

Экзина тела двуслойная в области щита, границы которого не всегда ясно выражены. Нижний слой экзины гладкий и тонкий. Верхний слой гораздо толще нижнего и имеет столбчатую структуру, которая в боковой проекции изображается в виде поперечной штриховки. Поверхность щита равномерно, но слабо бугорчатая. Контур тела в полярной проекции мелкофестончатый. Гребень одинаковой ширины по всей длине, у некоторых экземпляров несколько утолщается в области прикрепления воздушных мешков. В этом случае фестончатый контур тела на боковых его частях выражен яснее, чем в области гребня и брюшной части тела.

Мешки сфероидалные, несколько уплощенные, прикреплены к телу суженными основаниями. Сетка мешков мелкая, ясно выраженная. Ячейки сетки неравномерной величины и формы, но большей частью форма их приближается к округлой. Размер ячеек заметно уменьшается в месте прикрепления мешков к телу.

По внешнему облику описанный пыльца близка к современной *Pinus ponderosa*, за исключением размеров, которые значительно меньше у ископаемых экземпляров.

В некоторых вариантах ископаемый вид напоминает пыльцу современной *P. peuce*, но отличается от нее тем, что его мешки меньше сдвинуты к брюшной стороне и менее уплощены. Кроме того, в отличие от пыльцы *P. peuce*, у ископаемого вида фестончатый контур приурочен ко всему периметру тела, а у пыльцы *P. peuce* фестончатость особенно ярко выражена на боковых его частях.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: пыльца, подобная *Pinus ponderosaefornis*, встречается в спорово-пыльцевых спектрах опоковой свиты Прииртышья, в верхнем мелу Казахстана и в эоценовых отложениях Северного Приаралья, Кавказа и юга Европейской части СССР. Единичные находки *P. aff. ponderosa* сделаны в районе восточного борта Тургайской впадины (Ашу-Тасты) — континентальные палеоцен-эоценовые отложения.

Современное распространение *P. ponderosa* D o g l. Каскадные горы в западной части Северной Америки. Вид типично прибрежногорный. Любит сухую и каменистую почву, открытые солнечные склоны. Особенно распространен в горах Сиерра-Невада и в Прибрежных горах. Растет на высоте 1400—2600 м в сообществе с *Pinus Lambertiana*, *Pseudotsuga taxifolia* и *Abies concolor*. Вид — наиболее засухоустойчивый среди прочих видов секции *Pseudostrobus*.

*Pinus bicornis* sp. nov. (pollen)

Табл. XIV, рис. 1—3

Препараты № 186  $\frac{H}{K}$ , 180  $\frac{H}{K}$

Голотип: Павлодарское Прииртышье, пос. Парамоновка, скв. 1, глины с растительными остатками, мел — палеоцен (препарат № 186  $\frac{H}{K}$ ).

Общая длина тела 60—70  $\mu$ , высота 30—35  $\mu$ , ширина около 35  $\mu$ ; высота воздушных мешков около 25  $\mu$ , у некоторых экземпляров до 30  $\mu$ , ширина мешков около 30  $\mu$ ; ширина гребня 2,5—4  $\mu$ .

154

Тело эллипсоидальное, очертание в боковой и полярной проекциях овальное, иногда в боковой проекции — овалльно-трапециевидное.

Экзина тела двуслойная. Почти на всей поверхности тела, за исключением брюшной части его и участков прикрепления воздушных мешков, экзина образует щит с неясно выраженной границей. В области прикрепления воздушных мешков экзина щита несколько утолщается, образуя бугорчато-складчатые выросты, которые в полярной и боковой проекциях имеют ярко выраженный фестончатый контур. У гребня контур волнистый или гладкий, в проекции — поперечно-штриховатый. Поверхность щита мелко- и слабобугорчатая. Воздушные мешки имеют ясно выраженный сетчатый рисунок. У многих экземпляров сетка двойная: внешняя — более крупная, и внутренняя — более мелкая. Ячейки сетки имеют угловатое очертание, сильно уменьшаются по направлению к периферийным частям, приобретая вытянутую форму.

Мешки прикрепляются к телу несколько суженными основаниями, но у некоторых экземпляров этот признак не выдерживается: прикрепление происходит по широкому основанию мешков.

Ископаемая пыльца имеет большое сходство с пыльцой *P. Montezumae* Lamb., но также из гербарного материала; есть у нее общие черты и со всеми видами пыльцы современных сосен из секции *Pseudostrobus*, отличающейся в основном от пыльцы секции *Strobus* наличием фестончатых выростов экзины на боковых частях щита.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: Павлодарское Прииртышье, Западно-Сибирская низменность, верхний мел — палеоцен, единично — нижний эоцен — нижний олигоцен.

*Pinus minutus* sp. nov. (pollen)

Табл. XIV, рис. 4

Препараты № 161  $\frac{H}{K}$ , 162  $\frac{H}{K}$  и 191  $\frac{H}{K}$

Голотип: Павлодарское Прииртышье, пос. Парамоновка, скв. 1, обр. 245, пропластин с растительными остатками в верхнечеганских глинах (препарат № 191  $\frac{H}{K}$ ).

Общая длина зерна 45—50  $\mu$ ; длина тела 30—35  $\mu$ , высота — около 25  $\mu$ , ширина около 27  $\mu$ ; ширина воздушных мешков около 20  $\mu$ , высота их около 23  $\mu$ ; ширина гребня около 3  $\mu$ .

Тело округло-эллипсоидальное, очертание в боковой и полярной проекциях — правильный овал или окружность (схематическое изображение дано на фиг. 31, 36, 37). Экзина двуслойная. Щит покрывает две трети тела; границы щита выражены неясно, поверхность его крупнобугорчатая. Гребень — по отношению к величине тела толстый, одинаковой высоты по всей длине. Контур тела крупнофестончатый; фестончатость особенно резко выражена на боковых частях тела.

Воздушные мешки сфероидалные, прикрепляются к телу суженными основаниями и несколько раздвинуты по бокам. Линия прикрепления мешков ясно выражена. Сетка на мешках мелкая и четкая.

По величине ископаемое пыльцевое зерно резко отличается от всех видов *Pinus* секции *Pseudostrobus*, но остальные морфологические признаки позволяют отнести его к этой секции. Мелкие же размеры зерна служат основанием к тому, чтобы этому виду было дано название *minutus* (т. е. очень маленький).

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: *Pinus minutus* появляется в олигоценовых отложениях. В Павлодарском Прииртышье отмечен в самых верхних

155

горизонтах нижнего олигоцена (верх чеганской свиты); в Северном Приарале распространен только в среднем олигоцене.

#### Секция *Taeda* Sprach.

Пыльца, отнесенная к секции *Taeda*, имеет эллипсоидальное тело с трапециевидно-овальным очертанием в боковой проекции. Округлые воздушные мешки прикреплены к телу широкими основаниями и несколько сдвинуты к брюшной части тела (фиг. 32, 14). Щит хорошо выражен и отделяется от брюшной части тела рубчиком. Поверхность щита мелкобугорчатая. Гребень узкий, ровный или слегка волнистый, двуслойный, поперечно штриховатый. Слои щита одинаковой толщины. Гребень у некоторых экземпляров имеет по краям большие утолщения. Граница между телом и мешками выражена ясно.

#### *Pinus taedaformis* sp. nov. (pollen)

Табл. XIV, рис. 5—11  
Препарат № 1  $\frac{3a}{3b}$

Г о л о т и п: Северное Приаралье, гора Тас-Аран, тасаранская свита, верхи среднего эоцена.

Общая длина зерна 67—82—90 м; длина тела 60—70 м, высота 46—50 м; высота воздушных мешков 25—35 м, ширина их около 41 м; ширина гребня 3—3,5 м.

Тело овальное или эллипсоидальное, очертание в боковой проекции трапециевидно-овальное. Зародышевая борозда четкая. Экзина тела двуслойная, образует ясно выраженный щит с хорошо заметной границей в виде волнистого или прямого рубчика. Поверхность щита мелкобугорчатая. Ниже щита поверхность тела также мелкобугорчатая, а в области зародышевой борозды — гладкая. По бокам щита на спинной поверхности экзины у некоторых экземпляров заметно небольшое утолщение. Вследствие утолщения щита при боковой проекции обрисовываются так называемые «плечики», характерные также для некоторых видов пыльцы сосны секции *Sembae*. Гребень относительно узкий, одинаковой толщины по всей длине. У некоторых экземпляров, как упоминалось выше, гребень несколько утолщается по краям (в области прикрепления мешков). При боковом положении зерна различается поперечная штриховатость гребня. Щит двуслойный, оба слоя одинаковой толщины.

Воздушные мешки сфероидальные, несколько уплощенные, прикрепленные к телу суженным (иногда широким) основанием. Обычно мешки прикрепляются по бокам тела, в нижних его частях, так что оказываются несколько сдвинутыми к брюшной стороне. Поэтому расстояние между воздушными мешками, если зерно расположено в полярной проекции мешками вверх, — небольшое. Сетка мешков мелкая, четкая, равномерная по всей поверхности, в области же прикрепления к телу сильно измельчается и переходит в неясноточечный рисунок.

Пыльца *Pinus taedaformis* по морфологическим признакам весьма близка к большинству равновидностей пыльцы современного вида *P. taeda*, описанной В. П. Григучем с соавторами (in litt.) из гербарного материала. Ископаемая пыльца отличается от современной несколько меньшими размерами, что, впрочем, наблюдается и у пыльцы других секций.

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: вид широко распространен в третичных отложениях Казахстана. В Северном Приаралье он дает первый максимум

в сакаунской свите (верхний эоцен) и затем продолжает встречаться в больших количествах вплоть до верхов среднего олигоцена. В Павлодарском Прииртышье и в Западной Сибири вид распространен с середины среднего олигоцена (вторая свита). В более древних отложениях встречаются близкие виды, но из-за отклонения в размерах и плохой сохранности они отнесены к секции *Taeda*. То же самое можно сказать и о пыльце из отложений четвертой свиты континентальных отложений. Экземпляры, выделенные из отложений четвертой свиты, отличаются меньшей величиной, чем тот же вид в более древних слоях.

Общая длина пыльцевого зерна не превышает 64 м, при ширине тела, равной 45 м, и диаметре мешков от 25 до 32 м. В остальном морфологические признаки ископаемого вида весьма близки к пыльце вида *Pinus taeda* L. Однако в списках она отнесена лишь к секции *Taeda*.

В настоящее время *P. taeda* распространена в Северной Америке, где образует обширные леса по низменностям и долинам рек.

#### Секция *Australes* Loud. (?)

Пыльца, относящаяся условно к секции *Australes*, имеет тело эллипсоидальной формы с овальным трапециевидно- или ромбовидно-округлым очертанием (в полярной проекции) и с воздушными мешками угловато-сфероидальной формы. Мешки несколько вытянуты по высоте и в полярной проекции имеют очертания угловатые, близкие к треугольным. Прикрепляются воздушные мешки к телу сильно суженными основаниями; граница между телом и мешками четкая. Щит ясно выражен, а если намечается, то покрывает только спинную часть тела, утолщаясь по краям. Контур тела при полярном положении зерна изображается слабоволнистой линией, а экзина тела пронцируется в виде тонкого ободка. Схематическое изображение пыльцы типа секции *Australes* в полярной проекции представлено на фиг. 32, 20.

Ископаемая пыльца, описание которой приводится ниже, отнесена к секции *Australes* условно, так как, хотя и имеет общие черты с пыльцой некоторых современных видов в очертании тела и воздушных мешков, в то же время отличается отсутствием ясно выраженного щита на спинной части тела.

#### *Pinus singularis* sp. nov. (pollen)

Табл. XIV, рис. 12—16  
Препараты № 2  $\frac{3a}{3b}$ , 255  $\frac{3}{K}$  и 259  $\frac{3}{K}$

Г о л о т и п: Северное Приаралье, гора Тас-Аран, морские глины нижних горизонтов среднего олигоцена (препарат № 2  $\frac{3a}{3b}$ ).

Общая длина зерна около 95 м; длина тела 47—56 м, высота около 45 м, ширина около 55 м; ширина воздушных мешков 50—58 м, высота около 48 м; ширина гребня 1,5—3 м.

Тело сфероидальное или эллипсоидальное; в полярной проекции — овального, а иногда трапециевидного очертания. Экзина тела двуслойная, оба слоя одинаковой толщины. На спинной части тела экзина образует небольшой щит, который не имеет резко выраженных очертаний, а незаметно сливается с мелкобугорчатой скульптурой боковых поверхностей тела. Структура экзины зернистая. Поверхность щита мелкобугорчатая или мраморовидно-бугорчатая. На боковых поверхностях тела, в тех участках, где щита нет, рисунок поверхности крупноточечный. Гребень узкий и одинаковой толщины по всей длине или совсем отсутствует.

В том случае, когда он намечается, контур его мелкофестончатый; тогда в боковой проекции хорошо видна поперечная штриховатость гребня. Контур тела в области прикрепления мешков мелкофестончатый. Эта особенность наблюдается у пыльцевых зерен из наиболее молодых горизонтов палеогена; эоценовые экземпляры обычно лишены заметных выступов на боковых сторонах тела.

Воздушные мешки сфероидальные, несколько вытянуты по высоте, прикреплены к телу суженными основаниями и в полярной проекции имеют у большинства пыльцевых зерен угловатые очертания. Последнее относится к разновидностям, выделенным из наиболее высоких горизонтов палеогена (табл. XIV, рис. 13 и 14).

Более древние формы имеют мешки с очертанием в виде почти правильной окружности.

Сетка на мешках четкая и мелкая. Форма ячеек близка к прямоугольной; ячейки обычно сильно вытянуты по высоте мешков и постепенно переходят в радиальную штриховатость.

Пыльца *Pinus singularis* имеет некоторое сходство с *Pinus palustris* Mill. из гербарного материала. Некоторым отличием от нее могут служить более угловатые очертания формы тела и воздушных мешков, а также значительно более тонкая экзина тела. Следует отметить, что пыльца многих современных видов рода *Pinus* имеет значительные отклонения и вариации в размерах и форме зерен внутри одного и того же вида. В некоторых случаях основная масса зерен имеет полную уверенность давать видовое определение. В целом же ряде случаев среди общей массы пыльцы, принадлежащей к одному виду *Pinus*, лишь небольшая часть зерен имеет классическую форму, остальные же имеют неясные признаки вида. Тогда при характеристике вида приходится базироваться на морфологических особенностях ясно выраженных типов зерен. Примерно 70% пыльцы *Pinus palustris*, выделенной из коллекций гербарного материала, обладают характерными признаками, которые взяты в основу при определении. Остальные зерна имеют сильные отклонения как в форме и очертаниях, так и в размерах. Пыльца *Pinus singularis* сходна с той частью пыльцевых зерен *Pinus palustris*, у которых воздушные мешки имеют угловатые очертания и тонкую экзину на теле.

Место нахождения: см. голотип.

Распространение: форма, имеющая большое сходство с *P. singularis*, но под названием *Pinus* секции *Eurypus* или *Pollenites* тур. *Pinus silvestris* встречается в олигоценовых отложениях Западной Европы, на юге Европейской части СССР, на Урале, в Казахстане. В Приаралье пыльца этого вида встречается в отложениях тасаранской свиты (эоцен), в виде единичных зерен в спектрах из негаских отложений, а также в континентальных отложениях Приаралья и Припиртышья.

Современное распространение *Pinus palustris* Mill. в основном приурочено к районам Северной Америки. *Pinus palustris* не любит горных районов и является деревом равнинных местообитаний, с сухими песчаными почвами. Образует чистые светлые леса, в подлеске которых часто встречается пальма *Sabal serrulata*.

#### Секция *Banksia* Maug.

Для пыльцы, отнесенной к секции *Banksia*, характерны небольшие размеры, эллипсоидальное тело, которое в боковой проекции имеет угловато-эллиптическое очертание с дугообразным выгибом на спинной части. Воздушные мешки, сфероидальные или полусфероидальные, прикреплены к брюшной поверхности тела узкими или широкими основаниями.

У некоторых экземпляров мешки имеют угловатые очертания. Щит у большинства экземпляров имеет ясно выраженную границу. Гребень узкий, почти одинаковой толщины по всей длине, контур гребня мелкофестончатый или ровный. Экзина на спинной части зерна (щит) двуслойная, в большинстве случаев нижний слой экзины несколько толще верхнего (схематическое изображение пыльцы этого вида дано на фиг. 32, 13).

Пыльца, принадлежащая к секции *Banksia*, неоднократно упоминается в литературе при описании спорово-пыльцевых спектров из отложений третичного и мелового возраста.

#### *Pinus banksianaeformis* sp. nov. (pollen)

Табл. XV, рис. 1—4

Препарат № 186  $\frac{H}{K}$

Голотип: Павлодарское Припиртышье, пос. Парамоновка, скв. 1, глины подглауконитовой толщи (мел — палеоген).

Общая длина зерна 60—75 м; длина тела около 48 м, высота около 25 м, ширина 23—25 м; высота воздушных мешков около 22 м; высота гребня 1,5—2 м.

Тело эллипсоидальное, угловато-эллиптическое в боковой проекции. Спинная часть тела дугообразно выгнута. Экзина двуслойная, оба слоя одинаковой толщины. Слои настолько незаметно переходят один в другой, что граница между ними улавливается с трудом. Щит покрывает спинную часть тела и большую часть боковых его поверхностей. Граница щита в виде волнистой линии проходит по нижней части боковой поверхности тела; иногда граница неясная. Поверхность щита мелкораморовидно-бугорчатая. Гребень тонкий, одинаковой толщины по всей длине, имеет поперечную штриховатость и почти ровный контур. У части встреченных пыльцевых зерен заметны небольшие утолщения экзины в области прикрепления воздушных мешков.

Воздушные мешки, сфероидальные или полусфероидальные, мелкие по сравнению с величиной тела, прикреплены к брюшной части тела. Сетка на мешках мелкая и неясная. В месте прикрепления мешков к телу сетка постепенно деформируется, и рисунок поверхности мешков становится таким же мелкоочечным, как и бугорчатая поверхность тела.

Ископаемая пыльца имеет внешнее сходство с современной пыльной *Pinus Banksiana* Lam. b., отличающаяся от нее более угловатыми очертаниями мешков и тела и менее ясной сеткой на мешках. Кроме того, гребень у ископаемых видов несколько уже, чем у современных.

Некоторые формы, весьма близкие по общим морфологическим признакам, но отличающиеся большей величиной, наличием ясно выраженной сетки на мешках и более округлым очертанием тела, выделены из тасаранских глин выходящих на горе Тас-Аран в Северном Приаралье. Форму эту автор встречал только в отложениях эоценового возраста в Приаралье и в опочковых среднеэоценовых глинах в Павлодарском Припиртышье.

