„SOVROMPETROL"
DIRECȚIUNEA GENERALĂ
SERVICIUL GEODEZIC-TOPOGRAFIC

NIVELMENT
TRIANGULATIE ȘI GEODEZIE

Vol. II

STAT

1954 - BUCUREȘTI

V O L U M U L . II.

- T R I A N G U L A T I E S I G E O D E Z I E -

1 9 5 4

INTRODUCERE

LA VOLUMUL II.

In timpul cursului de specializare topografică ţinut în 1952-1953 în cadrul Direcţiei Generale Sovrompetrol, la cererea elevilor, ajutat de un colectiv am trecut la redactarea cursului predat în vederea tipăririi lui.

In centrul preocupărilor mele a stat o problemă destul de dificilă şi anume aceea de a putea încadra într'un număr puţin de ore, impuse de program elementele necesare despre Nivelment - Triangulaţie şi Geodezie.

Pentru a putea fi folosite cît mai mult aceste lecţiuni, am socotit nimerit să privesc întreaga materie atît ... punct de vedere teoretic cît şi practic, tratîndu-le concomitent la fiecare problemă în parte.

Atît nivelmentul cît şi triangulaţia geodezică, în partea teoretică, cuprind noţiuni strict necesare pentru a putea înţelege partea practică a cursului.

In această parte teoretică nu s-a tratat nimic nou, faţă de materialul bibliografic avut la dispoziţie.

In partea practică, aplicativă, exemple de calcul au fost extrase din lucrările executate pe teren.

Volumul I al cursului de "Nivelment - Triangulaţie şi Geodezie" apărut în iunie 1953, tratează nivelmentul şi o parte din triangulaţie şi Geodezie.

Volumul II tratează în continuare triangulaţia şi Geodezia, încheindu-se cu calculul unui punct de triangulaţie prin metoda celor mai mici patrate.

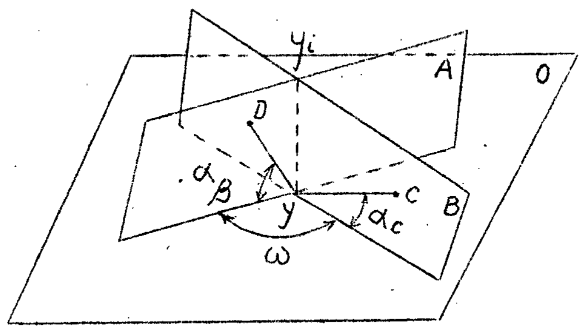
Tipărirea acestor două volume, s-a făcut datorită concursului neprecupeţit dat de următorii tovarăşi, toţi făcînd parte din serviciile Topografice "Sovrompetrol" : Anghel Niculae, Galan Ion, Galeriu Victor, Ştefănescu Spiridon, Segărceanu Marin, şi Vartolomei Mitrea.

Ing. A. Mihail

F. MASURAREA UNGHIURILOR ORIZONTALE IN GEODEZIE ŞI TOPOGRAFIE

1. Generalităţi

In topografie şi geodezie se măsoară unghiuri orizontale şi unghiuri verticale.



Unghi orizontal ω este unghiul format de planurile verticale A şi B, în care se găsesc punctele vizate C şi D, unghi văzut în planul orizontal O, care intersectează cele două planuri verticale.

Vîrful unghiului este punctul Y, care se găseşte pe verticala YY' - intersecţia celor două planuri verticale - şi anume, locul unde această verticală înţeapă planul orizontal.

Unghiul vertical α_c este definit de dreapta YC şi planul orizontal O.

Instrumentele cu care măsurăm unghiurile orizontale şi verticale trebuie să corespundă practic principiilor de mai sus :

- să materializeze axul vertical YY' şi
- planul orizontal O.

Planul vertical se materializează cu firul cu plumb (sau optic la teodolide) cu ajutorul căruia facem ca axul vertical al aparatului - prelungit geometric - să treacă prin punctul de staţie.

Planul orizontal se realizează prin calarea instrumentului de măsurat, calare care se face cu ajutorul nivelelor cu aer.

Se subînţelege că instrumentele trebuie să fie verificate şi bine calate, pentru ca aceste condiţii să fie realizate pentru orice poziţie a lunetei, în mişcarea pe care o face în jurul axului vertical.

2. Instrumente de măsurat unghiuri

- Teodolidul este instrumentul cel mai precis de măsurat unghiuri. Teodolidele moderne sînt gradate la 2^{cc} şi se poate estima secunda.

- Tachimetrul este instrumentul cu care se măsoară unghiuri. Cu ajutorul vernierelor se poate citi minutul şi se poate estima jumătatea de minut.

Sensul gradaţiunilor - adoptat universal - este în sensul mersului acelor unui ceasornic, iar gradaţiunile sînt centesimale (400^c) sau sexagesimale (360^o).

Toate punctele pe care le folosim în observaţii, trebuie semnalizate în prealabil.

Inainte de a începe observaţiile, se verifică :

- dacă pilastrul coincide cu vîrful piramidei şi cu borna respectivă;
- dacă nu coincide, se măsoară diferenţele şi se calculează noile coordonate ale pilastrului şi capului negru.

Tripiedul trebuie ferit de soare; o parte din erorile care se fac sînt datorite fenomenului de torsiune (vezi pag.următoare)

Dacă citirile durează mai multe ore, se recomandă să se facă jumătate dimineaţa şi jumătate din citiri spre seară, pentru a obţine o medie a condiţiilor atmosferice în care executăm punctajul.

De asemenea, se recomandă ca citirile unghiurilor verticale să se facă între orele 11...14, cînd refracţia este minimă.

Pentru geodezia primordială sînt favorabile citirile de noapte.

Toate măsurile de precauţie luate, micşorează erorile accidentale, dar nu le anulează.

In măsurarea unghiurilor survin următoarele erori :

- eroare de apreciere prin estimaţie a fracţiunilor de diviziuni;
- divizare neprecisă a limbului (imperfecţia maşinii de gradat);
- antrenarea limbului;
- nepreciziei vizării semnalelor (punctajul), datorită operatorului şi variaţiei luminării semnalelor de razele solare.

Pentru a elimina sau cel puţin a reduce aceste erori, se folosesc diferite metode de măsurare a unghiurilor, pentru a obţine precizia necesară lucrării pe care o executăm.

3. <u>Metodele pentru măsurarea unghiurilor</u> sînt :

a) Metoda simplă (care pot fi cu zero-urile în coin-
b) metoda repetiţiei(cidenţă sau prin diferenţa citirilor
c) metoda reiteraţiei
d) metoda Schreiber
e) metoda seriei (sau turului de orizont)
f) metoda sectoarelor şi
g) metoda de referinţă.

Diferitele metode de măsurat unghiurile au fost imaginate pentru a obţine precizia necesară lucrării pe care o executăm, deoarece - ca în orice măsurătoare - intervin erori.

Prin diferite metode de măsurat, căutăm să facem ca aceste erori să fie cît mai mici, deci să obţinem o valoare cît mai apropiată de valoarea reală.

Erorile care se fac în măsurătoarea unghiurilor se datoresc :

- aprecierii prin estimaţii a fracţiunilor de diviziuni
- impreciziei de divizare a limbului (imperfecţia maşinii de gradat)
- antrenării limbului,
- excentricităţii alidadei şi lunetei,
- colimatiei şi
- nepreciziei vizării semnalelor (punctajul), datorită operatorului şi modul cum este luminat semnalul.

Fenomenul de torsiune

Acest fenomen este neglijabil cînd staţionăm la sol, cu aparatul pe tripied.

Fenomenul se naşte la piramide. Indiferent de materialul din care sînt făcute, datorită încălzirii neegale a picioarelor pilastrului, cît şi pilastrului propriu-zis, se produce fenomenul de torsiune. Efectul torsiunii se transmite aparatului.

Să presupunem că avem un teodolit Wild T3 instalat pe un pilastru. Diametrul limbului = 140 mm.

Dacă torsiunea (rotirea pilastrului) este de 0,0001 m, se imprimă aparatului o deviaţie de 1 minut :

$$(1) \qquad 0{,}0001 \text{ m} = \frac{0{,}140 \text{ m}}{2} \sin \alpha = 0{,}070 \text{ m} \times \sin \alpha$$

$$(2) \qquad \sin \alpha = \frac{0{,}0001 \text{ m}}{0{,}070 \text{ m}}$$

α fiind foarte mic, avem :

$$\sin \alpha = \alpha \sin 1''.$$

Inlocuind în (2) :

$$(3) \quad \alpha = \frac{0{,}0001 \text{ m}}{0{,}070 \text{ m} \times \sin 1''} = \frac{0{,}0001 \text{ m}}{0{,}070 \text{ m} \times 0{,}00000157} = 1'$$

Valoarea torsiunii variază în timpul efectuării observaţiilor, fiind maximă la terminarea citirilor.

Torsiunea influenţează numai citirea unghiurilor orizontale.

Pentru a se evita torsiunea se vor lua următoarele măsuri :

1. Se vor înveli picioarele pilastrului cu pînză de

sac mereu umezită.

2. Se vor face observaţiile dimineaţa şi seara, cînd puterea calorică a razelor solare este minimă.

3. Observaţiile să se facă cît mai repede, fenomenul de torsiune producîndu-se în timp.

4. Se va alege metoda de observare cea mai favorabilă pentru a se elimina efectul torsiunii.

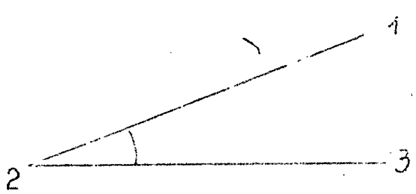
I. MASURAREA UNGHIURILOR ORIZONTALE IN TOPOGRAFIE

(cuprinde metodele simplă, repetiţiei şi reiteraţiei)

a) METODA SIMPLA

Măsurarea unui unghi izolat

a_1) PROCEDEUL CU ZERO-URILE IN COINCIDENŢA



Se aduce în coincidenţă zero al limbului (cercul gradat orizontal) cu zero al microscopului (vernierului) I şi se blochează limbul.

Deblocăm şurubul mişcării generale şi vizăm aproximativ punctul 1, după care, blocînd mişcarea generală, punctăm exact semnalul 1 cu ajutorul şurubului micrometric al mişcării generale.

Se deblochează mişcarea limbului şi vizăm punctul 3. Blocăm limbul şi punctăm exact, folosind şurubul micrometric al limbului.

Facem citirea respectivă, <u>la ambele microscoape (verniere)</u> şi înregistrăm în carnet.

După aceasta, mişcăm alidada în continuare şi vizăm din nou punctul 1, efectuînd citirile la cele două microscoape (verniere), pentru a cerceta închiderea.

<u>Operaţiunea se repetă cu luneta în poziţia II (peste cap).</u>

Dacă închiderea este sub toleranţa admisă, măsurătoarea este bună. In caz contrar, se refac citirile.