Изображение *Pinus banksianaeformis* из эоценовых отложений см. на табл. XV рис. 3 и 4. Форма выделена, зарисована и микрофотографирована с препарата № 2  $\frac{3}{K}$ .

Место нахождения: см. голотип.

Распространение: формы, морфологически близкие к *Pinus banksianaeformis*, имеют, по-видимому, широкое распространение в меловых отложениях, ведя свое начало еще со среднего мела. В литературе можно встретить упоминание о подобной форме в верхнемеловых отложениях Среднего и Южного Урала, Западной Сибири, Казахстана и в южных

и западных районах Европейской части СССР. Отмечена на западе Европы, в мезозойских и нижних отделах кайнозойских отложений. Форма, близкая к *P. banksianaeformis*, описана Н. А. Волховитиной (1953, табл. XII, фиг. 9, 10 и 11) под названием *P. subconcinua* N a u m. (*Oedemossacus subconcinua* N a u m).

Современный вид *Pinus Banksiana* L a m b. распространен в Северной Америке (в основном в Канаде). Это самый северный вид осен Северной Америки. *P. Banksiana* L a m b. морозоустойчива, селится на песчаных почвах; образует большие леса. Возможно, что описанный нами вид был также наиболее холодоустойчив, так как появляется он в спектрах переходного горизонта от мела к палеогену, который, как известно, знаменуется относительным похолоданием.

*Pinus* aff. *halepensis* Mill.

Табл. XV, рис. 5  
3и  
Препарат 3 К

Общая длина зерна 73—80  $\mu$ ; длина тела 48—52  $\mu$ , высота 22—30  $\mu$ ; высота воздушных мешков 25—30  $\mu$ , ширина 25—31  $\mu$ ; ширина и высота гребня 2—3  $\mu$ .

Тело эллипсоидальной формы, с овальным или эллиптическим очертанием в боковой проекции. Экзина двуслойная. На спинной и большей части боковых поверхностей экзина образует щит. Граница щита представлена извилистой линией. Край щита слегка утолщен. Поверхность щита мелко-плоскобугорчатая. Гребень широкий, двуслойный; нижний слой несколько толще верхнего. Ширина гребня одинаковая по всей длине, контур его почти ровный, иногда в виде слабо волнистой линии. Поверхность тела вне щита мелкобугорчатая, бугорчатость неясная.

Воздушные мешки сфероидальные, слегка уплощенные, прикреплены к телу несколько суженными основаниями в брюшной части тела. Граница прикрепления мешков к телу четкая. Сетка мешков ясная и четкая. Ячейки сетки крупные, форма ромбовидная. По направлению к месту прикрепления мешков к телу размер ячеек сильно уменьшается.

Описанный вид отличается от пыльцы *Pinus banksianaeformis* менее угловатыми очертаниями тела и мешков, более крупной и четкой сеткой. Вид, выделенный нами из палеогеновых отложений, имеет близкое сходство с пыльцой ныне живущего вида *P. halepensis*, от которой отличается лишь несколько меньшей величиной.

Местонахождение: Северное Приаралье, гора Тас-Аран, морские глины тасаранской свиты (средний эоцен).

Распространение: пыльца *Pinus* aff. *halepensis* встречается только в тасаранской свите (средний эоцен) в Северном Приаралье.

Современный вид *Pinus halepensis* Mill. распространен в западной части Средиземноморской области. Любит равнинные местообитания, на больших высотах встречается редко.

Секция *Euritys* Spach.

Пыльца, отнесенная к секции *Euritys*, имеет округло-эллипсоидальное тело с правильным трапециевидно-овальным очертанием в боковой проекции (фиг. 32, 21). Экзина тела двуслойная, оба слоя почти всегда одинаковой толщины. Щит не имеет рубчика по границе; граница выражена слабо волнистой линией. Гребень гладкий или очень слабо волнистый. Мешки у пыльцы *Pinus* секции *Euritys* — правильной сфероидальной формы, прикреплены к телу суженным основанием и несколько сдвинуты к брюшной стороне его. Сетка на мешках четкая.

160

*Pinus protosilvestris* sp. nov. (pollen)

Табл. XV, рис. 7  
Н  
Препарат № 191 К

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, близ пос. Парамоновка, в 16 км западнее г. Павлодара, скв. 1, обр. 245, верхние отделы чеганских глин (верх нижнего олигоцена).

Общая длина зерна 90—105  $\mu$ ; длина тела 60—70  $\mu$ , высота 45—55  $\mu$ , ширина 42—50  $\mu$ ; высота воздушных мешков 36—45  $\mu$ , ширина их 40—42  $\mu$ ; ширина гребня 4,0—4,5  $\mu$ .

Тело эллипсоидальное, очертание в боковой проекции — близкое к трапециевидному, в полярной — правильно-овальное. Экзина двуслойная, слой одинаковой толщины. Щит покрывает только спинную часть тела. Граница щита изображается почти прямой линией. Рубчик по краю щита отсутствует. Зародышевая борозда выражена неясно. Экзина ниже щита, на боковых и брюшной частях тела, почти гладкая, иногда неясноточечная. Поверхность щита неясноямчатая или неясноаморфовидная. Гребень — одинаковой ширины по всей длине. Контур гребня мелкоизвилистый, почти ровный; в боковой проекции хорошо видна поперечная штриховатость.

Воздушные мешки сфероидальные, немного уплощены по высоте, прикреплены к телу суженным основанием и несколько сдвинуты на брюшную часть тела. Когда пыльцевое зерно находится в полярном положении мешками вверх, то, из-за того, что мешки сдвинуты на брюшную сторону, иногда создается ложное впечатление, будто они прикреплены к телу широким основанием. Сетка на мешках выражена неясно, ячейки сетки неравномерной величины. На центральных частях мешков рисунок сетки улавливается при увеличении в 400 раз, на периферийных же участках рисунок ее измельчается и постепенно сливается с точечной структурой тела. Линия прикрепления мешков к телу четкая. Угол между линией очертания тела и мешков (в месте их прикрепления) выражен ясно, в особенности, если зерно находится в боковом положении.

Ископаемая пыльца по морфологическим признакам имеет сходство с пыльцой ныне живущей *Pinus pinaster* Sol., описанной В. П. Григучко с соавторами (in litt.); отличается *P. pinaster* менее ясно выраженной сеткой мешков, более уплощенной формой камер мешков и большими размерами.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: Павлодарское Прииртышье, палеогеновые морские и континентальные отложения. В других местах неизвестно. Возможно, что не была распознана и из-за своих крупных размеров принималась аналитиками за пыльцу ели или пихты.

Современное распространение вида *Pinus pinaster* Sol., с пыльцой которой можно сравнить ископаемый вид оссы приморской, притурецкой и странам Средиземноморской области и к южной части европейского побережья Атлантического океана. Селится по берегам моря, любит сухие каменистые почвы и дюны.

Появление пыльцы *Pinus protosilvestris* в морских отложениях верхних отделов чеганских глин, т. е. в то время, когда чеганское море уже заканчивало свой цикл на изучаемой территории и вскоре начало отступать, можно связать с явлениями поднятия береговых участков и с образованием отмелей и прибрежных дюн, наносимых сильными ветрами. По-видимому, появление пыльцы *P. protosilvestris* также связано с усиливающейся аридизацией климата.

11 Труды ГИН, вып. 6

161

*Pinus aff. silvestris* L.

Табл. XV, рис. 8—11, 13  
 Препараты № 161  $\frac{H}{K}$ , 162  $\frac{H}{K}$  и 163  $\frac{H}{K}$

Общая длина зерна 72—75  $\mu$ ; длина тела около 55  $\mu$ , высота 35—42  $\mu$ , ширина 32—40  $\mu$ ; ширина воздушных мешков 25—27  $\mu$ , высота их 24—30  $\mu$ ; ширина гребня около 2,5  $\mu$ .

Тело эллипсоидальное, с трапециевидно-эллипсоидальным очертанием в боковой проекции. В полярной проекции тело имеет очертание правильного овала. Экзина двуслойная, образует на спинной и отчасти на боковых частях тела щит. Поверхность щита мелкобугорчатая, границы его не всегда ясно выражены. Гребень узкий, поперечно исчерченный, одинаковой толщины по всей длине, контур гребня почти ровный. Двуслойность экзины даже в области гребня плохо различима.

Воздушные мешки прикреплены к телу узким основанием и сильно сдвинуты на брюшную часть. Линия границы прикрепления мешков выражена четко. Сетка на мешках четкая, ячейки некружные; они одинакового размера по всей поверхности мешков и только у самой границы прикрепления мешков к телу диаметр их значительно уменьшается.

Ископаемый вид имеет большое сходство с пыльцой современной сосны *Pinus silvestris* L., разновидности которой описаны М. Х. Монозон-Смолиной (1949), В. В. Зауер (1950) и В. П. Гричуком с соавторами (in litt.). Наш вид по размерам близок к наиболее крупным разновидностям пыльцы современной *P. silvestris*.

Местонахождение: Павлодарское Прииртышье, скв. 1, глины нижних горизонтов континентальных отложений (средний олигоцен) и верхние горизонты чеганских глини (нижний олигоцен).

Пыльца ископаемого вида *Pinus aff. silvestris* значительно варьирует в размерах в зависимости от стратиграфического положения находок. Так, большинство экземпляров пыльцы *P. aff. silvestris* размером 50—65  $\mu$  и менее приурочено к плиоценовым и четвертичным отложениям (табл. XV, рис. 14, 15, 16).

Разновидность пыльцы *Pinus aff. silvestris* L. несколько больших размеров, подобная изображенной на табл. XV, рис. 12, и с несколько более крупной сеткой, встречается в спектрах из самых нижних отделов палеоцена (препарат № 180  $\frac{H}{K}$ ). Возможно, что правильнее называть его не

*Pinus aff. silvestris*, а *P. silvestriiformis*. С другой стороны, почти тождественное сходство с пыльцой современной *Pinus silvestris* позволяет сопоставлять ее с этим видом, допуская раннее появление *Pinus* секции *Euripitys* во флоре кайнозоя.

Распространение: пыльца *P. aff. silvestris* — один из наиболее распространенных видов пыльцы всего рода *Pinus*, в неогеновых отложениях Европейской и Азиатской части СССР. Однако вид известен из отложений палеогена (верх его) Азиатской и Европейской части СССР в виде единичных находок. Обычен в миоцене Европы и западной части СССР. Широко распространен в плиоценовых отложениях Европейской части СССР. В Казахстане встречается в больших количествах, преимущественно в среднем и верхнем олигоцене, в миоцене, миоцен-плиоцене и в четвертичных отложениях.

Современное распространение *Pinus silvestris* весьма обширно. Границы ее ареала распространяются вдоль всего материка Евразии, исключая Дальневосточный край, от 70 до 50° с. ш. При этом она имеет весьма большой широтный диапазон, встречаясь от равнинных мест до горных райо-

нов. Один из наиболее распространенных видов рода в северном полушарии, также обычное и почти единственное древесное растение южных степей.

Род *Tsuga* Carr. — Тсуга

Пыльца растений, принадлежащих к роду *Tsuga*, имеет сферическую форму. Размер пыльцевых зерен варьирует от 50 до 110  $\mu$  в зависимости от принадлежности к виду. Тело пыльцевого зерна обложено в морщинистую оболочку, более или менее равномерно отслаивающуюся от тела. В проекции отслаивающаяся, собранная в складки или морщины оболочка образует как бы кайму вокруг тела с ровным фестончатым контуром. Контур неравномерно поперечно исчерчен, что обусловлено проекцией стенок складок экзины.

Если морщины или складки глубокие, то поверхность зерна имеет крупносетчатую структуру [*Tsuga diversifolia* (Maxim.) Mast.]. Сетка эта является результатом проекции ребер складок на экзине. Некоторые виды *Tsuga* имеют бугорчатую экзину, не смятую в складки [*Tsuga canadensis* (L.) Carr., описанная В. В. Зауер в 1950 г.].

В ископаемом состоянии пыльца *Tsuga* встречается в верхнепалеогеновых отложениях Европейской части СССР, в третичных отложениях Урала, в плиоцене Поволжья. В большом количестве встречается в миоценовых отложениях Европейской части СССР и на Южном Урале.

Автором найдены два вида пыльцы *Tsuga* в Северном Казахстане и в Северном Прииртышье, в отложениях первой и второй свит континентального олигоцена, т. е. в среднем олигоцене, а также в более высоких горизонтах олигоцена и в миоцене. В спектрах, содержащих пыльцу *Tsuga*, кроме хвойных, обычно присутствует пыльца широколиственных пород, в основном принадлежащих к листопадному комплексу, что свидетельствует о сравнительно умеренно влажных условиях обитания. В континентальных отложениях Казахстана выделено два вида пыльцы *Tsuga*: крупная и мелкая. Крупная пыльца близка по морфологическим признакам к пыльце современной *Tsuga diversifolia* (по описаниям Эрдмана, 1943, и Зауер, 1950). Однако ясно выраженная сетчатость на поверхности ископаемого зерна, обусловленная сравнительно симметрично расположенными морщинами экзины, не позволяет полностью отождествить этот вид с современным видом. Ввиду того, что пыльца современных растений *Tsuga* еще недостаточно изучена, осторожнее будет ископаемым формам присвоить видовое название по морфологическим признакам. Это название, систематическое в отношении родовой принадлежности и искусственное в отношении принадлежности к виду, следует считать временным (это касается всех видовых наименований ископаемой пыльцы кайнозойских отложений), так как со временем, изучив пыльцу ныне живущих растений, мы сможем большинство искусственно выделенных видов привести к системе.

*Tsuga crispata* sp. nov. (pollen)

Табл. XVI, рис. 1  
 Препараты № 342  $\frac{3}{K}$

Голотип: Павлодарское Прииртышье, р. Кара-Су, обл. 13, слюнные глины с растительными остатками первой свиты континентальных отложений (средний олигоцен).

Диаметр пыльцевого зерна 99  $\mu$ , толщина оторочки 6—8  $\mu$ , толщина экзины 0,7  $\mu$ .

Пыльца *Tsuga crispata* sp. близка по строению к современной *T. diversifolia*; отчасти близка она и по строению морщинистой экзины (крупная

кружевная складчатость), но так как к настоящему времени из 14 современных видов пыльцы *Tsuga* нам известны только 3, то отождествлять ее с *T. diversifolia* преждевременно.

В спорово-пыльцевых спектрах *T. crispa* sp. nov. сопутствует разнообразному и богатому комплексу различных видов сосны и *Taxodium*, а также, большому и разнообразному комплексу широколиственных листопадных пород.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: Павлодарское Прииртышье и Северное Приаралье, средний и верхний олигоцен, нижний миоцен.

*Tsuga torulosa* sp. nov. (pollen)

Табл. XVI, рис. 2  
3  
Препарат № 431 К

Голотип: Павлодарское Прииртышье, р. Кара-Су, обн. 13, слой глины с пропластками отмытого песка (первая свита, средний олигоцен). Диаметр пыльцевого зерна 49,5 м, толщина оторочки 6 м, толщина экзины 1 м.

Строение оболочки этого вида пыльцы резко отличается от такового у современной пыльцы *T. diversifolia*. Экзина у пыльцевого зерна *T. torulosa*, помимо складчатости, имеет бугорчатую структуру. Поэтому на поверхности зерна не обнаруживается, как у *T. diversifolia*, сетчатого рисунка; поверхность ископаемого зерна слегка напоминает поверхность пыльцы *Sciadopitys*, отличаясь от нее наличием более мелких бугорков.

Пыльца *T. torulosa* имеет некоторое сходство с пыльцой ныне живущего вида *T. canadensis*, но отличается от него меньшими размерами (диаметр *T. canadensis*, по описанию В. В. Зауер, 53—63 м), а также более мелкой бугристостью экзины.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: Павлодарское Прииртышье, средний — верхний олигоцен.

В ископаемом состоянии пыльца *T. torulosa* встречается в сообществе с *Pinus* секции *Strobus*, *Abies*, *Carpinus*, *Liquidambar*, *Quercus tuberculata* и др., что свидетельствует о сравнительно умеренном климате.

СЕМ. TAXODIACEAE W. NEGER — ТАКСОДИЕВЫЕ

Пыльца ископаемых видов, относимых к сем. Taxodiaceae, имеет однокамерное строение. Воздушные мешки отсутствуют. В основном пыльцевые зерна округлой формы, однопорные и безбороздные, за исключением рода *Sciadopitys*, пыльца которого лишена поры и снабжена одной зародышевой бороздой. Размеры варьируют от 23 до 50 м, в зависимости от принадлежности к роду и виду. Большинство родов сем. Taxodiaceae имеет пыльцу, легко сминающуюся и терпящую при захоронении свои первоначальные очертания. Кроме того, пыльцевые зерна часто дают трещину, которая обычно образуется в плоскости порового отверстия, расщепляя зерно почти на два полушария. Поровое отверстие у некоторых родов сем. Taxodiaceae (*Taxodium*, *Cryplemeria*, *Sequoia*) снабжено конусообразным выступом экзины. Экзина пыльцевых зерен обычно двуслойная, внешний слой экзины обычно снабжен бугорчатыми или мелкошиповатыми выростами. В редких случаях некоторые разновидности пыльцы таксодиевых имеют гладкую поверхность.

Наиболее хорошо распознаваемы пыльцевые зерна *Taxodium*, *Sequoia* и *Sciadopitys*. Остальные роды этого семейства по пыльце выделяются

с трудом, так как имеют большое сходство с пыльцой растений сем. Cupressaceae.

Ничье выделяется группа неопределенной одноклеточной пыльцы, которая по морфологическим признакам близка как к сем. Taxodiaceae, так и к сем. Cupressaceae.

Род *Sciadopitys* Sieb. et Zucc — Циадопитис

*Sciadopitys tuberculata* sp. nov. (pollen)  
ex gr. *S. verticillata* Sieb. et Zucc.

Табл. XVI, рис. 3  
Препарат № 269 К

Голотип: Павлодарское Прииртышье, оз. Маралды, обн. 66, континентальные отложения верхнего олигоцен.

Виды, близкие морфологически, известны по литературным данным:

1934. *Sporites serratus* Potonie N. nitz. Zur Mikrobotanik des miozänen Humols der Niederösterreichischen Buchs, Taf. 1, Fig. 6, 7.  
1935. *Sciadopitys* typus Rudolph. Mikroflorentische Untersuchung tertiärer Ablagerungen im Nördlichen Böhmen, Taf. 5, Fig. 14, 15.  
1937. *Sciadopitys pollenites serratus* Thiergart. Die Pollenflora der Niederösterreichischen Braunkohle, besonders im Profil der Grube Marga bei Sentenberg, Taf. 23, Fig. 14.  
1940. *Sciadopitys* Thiergart. Die Mikropaläontologie als Pollenanalyse im Dienst der Braunkohleforschung, Taf. 11, Fig. 5; Taf. 14, Fig. 10; Taf. V, Fig. 2.  
1942. *Sciadopitys pollenites serratus* Wicher. Praktikum der angewandten Mikropaläontologie, Taf. 28, Fig. 18.

Длина зерна 43—45 м, ширина 30—35 м.

Пыльцевое зерно почти округлое, однобороздное, беспоровое. Борозда расположена на внешней, дистальной стороне зерна. Зерно большей частью несколько смято и борозда не всегда четко выражена. Экзина двуслойная, нижний слой тоньше верхнего. Общая толщина экзины около 5 м. Внешний слой экзины снабжен или, вернее, состоит из крупных (до 4,5 м в диаметре) бугорков, вершины которых несколько уплощены. Бугорки расположены плотно один к другому и проекция их с поверхности выглядит крупносетчатой. Контур зерна крупносетчатый. Пыльца *Sciadopitys tuberculata* sp. nov. по внешнему облику несколько напоминает пыльцу современного вида *S. verticillata* Sieb. et Zucc., описание которого приведено в работе В. В. Зауер (1950), однако бугорки на его поверхности значительно крупнее.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: пыльца *Sciadopitys* весьма распространена в неогеновых отложениях Западной Европы и Европейской части СССР. В вертикальном отношении *Sciadopitys* имеет довольно широкий диапазон, встречаясь в комплексе спектров пыльцы хвойных от низов палеоцена до плиоцена. По-видимому, этот вид имел достаточно большое распространение и в широтном направлении. Автором пыльца *Sciadopitys* найдена в палеоцене среднего и нижнего Поволжья, на Дону и в Приазовье, а также в среднеолигоценовых отложениях Казахстана. В поволожских палеоценовых спектрах встречается разновидность пыльцы *Sciadopitys* с несколько более мелкой бугорчатостью. В Казахстане же встречаются только крупнобугорчатые формы, подобные *Pollenites serratus* Potonie, с которыми наш вид имеет почти полное сходство, за исключением того, что он несколько меньше.

По данным В. В. Зауер, крупные остатки деревьев, по морфологическим признакам напоминающие зонтичную сосну (*Sciadopitys*), найдены еще в меловых отложениях Гренландии.



Насколько широко был распространен род *Sciadopitys* и насколько он был богат видами, — это по пыльцевым данным еще неясно. Во всяком случае, по-видимому, род *Sciadopitys* в достаточной мере древний. В настоящее время он представлен всего одним видом — *S. verticillata* Sieb. et Zucc., известным только в Японии.

*Sciadopitys verticillata* Sieb. et Zucc. — древесное растение с вечнозелеными листьями в виде хвои. Родина его — горная часть Японских островов. Растет в смешанных лесах совместно с *Chamaecyparis obtusa*, *Ch. pisifera*, *Tsuga sieboldii*, *Pinus densiflora*, *Abies firma*, *Aesculus turbinata* и *Magnolia obovata*. Любит защищенные от ветров ущелья и приурочен к областям с прохладным океаническим климатом.

#### Род *Sequoia* Endl. — Секвойя

*Sequoia* aff. *sempervirens* sp. nov. (pollen)

Табл. XVI, рис. 4, 5  
Препарат № 186  $\frac{H}{K}$

Голотип: Павлодарское Прииртышье, пос. Парамоновка, скв. 1. Слоистые глины из подглауконитовой свиты (верхний мел, датский ярус).

- Виды, морфологически близкие, известные по литературным данным:
1940. *Sequoia* Thiergart. Die Mikropaläontologie als Pollenanalyse im Dienst der Braunkohlenforschung Schrift..., Taf. III, Fig. 9, 11; Taf. IV, Fig. 7.
1949. Cf. *Sequoia* (*Pollenites polyformosus* Thiergart) Kremr. Pollenanalytische Untersuchungen des miozänen Braunkohlenlagers von Konin an der Warthe, Taf. V, Fig. 27—29.
1953. *Sequoia* aff. *sempervirens* Заклинская. Описание некоторых видов пыльцы и спор, выделенных из третичных отложений Пасековского карьера Воронежской обл., стр. 74, табл. III, фиг. 33.
1951. *Sequoiipollenites polyformosus* (Thiergart) Potonie. Revision stratigraphisch wichtiger Sporomorphosen des Mitteleuropäischen Tertiärs, Taf. XX, Fig. 16, 16a.

Диаметр пыльцевого зерна 32—34 м.

Пыльцевое зерно округлое, однопоровое, безбороздное. Поровое отверстие находится на дистальной (внешней) стороне зерна. В области порового отверстия имеется конический вырост внутреннего слоя экзины, подобный такому же выросту у пыльцы *Taxodium*, но, в отличие от последнего, вырост этот несколько изогнут и имеет наклонное положение. Этот признак является почти единственно надежным, отличающим пыльцу *Sequoia* от пыльцы *Taxodium*.

Экзина двуслойная, верхний слой неравномерно бугристый. Бугорчатость слабо выражена и почти не отражается на внешней линии очертания зерна.

Во многих случаях пыльца *Sequoia* бывает смята и деформирована, что нередко исключает возможность ее определения. С пыльцой современной *S. sempervirens* Endl. пыльца, выделенная из палеогеновых отложений, почти тождественна, отличаться от нее только тем, что обычно не встречается в разорванном состоянии. Размер ископаемых пыльцевых зерен несколько больше, чем у современных форм.

От пыльцы *S. aff. sempervirens*, описанной из олигоцен-миоценовых углей Пасековского карьера (Заклинская, 1953), пыльца палеогеновой *Sequoia* Казахстана отличается менее выраженной скульптурой экзины.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: ископаемые остатки рода *Sequoia* часто обнаруживаются в третичных отложениях почти во всех пунктах умеренных широт. Находки пыльцы *Sequoia* отмечены на западном склоне Сред-

него Урала и в Казахстане, начиная от верхнего мела. Пыльца ранних видов *Sequoia* отличается от *S. sempervirens* меньшими размерами. В эоцене *Sequoia* принимает значительное участие в составе хвойных и смешанных лесов, а в олигоцене — в составе лесных ассоциаций вместе с остальными хвойными (преимущественно с родом *Pinus*). Пыльца *Sequoia* (*Pollenites polyformosus*), отмеченная в миоцене Германии Кремпом (Kremr, 1949), по совокупности морфологических признаков может быть отнесена также к виду *S. semperviriformis*. В Казахстане пыльца, подобная *S. semperviriformis*, отмечена в верхнем меле, в эоценовых слоях, в чеганских глинах и во второй свите континентальных отложений олигоцене. Она же встречается в янах палеогена на Северном Кавказе, Нижнем Дону, Средней Волге и на Южном Урале.

В связи с тем, что пыльца *Sequoia* весьма развита как в широтном, так и в вертикальном направлении, ее коррелирующее значение несколько снижается.

Родиной современного рода *Sequoia* вообще и *S. sempervirens* в частности является Тихоокеанское побережье Америки. Растение приурочено к зоне мягкого умеренного или теплого океанического климата.

#### Род *Taxodium* Rich. — Таксодий

*Taxodium* aff. *distichum* (L.) Rich.

Табл. XVI, рис. 7  
Препарат № 191  $\frac{H}{K}$

Виды, морфологически близкие, известные по литературным данным:

1934. *Taxodiipollen hiatus* Potonie. Zur Mikrobotanik des miozänen Humdils der Niederrheinischen Bucht, Taf. 4.
1940. *Taxodiaceae* (*pollen hiatus* Potonie) Thiergart. Die Mikropaläontologie als Pollenanalyse im Dienst der Braunkohlenforschung. Schrift..., Taf. II, Fig. 10; Taf. IV, Fig. 8; Taf. V, Fig. 4; Taf. X, Fig. 8.
1949. *Taxodiaceae* (*pollen hiatus* Potonie) Kremr. Pollenanalytische Untersuchungen des miozänen Braunkohlenlagers von Konin an der Warthe, Taf. V, Fig. 31, 37, 38.
1951. *Taxodiipollen hiatus* Potonie. Revision stratigraphisch wichtiger Sporomorphosen des Mitteleuropäischen Tertiärs, Taf. XX, Fig. 17.

Диаметр пыльцевого зерна 35—45 м. Форма зерна сферондальная, в очертании — правильная окружность. Обычно зерно рассечено глубокой трещиной, отходящей от места порового отверстия и разделяющей его на два равных полушария. Пора одна, расположена на дистальной (внешней) стороне зерна, апертура (отверстие поры) образована верхним слоем экзины. В области порового отверстия имеется конусообразный вырост внутреннего слоя экзины, направленный вертикально к поверхности зерна. Длина выступа 1,5—2 м. Вертикально расположенный выступ характерен для пыльцы *Taxodium*, в отличие от наклонного выступа, который характеризует пыльцу *Sequoia*.

Экзина двуслойная, оба слоя одинаковой толщины. Общая толщина экзины не превышает 2 м, чаще она менее 2 м. Поверхность экзины в большинстве случаев гладкая, иногда покрыта невысокими бугорчатыми выростами. Пыльца *Taxodium* в ископаемом виде чаще всего имеет трещину, которая обычно начинается от центра зерна и проходит к периферии в виде широкого сегмента (табл. XVI, рис. 7). Трещина обычно расположена таким образом, что конусовидный выступ поры оказывается на вершине конуса трещины и виден в растворе ее.

По морфологическим признакам пыльца *T. aff. distichum* весьма близка к пыльце современной *T. distichum* (L.) Rich., описанной В. В. Зауер

(1950). Однако размер пыльцы ископаемой формы несколько больше, чем у современной, что позволяет сопоставлять ее с *Pollenites Taxodiaceae* и *Pollenites hiatus* R. P. O. t. o. n. e. из олигоцена Западной Европы.

Следует отметить, что пыльца *Taxodium* по своему строению весьма сходна с пыльцой *Sequoia* и *Cupressaceae* и во многих случаях различить их чрезвычайно трудно.

Место нахождения: Павлодарское Прииртышье, пос. Парамовка, скв. 1, отложения верхних горизонтов чеганских глин.

В числе пыльцевых зерен, отнесенных к сем. *Taxodiaceae*, попадаются несколько отличных от пыльцы современного вида — *Taxodium distichum*. Величина пыльцевых зерен не превышает 30 м; выступ у поры не всегда ясно выражен. Эти формы пыльцевых зерен отнесены к роду, подобному *Taxodium—Taxodiumites* sp. (табл. XVI, рис. 8,9). Пыльца *Taxodiumites* sp. встречается в спектрах, более древних, чем *Taxodium aff. distichum*. Появление пыльцы *Taxodiumites* sp. отмечено еще в эоцене.

Распространение: особенно широко развит *Taxodium* в олигоцене (Казахстан) и олигоцен-миоцене (Европа). Вообще же пыльца и отпечатки листьев *T. distichum* известны в третичных отложениях в большом числе пунктов СССР и Западной Европы. По-видимому, род *Taxodium* был особенно широко распространен в третичное время, от верхов эоцена до сармата включительно. Большое количество пыльцы *Taxodium* встречается в олигоценовых отложениях майкопа Северного Кавказа, в солончковых (майкоп) слоях на Нижнем Дону, на Нижней и Средней Волге. Отмечается его широкое распространение также и в нижних отделах миоцена Европы. Несколько сокращается относительное количество пыльцы к верхам миоцена. В Северном Казахстане и в Тургае *Taxodium* начинает появляться в небольших количествах в верхних отделах эоцена (подчеганские слои) и особенно широко развит в чеганских отложениях (нижний олигоцен). Один из руководящих родов в составе умеренной флоры (тургайской, по терминологии А. Н. Криштофовича).

По данным палеоботаники, род *Taxodium* продвигался из областей палеарктики и был широко распространен по всему северному полушарию в третичном периоде. К сожалению, еще не изучена пыльца современного вида *T. microdatum* T. e. n. — мексиканского кипариса, который, в отличие от *T. distichum*, обитает в горных областях, на сухих местах. Возможно, что большое количество пыльцы *Taxodium*, не определенное нами до вида, принадлежит не к виду болотного кипариса, а к аналогу *T. microdatum*, чем и объясняется появление пыльцы этого рода в отложениях эоцена, когда климат был жаркий и сухой.

#### Род *Cunninghamia* R. Br. — Куннингамия

*Cunninghamia* aff. *lanceolata* Lam b.

Табл. XVI, рис. 10, 11, 12

Н  
К  
Препарат № 198

Морфологически близкие формы, известные по литературным данным: 1933. *Cunninghamia eocenipites* W o d e h o u s e. Tertiary pollen. The oil shales of the eocene Green River formation, p. 495, fig. 19.

Диаметр пыльцевого зерна 21—30 м. Форма его сфероидальная, очертание округлое. Зерно имеет одну неясно выраженную пору. Над порой у большинства зерен можно обнаружить небольшой выступ экзины. Экзина тонкая, при увеличении в 450 раз двуслойность незаметна. Поверхность зерна мелкобугорчатая. Бугорки разбросаны по поверхности редко и неравномерно. Тело избороздено беспорядочно расположенными складками.

168

Пыльца сходна с современной пыльцой *Cunninghamia lanceolata* Lam b., описанной В. В. Зауер (1950); ее строение также чрезвычайно близко к *C. eocenipites* Вудхауза из третичной флоры Грин-Ривер. В ископаемом состоянии пыльца распознается с большим трудом и поэтому упоминания о ее находках чрезвычайно редки. По данным А. Н. Криштофовича, на Амуре были встречены древовидные остатки этого рода в третичных отложениях.

Место нахождения: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз, бассейн р. Иртыш, по его левому берегу, глина с отпечатками растений из второй свиты континентальных отложений (олигоцен).

Распространение: пыльца *Cunninghamia* отмечена в спорово-пыльцевых спектрах в эоцене и олигоцене Западной Европы и в олигоценовых отложениях Казахстана.

Родина *C. lanceolata* Lam b. — Южный и Центральный Китай. Растет в поисе распространения жестколистных, обычно лавровых растений. Образуется леса. Растет на сухих и на влажных почвах. Широко распространена по вертикали (от 1000 до 3600 м над уровнем моря).

#### СЕМ. CUPRESSACEAE F. W. NEGER — КИПАРИСОВЫЕ

Семейство *Cupressaceae*, по мнению А. Н. Криштофовича, было наиболее широко развито в мелу. Пыльца различных кипарисовых отмечена в меловых отложениях Центрального и Западного Казахстана, в Приарале, в Приуралье, в Европейской части СССР. Наибольшее количество древесных остатков кипарисовых относится к среднему и верхнему мелу. В третичных отложениях пыльца и макроскопические остатки распространены довольно широко, но в видовом отношении семейство это представляло значительно слабее, чем в мелу.

Для Казахстана в третичных отложениях известны остатки *Cupressinoxylon* sp. на востоке, *Cupressocarpos ovalis* G r i c k. на оз. Зайсан, *Juniperus communis* L. в Восточно-Казахстанской области, *Juniperus* sp. с горы Ашу-Тас. Присутствие большого количества пыльцы кипарисовых, начиная от эоцена и до миоцена, отмечают многие исследователи. Наибольшее развитие кипарисовые имеют в нижних горизонтах палеогена (палеоцен—эоцен) как в Европейской, так и в Азиатской части СССР. В частности, довольно большое количество пыльцы сем. *Cupressaceae* (до 30% от общего количества хвойных) обнаружено автором в палеоценовых отложениях Поволжья и в бучакских слоях Нижнего Дона.

Присутствие макроскопических остатков в сызранских слоях Поволжья отмечали В. И. Палибин, В. И. Баранов и другие исследователи.

Для ископаемой пыльцы, отнесенной к сем. кипарисовых, характерно одноклеточное беспоровое зерно (за исключением пыльцы рода *Libocedrus*, которая имеет поры). Форма зерна сфероидальная, очертание округлое, диаметр его 29—35 м. По описаниям В. В. Зауер (1950), пыльца *Cupressaceae* снабжена одной зародышевой бороздкой, но на ископаемых зернах этой бороздки обнаружить не удалось.

Экзина двуслойная, нижний слой, в отличие от пыльцы *Taxodiaceae*, толще, чем верхний. Верхний слой экзины обычно имеет мелкобугорчатую скульптуру. Бугорчатые выросты расположены на поверхности неплотно.

Пыльцевые зерна обычно сильно деформированы и имеют трещину, которая, в отличие от пыльцы *Taxodium*, проходит дальше центра, рассекая зерно на два полушария, скрепленных в одной точке.

Приводимые ниже описания ископаемой пыльцы различных видов семейства кипарисовых носят предварительный характер из-за отсутствия достаточно полных данных по морфологии пыльцы современных видов этого семейства.

12 Труды ГИН, вып. 6

169

*Thujaites* sp. (pollen)

Табл. XVI, рис. 13, 14, 15  
 Н 3  
 Препараты № 191 К и 255 К

Морфологически близкие формы, известные по литературным данным:

1933. *Taxodium hiatipites* W o d e h o u s e. Tertiary pollen. The oil shales of the eocene Green River formation, p. 449, fig. 17.  
 1934. Taxodiaceae P o t o n i e. Zur Mikrobiologie der Kohlen und ihrer Verwandten, zur Morphologie der fossilen Pollen und Sporen, Taf. 6, Fig. 4.  
 1940. *Conifer pollen* T h i e r g a r t. Die Mikropaläontologie als Pollenanalyse im Dienst der Braunkohlenforschung, Taf. III, Fig. 8, 10.  
 1949. *Pollen Kleiner K r e m p*. Pollenanalytische Untersuchungen des miozänen Braunkohlenlagers von Konin an der Warthe, Taf. V, Fig. 44.  
 1951. *Taxodiipollen hiatus* (P o t o n i e). G o t h a n. Die merkwürdigen pflanzengeographischen Besonderheiten in den Mitteleuropäischen Karbonifloren, Taf. XX, Fig. 17.

Диаметр пыльцевого зерна 30—35 м (в более молодых отложениях пыльца *Thujaites* крупнее). Форма зерна сферодальная, очертание округлое. Экзина двуслойная, с тонким внешним слоем, покрытым беспорядочно разбросанными мелкими бугорками. После щелочной обработки и ацетилового метода приготовления экзина обычно ломается.