Corecţia de închidere este egală cu jumătatea neînchiderii cu semn schimbat.

E x e m p l u (aparat cu 2 verniere).

Stația	Punctul vizat	Orientări: Citite – Poziția I (c ' ")	Orientări: Citite – Poziția II (c ' ")	Medii (c ' ")	Reduse la zero (c ' ")	Corectare (c ' ")	Observații
		0 00 00	200 00 20				
	1	200 00 00	0 00 00				
		0 00 00	200 00 20	0 00 10	0 00 00	0 00 00	
		49 71 50	249 71 75			49 71 52	
2	3	249 71 60	49 71 65			- 10	
		49 71 55	249 71 70	49 71 62	49 71 52	49 71 42	
		0 00 20	200 00 30			0 00 20	
	1	200 00 30	0 00 40			- 20	
		0 00 25	200 00 35	0 00 30	0 00 20	0 00 00	

Toleranțele de închidere sînt în funcție de tipul aparatului cu care citim unghiurile.

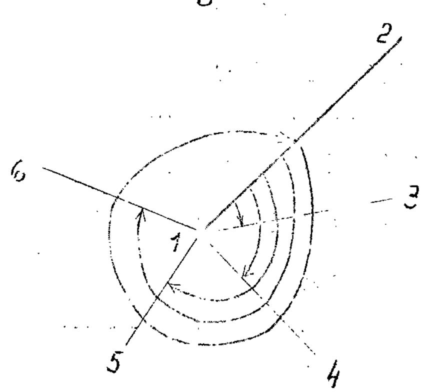
a_2) PROCEDEUL PRIN DIFERENTA CITIRILOR

Nu se mai pun zero-urile în coincidență, ci se pleacă cu o gradație oarecare, procedîndu-se analog.

Se calculează unghiul ca diferență a citirilor.

<u>Măsurarea mai multor unghiuri în jurul unui punct</u>

a_3) PROCEDEUL CU ZERO-URILE IN COINCIDENȚA



Se alege ca direcție origină <u>punctul cel mai depărtat, bine vizibil și clar indicat</u> (punct de referință).

Orice eroare asupra punctului de plecare se transmite celorlalte puncte. Dacă punctul de plecare este depărtat, eroarea va fi mică (eroarea este invers proporțională cu distanța).

Se pun zero-urile în coincidență, se blochează limbul și se vizează punctul de referinţă (2).

Se deblochează limbul (mişcarea generală stă blocată) şi se face un tur de orizont, vizînd succesiv punctele din teren (3, 4 şi 5) şi închizîndu-ne pe punctul de plecare (2). Se fac citirile la ambele microscoape (verniere).

Turul de orizont se repetă cu biseta în poziţia II-a.

Corecţia de închidere se repartizează la numărul direcţiilor, aplicîndu-se progresiv.

E x e m p l u (figura de mai sus).

Inchiderea = $- 0^c.01'.00''$

Corecţia de închidere = $+ \frac{0^c01'00''}{5} = + 20''$

Unghiul 213 corectat = citirea medie + 20"

Unghiul 214 corectat = citirea medie + 40"

Unghiul 215 corectat = citirea medie + 60"

Unghiul 216 corectat = citirea medie + 80".

Se calculează apoi unghiurile 314, 415, 516 şi 612, făcîndu-se diferenţa unghiurilor corectate ($3\hat{1}4 = 2\hat{1}4$ corectat - $2\hat{1}3$ corectat etc).

V e r i f i c a r e

Suma unghiurilor (corectate) în jurul unui punct trebuie să fie egală cu 400^c :

$$2\hat{1}3 + 3\hat{1}4 + 4\hat{1}5 + 5\hat{1}6 + 6\hat{1}2 = 400^c$$

a_4) PROCEDEUL PRIN DIFERENŢA CITIRILOR

Se procedează analog, plecîndu-se însă de pe direcţia origină cu o gradaţie oarecare.

Se calculează unghiurile ca diferenţă a citirilor.

Observaţii asupra metodei simple

La metoda simplă, suma erorilor (datorite nepreciziei diviziunilor limbului, nepreciziei vizării semnalelor, aprecierii citirilor la microscop, antrenării limbului) este de regulă mai mare ca toleranţa admisă într-o triangulaţie.

Din această cauză metoda simplă se va utiliza excepţional şi numai în cazul că sîntem siguri de exactitatea instrumentelor cu care executăm măsurătoarea şi precizia măsurătorilor pe care le executăm nu se cere să fie riguroasă.

La zero în coincidenţă facem eroarea de estimare a subdiviziunilor.

b) METODA REPETIŢIEI

Metoda repetiţiei constă în măsurarea unui unghi de mai multe ori.

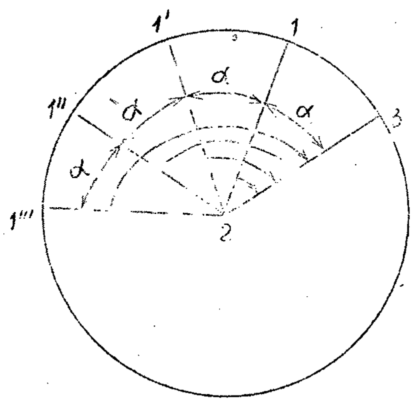
Intîi se hotărăşte numărul "n" de repetiţii, în funcţie de precizia necesară în măsurarea unghiurilor.

Valoarea lui n este limitată :

- In triangulaţia de ordinul I şi II, "n" merge pînă la 24 - 28 ori.
- In triangulaţia topografică de ordinul IV şi V, "n" = 4.

MASURAREA UNUI UNGHI IZOLAT

b1) PROCEDEUL CU ZERO-URILE ÎN COINCIDENŢA



Să presupunem că "n" = 4.

Se pun zero-urile în coincidenţă, se blochează limbul şi se vizează punctul 1, după care se blochează mişcarea generală.

Se deblochează limbul, se vizează punctul 3, blocîndu-se apoi limbul. Se fac citirile la ambele microscoape (verniere).

Lăsînd limbul blocat, se deblochează mişcarea generală şi se vizează din nou punctul 1. Se observă că gradaţia zero a limbului s-a deplasat spre stînga cu unghiul α, egal cu unghiul 123, în punctul 1'.

Mişcarea generală fiind blocată, se deblochează limbul şi se vizează punctul 3, fără a se mai face citirile.

Limbul rămînînd blocat, se desface şurubul mişcării generale şi se vizează punctul 1. Zero al limbului este deplasat acum în 1", cu unghiul 121" egal cu 2α .

Se deblochează limbul şi se vizează punctul 3. Nu se face nici o citire.

Avînd limbul blocat, se deblochează mişcarea generală şi se vizează a patra oară punctul 1. Zero al limbului s-a deplasat în 1''', cu unghiul 121''' egal cu 3α .

Se deblochează limbul şi se vizează punctul 3. De data aceasta, terminîndu-se cele 4 repetiţii, se fac citirile la cele 2 microscoape (verniere).

Operaţiunile se repetă cu luneta peste cap.

Se observă că se fac numai următoarele citiri :

- citirea pe punctul de plecare (1),
- citirea primului unghi, numită "citire informativă", care serveşte pentru control,
- citirea ultimului unghi, după cele "n" repetiţii.

Se calculează unghiul 123 :

$$\hat{123} = \frac{\text{citirea ultimului unghi}}{n} = \frac{1''' \hat{2}\ 3}{4}$$

Valoarea obţinută se compară cu citirea informativă, diferenţa trebuind să fie de ordinul secundelor.

E x e m p l u

- n = 4
- Aparat cu 2 microscoape

Punct de sta-ţie	Numirea şi numă-rul punc-tului vi-zat	Poziţia I			Poziţia II			$\frac{I + II}{2}$			Unghiul în cen-tru			Observaţii
		c	'	"	c	'	"	c	'	"	c	'	"	
	1	0	00	00	200	00	00							
A	D.Osoiu	200	00	50	399	99	60							
		0	00	25	199	99	80	0	00	03				
	3	222	45	50	22	46	00							Citire informativă 55.61.49
	Manahia	22	46	00	222	45	40							
		222	45	75	22	45	70	222	45	73				
	Unghiul							222	45	70	55	61	43	

Notă : 222.45.70 : 4 = 55.61.43.

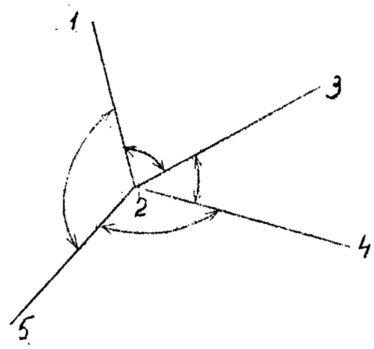
b_2) PROCEDEUL PRIN DIFERENŢA CITIRILOR

Se procedează analog, plecîndu-se de pe punctul 1 cu o gradaţie oarecare.

MASURAREA MAI MULTOR UNGHIURI IN JURUL UNUI PUNCT

b3) PROCEDEUL CU ZERO-URILE IN COINCIDENŢA

Avînd zero-urile în coincidenţă, se măsoară fiecare unghi în parte, în ordinea :



- întîi unghiul 123,
- apoi unghiul 324,
- apoi unghiul 425,
- ultimul unghi 521.

V e r i f i c a r e

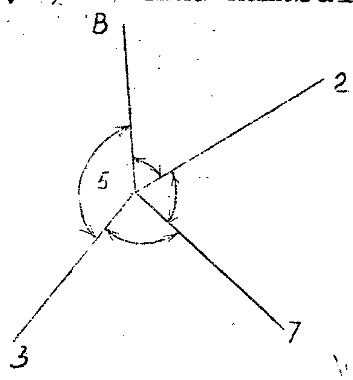
Suma unghiurilor trebuie să fie 400^c.

Corecţia de neînchidere (C) va fi egală cu :

$$C = -\left[400^c - (\hat{1}2\hat{3} + \hat{3}2\hat{4} + \hat{4}2\hat{5} + \hat{5}2\hat{1})\right]$$

şi se repartizează în mod egal tuturor unghiurilor.

Pentru ca măsurătoarea să fie valabilă trebuie ca neînchiderea să fie mai mică decît toleranţa dată de formula : $T = 15'' \sqrt{n}$, n fiind numărul unghiurilor.



E x e m p l u

- n = 4,
- Aparat : teodolit cu microscop centralizator.