В ископаемом состоянии пыльца встречается сильно деформированной, с глубокой трещиной, разделяющей зерно на две неровные части. Тело смято продольными складками. Поровое отверстие не обнаружено. Во многих описаниях пыльца *Thuja* ошибочно отнесена к сем. Taxodiaceae. Действительно, пыльца сем. Taxodiaceae и Cupressaceae весьма близка по своим морфологическим признакам. Но, как совершенно справедливо отмечают В. В. Зауер (1950), Эрдман (1943) и другие авторы, пыльца Taxodiaceae легче всего распознается по наличию поры и пальцеобразного выступа над нею внутреннего слоя экзины. У большинства же растений сем. Cupressaceae пыльца не имеет поры, а у тех видов, у которых она имеется, пальцеобразный выступ отсутствует или слабо выражен. Кроме того, обычно пыльца Taxodiaceae значительно крупнее пыльцы Cupressaceae.

Сходство морфологических признаков описываемой нами ископаемой пыльцы с пылью ныне живущей *T. orientalis* L., описанной В. В. Зауер, позволило отнести ее к роду *Thuja*. Видовое определение не сделано ввиду недостаточности данных по морфологии современной пыльцы этого рода.

М е с т о н а х о ж д е н и е: Павлодарское Прииртышье, близ г. Павлодара, скв. 1 и 2, верхние горизонты чеганских глин (нижний олигоцен); оз. Кемир-Туз, обн. 1326, глины с растительными остатками из второй свиты континентальных отложений среднего олигодена.

Р а с п р о с т р а н е н и е: пыльца *Thujaites* встречается в майкопских (средний олигоцен) отложениях Северного Кавказа, Нижнего Дона (соленовские слои) и Приазовья. Необходимо отметить, что большое количество пыльцы Cupressaceae, в том числе и рода *Thuja*, отмечается обычно в тех горизонтах, где пыльца *Taxodium* или совсем отсутствует, или обнаруживается лишь в небольшом числе экземпляров.

*Libocedrus* sp. (pollen) — Либоцедрус

Табл. XVI, рис. 16  
 Н 3  
 Препарат № 252 К

Диаметр пыльцевого зерна 30—35 м. Зерно сферодальное, одноклеточное, безбороздное, однопорное или с двумя — тремя порами. В ископаемом состоянии встречается в деформированном виде. Экзина двуслойная,

внутренний слой несколько плотнее и толще, чем внешний, который, отделяясь от внутреннего слоя, образует беспорядочные складки. Неровности внешнего слоя экзины обуславливают угловатый контур зерна. В некоторых случаях отслаивающаяся эктезина проицируется в виде тонкой прозрачной бахромки. На некоторых экземплярах над поровым отверстием иногда удается обнаружить небольшой конусообразный выступ. Пыльца *Libocedrus*, как и большинство видов сем. Cupressaceae, имеет трещину, которая проходит через одно из поровых отверстий.

Пыльца *Libocedrus* зарисована из материалов по Пасековскому месторождению бурых углей из миоцен-олигодена Украины (Заклинская, 1953). Современная пыльца (*L. decurrens* T o g g.) описана В. В. Зауер (1950), Эрдманом (1943) и Заклинской (in litt.). В. В. Зауер и Г. Эрдманом описана пыльца вида *Libocedrus decurrens*, а Е. Д. Заклинской — вида *L. macrolepis*. Пыльца *L. macrolepis* отличается от пыльцы *L. decurrens* T o g g. более жесткой экзиной, меньшими размерами и более ярко выраженными поровыми отверстиями.

Пыльца *Libocedrus* в ископаемом состоянии отмечается редко, по-видимому, в связи с тем, что распознается она трудно и отличить ее от пыльцы прочих Cupressaceae почти невозможно, если зерно не находится в идеальной сохранности.

М е с т о н а х о ж д е н и е: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз, континентальные отложения, вторая свита, средний олигоцен.

Р а с п р о с т р а н е н и е: в Казахстане род *Libocedrus* распространен в верхних горизонтах олигоденовых континентальных отложений. На территории СССР ископаемые макроскопические остатки *Libocedrus* известны еще с верхнего мела.

Современный род *Libocedrus* включает всего восемь видов, в основном приуроченных к южным широтам и побережьям Тихого океана: Калифорния, Чили, Китай, Япония, Новая Гвинея. Обитает на довольно больших отметках — от 1500 до 1600 м над уровнем моря.

Возможно, что появление пыльцы *Libocedrus* в континентальных отложениях (четвертая свита — верхний олигоцен) Казахстана связано с эпохой тектонических поднятий в районе Прииртышья (?).

*Cupressites* sp. (pollen)

Табл. XVI, рис. 17, 18, 19  
 Н 3  
 Препарат № 191 К

Диаметр пыльцевого зерна 22—28 м. Зерно эллипсоидально-сферодальное, беспоровое, с трещиной вдоль тела, расщепляющей зерно на две равные части. Обычно зерно смято в продольные, беспорядочно расположенные складки.

Экзина покрыта мельчайшими, беспорядочно расположенными шипиками, вследствие чего контур зерна несколько неровный. По внешнему облику пыльца *Cupressites* зр. весьма сходна с пылью современного вида *Cupressus arizonica*. Отличается от него отсутствием порового отверстия, имеющегося у большинства пыльцевых зерен ныне живущего *Cupressus arizonica* G g e n e. От пыльцы *C. lusitana* также отличается отсутствием поры, а от *Juniperus*, кроме того, несколько большим размером.

М е с т о н а х о ж д е н и е: Павлодарское Прииртышье, пос. Парамовна, скв. 1, глины верхних горизонтов чеганской свиты (верх нижнего олигодена).

<sup>1</sup> Зарисованного автором из гербария Н. А. Выховитиной.

**Распространение:** от мела до олигоцена Азиатской и Европейской части СССР.

Родина *C. arizonica* Грее — Калифорния и Новая Мексика, где в некоторых местах растение образует горные леса на высоте от 1500 до 2400 м над уровнем моря.

*Cupressites* sp. (pollen) (ex gr. *Cupressus pallens* Bolch.)

Табл. XVI, рис. 20  
Препарат № 191  $\frac{H}{K}$

Диаметр пыльцевого зерна 22—28 м. Зерно сфероидальное, но несколько вытянуто по одной из осей. Возможно, что последнее не относится к морфологическим признакам зерна, а является результатом деформации при его обработке и вызвано тем, что зерно обычно дает глубокую трещину и легко сминается.

Экзина плотная, двуслойная, но двуслойность просматривается с трудом и улавливается не на всех экземплярах. В некоторых случаях экзина равномерно мелкобугорчатая, вернее — зернистая, так как величина бугорков чрезвычайно мала.

По внешнему облику пыльца ископаемого вида чрезвычайно близка к виду, описанному Н. А. Болховитиной (1953, стр. 68, табл. X, рис. 27) под названием *Cupressus pallens*. Она имеет так же большое сходство с пыльцой современного вида *Cupressus torulosa* D. D o n., отличающейся от него лишь меньшей величиной.

**Местонахождение:** Павлодарское Прииртышье, пос. Парамоновка, скв. 1, нижние горизонты чеганской свиты (нижний олигоцен).

**Распространение:** встречен в Павлодарском Прииртышье, от нижнечеганских глин (верхний олигоцен) до четвертой свиты континентальных отложений. Отмечен в серых глинах сеномана и турона (*Cupressus pallens* Bolch.) на восточном склоне Южного Урала, в нижнетуретичных отложениях юга Европейской части СССР. В эоцене и в нижних отделах олигоцена встречается чаще, чем в верхних горизонтах олигоцена.

Современное распространение *C. torulosa* приурочено к Западным Гималаям, от Непала до Бутана, а также к Центральному Китаю. Растение горное и суклолюбивое.

*Chamaecyparites* sp. (pollen)

Табл. XVI, рис. 21; табл. XVII, рис. 1  
Препарат № 259  $\frac{3}{K}$

Диаметр пыльцевого зерна 23—25 м. Пыльца сфероидальная. Зерно снабжено трещиной, проходящей, по мнению Н. А. Болховитиной, по зародышевой борозде. Наличие зародышевой борозды при изучении нашего вида не обнаружено. Экзина мелкошиповатая.

За исключением наличия зародышевой борозды, общий облик пыльцы выделенного вида имеет некоторое сходство с *Chamaecyparis Lawsoniana* (Andr.) Parl. и с *Chamaecyparis Shuzhii* Bolch.

**Местонахождение:** Павлодарское Прииртышье, оз. Кемп-Туз, обл. 6, четвертая свита континентального олигоцена (верхний олигоцен).

**Распространение:** от верхнего мела до олигоцена Азиатской и юга Европейской части СССР. Родина *Chamaecyparis Lawsoniana* — горные районы Северной Америки в районе р. Калифорнии.

#### КЛАСС GNETALES ENGL. — ГНЕТОВЫЕ

Пыльца, отнесенная к классу Gnetales, делится по морфологическим признакам на две группы. К первой относится пыльца сильно вытянутой эллипсоидальной формы, имеющая в боковой проекции очертание почти правильного эллипса с заостренными вершинами. У древних форм на вершинах эллипса отслоение экзины образует подобие редуцированных воздушных мешков. Тело зерен этого типа имеет продольные складки, между которыми проходят извилистые бороздки (не зародышевые борозды), исполняющие, по-видимому, роль гармоггата<sup>1</sup> (табл. XVII, рис. 3, 4, 6, 7). На ребрах экзины, образующей складки, проходят бороздки, которые, по-видимому, являются аналогами зародышевых. При расположении зерна в правильной полярной проекции очертания сечения этих зародышевых борозд прекрасно видны (см. табл. XVII, рис. 5, 11, 12). К такому типу зерен относится пыльца всех видов *Ephedra* и *Welwitschia*. Размеры их обычно крупные (до 60 м по большей оси).

Зерна второго типа представляют собой сфероидальное тело с одной зародышевой бороздой и с мелкошиповатой экзипой. Размеры зерен этого типа не достигают 25 м. По внешнему виду пыльца этого типа несколько напоминает пыльцу Cupressaceae, но отличается от нее более плотной экзипой. Нам известен один представитель, сем. Gnetales, а именно *Gnetum Gneton* L., описанный Эрдтманом (1943, табл. XXII, фиг. 410).

Класс Gnetales довольно древний. М. М. Ильин в своих многочисленных работах, посвященных природе пустынных растений, неоднократно упоминает о том, что вельвичия является одним из растений, появившихся на грани начала развития покрытосеменных и, возможно, что именно «правельвичия», многочисленными видами пыльцы которой встречаются еще в пермских отложениях, и была такой переходной формой от голосеменных к покрытосеменным.

В мезозойских лесах, по данным М. М. Ильина, уже существовали представители рода *Gnetum*. Пыльца же вельвичии отмечается в большом разнообразии в юре и мелу. В третичных отложениях уже встречаются различные виды *Ephedra*.

К сожалению, находки макроскопических остатков *Ephedra* чрезвычайно редки. Вызвано последнее скорее всего тем, что развитие свое вельвичия и эфедра в основном подучили при аридном, пустынном режиме, а в осадочных отложениях аридного климата трудно ожидать большого количества сохранившихся растительных остатков. Поэтому особенно большое значение приобретают данные спорово-пыльцевого анализа, так как пыльца пустынных травянистых и кустарниковых растений прекрасно сохраняется в осадках, сформировавшихся в условиях континентального режима. Если согласиться с данными В. А. Вахрамеева (1947) о связи развития покрытосеменных с возникновением аридного пояса пустынь, простиравшегося от Африки до Центральной Азии в конце верхней юры, то класс гнетовых, в частности вельвичия, и должен был явиться первым представителем переходных форм от голосеменных к покрытосеменным.

В настоящее время вельвичия является вымирающим родом; в современной флоре сохранился только один ее вид — *Welwitschia mirabilis* Hook., с ограниченным ареалом в Южной Африке.

Пыльца *Ephedra* появляется в виде единичных зерен и видов, но родственных современной флоре, среди общего комплекса верхнеолигоценовых спектров, несколько увеличивается количественно в миоцен — плиоцене и достигает максимального развития в голоцене.

<sup>1</sup> Аппарат, обеспечивающий аккомодацию зерна при изменении влажности.

Род *Ephedra* продолжает свое развитие и в настоящее время, имея довольно широкий, сильно разомкнутый ареал — от южных широт субтропиков и пустынь до степных районов Сибири. Во флоре Казахстана, в особенности в его центральных и южных областях, *Ephedra* в настоящее время играет значительную роль. Эта флора включает четыре вида *Ephedra* (Павлов, 1947): *E. distachya* L. — наиболее типичный представитель ковыльных и ковыльно-типчаковых степей; *E. equisetina* Vge. — горностепной вид на южных каменистых склонах кустарникового и лесного пояса; *E. intermedia* Schrenk. et C. A. Key. — приуроченная к пустыням и пустынно-степному типу ассоциаций Центрального Казахстана, и *E. lanatolepis* Schrenk. — также растение песчаных пустынь Южного Казахстана. Других представителей класса Gnetales в современной флоре Казахстана нет.

СЕМ. WELWITSCHIAEAE — ВЕЛЬВИЧИЕВЫЕ  
*Welwitschia protomitribilis* sp. nov. (pollen)

Табл. XVII, рис. 2  
II  
Препарат № 170 K

Г о л о т ы: Павлодарское Прииртышье, близ г. Павлодара, скв. 1, обр. 258, слюдястые глины подглауконитовой толщи (датский (?) ярус). Диаметр пыльцевого зерна по длинной оси около 50 м, по малой оси 30 м; длина тела 42—47 м. Пыльцевое зерно удлиненно-эллипсоидальной формы. Тело снабжено двенадцатью продольными глубокими клиновидными в поперечном сечении бороздами (не зародышевыми), выклинивающимися к вершинам зерна (к полюсам его). Эти бороздки образованы высокими складками — ребрами экзины. На дне бороздок проходит извилистые линии с ответвлениями на их боковые стенки (табл. XVII, рис. 2). Эти извилистые линии подобны гармогатным извилинам пыльцы *Ephedra*. Экзина несколько отслаивается на концах тела (на полюсах его), образуя утолщения, подобные воздушным мешкам у пыльцы Pinaceae, но сильно редуцированные.

Строение тела пыльцы *Welwitschia* весьма близко к строению тела *Ephedra*. Наличие же выростов экзины в виде зачаточных (или редуцированных?) воздушных мешков несколько сближает ее с хвойными.

Некоторую аналогию по морфологическим признакам можно провести между видом *Welwitschia* из палеогена Павлодарского Прииртышья и видом того же рода, выделенным А. А. Чигуревой (1951) из эоценовых отложений Западного Казахстана. Отличается прииртышский вид от западно-казахстанского более ясно выраженным отслоением экзины и несколько более суженной веретенообразной формой тела. От *W. macrolobata* Volch. из бассейна р. Эмбы (готтервиевские глины) наш вид отличается большими размерами воздушных мешков. От *W. Alekhini* Volch. (Северный Урал, опоконидные песчаники — мел) отличается меньшими размерами и более суженным телом.

Пыльца современного вида *W. mirabilis* Hooк. описана у Эрдмана (Erdman, 1943) и Зауер (1950). По своему строению пыльцевое зерно современной вельвичии близко к ископаемой за исключением более округлой формы тела и меньшего размера воздушных мешков.

М е с т о а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: меловые отложения (средний и верхний мел) Западного Казахстана; верхний мел и горизонты, пограничные с палеоценом в Северном Казахстане. Эоцен (низы опоконидной толщи морского палеогена) Западного Казахстана и эоценовые отложения Западного Казахстана в районе Бай—Хомга.

Ископаемые остатки, кроме пыльцы в третичных и меловых отложениях, еще неизвестны.

СЕМ. EPHEDRACEAE — ХВОЙНИКОВЫЕ

Род *Ephedra* — Хвойник

*Ephedra eocenipites* Wodehouse

Табл. XVII, рис. 3  
II  
Препарат № 170 K

Величина пыльцевого зерна от 58 до 75 м. Зерно веретенообразно-эллипсоидальное, очертание в боковой проекции удлиненно-овальное с заостренными вершинами. От полюса к полюсу проходят продольные глубокие складки экзины. Количество складок нечетное — 5 или 7. Ребровидные борозды складок в зависимости от разбухания пыльцы могут быть узкими или широкими. Между бороздами складок образуются глубокие борозды (по-видимому, это не зародышевые борозды) с клиновидным поперечным сечением. По дну борозд проходит извилистая трещинка (гармогат), подобная трещинкам у современных видов *Ephedra*. Экзина имеет мелкозернистую структуру, что изображается в виде мелкоточечного рисунка на поверхности зерна.

Пыльца имеет полное сходство с пыльцой *E. eocenipites* Wodehouse, описанной из эоценовых отложений Грин-Ривер (Wodehouse, 1932, табл. на стр. 499, фиг. 20). Пыльца ископаемого вида *Ephedra* имеет большое сходство с пыльцой ныне живущего вида *E. glauca*, описанной Вудхаузом (1933), а также с пыльцой ныне живущего вида *Ephedra strobilifera* Vunge, описанной автором (1954).

М е с т о а х о ж д е н и е: Павлодарское Прииртышье, пос. Парамоновка, скв. 1, подглауконитовые глины датского (?) яруса (мел — палеоцен).

Р а с п р о с т р а н е н и е: эоцен Северной Америки; верхний мел и эоцен Северного Казахстана; мел и палеоген (низы) Западного Казахстана.

В настоящее время *E. strobilifera* Vunge распространена в плоскогорных частях Центральной Азии на летучих песках.

*Ephedra* aff. *Przewalskii* Stapf.

Табл. XVII, рис. 4, 5  
II  
Препарат № 198 K

Длина пыльцевого зерна около 50 м, ширина (по малой оси) 32—48 м. Зерно эллипсоидальное, очертание в боковой проекции овальное со слегка заостренными вершинами. Тело снабжено продольными желобками (бороздами), разделенными складками — ребрами.

Экзина однослойная; толщина экзины значительно уменьшается на поверхности борозд и увеличивается на вершинах складок. При этом вершины или ребра складок раздвоены в виде борозды, что хорошо различается при полярном положении зерна. По-видимому, борозды образованы на поверхности ребер и являются зародышевыми, бороздоподобные же углубления между складками экзины — лишь приспособление пыльцевого зерна к аридным условиям. При засухе эти складки способствуют наибольшему сжиманию зерна, при наступлении периодических дождей — разбуханию его, без разрывов экзины. По наблюдениям В. В. Зауер, пыльцевое зерно *Ephedra* может при разбухании принять форму правильного

эллипса за счет вывернувшихся и расправившихся складок и борозд между ними.

В работе М. П. Гричук (1954) приводится описание современного вида *Ephedra Przewalskii* Stapf., весьма близкого по морфологическим признакам к нашему ископаемому виду. М. П. Гричук отмечает, что основное отличие пыльцы *E. Przewalskii* от прочих видов заключается в том, что она снабжена 20 бороздами, причем 10 из них глубоким, почти доходящим до полюсов (при положении зерна в полярной проекции), а 10 — более короткими и менее глубокими, поэтому «дольки» расположены парами. Этот признак — добавочные мелкие бороздки на ребрах складок — настолько своеобразен, что может служить основанием для того, чтобы вид *E. Przewalskii* и описанный нами ископаемый вид считать близкими.

Место нахождения: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз, обл. 6, глины с отпечатками растений, вторая континентальная свита (верх среднего олигоцена).

*Ephedra cf. distachya* L.

Табл. XVII, рис. 6,7  
Препарат № 259  $\frac{3}{K}$

Длина пыльцевого зерна (по длинной оси) 58—70 м, ширина (по малой оси) 40—50 м, в зависимости от того, находится ли зерно в сжатом или разбухшем состоянии. Очертание пыльцевого зерна в боковой проекции удлиненно-овальное. Зерно имеет от 6 до 9 борозд и столько же узких ребрышек. Гармогат выражен довольно четко, ветвистый, но веточки значительно короче и менее разветвляются, чем у пыльцы *E. cf. intermedia*.

Наш ископаемый вид строением гармогата, бороздок и ребрышек сходен с пыльцой современного вида *E. distachya*, описанного М. П. Гричук (1954). Отличается от него большей величиной и не столь ясно выраженным гармогатом.

Место нахождения: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз, песчано-гравийные отложения четвертой свиты.

*Ephedra aff. intermedia* Schr.

Табл. XVII, рис. 8, 9  
Препарат № 259  $\frac{3}{K}$

Виды, близкие по морфологическим признакам, упоминаются в следующих работах:

1940. *Ephedra Thiergart.* Die Mikropaläontologie als Pollenanalyse im Dienst der Braunkohlenforschung, Taf. IV, Fig. 4.  
1949. *Cf. Ephedra Thiergart.* Der stratigraphische Wert mesozoischer Pollen und Sporen, Taf. IV/V, Fig. 39.

Длина пыльцевого зерна (по большей оси) 65—70 м, ширина (по малой оси) 30—40 м. Зерно удлиненно-эллипсоидальное, очертание в боковой проекции удлиненно-овальное, в полярной проекции — четырех-, пяти- или шестигонная звездчатая фигура. Пыльцевое зерно снабжено четырьмя, пятью или шестью складками и, соответственно, четырьмя, пятью или шестью бороздами. По внешнему краю каждой складки расположены узкие углубления — зародышевые бороздки (?).

Экзина однослойная, мелко-плоскобугорчатая. Контур ребровидных краев складок часто имеет извилистый рисунок. По дну и стенкам борозд

между складками хорошо видна извилистая и ветвистая линия гармогата.

Пыльца современного вида *Ephedra intermedia* Schr., описанная М. П. Гричук (1954), имеет ветвистый, часто дважды ветвистый гармогат. Размер зерна современного вида около 60 м. Ископаемый вид отличается от современного большей величиной и менее ветвистым гармогатом. Последнее может зависеть не столько от различия в строении, сколько от сохранности зерна и степени его минерализации.

Пыльца *E. aff. intermedia* имеет также большое сходство и с пыльцой современного вида *E. strobilacea* В и п г е. Отличается ископаемая пыльца от этого вида меньшим количеством борозд и ребрышек и большим размером.

Место нахождения: Павлодарское Прииртышье, бассейны р. Чидерты и оз. Кемир-Туз, песчано-глинистые отложения четвертой свиты континентальных отложений верхнего олигоцена.

Распространение: пыльца *Ephedra aff. intermedia*, не определенная до вида и обозначаемая *Ephedra* sp., неоднократно отмечается в списках пыльцевых спектров Казахстана от олигоцена до неогена включительно.

Современный вид — *E. intermedia* Schr. — типичный пустынный и пустынно-степной вид Центрального и Южного Казахстана. Селится на каменистом и песчаном грунте в ассоциациях полных пустынь.

*Ephedrites trinata* sp. nov. (pollen)

Табл. XVII, рис. 10, 11, 12  
Препарат № 146  $\frac{H}{K}$

Голотип: Павлодарское Прииртышье, бассейн р. Чидерты, слюдяные глины с растительными остатками, вторая свита континентальных отложений (олигоцен).

Длина пыльцевого зерна (по длинной оси) 35—40—50 м, ширина (по малой оси) 25—28 м.

Пыльцевое зерно удлиненно-эллипсоидальное с тремя высокими складками — ребрами, между которыми проходят глубокие борозды с извилистой трещиной по дну (гармогат). Зародышевые борозды расположены на поверхности складок, что хорошо видно при расположении зерна в полярной проекции.

По внешнему облику зерно должно быть отнесено к роду *Ephedra*, несмотря на то, что количество борозд и складок у ископаемой формы значительно меньше, чем обычно у пыльцевых зерен известных нам современных видов *Ephedra*. Аналога среди современных видов нет.

Место нахождения: см. голотип.  
Распространение: олигоценные отложения Павлодарского Прииртышья.

СЕМ. GNATACEAE — ГНАТОВЫЕ

*Cnetumites* sp. (pollen)

Табл. XVII, рис. 13  
Препарат № 14  $\frac{3a}{K}$

Пыльцевое зерно сферическое, беспогоное, безбороздное. Диаметр пыльцевого зерна около 18 м. Экзина двухслойная (?), толщина ее около 2 м. Скульптура мелкобугорчатая. Бугорки поставлены неплотно, иногда они остроконечные и тогда поверхность можно назвать мелкошиповатой. Контур зерна мелковолнистый. Поверхность крупноточечная. Не

которые экземпляры имеют трещину и тогда могут быть приняты за пыльцу Cupressaceae. Пыльца ископаемого вида весьма близка по строению к современному виду *Gnetum Gneton*, описанному В. В. Зауер (1950), но, несмотря на это сходство, за ископаемым видом оставляется только родовое название, так как в данное время пыльца *Gnetum* современных видов еще не изучена, а этих видов 25. Вполне возможно, что впоследствии будут известны пыльцевые зерна современных видов, гораздо более близкие к нашей форме, чем *Gnetum Gneton* L.

Местонахождение: Северное Приаралье, гора Бос-Бие, саксаульская свита (верхний эоцен).

Распространение: пыльца *Gnetum* и подобная ей, а также растительные остатки рода *Gnetum* отмечены в палеоценовых отложениях Приаралья и Нижнего Поволжья. Автором пыльца *Gnetum* (?) обнаружена в нижнепалеоценовых отложениях Северного Приаралья и Павлодарского Прииртышья.

## ЛИТЕРАТУРА

- [Аби х Г. В.] A b i s c h N. W. Beiträge zur Paläontologie des Asiatischen Russlands, T. I. Tertiärvorstellungen aus der Umgehung der Aralsee. [Материалы по палеонтологии Азиатской России. Т. I. Третичные окаменелости из окрестностей Аральского моря]. Mem. Acad. Sci., VI, ser. sci. mathem. et phys., 7 (9), St-Petersb., 1858.
- Абузирова Р. Я. Ископаемая флора Тауыр-Сора по данным спорово-пыльцевого анализа — Ботан. журнал, 1953, 37.
- Абузирова Р. Я. Третичные спорово-пыльцевые споры Тургая и Павлодарского Прииртышья. — Автореферат диссертации. Казахский гос. ун-в., 1954.
- Абузирова Р. Я. 2. Ископаемая флора Чинка Науша (Тургай) по данным спорово-пыльцевого анализа. — Ученые зап. Казанск. гос. ун-в., биология, 1954, 14, вып. 4.
- Алехин В. В. География растений. Учпедгиз, 1950.
- Архангельский А. Д. Геологическое строение СССР. Европейская и среднеазиатская части. ОНТИ, 1932.
- Арабашина В. Н. Микропалеоботанические остатки в мезозойских отложениях Тургай. — Изв. Акад. наук Казахской ССР, серия геол., 1951, вып. 13.
- Баранов В. И. Этапы развития флоры и растительности СССР в третичном периоде. — Ученые зап. Казанск. гос. ун-в. им. В. И. Ульянова-Ленина, 1948, 108, кн. 3. Ботаника, вып. 7.
- Баранов В. И. Новая ископаемая флора из третичных и верхнемеловых отложений западного склона Мугоджар. — Докл. Акад. наук СССР, новая серия, 1953, 92, № 5.
- Баярунас М. В. Отчет о раскопках в Тургайской области. Приложение к годичному отчету Геол. и минерал. музея Акад. наук, 1915.
- Баярунас М. В. К геологии Тургайского района Казахстана. — Труды Палеозол. ин-та Акад. наук СССР, 1936, 5.
- Беляева Е. И. Каталог местонахождений третичных наземных млекопитающих на территории СССР. — Труды Палеонтол. ин-та Акад. наук СССР, 1948, 15, вып. 3.
- Бойцова Е. П. и Покровская И. М. Материалы по стратиграфии континентальных олигоценовых и миоценовых отложений Тургайской впадины. В кн.: Материалы по палинологии и стратиграфии. М., Гостеоиздат, 1954.
- Болховитина Н. А. Спорово-пыльцевой состав отложений алта и альба центральной части Русской платформы. — Вестн. МОИП, отд. геол., 1951, 26, № 5.
- Болховитина Н. А. Пыльца хвойных из мезозойских отложений и ее значение для стратиграфии. — Изв. Акад. наук СССР, серия геол., 1952, № 5.
- Болховитина Н. А. Спорово-пыльцевая характеристика меловых отложений центральных областей СССР. — Труды Инст. геол. наук Акад. наук СССР, 1953, вып. 145, геол. серия (№ 16).
- Бориски А. Л., Беляева Е. И. Местонахождение третичных наземных млекопитающих на территории СССР. — Труды Палеонтол. инст. Акад. наук СССР, 1948, 15, вып. 3.
- Борсук М. К. К изучению тургайской третичной флоры. — Труды Центр. научно-исслед. геол.-развед. инст., 1935, вып. 37.
- Борцов И. Материалы для ботанической географии Арало-Каспийского края. — Зап. Акад. наук, 1885, № 1, прил.
- Брукс К. Климаты прошлого. Пер. с англ. В. Г. Левинсона. М., Изд. иностр. лит., 1952.
- Васильевская Н. А. О полтавской ксерофитной флоре Туркмении. — Докл. Акад. наук СССР, 1949, 18, № 4.
- Васильченко И. Г. Материалы по истории происхождения флоры Ердыка. — Ботан. журнал, 1950, № 3.

- Вахрамеев В. А. Континентальный и солоноватоводный олигоцен Северного Приаралья.—Отд. геол.-геогр. наук Акад. наук СССР. Рефераты научно-исслед. работ за 1940 г. М., Изд. Акад. наук СССР, 1941.
- Вахрамеев В. А. Роль геологической обстановки в развитии и распространении покрывающих в меловые века.—Бюлл. МОИП, серия геол., 1947, 22, вып. 6.
- Вахрамеев В. А. Континентальные и солоноватоводные отложения олигоцена Северного Приаралья и северных чинлов Устьурта.—Изв. Акад. наук СССР, серия геол., 1949, № 4.
- Вахрамеев В. А. О состоянии советской ботаники.—Изв. Акад. наук СССР, серия биол., 1953, № 4.
- Вялов О. С. О возрасте чеганских глин на Устьурте.—Изв. Главн. геол.-развед. упр., 1930, 49, № 4.
- Вялов О. С. Возраст корбулевых слоев Приаралья.—Бюлл. МОИП, отд. геол., 1945, 20, вып. 3—4.
- Вулф Е. В. Историческая география растений. М.—Л., Изд. Акад. наук СССР, 1944.
- Высоцкий Н. К. Сообщение о физико-географических изменениях Западной Сибири в третичную и послетретичную эпохи.—Зап. СПб., мин. общ., 2-я серия, 1868, ч. 3.
- Гегер О. H. Pflanzendrucke aus der Kirgisensteppe. In: A. B. H. W. Beiträge zur Paläontologie des asiatischen Russlands. T. I. Tertiarversteinerungen aus der Umgebung der Aralsee. Mémoires Acad. Sci., ser. sci. mathem. et phys., 1858.
- Герасимов И. П. Основные черты развития современной поверхности Турана.—Труды Инст. геогр. Акад. наук СССР, 1937, вып. 25.
- Герасимов И. П. Основные вопросы геоморфологии и палеогеографии Западно-Сибирской низменности.—Изв. Акад. наук СССР, серия геогр., 1940, № 5.
- Гладков А. Н. и Самойлов С. Р. Морфология пылин некоторых видов тропических и арктических субтропических растений. В кн.: Пустыни СССР и их освоение, т. II. М., Изд. Акад. наук СССР, 1954.
- Гричук М. П. Распространение рода *Ephedra* в четвертичном периоде на территории СССР в связи с историей ландшафтов. В кн.: Материалы по палеогеографии, вып. 1. М., Изд. Моск. гос. ун-ва, 1954.
- Громов В. И. Элементы африкано-азиатской фауны в четвертичных отложениях Сибири.—Бюлл. Информ. бюро Ассос. по изуч. четвертич. периода Европы, 1932, № 2.
- Громов В. И. Остатки млекопитающих из четвертичных отложений в низовьях Оби и Иртыша.—Бюлл. Моск. общ. испит. природы, новая серия, отд. геол., 1937, 15, вып. 2.
- Губина З. П. Описание пылин видов рода *Tilia* L., произрастающих на территории СССР.—Труды Инст. геогр. Акад. наук СССР, 1952. Материалы по геоморфологии и палеогеографии СССР, вып. 7.
- Дерягин Кустарники СССР. Т. I. Голосеменные. М.—Л., Изд. Акад. наук СССР, 1949.
- Дробов В. П. Загадки саксаула.—Журнал Русск. ботан. общ., 1923, 6.
- Заклянская Е. Д. 1. Материалы к истории флоры и растительности палеогена Северного Казахстана в районе Павлодарского Прииртышья.—Труды Инст. геол. наук Акад. наук СССР, 1953, вып. 141, геол. серия (№ 58).
- Заклянская Е. Д. 2. Описание пылин и спор некоторых видов растений Полярной тундры. Описание некоторых видов пылин и спор, выделенных из третичных отложений Пасековского нагара Воронешской области.—Труды Инст. геол. наук Акад. наук СССР, 1953, вып. 142, геол. серия (№ 59).
- Заклянская Е. Д. 3. Спорно-пыльцевые спектры эоценовых отложений Северного Приаралья.—Докл. Акад. наук СССР, 1953, 92, вып. 5.
- Заклянская Е. Д. 4. Спорно-пыльцевые спектры морского олигоцена Северного Приаралья.—Докл. Акад. наук СССР, 1953, 92, вып. 6.
- Заклянская Е. Д. 5. Материалы к истории палеогеновой и неогеновой флоры Северного Кавказа. Вопросы петрографии и минералогии. Т. I. Изд. Акад. наук СССР, 1953.
- Заклянская Е. Д. 6. Морфология пылин некоторых видов пустынных растений. В кн.: Пустыни и их освоение, т. II. М., Изд. Акад. наук СССР, 1954.
- Зауер В. В. Морфология пылин голоценовых. В кн.: Пыльцевая анал. М., Госгеолгиздат, 1950.
- Зауер В. В. Ископаемые виды рода *Cedrus* и их значение для стратиграфии континентальных отложений. В кн.: Материалы по палеонтологии и стратиграфии. М., Госгеолгиздат, 1954.
- Ильин М. М. Реферат работы К. П. Корovina Очерки по истории развития растительности Средней Азии.—Сов. ботаника, 1936, № 2.
- Ильин М. М. К происхождению флоры пустынь Средней Азии.—Сов. ботаника, 1937, № 6.