Punct de staţie	Numirea şi numărul punctului vizat	Poziţia I			Poziţia II			$\frac{I + II}{2}$			Unghiul în centru			Citiri informative
		c	'	"	c	'	"	c	'	"	c	'	"	
A	B 2	0 211	00 23	00 25	0 11	00 24	60 00	0 211 211	00 23 23	30 63 33	52	80	83	52 80 81
	2 ..... 7	0 388	00 44	00 71	200 181	00 44	50 79	0 381 381	00 44 44	25 75 50	95 95	36 36	13 +1 14	95 36 10
	7 ..... 3	0 322	00 17	00 49	200 122	00 17	40 91	0 322 322	00 17 17	20 70 50	80 80	54 54	38 +1 39	80 54 [illegible]
	3 ..... B	0 685	00 14	00 58	200 85	00 14	50 92	0 685 685	00 14 14	25 75 50	171 171	28 28	63 +1 64	171 28 55
	Inchiderea..										399 400	99 00	97 +3 00	

$$3'' < 15'' \sqrt{4}$$

Corecţia de neînchidere =

$$= - \left[400^c - (52^c80'83'' + 95^c36'13'' + 80^c54'38'' + 171^c28'63'')\right] = + 3''.$$

Avînd patru unghiuri, repartizăm cîte + 1" la trei din unghiurile cele mai mari.

b_4) PROCEDEUL PRIN DIFERENŢA CITIRILOR

Se procedează analog, plecîndu-se pentru fiecare unghi cu o gradaţie oarecare a limbului.

c) METODA REITERAŢIEI

Metoda constă în a măsura un unghi de mai multe ori în mod succesiv, punînd zero al alidadei în coincidenţă cu diviziuni diferite ale limbului.

Se hotărăşte întîi numărul reiteraţiilor "n". Este recomandabil ca "n" să fie număr întreg şi divizibil cu 400^c, pentru ca gradaţiile origină să fie număr întreg de grade.

Gradaţia origină a citirilor (q) se calculează împărţind 400^c la n :

$$\frac{400^c}{n} = q^c$$

Originile citirilor pentru fiecare din cele "n" reiteraţii vor fi :

- reiteraţia 1 : $0 \times q^c$
- " 2 : $1 \times q^c$
- " 3 : $2 \times q^c$

....
- reiteraţia n : $(n - 1) \times q^c$

E x e m p l u l 1.

$$n = 4$$

$$q = \frac{400^c}{4} = 100^c$$

Gradaţiile care se introduc în aparat vor fi :

- Reiteraţia 1-a : $0 \times 100^c = 0^c$
- " 2-a : $1 \times 100^c = 100^c$
- " 3-a : $2 \times 100^c = 200^c$
- " 4-a : $3 \times 100^c = 300^c$

E x e m p l u l 2.

$$n = 5$$

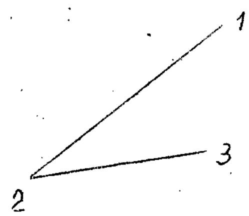
$$q = \frac{400^c}{5} = 80^c$$

Originile :

- Reiteraţia 1-a : 0 x 80^c = 0^c
- " 2-a : 1 x 80^c = 80^c
- " 3-a : 2 x 80^c = 160^c
- " 4-a : 3 x 80^c = 240^c
- " 5-a : 4 x 80^c = 320^c

C_1. MASURAREA UNUI UNGHI IZOLAT

Fie n = 4.



Reiteraţia I.

Introducem în aparat prima origine (0^c) (fără a fi nevoie să punem gradaţia la secundă) şi blocăm limbul. Vizăm punctul 1.[x] Deblocăm limbul şi vizăm punctul 3, făcînd citirile la ambele microscoape (verniere).

Continuăm mişcarea alidadei şi vizăm din nou punctul 1 pentru a cerceta închiderea.

Dacă închiderea este sub toleranţă, se împarte la 2 (două direcţii) şi se aplică cu semn contrar unghiului 123. Dacă închiderea depăşeşte toleranţa, se reface măsurătoarea.

Operaţiunea se repetă cu luneta în poziţia II-a.

Reiteraţia II, III şi IV.

Introducem în aparat, succesiv, originile respective (100^c, 200^c şi 300^c), fără a fi nevoie, aşa cum s-a arătat mai sus, să pierdem timpul pentru a înregistra gradaţia la secundă.

Procedînd analog ca la prima reiteraţie, repetînd operaţiunile cu luneta peste cap şi aplicînd corecţia de închidere a tururilor de orizont (dacă închiderile sînt sub toleranţă), vom obţine pentru unghiul 123 alte 3 valori apropiate.

Dacă ecartul maxim al valorilor unghiului 123 obţinute cu cele 4 reiteraţii este inferior toleranţei admise, unghiul definitiv se calculează ca medie aritmetică.

Pentru uşurarea calculului, citirile se reduc la zero (translocare la centru), astfel că citirile pe punctul 3 vor fi chiar valorile unghiului 123.

E x e m p l u.

- n = 4
- Aparat cu microscop centralizator.

----

x) Inregistrăm în carnet gradaţia de plecare.

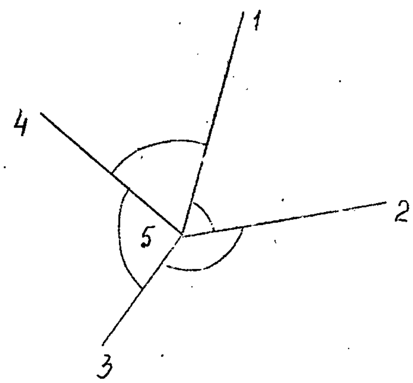
Punct de staţie	Punctul vizat	Poziţia I			Poziţia II			$\frac{I + II}{2}$			Reducerea la zero			Unghiul corectat			Observaţii
		c	'	"	c	'	"	c	'	"	c	'	"	c	'	"	
			R e i t e r a ţ i a I														
A	1	0	00	06	200	00	98	0	00	46	0	00	00	23	05	01	
	3	23	05	51	223	05	42	23	05	47	23	05	01		+	13	
	1	400	00	16	0	00	24	400	00	20	399	99	74	23	05	14	
			R e i t e r a ţ i a II														
	1	100	10	51	300	10	16	100	10	34	0	00	00	23	04	64	
	3	125	15	12	323	14	83	123	14	98	23	04	64		+	21	
	1	100	11	03	300	09	81	100	09	92	399	99	58	23	04	85	
			R e i t e r a ţ i a III														
	1	200	15	28	0	15	00	200	15	14	0	00	00	23	04	66	
	3	223	19	94	23	19	65	223	19	80	23	04	66		+	13	
	1	200	14	92	0	14	81	200	14	87	399	99	73	23	04	79	
			R e i t e r a ţ i a IV														
	1	300	05	75	100	05	53	300	05	64	0	00	00	23	04	76	
	3	323	10	48	123	10	31	323	10	40	23	04	76		+	13	
	1	300	05	22	100	05	51	300	05	37	399	99	73	23	04	89	
							Unghiul definitiv = 23 04 92										

Ecartul maxim = $23^c05'14'' - 23^c04'79'' = 35'' <$ Toleranţa

$$\text{Unghiul definitiv} = 23^c + \frac{05'14'' + 04'85'' + 04'79'' + 04'89''}{4} =$$

$$= 23^c04'92''.$$

C_2. MASURAREA MAI MULTOR UNGHIURI IN JURUL UNUI PUNCT



Punct de referinţă = punctul 1

Se calculează originile pentru fiecare reiteraţie, în funcţie de numărul "n" al reiteraţiilor.

Se alege ca direcţie origină punctul cel mai depărtat, bine vizibil .

Introducem în aparat, succesiv, originile şi executăm un tur de orizont pentru fiecare reiteraţie, plecînd de pe punctul de referinţă şi vizînd pe rînd punctele 2, 3 şi 4 şi închizînd turul pe direcţia origină (5 - 1).

Cele patru tururi de orizont se repetă cu luneta peste cap şi se calculează mediile citirilor.

Corecţia de închidere a fiecărui tur de orizont va fi egală cu valoarea închiderii cu semn schimbat, împărţită la numărul direcţiilor (în cazul nostru 4 direcţii). Se aplică progresiv.

Dacă închiderea unui tur depăşeşte toleranţa, se reface turul respectiv.

Citirile se reduc la zero.

Unghiurile definitive vor fi egale cu media valorilor obţinute cu cele 4 reiteraţii.

V e r i f i c a r e. Suma unghiurilor definitive trebuie să fie egală cu 400^c :

$$\hat{152} + \hat{253} + \hat{534} + \hat{541} = 400^c$$

E x e m p l u.

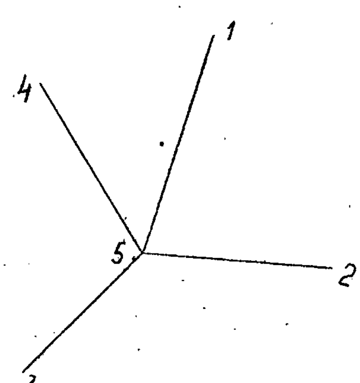
- n = 2
- Aparat cu microscop centralizator.

$$q = \frac{400^c}{2} = 200^c$$

Originile :

- reiteraţia I-a : $0 \times 200^c = 0^c$
- reiteraţia II-a : $1 \times 200^c = 200^c$

Direcţia origină = 5 - 1



Punct de sta-ţie	Punc-tul vizat	Poziţia I			Poziţia II			$\frac{I + II}{2}$			Reducerea la zero			Unghiuri corectate			Unghiuri definitive		
		c	'	"	c	'	"	c	'	"	c	'	"	c	'	"	c	'	"
		Reiteraţia I																	
	1	0	00	40	200	01	00	0	00	70	0	00	00	0	00	00			
	2	81	05	03	281	05	35	81	05	19	81	04	49	81	04	79			
	3	221	01	38	22	00	66	222	00	97	222	00	27	222	00	86			
	4	349	04	02	149	04	66	349	04	54	349	03	84	349	04	73			
	1	399	99	13	199	99	91	399	99	52	399	98	82	400	00	00			
		Reiteraţia II																	
	1	200	00	52	0	01	02	200	00	77	0	00	00	0	00	00			
	2	281	05	21	81	05	38	281	05	29	81	04	52	81	04	80	81	04	79
	3	22	01	45	222	00	71	22	01	08	222	00	31	222	00	88	222	00	87
	4	149	04	51	349	04	72	149	04	61	349	03	84	349	04	69	349	04	71
	1	199	99	30	399	99	98	199	99	64	399	98	87	400	00	00			

Calculul corecţiei de neînchidere :

Turul I (reiteraţia I-a)

$$400^c - 399^c98'82'' = + 1'18''$$

$$\text{Corecţia} = -\frac{1'18''}{4} \cong 30''$$

Unghiul 152 corectat $= 81^c04'49'' + 30'' = 81^c04'79''$

" 153 " $= 222^c00'27'' + 59'' = 222^c00'86''$

" 154 " $= 349^c03'84'' + 89'' = 349^c04'73''$

Inchiderea .... $399^c98'82'' + 1'18'' = 400^c00'00''$

Turul II (reiteraţia II-a)

$$400^c - 399^c98'87'' = + 1'13''$$

$$\text{Corecţia} = -\frac{1'13''}{4} \cong 28''$$

V e r i f i c a r e.

$$\hat{152} + \hat{253} + \hat{354} + \hat{451} = 400^c$$

$$\hat{152} = 81^c04'79''$$

$$\hat{253} = 140^c96'08''$$

$$\hat{354} = 127^c03'84''$$

$$\hat{451} = 50^c95'29''$$

$$\hat{152} + \hat{253} + \hat{354} + \hat{451} = 400^c00'00''$$

Comparaţie între metoda repetiţiei şi metoda reiteraţiei

Erorile metodelor sînt (erori accidentale) :

- erorile de diviziune a limbului,
- " " citire (datorită operatorului)
- " " vizare (datorită operatorului)

Erorile metodei repetiţiei

a) Eroarea de diviziune

Dacă $\pm$ ed este eroarea de diviziune a unghiului total (U), eroarea unghiului măsurat ($\frac{U}{n}$) după n repetiţii va fi $\frac{\pm\ ed}{n}$, adică eroarea este invers proporţională cu numărul repetiţiilor.

b) Eroare de citire

Eroarea de citire este de asemenea invers proporţională cu numărul repetiţiilor :

$$\frac{\pm\ e_c}{n}$$

c) Eroarea de vizare este redusă într-o proporţie mai mică.

Dacă e_v este eroarea de vizare pentru o observaţie simplă, eroarea unghiului total după n repetiţii va fi $e_v\sqrt{n}$.

Eroarea unghiului măsurat va fi $\frac{\pm\ e_v\sqrt{n}}{n} = \frac{\pm\ e_v\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}} = \frac{\pm\ e_v}{\sqrt{n}}$.

Suma erorilor în metoda repetiţiei :

$$\sum e = \pm\frac{e_d}{n} \pm \frac{e_c}{n} \pm \frac{e_v}{\sqrt{n}}$$

Erorile metodei reiteraţiei

a) Eroarea de diviziune

Dacă $\pm$ e_d este eroarea de diviziune pentru o observaţie simplă, eroarea unghiului măsurat cu n reiteraţii va fi

$$\frac{\pm e_d \sqrt{n}}{n} = \frac{\pm e_d}{\sqrt{n}}$$

b) Eroarea de citire este redusă în aceeaşi proporţie :

$$\frac{\pm e_c}{\sqrt{n}}$$

c) Eroarea de vizare este de asemenea redusă în aceeaşi proporţie : $\pm \frac{e_v}{\sqrt{n}}$.

Suma erorilor în metoda reiteraţiei :

$$\sum_e = \pm \frac{e_d}{\sqrt{n}} \pm \frac{e_c}{\sqrt{n}} \pm \frac{e_v}{\sqrt{n}}$$

CONCLUZII

Cazul măsurării unui unghi izolat

- Cu "n" repetiţii vom face 2 citiri şi 2 n vizări.
- Cu "n" reiteraţii vom face 2 n citiri şi 2 n vizări.

Cu metoda reiteraţiei, făcînd 2 n citiri vom comite mai multe erori ca la metoda repetiţiei, unde facem numai 2 citiri.

In cazul măsurării unui unghi izolat vom utiliza deci metoda repetiţiei.

Cazul măsurării mai multor unghiuri în jurul unui punct.

- Din punct de vedere al preciziei :

- erorile accidentale sînt atenuate mai mult de metoda repetiţiei (vezi suma erorilor);

- erorile sistematice : eroarea de diviziune sistematică este foarte bine compensată cu metoda reiteraţiei.

- Din punct de vedere al repeziciunii, metoda reiteraţiei este mai avantajoasă. Exemplu :

N = numărul semnalelor vizate = 5

n = numărul reiteraţiilor sau repetiţiilor = 10

Metoda repetiţiei :

2 x n x N vizări

2 x 10 x 5 = 100 vizări.

Metoda reiterației :

(N + 1) n vizări

(5 + 1) 10 = 60 vizări.

In cazul măsurării mai multor unghiuri în jurul unui punct vom întrebuința metoda reiterației.

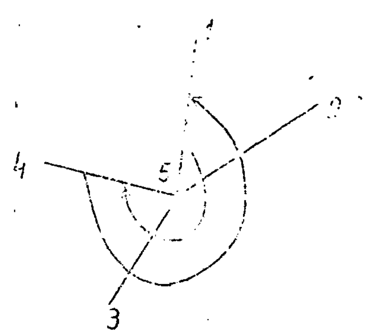
Observațiuni asupra metodelor de măsurat unghiuri în triangulația topografică

1. Metodele sînt la alegerea operatorului, în funcție de precizia care se cere.

Erorile metodei simple sînt de regulă mai mari ca toleranțele admise.

De cîte ori avem de măsurat mai multe unghiuri în jurul unui punct, vom da preferință metodei reiterației.

2. In cadrul Sovrompetrolului, o metodă întrebuințată este metoda reiterației cu următoarea modificare :



Cu luneta în poziția I-a facem turul de orizont, plecînd de pe direcția origină 5 - 1 și vizînd pe rînd punctele 2, 3 și 4.

Nu închidem turul, oprindu-ne pe punctul 4.

Dăm luneta peste cap și fără a umbla la mișcarea generală, facem un tur de orizont în sens invers, vizînd succesiv, de la mișcarea înregistratoare, punctele 4, 3, 2 și 1 (închidem deci turul de orizont în sens invers).

Executînd turul de orizont în sens direct și închizîndu-l în sens invers, se elimină în parte eroarea de antrenare a limbului.

Operațiunea se repetă pentru fiecare din cele "n" reiterații, plecînd de pe punctul de referință cu originile respective.

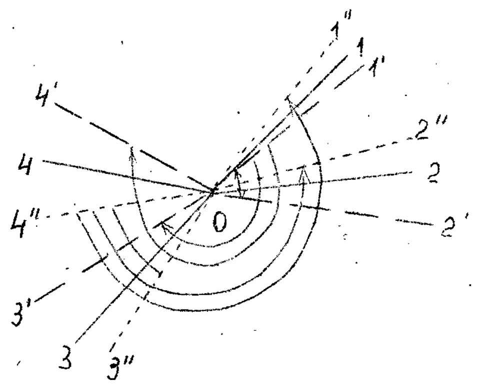
Erorile datorite excentricității alidadei și lunetei, ca și eroarea de colimație, se elimină prin închiderea turului cu luneta în poziția II-a.

Direcțiunile observate se calculează ca medie a citirilor făcute în sens direct cu luneta în poziția I și în sens invers în poziția II, prin aceasta compensîndu-se și neînchiderea pe tur de orizont (vezi figura de mai jos).

3. Intr-un tur de orizont nu se pot lua mai mult de 10 direcții. Dacă sînt mai mult de 10, se vor face două grupe (serii).

In fiecare serie se vor alege direcţiuni repartizate pe tot orizontul.

In grupul al doilea se vor introduce obligatoriu 2 - 3 din direcţiile primului grup, iar direcţia origină va fi comună ambelor serii.



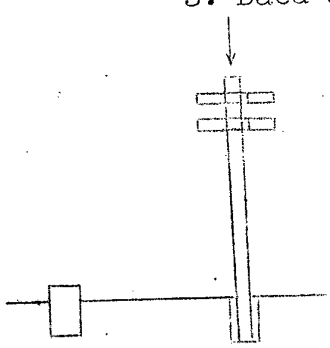
Observaţiuni asupra punctelor de ordinul IV

1. Dacă în vreunul din tururi un punct este depărtat mai mult de 7 km, sîntem obligaţi să facem duble observaţii (dacă n este numărul hotărît pentru repetiţii sau reiteraţii, pentru aceste puncte vom face 2 n repetiţii sau 2 n reiteraţii).

Nu numai atît, dar sîntem obligaţi ca dubla observaţie să se execute de la celălalt capăt al direcţiunii.

2. Dacă este posibil, este bine să avem în fiecare serie 2 - 3 vize de control (orientare). Acestea să fie vize lungi şi repartizate pe tot turul de orizont.

3. Dacă avem un semnal în cutie, bornat excentric, vizele se vor da pe semnal şi nu pe bornă, chiar dacă se vede ; deci deasupra punctului matematic unde s-a staţionat.



4. In zilele de vară, observaţiunile să se facă dimineaţa şi seara, pentru a evita mirajul.

II. MASURAREA UNGHIURILOR ORIZONTALE IN GEODEZIE

(cuprinde metodele: Schreiber, seriei, cuplelor de referinţe, sectoarelor).

d) METODA SCHREIBER

Metoda Schreiber este metoda obligatorie pentru punctele de ordinul I, II, III şi constă în măsurarea unghiurilor în toate combinaţiile posibile.

Principiul metodei este măsurarea unghiurilor simple (izolate).

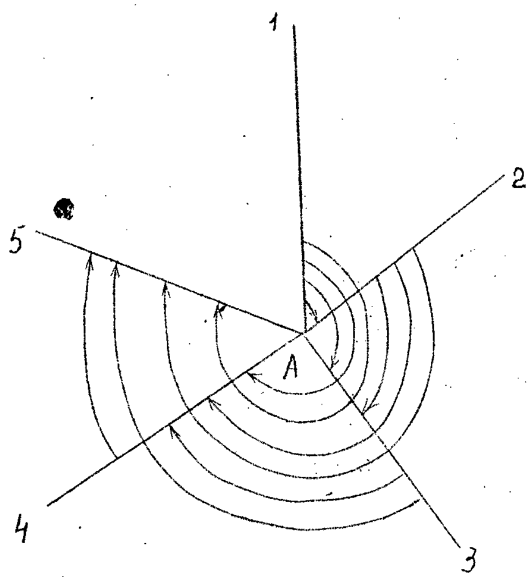
Fiecare unghi se măsoară într-un sens stabilit şi anume în sensul mişcării acelor de ceasornic.

Pentru mai multă precizie și siguranță, fiecare unghi se măsoară de mai multe ori, plecînd cu origini diferite ale limbului.

Originile nu se iau la întîmplare, ci se calculează.

d_1) CAZUL CÎND SE STAȚIONEAZA ÎN PUNCTE NOI

Să presupunem că staționăm în punctul nou A și că trebuie să măsurăm unghiurile determinate de punctele 1, 2, 3, 4 și 5.



Se ia ca origine una din direcții. Fie A - 1 această direcție.

Se măsoară izolat fiecare unghi : 1A2, 1A3, 1A4 și 1A5. Nu închidem turul de orizont.

Al doilea tur se face luînd ca origine punctul 2, măsurînd unghiurile 2A3, 2A4 și 2A5. Nu închidem turul.

A treia citire se face luînd ca origină punctul 3, măsurînd unghiurile 3A4 și 3A5. Nu închidem turul.

Ultima citire se face plecînd de pe punctul 4 și măsurînd unghiul 4A5, fără a închide turul.

Determinarea numărului de unghiuri (N) care trebuie citite

Să notăm cu "n" numărul direcțiunilor. Numărul combinațiilor care se pot face cu aceste n direcții luate cîte două (un unghi este determinat de două direcții) este dat de formula combinărilor :

$$C^2_n = \frac{n\,(n-1)}{1 \cdot 2} = N$$

E x e m p l u.