- Ильин М. М. Реликтовые элементы широколиственных лесов во флоре Сибири и их возможное происхождение. В кн.: Проблемы реликтов по флоре СССР. (Тезисы совещания). Вып. 2. М.—Л., Изд. Акад. наук СССР, 1938.
- Ильин М. М. О некоторых взаимосвязях во флоре пустынь Средней Азии и Америки.—Сов. ботаника, 1945, № 6.
- Ильин М. М. Некоторые итоги изучения пустынь Средней Азии. В кн.: Материалы по истории флоры и растительности. Вып. 2. М.—Л., Изд. Акад. наук СССР, 1946.
- Ильин М. М. Природа пустынного растения (зримофита). Пустыни и их освоение. Результаты совещания по изучению и освоению пустынь (с 25 по 29 февраля 1948 г.). М.—Л., Изд. Акад. наук СССР, 1950.
- Кассин Н. Г. Краткий геологический очерк Северо-Восточного Казахстана.—Труды Инст. геол.-развед. объедин., 1931, вып. 165.
- Кассин Н. Г. Новые данные о строении Западно-Сибирской низменности, Тургайской и Иртышской впадин.—Пробл. сов. геологии, 1937, № 7.
- Кассин Н. Г. Материалы по палеогеографии Казахстана. Алма-Ата, Изд. Акад. наук Казахской ССР, 1947.
- Колесников В. В. Верхний миоцен. В кн.: Стратиграфия СССР, т. 12. М.—Л., Изд. Акад. наук СССР, 1940.
- Корнилова В. С. 1. Новые данные о флоре гидротермальных слоев Тургай.—Изв. Акад. наук Казахской ССР, серия ботан., 1950, вып. 7.
- Корнилова В. С. 2. Новые материалы к третичной флоре Тургай.—Вестн. Акад. наук Казахской ССР, 1950, № 12 (69).
- Корнилова В. С. 1. Континентальная третичная флора Тортмылы.—Ученые зап. Казанск. ун-ва, им. С. М. Кирова, 1952, 15. Геология и география, вып. 1.
- Корнилова В. С. 2. К характеристике флоры болотных слоев Тургай.—Изв. Акад. наук Казахской ССР, 1952, серия биол., вып. 9.
- Корнилова В. С. 3. О полтавской флоре Казахстана.—Докл. Акад. наук СССР, геология, 1955, 104, № 1.
- Корнилова В. С. и Лавров В. В. О находке третичной ксерофитной флоры в Тургае и ее стратиграфическое положение.—Вестн. Акад. наук Казахской ССР, 1949, № 5 (37).
- Коровин Е. П. Очерки по истории развития растительности Средней Азии.—Бюлл. Средне-Азиатского гос. ун-ва, 1935, № 20(4).
- Коровин Е. П. Растительность Средней Азии и Южного Казахстана. Ташкент.—Изд. Казахского филиала Акад. наук СССР, 1939.
- Краснов А. К. Опыт истории развития флоры южной части Восточного Тянь-Шаня.—Изв. Русск. геогр. общ., 1888, 7.
- Красенинников И. М. Растительный покров Киргизской республики.—Труды Общ. науч. Киргизск. края, вып. 6 (т. V, вып. 2). Оренбург, 1925.
- Кривофорович А. Н. Новые данные к верхнетретичной флоре Северо-Западной Сибири.—Изв. Геол. ком., 1927, 16, № 7.
- Кривофорович А. Н. 1. Новые данные к вопросу о третичной и меловой флоре Арало-Каспийского края и ее отношении к ископаемой флоре Средней Азии. Отчет о работе почвенно-ботанического отряда Казахской экспедиции Академии наук СССР, 1930, 4, вып. 2.
- Кривофорович А. Н. 2. Основные черты развития третичной флоры Азии.—Изв. Главн. ботан. сада РСФСР, 1930, 29, вып. 3—4.
- Кривофорович А. Н. 1. Основные пути развития флоры Азии.—Ученые зап. Ленингр. гос. ун-ва, 1936, № 9, серия геол.-почв.-геогр., вып. 2.
- Кривофорович А. Н. 2. Развитие ботанико-географических провинций северного полушария с конца мелового периода.—Сов. ботаника, 1936, № 3.
- Кривофорович А. Н. Ботанико-географическая и климатическая зональность в конце палеозойской эры.—Природа, 1937, № 2.
- Кривофорович А. Н. Миоценовая флора Украины и ее связь через Урал с третичной флорой Азии.—Сборник памяти А. В. Фомина. Киев, Изд. Акад. наук Украинской ССР, 1938.
- Кривофорович А. Н. Характеристика третичных флор Казахстана. В кн.: Геология СССР, т. 20. Л., Госгеолгиздат, 1940.
- Кривофорович А. Н. Палеоботаника. Изд. 3. М.—Л., Госгеолгиздат, 1941.
- Кривофорович А. Н. Происхождение и развитие мезозойской флоры. В кн.: Труды юбилейной сессии Ленингр. гос. ун-ва, 1946.
- Кривофорович А. Н. Развитие ботанико-географических областей северного полушария с начала третичного периода. В кн.: Вопросы геологии Азии, т. II. Изд. Акад. наук СССР, 1955.
- Кривофорович А. Н. и Павлов И. В. Новые материалы к третичной флоре Тургайской области.—Изв. Акад. наук, серия 6, 1915, 9.
- Кульгасов М. В. Этюды по формированию растительного покрова жарких пустынь и степей Средней Азии. В кн.: Материалы по истории флоры и растительности СССР, вып. 2. М.—Л., Изд. Акад. наук СССР, 1946.
- Курьянова Л. А. О пылеце одноклассных растений.—Сов. ботаника, 1945, 13.



- Кемпбелл Д. Х. Ботанические ландшафты земного шара. Очерки по географии растений. М., Изд. иностр. лит., 1948.
- Лавренко Е. М. Геоботаника. Вып. 5. М.—Л., Изд. Акад. наук СССР, 1948.
- Лавренко Е. М. Возраст ботанических областей Евразии. — Изв. Акад. наук СССР, серия геогр., 1951, № 2.
- Лавров В. В. К стратиграфии континентального палеоген-неогена Тургайской впадины. — Изв. Акад. наук Казахской ССР, серия геол., 1949, вып. 9.
- Лавров В. В. О единой стратиграфической схеме для континентальных третичных отложений Приаралья, Тургай и юга Западной Сибири. — Вестн. Акад. наук Казахской ССР, 1951, № 1 (70).
- Лавров В. В. Краткий обзор континентальных третичных формаций Тургай и юга Западной Сибири. — Вестн. Акад. наук Казахской ССР, 1953, № 6 (99).
- Лавров В. В. О разнице стратиграфических схем континентальной третичной серии в Казахстане и Западной Сибири. — Вестн. Акад. наук Казахской ССР, 1955, № 6.
- Лавров В. В. и Соболева Е. П. Некоторые итоги изучения континентальных третичных толщ Тургайской впадины. — Вестн. Акад. наук Казахской ССР, 1948, № 12 (48).
- Малосов В. П. Растительность причерноморских стран (Эвксинской провинции Средиземноморья), ее происхождение и связь. Геоботаника, вып. 4. Труды Ботан. инст. Акад. наук СССР, 1940, 3.
- Малыкина В. С. Определитель спор и пыльцы. Юра — мел. — Труды ВНИГРИ, новая серия, вып. 33. М.—Л., Гос. тех. изд. нефт. и горно-топлив. лит., 1949.
- Матвеева О. В. К истории растительности четвертичного периода в Павлодарском Прииртыше. — Труды Инст. геол. наук Акад. наук СССР, 1953, вып. 141. геол. серия (№ 58).
- Моносова М. Х. Описание пыльцы полевой, произрастающей на территории СССР (для целей пыльцевого анализа). — Труды Инст. геогр. Акад. наук СССР, 1950, вып. 46.
- Моносов М. Х. Описание пыльцы семейства маревых. — Труды Инст. геогр. Акад. наук СССР, 1952. Материалы по геоморфологии и палеогеографии СССР, вып. 7.
- Моносова С. М. и М. Х. К вопросу о морфологии пыльцы некоторых видов *Pinus*. — Ботан. журнал, 1949, 4.
- Мчедlishvili П. А. К вопросу биостратиграфии и палеоботаники тургайских флор Казахстана. (Тезисы диссертации). Тбилиси, Изд. Акад. наук Грузинской ССР, 1948.
- Мчедlishvili П. А. 1. К вопросу о параллелизации континентальных третичных отложений среднего течения р. Ульдо-Ян со смежными районами Казахстана. — Вестн. Акад. наук Казахской ССР, 1949, № 7 (52).
- Мчедlishvili П. А. 2. О тургайской флоре Казахстана. — Докл. Акад. наук СССР, 1949, 66, № 3.
- Мчедlishvili П. А. 1. О возрасте корбулевых слоев Закавказья и Северного Приаралья. — Докл. Акад. наук СССР, 1950, 70, № 1.
- Мчедlishvili П. А. 2. Палеоботанические данные в связи со стратиграфией континентальных третичных отложений Казахстана. — Изв. Акад. наук СССР, серия геол., 1950, № 6.
- Мчедlishvili П. А. О некоторых принципиальных вопросах палеоботаники как раздела палеоботаники. — Изв. Акад. наук СССР, серия биол., 1952, № 5.
- Намова С. Н. Споры и пыльца углей СССР. — Труды XVII сессии Международ. геол. конгр., 1937, М., ОНТИ, 1939.
- Нейбурт М. Ф. 1. Ископаемая растительность Зайсанской котловины. — Природа, 1928, № 11.
- Нейбурт М. Ф. 2. О материалах Амурской экспедиции. — Докл. Акад. наук СССР, 1928, № 20.
- Никифорова К. В. Геология и палеогеография Северного и Центрального Казахстана. Труды Инст. геол. наук Акад. наук СССР, 1953, вып. 141, геол. серия (№ 59).
- Овечкин Н. К. Среднелигосеновые отложения Тургайской впадины и Северного Прииртышья. Автореферат. Л., Изд. Вес. геол.-развед. инст., 1951.
- Овечкин Н. К. Отложения среднего палеогена Тургайской впадины и Северного Приаралья. М., Гос. научно-техн. изд. лит. по геологии и охране недр, 1954.
- Овчинников И. И. К истории растительности юга Средней Азии. — Сов. ботаника, 1940, № 3.
- Орлов Ю. А. 1. Некоторые данные о третичных и послетретичных отложениях северной окраины Киргизской горной страны. — Изв. Глав. геол.-развед. упр., 1930, 49, № 10.
- Орлов Ю. А. 2. Раскопки фауны гиппариона на Иртыше. — Природа, 1930, № 1.
- Орлов Ю. А. Новые местонахождения третичных млекопитающих в Казахстане. — Природа, 1937, № 9.

- Орлов Ю. А. Местонахождение третичных млекопитающих у Аральского моря. — Природа, 1939, № 5.
- Орлов Ю. А. Третичные млекопитающие и местонахождение их остатков. — Труды Палеонтолог. инст. Акад. наук СССР, 1941, 7, вып. 3.
- Орлов Ю. А. Новые находки ископаемых млекопитающих в Сибири. — Природа, 1949, № 9.
- Павлов Н. В. Растительное сырье Казахстана (растения, их вещества и использование). М., Изд. Акад. наук СССР, 1947.
- Палеонтология СССР. Прил. к т. 12: Криштофович А. Н. Каталог растений ископаемой флоры СССР. М.—Л., Изд. Акад. наук СССР, 1941.
- Палибин И. В. Заметки о третичных растениях Киргизской степи. СПб., 1904.
- Палибин И. В. Ископаемые растения берегов Аральского моря. — Изв. Туркестан. отд. Русск. геогр. общ., 1906, 4, вып. 7.
- Палибин И. В. К изучению ископаемой флоры Амурса. — Труды Ботан. инст. Акад. наук СССР, серия 1, 1933, вып. 1.
- Палибин И. В. Этапы развития флоры приаральских стран во времени мелового периода. — Сов. ботаника, 1935, № 3.
- Покровская И. М. Основные этапы в развитии растительности на территории СССР в третичное время. — Ботан. журнал, 1954, 39.
- Покровская И. М., Бойцова Е. П. Материалы по стратиграфии континентальных олигоценных и миоценовых отложений Тургайской впадины. В кн.: Материалы по палеонтологии и стратиграфии. М., Гос. научно-техн. изд. лит. по геологии и охране недр., 1954.
- Полов М. Г. Основные черты истории развития флоры Средней Азии. — Бюлл. Средне-Азиатского гос. ун-ва., 1927, вып. 15.
- Полов М. Г. Основные периоды формирования и иммиграции во флору Средней Азии в век антофитов и реликтовые типы этой флоры. В кн.: Проблемы реликтов во флоре СССР. (Тезисы совещания, вып. 1). М.—Л., Изд. Акад. наук СССР, 1938.
- Пояркова А. И. Флора гидроретривных слоев Центрального Казахстана. — Труды Геол. инст. Акад. наук СССР, 1932, 2.
- Пояркова А. И. Новые материалы к третичной флоре Северного Приаралья. — Труды Инст. геол. инст., 1935, вып. 39. Палеоботаника, сб. № 2.
- Пыльцевой анализ. Под ред. А. Н. Криштофовича. М., Госгеолоиздат, 1950.
- Сладков А. П. Определение видов *Lycopodium* L. и *Selaginella* Sprng. по спорам и микроспорам. Труды инст. геогр. Акад. наук СССР, 1951, вып. 50.
- Сладков А. П. О морфологических признаках пыльцевых зерен вересковоцветных. — Докл. Акад. наук СССР, 1953, 92, № 5, Ботаника.
- Сладков А. П. Морфологическое описание пыльцы палеогеновых Туркмении (для целей пыльцевого анализа). — Труды Инст. геогр. Акад. наук СССР, 1954, 61.
- Соболева Е. П. Новые данные к стратиграфии и литологии третичных континентальных толщ центральной части Тургайской впадины. — Вестн. Акад. наук Казахской ССР, 1950, № 12 (69).
- Сукачев В. Н. Иртышская флорапалеонтологическая экспедиция. Научно-популярный очерк экспед. Л., Изд. Акад. наук СССР, 1931—1932.
- Сукачев В. П. Исследования четвертичных отложений Нижне-Иртышского края. В кн.: Экспедиция Всесоюзной Академии наук, 1932. Л., Изд. Акад. наук СССР, 1933.
- Сукачев В. Н. *Brauneria purpurea* Мсх. в верхнетретичных отложениях Западной Сибири. — Докл. Акад. наук СССР, 1935, 1, № 2—3.
- Сьюрд А. Ч. Века в растении. Обзор растительности прошлых геологических периодов. М.—Л., ОНТИ, 1936.
- Титов И. А. Взаимодействие растительных сообществ и условий среды. М.—Л., Изд. «Сов. наука», 1952.
- Унадаев-Дгебуадзе М. Д. Зопеновая флора Южного Урала. — Труды Геол. инст. Акад. наук Грузинской ССР, серия геол., 1948, № 4/9.
- Формозова Л. Н. Стратиграфическое положение и возраст железорудных слоев Северного Приаралья. — Бюлл. МОИП, отд. геол., 1949, 24, вып. 4.
- Формозова Л. Н. Косая слоистость и происхождение третичного материала Кутабулакского свята Северного Приаралья. — Докл. МОИП, отд. геол., 1951, 26, вып. 3.
- Хонацкий Л. И. Нахождение остатков морской черепашки в олигоценовых отложениях Приаралья. — Докл. Акад. наук СССР, новая серия, 1945, 49, № 1.
- Чигурьева А. А. Строение пыльцы у *Gnetales*. — Докл. Акад. наук СССР, 1937, 15, № 4.
- Чигурьева А. А. К байкальской третичной флоре Алу-Теса. — Докл. Акад. наук СССР, 1948, 61, № 2.
- Чигурьева А. А. 1. К ископаемой третичной флоре и растительности Приаралья. — Бюлл. Моск. общ. испит. природы, отд. геол., 1951, 26, вып. 5.
- Чигурьева А. А. 2. О юдской флоре южной Эмбы. Там же.

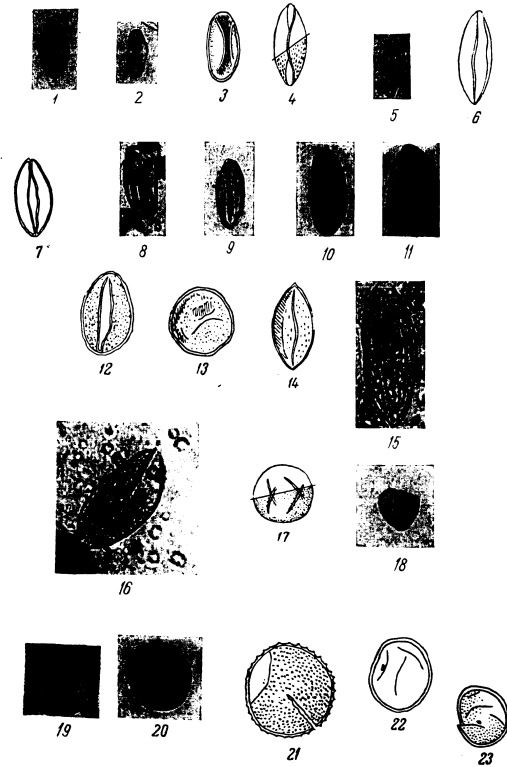
- Чягуряева А. А. З. О находке микроспоры вельвичи в эоценовых отложениях Западного Казахстана. — Ботан. журнал, 1951, 36, № 5.
- Штепа И. С. К вопросу изучения пыльцы кавказских сосен. — Сообщ. Акад. наук Грузинской ССР, 1954, 15, № 3.
- Яшин А. Л. Геологическое строение Северо-Западного Приаралья. В кн.: Материалы по геологии Центрального Казахстана. М.—Л., Изд. Акад. наук СССР, 1940.
- Яшин А. Л. Геология Северного Приаралья. М., Изд. МОИП, 1953.
- Ярмоленко А. В. К вопросу о разрыве между данными палеоботанической летописи и составом современной флоры. — Сов. ботаника, 1941, № 5—6.
- Deflandre G. Considérations biologiques pour les microorganismes d'origine planctonique conservées dans les silex de la craie. T. V—IX. — Bull. Biol. Trans. Belg., 1935, № 69.
- Cain G. The identification of species in fossil pollen of *Pinus* by size-frequency determinations. — Amer. J. Bot. 1940, 27.
- Chanev R. The Kucha flora in relation to the physical conditions in Central Asia during the late tertiary. — Sweden Geogr. Ann., London, 1935.
- Erdtman G. An introduction to pollen analysis. Waltham, Mass., 1943.
- Erdtman G. Pollen morphology and plant taxonomy. V. I. Angiosperms. Stockholm, Almqvist Wiksell, 1952.
- Furgole E. Pollenanalytische Studien in der Schweiz. — Vierteljahrlicher Naturforsch. Ges. Zürich, 1927, 72.
- Cotchan W. Die merkwürdigen pflanzengeographischen Besonderheiten in den Mitteleuropäischen Karbonifloren. — Paläontographica, 91, Abt. B. Stuttgart, 1951.
- Heer O. In: Abich H. Beiträge zur Paläontologie des asiatischen Russlands. — Mém. Acad. Sci. St-Petersb., 1858.
- Hornm H. Die pollenanalytische Unterscheidung von *Pinus montana*, *P. silvestris* und *P. cembra*. — sterr. Bot. Schr., 1929, 78.
- Kirchheimer F. Die Symplocaceen der erdgeschichtlichen Vergangenheit. — Paläontographica. Beiträge Naturgesch. Vorzeit., 1949, 90, Abt. B., Lief. 1—3.
- Kirchheimer F. Microfossilien aus Salzablagerungen des Tertiärs. — Paläontographica, 1950, 90, Abt. B., Lief. 4—6.
- Kräusel R. Koniforen und andere Gymnospermen aus der Trias von Lunz. Niederösterreich. — Paläontographica, 1949, 89, Abt. B., Lief. 1—3.
- Kamp G. Pollenanalytische Untersuchungen des miozänen Braunkohlenlagers von Konin and der Wartho. — Paläontographica, 1949, 90, Abt. B., Lief. 1—3.
- Potonie R. I. Zur Mikrobotanik des miozänen Humdilsder Niederrheinischen Bucht. — Arb. Inst. Paläobotanik u. Petr. Breusteine, 5. — Preuss. Geol. Landesanst., 1934.
- Potonie R. 2. Zur Mikrobotanik der Kohlen und ihrer Verwandten, zur Morphologie der fossilten Pollen und Sporen. — Vertriebe Preuss. Geol. Landesanst., Berlin, 1934.
- Potonie R. Revision stratigraphisch wichtiger Sporomorphen des Mitteleuropäischen Tertiärs. — Paläontographica, 1951, 91, Abt. B.
- Roissinger A. Die «Pollenanalyse» ausgedehnt auf alle Sedimentgesteine der geologischen Vergangenheit. — Paläontographica, 1950, 90, Abt. B., Lief. 4—6.
- Rudolph K. Mikrofossilstische Untersuchung tertiärer Ablagerungen im Nördlichen Böhmen. — Beih. Botan. Zbl., 1935, 54, Abt. B.
- Solling O. H. Studies in Hawaiian pollen statistics. Part I. The pollen of the Hawaiian Phnrogans. Special publication Bishop. Mus. Honolulu, 38. Hawaii, 1947.
- Stockmans F. Les lignites inéniens de Mol. (Belgique). — Bull. Mus. Hist. Nat. Belg., 1943, 19.
- Thiergart F. Die Pollenflora der Niederlansitzer Braunkohle, besonders im Profil der Grube Marza bei Sentenberg. — Jahrb. — Preuss. Geol. Landesanst., 1937, 58.
- Thiergart F. Die Mikropaläontologie als Pollenanalyse im Dienst der Braunkohlenforschung. Schrift aus dem Gebiete d. Brennstoff-Geologie, 1940, H. 13.
- Thiergart F. 1. Der stratigraphische Wert mesozoischer Pollen und Sporen. — Paläontographica, 1949, 89, Abt. B., Lief. 1—3.
- Thiergart F. 2. Die Sciadopityzone und der Sciadopitysvorstoß in der Niederrheinischen Braunkohle. Düsseldorf, 1949.
- Thompson P. W. Alttertiäre Elemente in der Pollenflora der rheinischen Braunkohle und einige stratigraphisch wichtige Pollenformen derselben. — Paläontographica, 1949, 90, Abt. B., Lief. 1—3.
- Thompson P. W. Grundsätze zur tertiären Pollen und Sporen — Mikrostratigraphie. — Geol. Jahrb., Hannover/Celle, 1950, 65.
- Wodehouse R. P. Pollen grains, their structure, identification and significance in science and medicine. New York, 1935.
- Wodehouse R. P. The oil shales of the Green River formation. — Bull. Torrey Bot. Club, 1932, 59.
- Wodehouse R. P. Tertiary pollen. The oil shales of the eocene Green River formation. — Bull. Torrey Bot. Club., 1933, 60.