$n = 5$

$$N = C_5^2 = \frac{5\,(5-1)}{1 \cdot 2} = \frac{20}{1 \cdot 2} = 10\,;$$

Schreiber limitează numărul direcțiunilor dintr-o serie la 8.

Tabel de numărul N al unghiurilor care trebuie citite în funcţie de numărul n al direcţiunilor

n	2	3	4	5	6	7	8
N	1	3	6	10	15	21	28

Determinarea numărului repetiţiilor (q)

Pentru fiecare din cele "N" unghiuri, măsurătoarea se repetă de "q" ori.

În fiecare staţie se măsoară unghiurile în toate combinaţiile. După compensarea în staţie toate direcţiunile vor avea aceeaşi greutate.

În staţii diferite, greutăţile direcţiunilor vor fi diferite (aceleaşi însă în fiecare staţie), greutăţile depinzînd de numărul de direcţiuni al fiecărei staţii.

Triangulaţia după metoda Schreiber constă în a repeta măsurarea unghiurilor în fiecare staţie în funcţie de numărul direcţiunilor, astfel ca greutăţile fiecărei direcţiuni din reţea să fie pe cît posibil egale între ele.

Numărul "q" al repetiţiilor depinde şi de greutatea "p" a ordinului punctelor, şi anume :

- Pentru ordinul I : $p = 24 - 28$
- " " II : $p = 16$
- " " III : $p = 8$

Numărul repetiţiilor este astfel direct proporţional cu greutatea punctelor şi invers proporţional cu numărul direcţiunilor fiecărei staţii :

$$q = \frac{p}{n}$$

E x e m p l u.

$n = 4$
$p = 24$

$$q = \frac{p}{n} = \frac{24}{4} = 6$$

Tabel cu numărul repetiţiilor pentru punctele de ordinul I (p = 24)

n	2	3	4	5	6	7	8
q	12	8	6	5	4	4	3

<u>Notă.</u> Cînd numărul direcţiunilor este mai mare de 4, "p" merge pînă la 28 pentru a ne da pe q număr întreg.

E x e m p l u.

$$n = 7$$
$$p = 28$$
$$q = \frac{p}{n} = \frac{28}{7} = 4$$

Sub 24 însă "p" nu poate coborî.

<u>Determinarea intervalului (i) între origini</u>

Pentru eliminarea erorilor de diviziune ale limbului, originile celor $\frac{n(n-1)}{2}$ unghiuri trebuie calculate astfel, ca ele să fie luate la diviziuni diferite ale limbului.

Originile cu care se începe măsurătoarea fiecăruia din cele $\frac{n(n-1)}{2}$ unghiuri se numesc origini iniţiale, spre deosebire de originile cu care se va repeta de q - 1 ori măsurarea fiecăruia din ele, care vor fi distanţate de originile iniţiale cu un interval "i".

Intervalul "i" al originilor cu care se repetă măsurarea fiecărui unghi variază cu numărul microscoapelor aparatului:

- aparate cu 1 microscop : $i = \frac{400^c}{1 \times q} = \frac{400^c}{q}$
- aparate cu 2 microscoape: $i = \frac{400^c}{2 \times q} = \frac{200^c}{q}$
- aparate cu 3 microscoape: $i = \frac{400^c}{4 \times q} = \frac{100^c}{q}$

E x e m p l u l 1.

- $q = 4$
- aparat cu un microscop

$$i = \frac{400^c}{q} = \frac{400^c}{4} = 100^c$$

E x e m p l u l 2.

- $q = 4$
- aparat cu 2 microscoape

$$i = \frac{200^c}{q} = \frac{200^c}{4} = 50^c$$

La teodolitele cu 2 microscoape intervalul originilor repetiţiilor este jumătate faţă de teodolitele cu 1 microscop, deoarece se face acelaşi număr de citiri la microscopul II, luînd originile în continuare.

Determinarea numărului originilor iniţiale (n_o)

Numărul originilor iniţiale ale celor $\frac{n(n-1)}{2}$ unghiuri se ia în funcţie de numărul direcţiunilor :

- dacă numărul direcţiilor (n) este par : $n_o = n - 1$
- dacă numărul direcţiilor (n) este impar : $n_o = n$

Cînd numărul direcţiilor este mai mare ca 3, vom avea origini comune la 2 sau mai multe din cele N unghiuri.

E x e m p l u l 1.

$n = 3$

$n_o = n = 3$

Numărul unghiurilor fiind 3 ($N = \frac{3(3-1)}{2} = 3$), vom avea cîte o origină pentru fiecare din aceste 3 unghiuri ($n_o = n = 3$).

E x e m p l u l 2.

$n = 4$

$n_o = n - 1 = 3$

Numărul unghiurilor fiind 6 ($N = \frac{4(4-1)}{2} = 6$), vom avea cîte o origină comună pentru 2 unghiuri ($n_o = n - 1 = 3$).

Determinarea valorii originilor (v)

Originile celor $\frac{n(n-1)}{2}$ unghiuri trebuie repartizate pe tot cercul.

Valoarea originilor se calculează împărţind intervalul "i" cu care sînt distanţate cele q repetiţii la numărul originilor iniţiale :

$$v = \frac{i}{n_o}$$

E x e m p l u l 1

$i = 50^c$

$n_o = 3$

$v = \frac{50^c}{3} = 16^c67'$

Originile celor $\frac{n(n-1)}{2}$ unghiuri vor fi repartizate pe tot cercul la $16^c67'$.

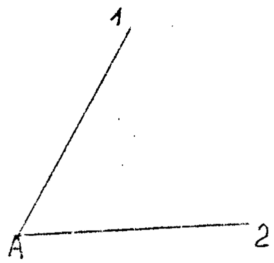
E x e m p l u l 2.

$$i = 100^c$$
$$n_o = 5$$
$$v = \frac{100^c}{5} = 20^c00'$$

Originile vor fi repartizate pe tot cercul la $20^c00'$.

Exemple de calculul originilor pentru punctele de ordinul I

a) A p a r a t e c u 1 m i c r o s c o p



Cazul a 2 direcţii

- $n = 2$
- $p = 24$

$$N = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2(2-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$q = \frac{p}{n} = \frac{24}{2} = 12$$

$$i = \frac{400^c}{q} = \frac{400^c}{12} = 33^c33'$$

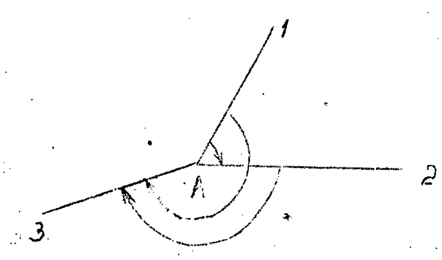
$$n_o = n - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$v = \frac{i}{n_o} = \frac{33^c33'}{1} = 33^c33'$$

Unghiul	O r i g i n i l e											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
(12)	0	$33^c33'$	$66^c67'$	$100^c00'$	$133^c33'$	$166^c67'$	$200^c00'$	$233^c33'$	$267^c67'$	$300^c00'$	$333^c33'$	$366^c67'$

Notă. Unghiurile se notează prin numerele celor două direcţiuni, puse în paranteză: (12).

Practic, în aparat se introduc numai gradele.



Cazul a 3 direcţii

- $n = 3$
- $p = 24$

$$N = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{3(3-1)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$q = \frac{p}{n} = \frac{24}{3} = 8$$

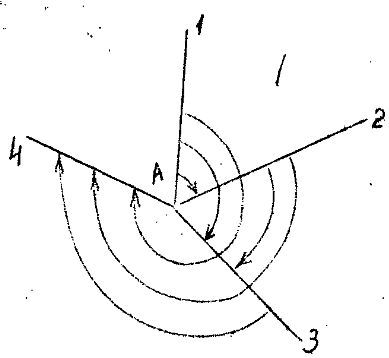
$$i = \frac{400^c}{q} = \frac{400^c}{8} = 50^c\ 00'$$

$$n_o = n = 3$$

$$v = \frac{i}{n_o} = \frac{50^c 00'}{3} = 16^c\ 67'$$

Unghiul	Originile							
	1	2	3	4	5	6	7	8
(12)	0	$50^c00'$	$100^c00'$	$150^c00'$	$200^c00'$	$250^c00'$	$300^c00'$	$350^c00'$
(13)	$16^c67'$	$66^c67'$	$116^c67'$	$166^c67'$	$216^c67'$	$266^c67'$	$316^c67'$	$366^c67'$
(23)	$33^c33'$	$83^c33'$	$133^c33'$	$183^c33'$	$233^c33'$	$283^c33'$	$333^c33'$	$383^c33'$

<u>Notă.</u> Se observă că originile sînt repartizate pe tot cercul, la $16^c67'$ (0^c, $16^c67'$, $33^c33'$, $50^c00'$, $66^c67'$, $83^c33'$, $100^c00'$, $116^c67'$, $133^c33'$, etc).



Cazul a 4 direcții

- $n = 4$
- $p = 24$

$$N = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{4(4-1)}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$q = \frac{p}{n} = \frac{24}{4} = 66^c67'$$

$$i = \frac{400^c}{q} = \frac{400^c}{6} =$$

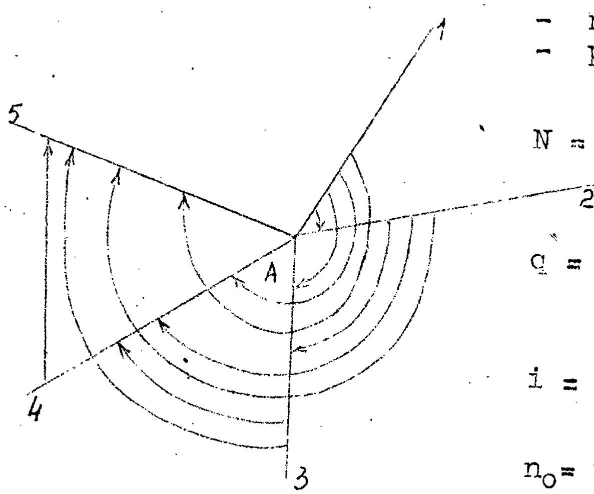
$$n_o = n - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$v = \frac{i}{n_o} = \frac{66^c67'}{3} = 22^c22'$$

Unghiul	Originile					
	1	2	3	4	5	6
(12)	$0^c00'$	$66^c67'$	133^c33	$200^c00'$	$266^c67'$	$333^c33'$
(13)	$22^c22'$	$88^c89'$	$156^c56'$	$222^c22'$	$288^c89'$	$355^c55'$
(14)	$44^c44'$	$111^c11'$	$177^c77'$	$244^c44'$	$311^c11'$	$377^c78'$
(23)	$44^c44'$	$111^c11'$	$177^c77'$	$244^c44'$	$311^c11'$	$377^c78'$
(24)	$22^c22'$	$88^c89'$	$156^c56'$	$222^c22'$	$288^c89'$	$355^c55'$
(34)	$0^c00'$	$66^c67'$	$133^c33'$	$200^c00'$	$266^c67'$	$333^c33'$

Notă. Pentru unghiurile (23), (24) şi (34) originile repetiţiilor se iau în sens descrescător, pentru a nu depăşi 400^c ($N = 6$ şi $n_o = 3$).

Cazul a 5 direcţii



- $n = 5$
- $p = 25$

$$N = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{5(5-1)}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

$$q = \frac{p}{n} = \frac{25}{5} = 5$$

$$i = \frac{400^c}{q} = \frac{400^c}{5} = 80^c00'$$

$$n_o = n = 5$$

$$v_o = \frac{i}{n_o} = \frac{80^c00'}{5} = 16^c00'$$

Unghiul	Originile				
	1	2	3	4	5
(12)	$0^c00'$	$80^c00'$	$160^c00'$	$240^c00'$	$320^c00'$
(13)	$16^c00'$	$96^c00'$	$176^c00'$	$256^c00'$	$336^c00'$
(14)	$32^c00'$	$112^c00'$	$192^c00'$	$272^c00'$	$352^c00'$
(15)	$48^c00'$	$128^c00'$	$208^c00'$	$288^c00'$	$368^c00'$
(23)	$32^c00'$	$112^c00'$	$192^c00'$	$272^c00'$	$352^c00'$
(24)	$48^c00'$	$128^c00'$	$208^c00'$	$288^c00'$	$368^c00'$
(25)	$64^c00'$	$144^c00'$	$224^c00'$	$304^c00'$	$384^c00'$

(Continuare)

Unghiul	Originile				
	1	2	3	4	5
(34)	$64^c00'$	$144^c00'$	$224^c00'$	$304^c00'$	$384^c00'$
(35)	0^c00	$80^c00'$	$160^c00'$	$240^c00'$	$320^c00'$
(45)	$16^c00'$	$96^c00'$	$176^c00'$	$256^c00'$	$336^c00'$

Notă. Pentru a nu depăşi 400^c, originile repetiţiilor s-au luat comune la cîte 2 unghiuri şi astfel ca să rezulte o repartizare judicioasă pe tot cercul ($N = 10$ şi $n_o = 5$).

T A B E L   G E N E R A L

de elementele necesare determinării unghiurilor în cazul punctelor de ordinul I. Aparat cu 1 microscop.

	2 direcţii	3 direcţii	4 direcţii	5 direcţii	6 direcţii	7 direcţii	8 direcţii
Greutatea punctului (p)	24	24	24	25	24	28	24
Numărul direcţiilor (n)	2	3	4	5	6	7	8
Numărul unghiurilor (N)	1	3	6	10	15	21	28
Numărul repetiţiilor (q)	12	8	6	5	4	4	3
Intervalul între origini (i)	$33^c33'$	$50^c00'$	$66^c67'$	$80^c00'$	$100^c00'$	$100^c00'$	$133^c33'$
Numărul originilor iniţiale (n_o)	1	3	3	5	5	7	7
Valoarea originii (v)	$33^c33'$	$16^c67'$	$22^c22'$	$16^c00'$	$20^c00'$	$14^c29'$	$19^c05'$

b) APARATE CU 2 MICROSCOAPE

Cazul a două direcții

$$p = 24$$
$$n = 2$$

$$N = \frac{n\,(n-1)}{2} = \frac{2\,(2-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$q = \frac{p}{n} = \frac{24}{2} = 12$$

$$i = \frac{200^c}{q} = \frac{200^c}{12} = 16^c66'$$

$$n_0 = n - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$v = \frac{i}{n_0} = \frac{16^c66'}{1} = 16^c66'$$

Unghiul	Microscopul I					
	1	2	3	4	5	6
(12)	$0^c00'$	$16^c66'$	$33^c33'$	$50^c00'$	$66^c66'$	$83^c33'$
Unghiul	Microscopul II					
	1	2	3	4	5	6
(12)	$100^c00'$	$116^c66'$	$133^c33'$	$150^c00'$	$166^c66'$	$183^c33'$

Notă. Se observă că la microscopul II originile sînt în continuare.

Cazul a 3 direcțiuni

$$p = 24$$
$$n = 3$$

$$N = \frac{n\,(n-1)}{2} = \frac{3\,(3-1)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$q = \frac{p}{n} = \frac{24}{3} = 8$$

$$i = \frac{200^c}{q} = \frac{200^c}{8} = 25^c$$

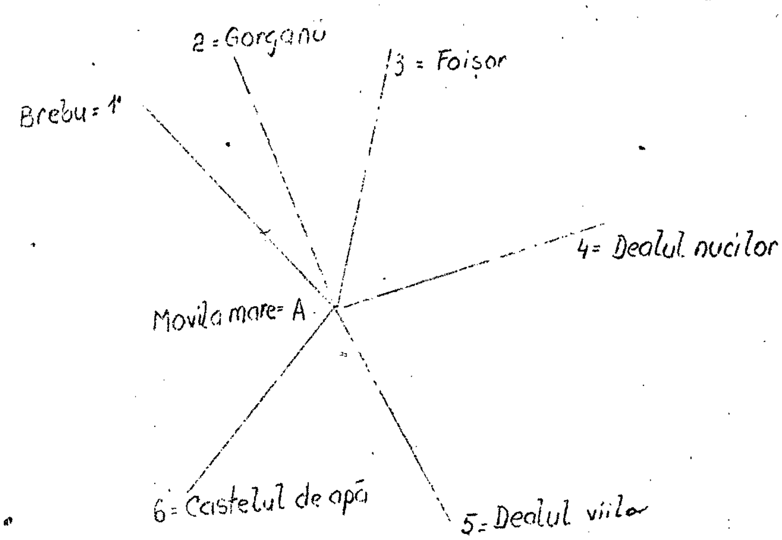
$$n_o = n = 3$$

$$v = \frac{i}{n_o} = \frac{25^c}{3} = 8^c33'$$

Unghiul	Microscopul I				Microscopul II			
	1	2	3	4	1	2	3	4
(12)	$0^c00'$	$25^c00'$	$50^c00'$	$75^c00'$	$100^c00'$	$125^c00'$	$150^c00'$	$175^c00'$
(13)	$8^c33'$	$33^c33'$	$58^c33'$	$83^c33'$	$108^c33'$	$133^c33'$	$158^c33'$	$183^c33'$
(23)	$16^c66'$	$41^c66'$	$66^c66'$	$91^c66'$	$116^c66'$	$141^c66'$	$166^c66'$	$191^c66'$

<u>Exemplu de înscrierea vizelor în carnet (Schreiber)</u>.

Aparat cu 1 microscop



$p = 24$

$n = 6$

$N = 15$

$q = 4$

$i = 100^c$

$n_o = 5$

$v = 20^c00'$

Data : 18 martie 1953 Metoda de observaţie: Schreiber

Operator : V. B. Aparatul : Wild 3 Sr. 3854

Timpul : senin

Punctul de staţie ... A = Movila Mare ....

Puncte vizate	Poziţia I			Poziţia II			Media între I şi II				Direcţii				Media direcţiilor			Corecţia de centrare	Direcţii definitive
	c	'	"	c	'	"	c	'	"		c	'	"		c	'	"	"	c ' "
1=Brebu	0	28	39	200	28	84	0	28	61	50									
2=Gorganu	17	11	83	217	12	14	17	11	98	50	16	83	37	00					
(12)	100	51	10	300	51	56	100	51	33	00									
	117	34	60	317	34	88	117	34	74	00	16	83	41	00					
	200	04	15	0	04	60	200	04	37	50									
	216	87	58	16	87	89	216	87	73	50	16	83	36	00					
	300	18	28	100	18	76	300	18	52	00									
	317	01	76	117	02	09	317	01	92	50	16	83	40	50	16	83	38	62	
1=Brebu	20	15	18	220	15	47	20	15	32	50									
3=Foişor (13)	59	04	00	259	04	18	59	04	09	00	38	88	76	50					
	120	30	18	320	30	48	120	30	33	00									
	159	38	96	359	39	11	159	39	03	50	38	88	70	50					
	220	06	96	20	07	17	220	07	06	50									
	258	95	66	58	95	86	258	95	76	00	33	88	69	50					
	320	12	34	120	12	61	320	12	47	50									
	359	01	13	159	01	30	359	01	21	50	38	88	74	00	38	88	72	62	

In continuare se înscriu vizele celorlalte unghiuri [(14), (15), (16), (23), (24), (25), (26) etc.] şi se calculează direcţiunile medii.

Notă.

1. Citirile se fac cu luneta în ambele poziţii.

2. In timp ce operatorul face observaţiile, un secretar notează citirile şi calculează media între citirile cu cele două poziţii ale lunetei şi direcţiunile ($17^c11'80''50 - 0^c28'61''50 = 16^c83'37''00$; $117^c34'64''00 - 100^c51'23''00 = 16^c83'41''00$, etc).

Dacă ecartul maxim al celor 4 valori obţinute pentru fiecare direcţie prin cele 4 repetiţii este inferior toleranţei, se calculează media lor, care va fi valoarea provizorie a direcţiunii respective. Exemplu :

$$T_{\Delta\, max} = \pm \varepsilon \sqrt{n}$$

- ε = eroarea medie de măsurare a unui unghi = 4" (pentru Wild 3);

- n = numărul valorilor ce intră în medie = 4.

$$T = \pm 4'' \sqrt{4} = \pm 8''$$

Valorile direcţiunilor :

- $16^c83'37'',00$
- $16^c83'41'',00$
- $16^c83'36'',00$
- $16^c83'40'',50$

Δ_{max} = ecartul maxim = $16^c83'41'',00 - 16^c83'36'',00 = 5'',00$

$5'' \angle 8''$, deci observaţiunile sînt juste şi se poate calcula media direcţiunilor :

$$16^c83' + \frac{37'',00 + 41'',00 + 36'',00 + 40'',50}{4} =$$

$$= 16^c83'38'',62.$$

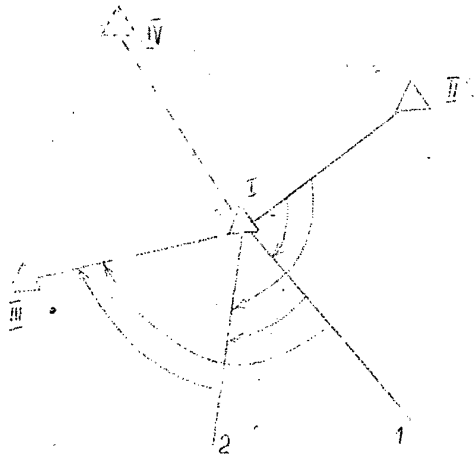
Dacă ecartul maxim depăşeşte toleranţa se refac observaţiile.