## ТАБЛИЦЫ

К таблице I

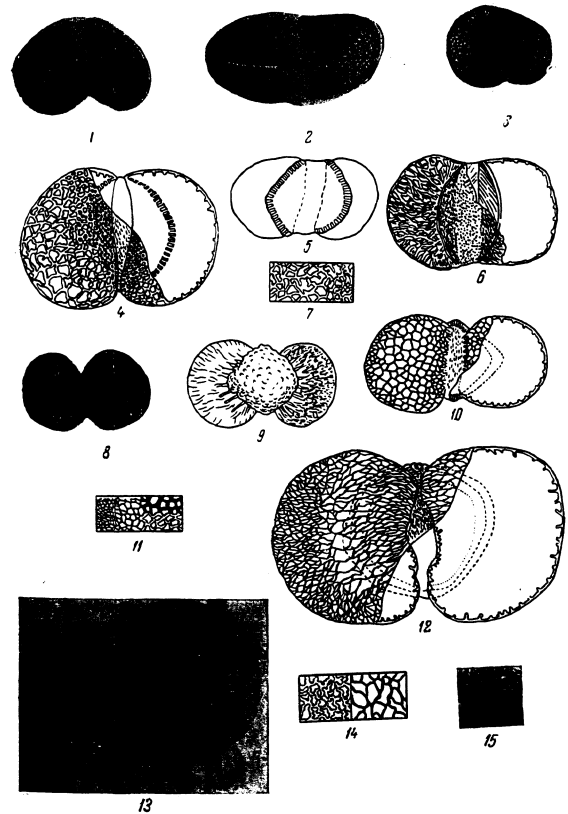
- 1—3. *Zamites* sp. (pollen.). Увел. 400.
- 4, 5. *Encephalartes cycadioides* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
- 6—11. *Ginkgo bilobaeformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
- 12—14. *Ginkgo biloba* L. (recent.). Увел. 400.
- 15, 16. *Ginkgoites* sp. (pollen). Увел. 400.
- 17, 18. *Taxus cuspidataeformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
- 19, 20. *Taxus baccataeformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
- 21. *Taxites* (?) sp. Увел. 400.
- 22, 23. *Torreya californiformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.

ТАБЛИЦА I



## К таблице II

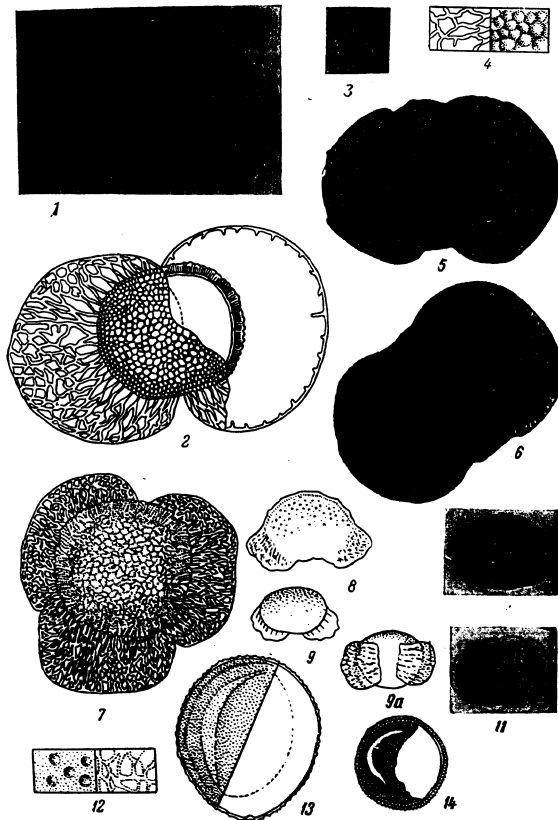
- 1,2 *Podocarpus sellowiformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.  
 3—6. *Podocarpus andiniiformis* sp. nov. (pollen). Рис. 3 —  
 увел. 400; рис. 4—увел. 600.  
 7. То же, строение сетки на воздушных мешках. Увел. 500.  
 8—10. *Podocarpus nageiaformis* sp. nov. (pollen) Рис. 8 —  
 увел. 400; рис. 9 и 10—увел. 500.  
 11. То же, строение сетки на воздушных мешках. Увел. 500.  
 12, 13. *Podocarpites kazakhstanica* sp. nov. (pollen). Рис. 12 —  
 увел. 500; рис. 13 — увел. 400.  
 14. То же, строение сетки на воздушных мешках. Увел. 500.  
 15. То же, строение структуры поверхности тела. Увел. 500.



## К таблице III

- 1,2. *Podocarpites gigantea* sp. nov. (pollen). Рис. 2.—Увел. 500.  
 3. То же, деталь строения сетки воздушных мешков. Увел. 400.  
 4. То же, строение сетки воздушных мешков (слева) и скульптуры поверхности тела (справа). Увел. 400.  
 5,6. *Podocarpus andinus* P o e r r. (recent.) (полярная проекция). Увел. 400.  
 7. *Podocarpus* aff. *dacrydioides*. A. R i c h. Увел. 400.  
 8—11. *Daerydium elatumiformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.  
 12. То же, строение сетки воздушных мешков (справа) и скульптуры поверхности тела (слева). Увел. 500.  
 13. *Araucaria elegans* sp. nov. (pollen). Увел. 500.  
 14. *Agathis orataeformis* sp. nov. (pollen). Увел. 500.

## ТАБЛИЦА III



К таблице IV

- 1,2. *Abies sibiriciformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.  
3. *Abies protofirma* sp. nov. (pollen). Увел. 400.  
4—6. *Keteleeria davidianaeformis* sp. nov. (pollen)  
Увел. 400.

ТАБЛИЦА IV

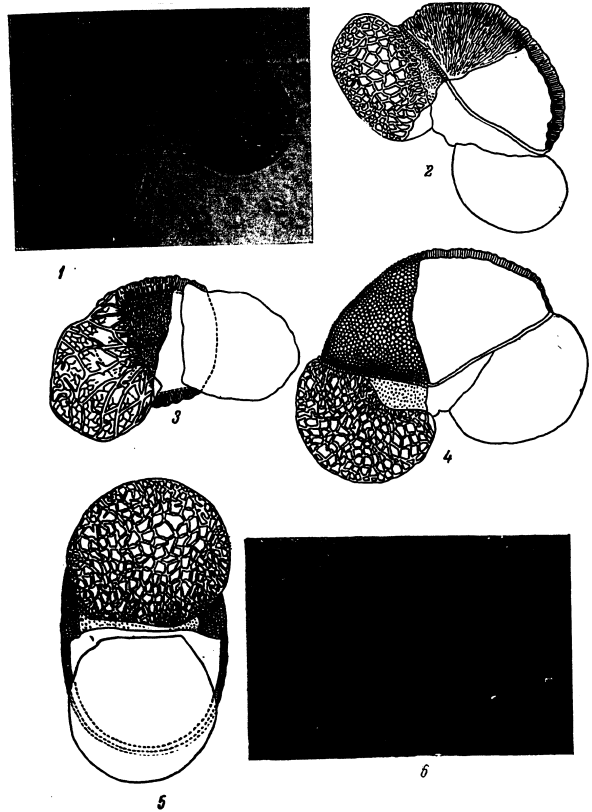
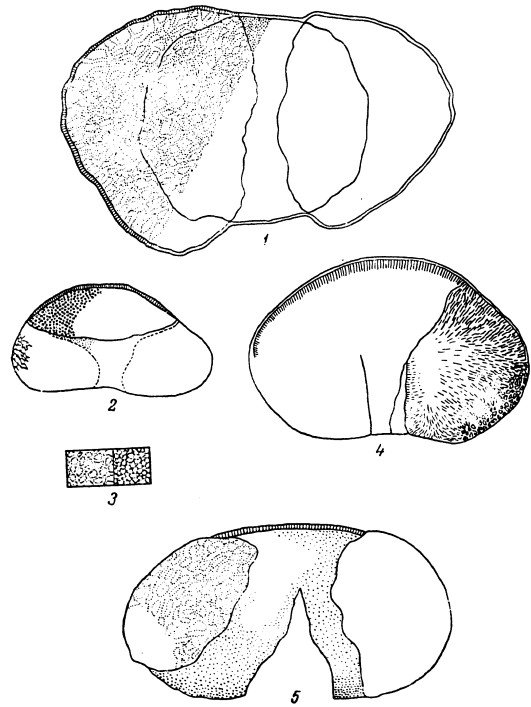


ТАБЛИЦА V

К таблице V

1. *Keteleeria* sp. Увел. 500.
2. *Picea tasaranica* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
3. То же, деталь строения сетки воздушных мешков (слева) и скульптуры шита (справа). Увел. 500.
4. *Picea schrenkianaeformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
5. *Picea schrenkianaeformis* sp. nov. (pollen) (из континентальных олигоценовых отложений). Увел. 500.



К таблице VI

- 1—4. *Picea alata* sp. nov. (pollen) (ex gr. *P. jezoensis* С. Г. Г.).  
Увел. 500.  
5. То же, деталь строения сетки воздушных мешков (справа)  
и структуры поверхности тела (слева). Увел. 500.

ТАБЛИЦА VI

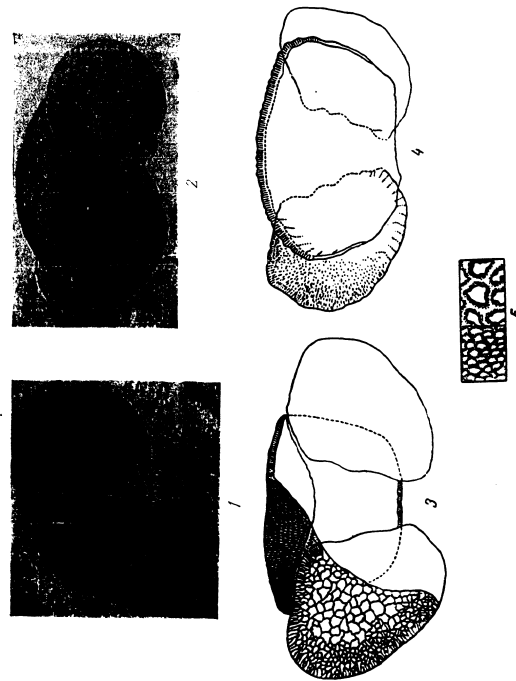
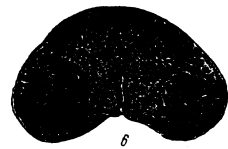
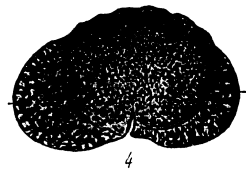
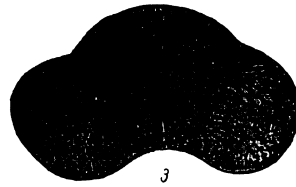
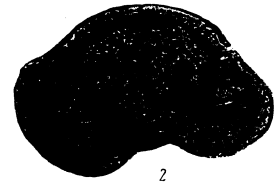
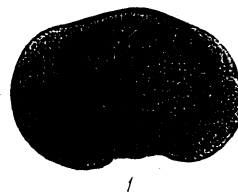




ТАБЛИЦА VII

К таблице VII

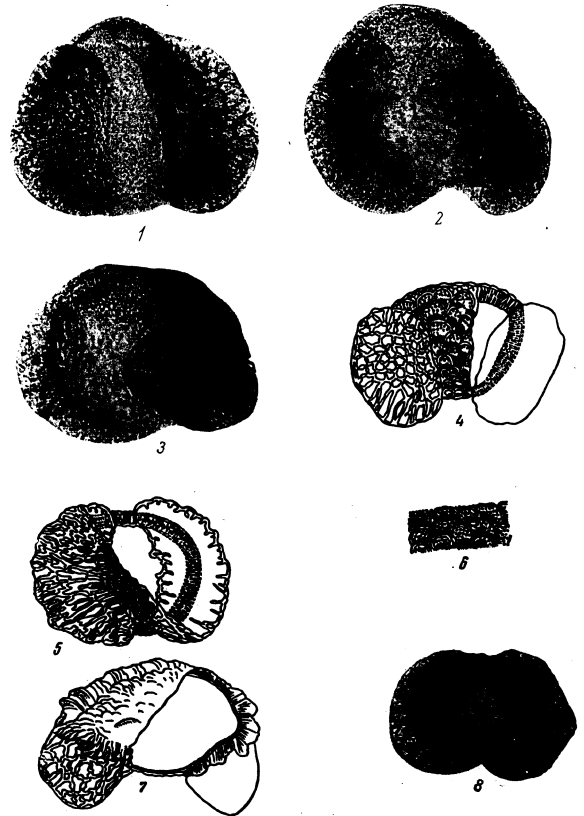
- 1—3. *Cedrus atlantica* Manetti (recent.). Увел. 400.  
4. *Cedrus deodara* Loud. (recent.). Увел. 400.  
5, 6. *Cedrus libani* L. a. s. (recent.). Увел. 400.



К таблице VIII

- 1—5. *Cedrus aff. deodara* Loud. Увел. 400.  
6. То же, деталь строения поверхности тела.  
7, 8. *Cedrus lazireticulata* Зауер (pollen). Рис. 7—увел. 500;  
рис. 8—увел. 400.

ТАБЛИЦА VIII



К таблице IX

- 1—4. *Cedrus piniformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.  
5, 6. *Cedrus Janschintii* sp. nov. (pollen). Увел. 400.  
7. То же, деталь строения структуры воздушных мешков.  
Увел. 400.  
8—10. *Cedrus parrisaccata* Z а и е г (pollen). Увел. 400.

ТАБЛИЦА IX

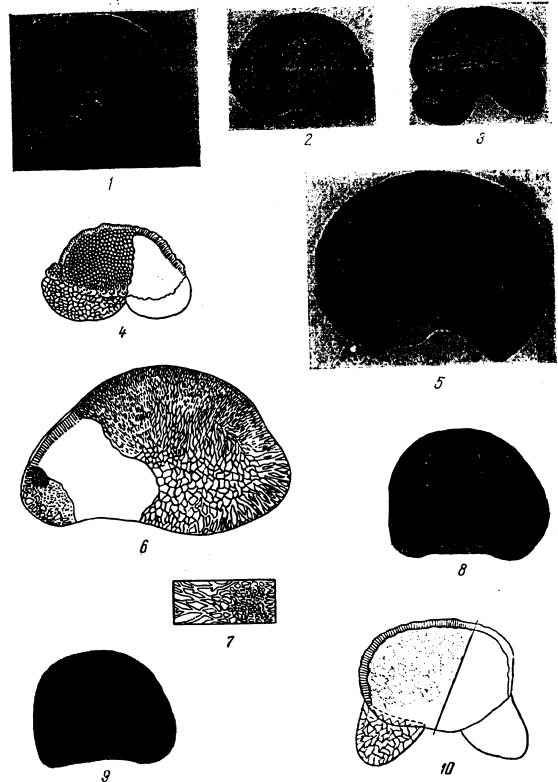
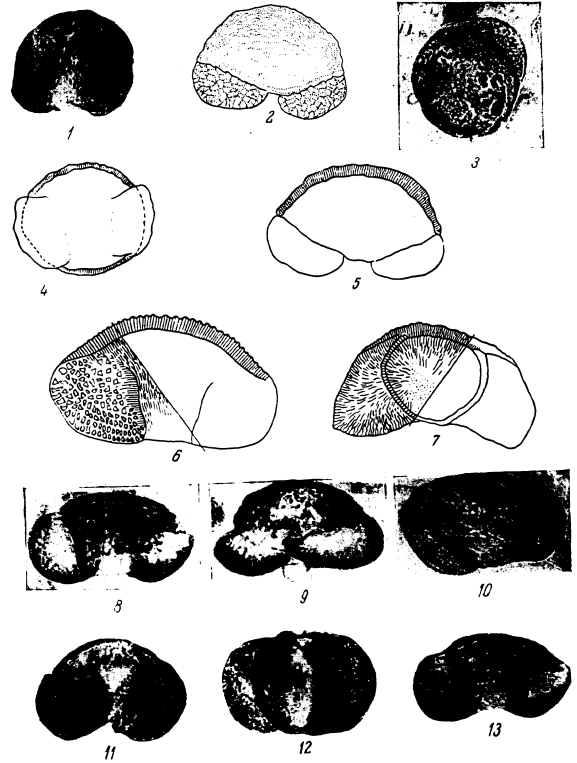


ТАБЛИЦА X



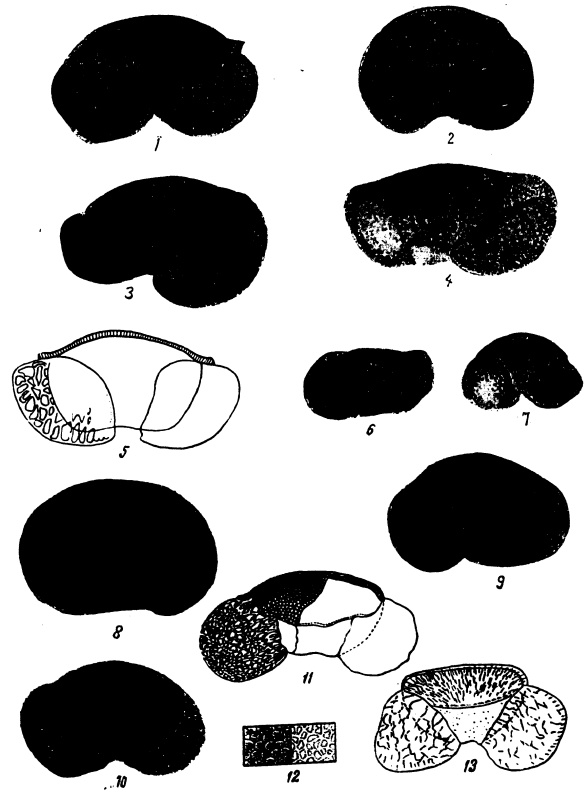
К таблице X

- 1—5. *Cedrus pusilla* Zaueг (pollen). Увел. 400.
- 6. *Cedrus* aff. *libani* Laws. Увел. 400.
- 7. *Cedrus longisaccata* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
- 8—13. *Pinus cembraeformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.