3. Direcţiile definitive se înscriu după compensarea în staţie.

d_2) CAZUL CÎND SE STAŢIONEAZA IN PUNCTE VECHI

Cînd se îndeseşte o triangulaţie, direcţiunile care limitează unghiurile triangulaţiei vechi sînt socotite ca definitive; adică sînt direcţii fixe şi deci ele nu mai pot lua parte la vreo compensare ulterioară.

Cînd se staţionează în punctele triangulaţiei vechi, pentru a măsura unghiurile triangulaţiei noi vom pleca de la o direcţie veche (fixă) şi ne vom închide pe altă direcţie veche (fixă).



Indiferent de numărul direcțiilor vechi, se iau numai două din aceste direcții (I - IV și I - III).

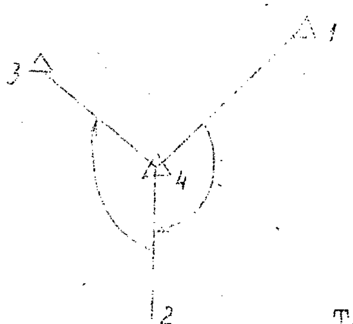
Unghiul (II-III) nu se mai măsoară, fiind unghi fix și deci cunoscut.

Numărul repetițiilor q se ia egal cu 6, indiferent de numărul direcțiilor noi (una, două sau trei).

TABLOUL ORIGINILOR IN CAZUL TRIANGULATIEI DE ORDINUL I
(p = 24)

a) APARATE CU 1 MICROSCOP

Cazul unei directiuni noi între două direcții vechi fixe



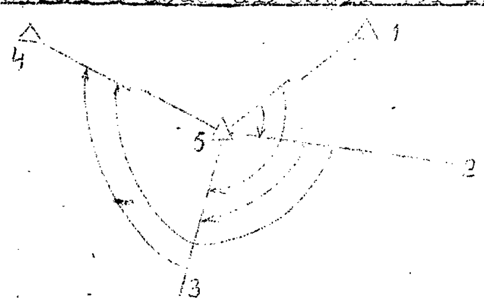
Se citesc numai unghiurile (12) și (23).

Unghiul (13) nu se mai citește, fiind unghi fix (se calculează din coordonate).

Tabloul originilor

Unghiul	O r i g i n i l e					
	1	2	3	4	5	6
(12)	$0^c00'$	$16^c67'$	$33^c33'$	$50^c00'$	$66^c67'$	$83^c33'$
(13)	-	-	-	-	-	-
(23)	$8^c33'$	$25^c00'$	$41^c66'$	$58^c33'$	$75^c00'$	$91^c66'$

Cazul a două direcții noi între două direcții vechi fixe



Unghiul (14) fiind fix nu se mai citește.

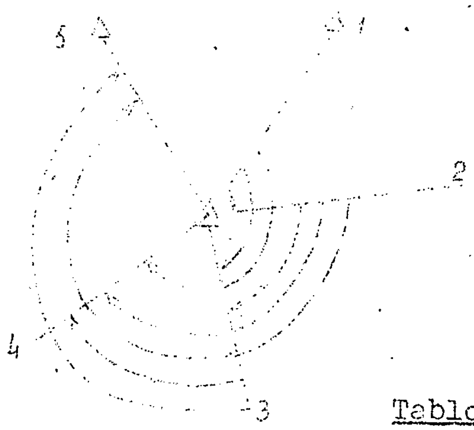
Unghiurile care se bazează pe o direcție veche se iau jumătate [(12), (24), (13) și (34)].

Unghiul (23), cuprins între două direcţii noi, se citeşte complet.

Tabloul originilor

Unghiul	Originile					
	1	2	3	4	5	6
(12)	$0^c00'$		$33^c33'$		$66^c67'$	
(24)		$16^c67'$		$50^c00'$		$83^c33'$
(13)	$5^c55'$		$38^c87'$		$72^c19'$	
(34)		$22^c22'$		$55^c55'$		$88^c32'$
(23)	$5^c55'$	$22^c22'$	$38^c87'$	$55^c55'$	$72^c19'$	$88^c88'$

Cazul a trei directii noi între două direcţii vechi fixe



Unghiul (15) fiind fix nu se mai citeşte.

Unghiurile care se bazează pe o direcţie veche se iau jumătate [(12), (13), (14), (25), (35), (45)].

Unghiurile (23), (24) şi (34), cuprinse între direcţii noi, se citesc complet.

Tabloul originilor

Unghiul	Originile					
	1	2	3	4	5	6
(12)	$0^c00'$	-	$33^c33'$	-	$66^c66'$	-
(13)	$5^c55'$	-	$38^c88'$	-	$72^c22'$	-
(14)	$11^c11'$	-	$44^c44'$	-	$77^c77'$	-
(15)	-	-	-	-	-	-
(23)	$11^c11'$	$27^c77'$	$44^c43'$	$61^c08'$	$77^c77'$	$94^c44'$
(24)	$5^c55'$	$22^c22'$	$38^c87'$	$55^c55'$	$72^c22'$	$88^c88'$

(Continuare)

Unghiul	O r i g i n i l e					
	1	2	3	4	5	
[illegible]	-	16°66'	-	50°00'	-	83°33'
(34)	0°00'	16°67'	33°33'	50°00'	66°67'	83°33'
(35)	-	22°22'	-	55°55'	-	88°88'
(45)	-	27°77'	-	61°09'	-	94°44'

b) CAZUL TEODOLITELOR CU DOUA MICROSCOAPE

Cazul unei directii noi cuprinsă între două directii vechi fixe

Tabloul originilor

Unghiul	Microscopul I			Microscopul II		
	1	2	3	1	2	3
(12)	0°00'	33°33'	66°66'	100°00'	133°33'	166°6[illegible]
(13)	-	-	-	-	-	-
(23)	16°66'	50°00'	83°33'	116°66'	150°00'	183°33'

La microscopul II originile sînt în continuare.

Cazul a două directii noi cuprinse între două directii vechi fixe

Tabloul originilor

Unghiul	Microscopul I			Microscopul II		
	1	2	3	1	2	3
(12)	0°00'	-	66°66'	-	133°33'	-
(13)	11°11'	-	77°77'	-	144°44'	-
(14)	-	-	-	-	-	-
(23)	11°11'	44°44'	77°77'	111°11'	144°44'	177°77
(24)	-	33°33'	-	100°00	-	[illegible]
(34)	-	44°44'	-	111°11'	-	177°77'

Cazul a trei direcţii noi cuprinse între două direcţii vechi fixe

Tabloul originilor

Unghiul	Microscopul I		Microscopul I şi II		Microscopul II	
	1	2	1	2	1	2
(12)	$0^{c}00'$	-	$66^{c}66'$	-	$133^{c}33$	-
(13)	$11^{c}11'$	-	$77^{c}77'$	-	$144^{c}44'$	-
(14)	$22^{c}22'$	-	$88^{c}88'$	-	$155^{c}55'$	-
(15)	-	-	-	-	-	-
(23)	$22^{c}22'$	$55^{c}55'$	$88^{c}88'$	$122^{c}22'$	$155^{c}55'$	$188^{c}88'$
(24)	$11^{c}11'$	$44^{c}44'$	$77^{c}77'$	$111^{c}11'$	$144^{c}44'$	$177^{c}77'$
(25)	-	$33^{c}33'$	-	$100^{c}00'$	-	$166^{c}66'$
(34)	$0^{c}00'$	$33^{c}33'$	$66^{c}66'$	$100^{c}00'$	$133^{c}33'$	$166^{c}66'$
(35)	-	$44^{c}44'$	-	$111^{c}11'$	-	$177^{c}77'$
(45)	-	$55^{c}55'$	-	$122^{c}22'$	-	$188^{c}88'$

d_3) OBSERVAŢIUNI ASUPRA METODEI SCHREIBER

1. Metoda Schreiber are marele avantaj că permite întreruperea observaţiunilor, nefiind obligaţi a termina observaţiile într-o staţie, în aceeaşi zi.

Principiul metodei fiind măsurarea unghiurilor izolate, trebuie să terminăm numai citirea unghiului izolat în curs de observare.

Astfel, dacă condiţiunile de lucru au devenit defavorabile, observaţiunile se vor relua în altă zi, fără a fi nevoie să se citească staţia de la început.

2. In cazul triangulaţiei de ordinul II şi III, originile se calculează ca şi pentru punctele de ordinul I, ţinîndu-se seama că greutăţile direcţiunilor (p) se vor lua :

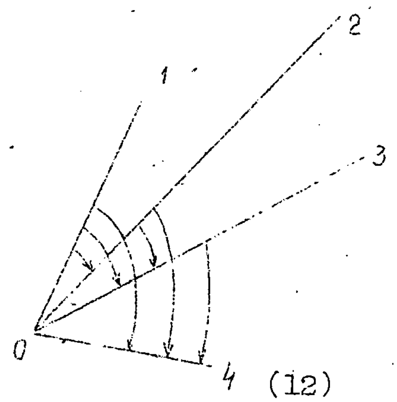
- pentru punctele de ordinul II : p = 16
- " " " " III: p = 8

3. Metoda Schreiber este obligatorie pentru triangulaţia primordială şi de preferat pentru triangulaţia de ordinul II şi III.

4. Observaţiile se fac cu luneta în ambele poziţii

d_4) COMPENSAREA UNGHIURILOR IN STATIUNE IN CAZUL METODEI SCHREIBER

Vom trata mai jos compensarea unghiurilor în staţie după Geissler, metodă bazată pe teoria celor mai mici pătrate.



Staţionîndu-se în 0 şi observîndu-se direcţiile 1, 2, 3 şi 4 s-au calculat unghiurile provizorii (media direcţiilor observate) pe care le vom numi unghiuri citite : (12), (13), (14), (23), (24) şi (34).

Formăm cu aceste unghiuri tabloul de mai jos :

(12)	(13)	(14)
	(23)	(24)
		(34)

Notăm cu paranteză mare valorile adevărate ale acestor unghiuri :

[12]	[13]	[14]	
	[23]	[24]	
		[34]	Notaţiile sînt după Gauss

Prin compensarea unghiurilor în staţie urmărim să determinăm valorile unghiurilor adevărate, care sînt tocmai necunoscutele problemei.