К таблице XI

- 1—5. *Pinus aff. koraiensis* Sieb. et Zucc. Увел. 400.  
 6, 7. *Pinus microsibirica* sp. nov. (pollen). Увел. 400.  
 8—10. *Pinus sibiriciformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.  
 11. *Pinus* ex gr. *sibirica* R и r. (Мауг.). Увел. 500.  
 12. То же, деталь строения сетки воздушных мешков (справа) и структуры тела (слева). Увел. 500.  
 13. *Pinus* ex gr. *sibirica* R и r. (Мауг.) из зоеновых отложений г. Тас-Аран в Северном Приаралье. Увел. 400.

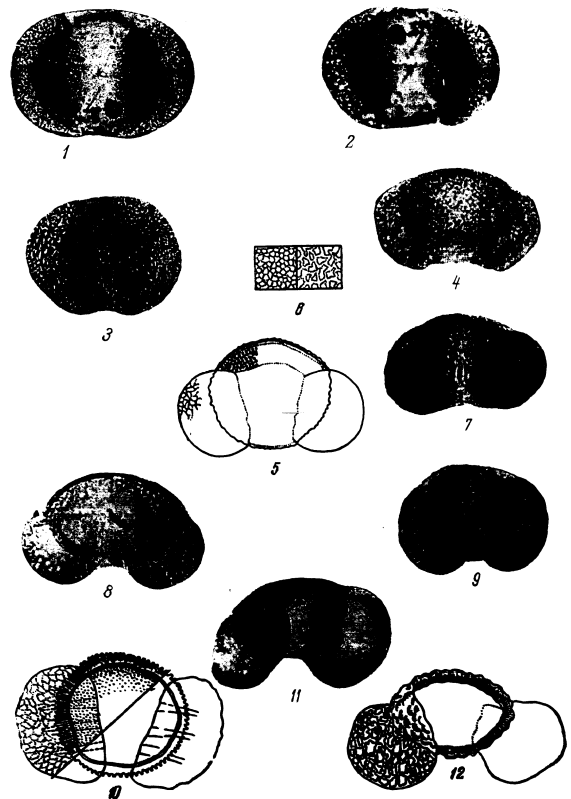
ТАБЛИЦА XI



К таблице XII

- 1, 2. *Pinus protocembra* sp. nov. (pollen). Увел. 400.  
3. *Pinus* ex gr. *protocembra* sp. nov. (pollen). Увел. 400.  
4, 5, 7, 8. *Pinus strobiformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.  
6. То же, деталь строения сетки мешков (справа) и структура поверхности тела (слева). Увел. 400.  
9—12. *Pinus peuceformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.

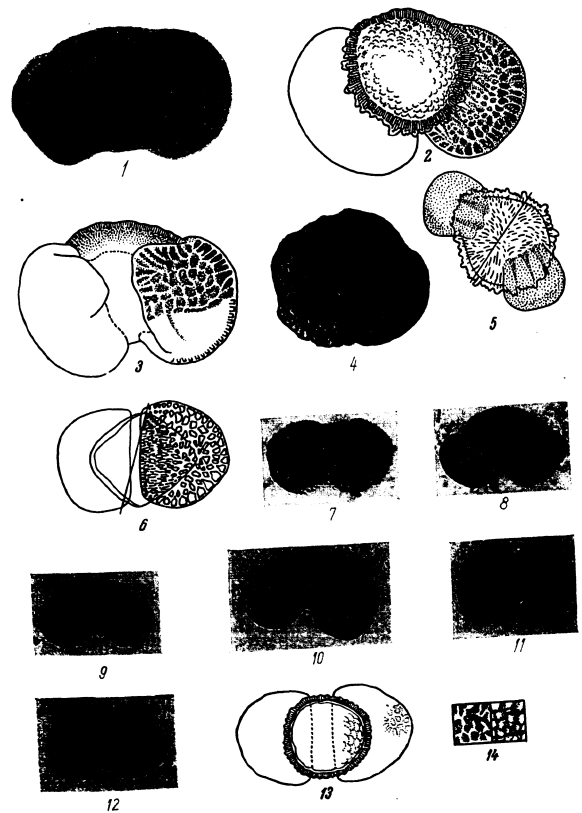
ТАБЛИЦА XII



## К таблице XIII

- 1—3. *Pinus exelsaeformis* sp. nov. (pollen). Рис. 2, 3—увел. 500, рис. 1—увел. 400.  
 4, 5. *Pinus ex gr. exelsaeformis* (pollen). Увел. 400.  
 6. *Pinus gerardianaeformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.  
 7—9. *Pinus longifoliaformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.  
 10—13. *Pinus ponderosaeformis* sp. nov. (pollen). Рис. 12 — мелкий вариант.  
 14. То же, деталь строения сетки воздушных мешков (слева) и структуры тела (справа). Увел. 400.

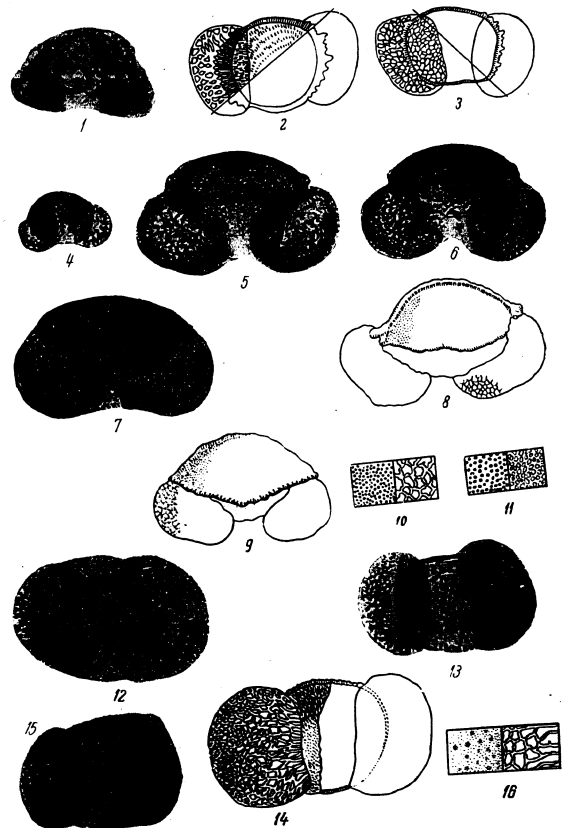
## ТАБЛИЦА XIII



## К таблице XIV

- 1—3. *Pinus bicornis* sp. nov. (pollen). Рис. 2,3—увел. 500;  
рис. 1—увел. 400.
4. *Pinus minutus* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
- 5—9. *Pinus taedaeformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
10. То же, строение сетки воздушных мешков (справа) и структуры поверхности тела (слева). Увел. 400.
11. То же.
- 12—15. *Pinus singularis* sp. nov. (pollen). Рис. 14—увел. 500;  
рис. 12, 13, 15—увел. 400.
16. То же, детали строения структуры тела (справа) и сетки воздушных мешков (слева). Увел. 500.

## ТАБЛИЦА XIV

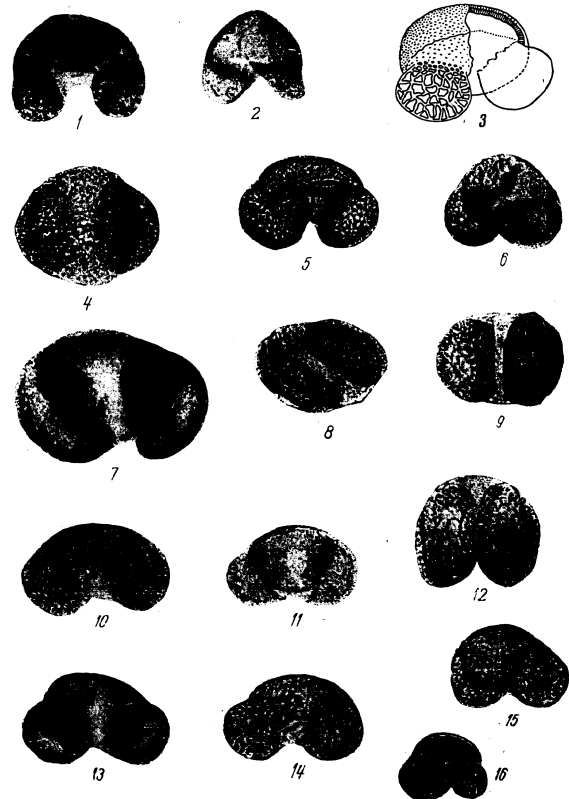




## К таблице XV

- 1—4. *Pinus banksianaeformis* sp. nov. (pollen). Рис. 3 — увел. 800; рис. 1, 2, 4 — увел. 400.  
 5. *Pinus halepensisformis* sp. nov. (pollen). Медный экземпляр.  
 6. *Pinus protosilvestris* sp. nov. (pollen). Увел. 400.  
 7—13. *Pinus* aff. *silvestris* L. (из отложений нижнего и среднего олигоцена). Увел. 400.  
 14—16. *Pinus* aff. *silvestris* L. (из отложений плиоцена и четвертичных). Увел. 400.

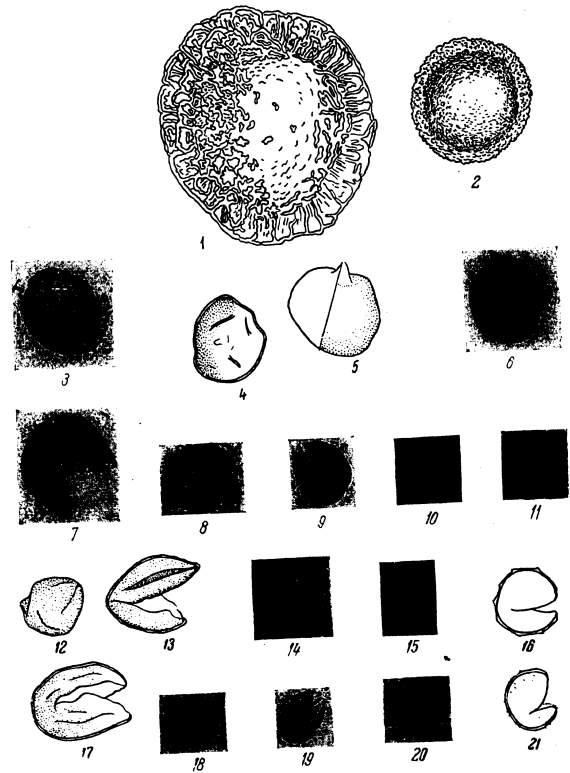
## ТАБЛИЦА XV



К таблице XVI

1. *Tsuga crisper* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
2. *Tsuga torulosa* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
3. *Sciadopitys tuberculata* sp. nov. (pollen) (ex gr. *S. verticillata* Sieb. et Zucc.). Увел. 400.
- 4, 5. *Sequoia semperviviformis* sp. nov. (pollen). Увел. 500.
6. *Sequoia sempervivens* Endl. (recent.). Увел. 400.
7. *Taxodium* aff. *distichum* (L.) Rich. Увел. 400.
- 8, 9. *Taxodites* sp. Увел. 400.<sup>1</sup>
- 10—12. *Cunninghamia* aff. *lanceolata* Lamb. Увел. 400.
- 13—15. *Thujaites* sp. (pollen). Увел. 500.<sup>1</sup> —
16. *Libocedrus* sp. (pollen). Увел. 400.
- 17—19. *Cupressites* sp. (pollen). Рис. 17.—увел. 500; рис. 18, 19—увел. 400.
20. *Cupressites* sp. (pollen) (ex gr. *Cupressus pollens* Bolch.). Увел. 400.]
21. *Chamaecyparites* sp. (pollen). Увел. 400.

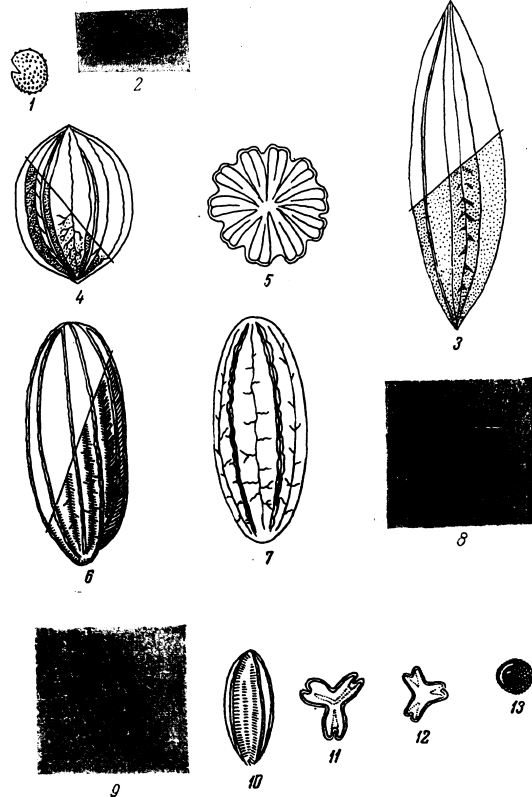
ТАБЛИЦА XVI



К таблице XVII

1. *Chamaecyparites* sp. Увел. 400.
2. *Welwitschites protomirabilis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
3. *Ephedra cocenipites* Woodhouse. Увел. 600.
4. *Ephedra* aff. *Przewalskii* Stapf. (в боковой проекции). Увел. 400.
5. То же в полярной проекции.
- 6, 7. *Ephedra* aff. *distachya* L. Увел. 400.
- 8, 9. *Ephedra* aff. *intermedia* Schr. Увел. 400.
- 10—12. *Ephedrites trinata* sp. nov. (pollen). Рис. 10 — в боковой проекции; рис. 11 и 12 — в полярной.
13. *Gnetumites* sp. (pollen). Увел. 400.

ТАБЛИЦА XVII



СО Д Е Р Ж А Н И Е

Введение . . . . .	Стр. 3
I. Краткий очерк геологии и палеогеографии Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья и некоторые сведения о геологическом строении Тургайской впадины . . . . .	43
II. К истории флоры и растительности Казахстана в третичное время . . . . .	39
III. Значение пыльцы голосеменных для характеристики палеоландшафта палеогена и отчасти неогена . . . . .	43
IV. Распространение пыльцы голосеменных в кайнозойских отложениях Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья . . . . .	50
V. Руководящие спорно-пыльцевые спектры голосеменных для стратиграфического расчленения кайнозойских отложений Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья . . . . .	65
VI. Флористический анализ спектров и их стратиграфическое значение . . . . .	70
VII. Морфологическое описание пыльцы голосеменных, выделенной из кайнозойских отложений Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья	87
1. Класс Saccadales — Саговые . . . . .	90
Сем. Cycadaceae — Саговниковые . . . . .	92
2. Класс Ginkgoales — Гинкговые . . . . .	94
Сем. Ginkgoaceae — Гинкговые . . . . .	94
3. Класс Coniferales — Хвойные . . . . .	95
Сем. Taxaceae — Тисовые . . . . .	95
Сем. Podocarpaceae — Подокарповые . . . . .	98
Сем. Araucariaceae — Араукариевые . . . . .	111
Сем. Pinaceae — Сосновые . . . . .	113
Сем. Taxodiaceae — Таксодиевые . . . . .	164
Сем. Cupressaceae — Кипарисовые . . . . .	169
4. Класс Gnetales — Гнетовые . . . . .	173
Сем. Welwitschiaceae — Вельвичиевые . . . . .	174
Сем. Equisetaceae — Хвощиковые . . . . .	175
Сем. Gnetales — Гнетовые . . . . .	177
Литература . . . . .	179
Таблицы микрофотографий и зарисовок пыльцы голосеменных . . . . .	185

ИСПРАВЛЕНИЯ И ОПЕЧАТКИ

Стр.	Страна	Напечатано	Должно быть
37	28 св.	Богданов	Бажапов
56	22 св.	Podocarpus kazakhstanica	Podocarpites kazakhstanica
59	Таблица 2, графа 1, стр. 9 св.	P. gorardiformes	P. gorardianseformis
86—87	Фиг. 14, графа 3 слова, стр. 6 св.	Чограйская	Чограйская
		Фиг. 14, графа 1 справа, стр. 3 св.	Dacridium

Труды ГИН, вып. 6. В. Д. Замлинская

Елена Дмитриевна Замлинская  
Стратиграфическое значение пыльцы голосеменных кайнозойских отложений Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья (Труды Геологического института, выпуск 6)

Утверждено к печати Геологическим институтом Академии наук СССР

Редактор издательства И. М. Чепичова. Технический редактор С. Г. Номикова

РИСО АН СССР № 98-508. Сдано в набор 1/IX—1956 г. Попл. в печать 17/1—1957 г. Формат бум. 70x108/16. Печ. л. 11,5+2<sup>1</sup>, на мел. бум. + 3 вкл.—15,05+2<sup>1</sup>, на мел. бум. + 3 вкл. Уч.-изд. лист. 14,4+3,4 вкл.—17,8. Тираж 1300. Нак. № 1555. Тип. зан. 856. Т-00308.

Цена 12 р.  
Издательство Академии наук СССР. Москва, В-64, Подосенский пер., д. 211

2-я типография Издательства АН СССР. Москва, Г-39, Шубинский пер., д. 10