Notînd cu v_{12}, v_{13} ..... v_{34} erorile, adică diferenţa între valorile adevărate şi valorile măsurate, putem forma tabloul :

v_{12}	v_{13}	v_{14}
	v_{23}	v_{24}
		v_{34}

în care :

$$v_{12} = [12] - (12)$$

$$v_{13} = [13] - (13)$$

$$v_{14} = [14] - (14)$$

$$v_{23} = [23] - (23)$$

$$v_{24} = [24] - (24)$$

$$v_{34} = [34] - (34)$$

Considerăm ca valori independente <u>numai unghiurile independente</u>, adică unghiurile care au latura 01 comună. Erorile respective sînt :

① $$v_{12} = [12] - (12)$$
$$v_{13} = [13] - (13)$$
$$v_{14} = [14] - (14)$$

Unghiurile dependente [23], [24] şi [34] se pot obţine prin diferenţa unghiurilor independente [12], [13] şi [14] şi deci erorile corespunzătoare unghiurilor dependente vor fi :

② $$v_{23} = [13] - [12] - (23)$$
$$v_{24} = [14] - [12] - (24)$$
$$v_{34} = [14] - [13] - (34)$$

Cele 6 ecuaţii de mai sus (grupul (1) şi (2)) sînt tocmai <u>ecuaţiile de condiţie</u> ale problemei noastre. Inscriem într-un tablou termenii acestor ecuaţii :

Erori	[12]	[13]	[14]	(12)	(13)	(14)	(23)	(24)	(34)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v_{12}	+ [12]			-(12)					
v_{13}		+ [13]			-(13)				
v_{14}			+ [14]			-(14)			
v_{23}	- [12]	+ [13]					-(23)		
v_{24}	- [12]		+ [14]					-(24)	
v_{34}		- [13]	+ [14]						-(34)

Se observă că necunoscutele celor 6 ecuaţii sînt în număr de 9 (unghiurile adevărate [12], [13] şi [14] şi erorile v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{23}, v_{24} şi v_{34}), iar cunoscutele sînt în număr de 6 (unghiurile măsurate (12), (13), (14), (23), (24) şi (34)).

In cazul exemplului nostru tabloul are 9 coloane avînd 9 necunoscute.

Sistemul celor 6 ecuaţii de condiţie conţinînd mai multe necunoscute (9) decît numărul ecuaţiilor (6) nu se poate rezolva pe cale algebrică obişnuită.

Aplicînd principiul metodei celor mai mici pătrate care pune condiţia ca suma pătratelor erorilor să fie minimă ($v_{12}^2 + v_{13}^2 + v_{14}^2 + v_{23}^2 + v_{24}^2 + v_{34}^2 = \min$) şi introducînd ecuaţiile corelatelor (ecuaţii care servesc pentru determinarea erorilor v_{12}, v_{13} ..... v_{34}), transformăm ecuaţiile de condiţie în <u>ecuaţii normale</u>, adică în ecuaţii care să conţină acelaşi număr de necunoscute ce şi numărul ecuaţiilor.

Ecuaţiile normale la care se ajunge, denumite şi ecuaţii simetrice, sînt următoarele :

$$[aa]\ [12] + [ab]\ [13] + [ac]\ [14] + w_1 = 0$$
$$[ba]\ [12] + [bb]\ [13] + [bc]\ [14] + w_2 = 0$$
$$[ca]\ [12] + [cb]\ [13] + [cc]\ [14] + w_3 = 0,$$

în care :

- [12] , [13] şi [14] sînt unghiurile adevărate, adică cele 3 necunoscute pe care ne-am propus să le determinăm;
- [aa] , [ab] ..., [cb] şi [cc] sînt coeficienţii necunoscutelor [12] , [13] şi [14] ;
- w_1, w_2 şi w_3 sînt termenii constanţi ai ecuaţiilor normale.

<u>Coeficienţii [aa] , [ab] .... [cb] şi [cc]</u> se obţin astfel, folosind tabloul de mai sus :

- Coeficientul [aa] al necunoscutei [12] se obţine făcînd suma pătratelor coeficienţilor valorilor din coloana 2 :

$$[aa] = (+1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 = 3$$

- Coeficientul [bb] al necunoscutei [13] se obţine făcînd suma pătratelor coeficienţilor valorilor din coloana 3 :

$$[bb] = (+1)^2 + (+1)^2 + (-1)^2 = 3$$

- Coeficientul [cc] al necunoscutei [14] se obţine făcînd suma pătratelor coeficienţilor valorilor din coloana 4 :

$$[cc] = (+1)^2 + (+1)^2 + (+1)^2 = 3$$

- Coeficientul [ab] = coeficientul [ba] se obţine făcînd suma produselor coeficienţilor valorilor din coloanele 2 cu 3:

$$[ab] = [ba] = (+1) \times 0 + 0 \times (+1) + 0 \times 0 + (-1) \times (+1) + (-1) \times 0 + 0 \times (-1) = -1$$

- Coeficientul [ac] = coeficientul [ca] se obţine făcînd suma produselor coeficienţilor valorilor din coloanele 2 cu 4:

$$[ac] = [ca] = (+1) \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times (+1) + (-1) \times 0 + (-1) \times (+1) + 0 \times (-1) = -1.$$

- Coeficientul [bc] şi coeficientul [cb] se obţine făcînd suma produselor coeficienţilor valorilor din coloanele 3 cu 4:

$$[bc] = [cb] = 0 \times 0 + (+1) \times 0 + 0 \times (+1) + (+1) \times 0 + 0 \times (+1) + (-1) \times (+1) = -1$$

Termenul constant w_1 (w_2 şi w_3) se obţine făcînd suma produselor coeficienţilor unghiului adevărat [12] din coloana 2 (respectiv unghiului adevărat [13] şi [14] din coloanele 3 şi 4) cu valorile unghiurilor citite ce se găsesc în celelalte coloane :

$$w_1 = (+1)\ (-12) + (-1)\ (-23) + (-1)\ (-24) = -(12) + (23) + (24)$$

$$w_2 = (+1)\ (-13) + (+1)\ (-23) + (-1)\ (-34) = -(13) - (23) + (34)$$

$$w_3 = (+1)\ (-14) + (+1)\ (-24) + (+1)\ (-34) = -(14) - (24) - (34)$$

Inlocuind în ecuaţiile normale coeficienţii necunoscutelor [12] , [13] şi [14] şi termenii constanţi cu valorile de mai sus obţinem un sistem de 3 ecuaţii cu 3 necunoscute, rezolvabil pe cale algebrică obişnuită :

Prima ecuaţie normală :

$$[aa]\ [12] + [ab]\ [13] + [ac]\ [14] + w_1 = 0$$

Inlocuind :

(1) $$3\ [12] - [13] - [14] - (12) + (23) + (24) = 0$$

A doua ecuaţie normală :

$$[bc]\ [12] + [bb]\ [13] + [bc]\ [14] + w_2 = 0$$

Inlocuind :

(2) $$-[12] + 3\ [13] - [14] - (13) - (23) + (34) = 0$$

A treia ecuaţie normală :

$$[ca]\ [12] + [cb]\ [13] + [cc]\ [14] + w_3 = 0$$

Inlocuind :

(3) $$-[12] - [13] + 3\ [14] - (14) - (24) - (34) = 0$$

Pentru a rezolva sistemul ecuaţiilor (1), (2) şi (3) însumăm cele 3 ecuaţii :

(4) $$[12] + [13] + [14] - (12) - (13) - (14) = 0$$

Adunăm ecuaţia (1) cu (4) şi obţinem valoarea necunoscutei [12] :

$$4\,[12] - 2(12) - (13) - (14) + (23) + (24) = 0$$

$$\text{Ung. } [12] = \frac{2(12) + [(13) - (23)] + [(14) - (24)]}{4}$$

Adunînd ecuația (2) cu (4) obținem valoarea necunoscutei [13]:

$$4\,[13] - (12) - 2(13) - (14) - (23) + (34) = 0$$

$$\text{Ung. } [13] = \frac{2(13) + [(14) - (34)] + [(12) + (23)]}{4}$$

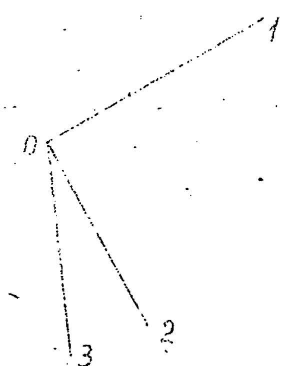
Adunînd ecuația (3) cu (4) obținem valoarea necunoscutei [14]:

$$4\,[14] - 2(14) - (12) - (13) - (14) - (24) - (34) = 0$$

$$\text{Ung. } [14] = \frac{2(14) + [(12) + (24)] + [(13) + (34)]}{4}$$

Am determinat astfel valorile unghiurilor adevărate [12], [13] și [34], constrîngînd (compensînd) unghiurile citite să satisfacă anumite relații de condiție. Se observă că valoarea unghiului adevărat, spre exemplu [13], se obține ca o medie ponderată, luînd unghiul citit (13) cu greutate 2 [2(13)], iar valorile din care rezultă acest unghi prin adunarea sau scăderea celorlalte unghiuri citite cu greutate 1 (1 [(14) - (34)] și 1 [(12) + (23)]).

E x e m p l u.



Staționîndu-se în O s-au citit direcțiile 1, 2 și 3.

Unghiurile citite (media direcțiilor):

(12) = $101^c 81' 35'',38$ (13) = $121^c 10' 61'',38$

(23) = $19^c 29' 24'',38$

Compensarea unghiurilor

Unghiuri independente sînt unghiurile [12] și [13] care au latura O1 comună.

- Ung. [12] se obține luînd unghiul citit (12) cu greutate 2, iar diferența unghiurilor citite (13) și (23) - diferență prin care se mai poate obține unghiul (12) - cu greutate 1.

- Ung. [13] se obține luînd unghiul citit (13) cu greutate 2, iar suma unghiurilor citite (12) și (23) - sumă prin care se mai poate obține unghiul (13) - cu greutate 1.

Ung. [23] se obţine făcind diferenţa unghiurilor compensate (adevărate) [13] şi [12] .

Ung. [12]		Ung. [13]	
(12)	$= 101^c81'35'',38$	(13)	$= 121^c10'61'',38$
(12)	$= 101^c81'35'',33$	(13)	$= 121^c10'61'',38$
(13)-(32)	$= 101^c81'36'',50$	(12)+(23)	$= 121^c10'60'',26$
[12]	$= 101^c81'35'',75$	[13]	$= 121^c10'61'',01$

Ung. [23]

[23] = [13] - [12] = $19^c29'25'',26$

Eroarea mijlocie a unui unghi măsurat, în cazul observatiunilor cu metoda Schreiber (înainte de compensare)

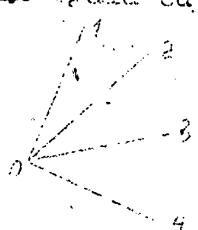
Eroarea de închidere pentru Schreiber este dată de formula :

$$m = \pm \sqrt{\frac{|VV|}{N - n}}$$

în care :

- $|VV|$ = suma pătratelor erorilor celor N unghiuri măsurate (v_{12} = [12] - (12), v_{13} = [13] - (13), etc);
- N = numărul total al unghiurilor măsurate;
- n = numărul unghiurilor independente.

Pentru ca observaţiile cu metoda Schreiber să fie valabile, trebuie ca eroarea de închidere "m" să fie mai mică sau cel mult egală cu 9" : $m_{max} \leq 9''$.



E x e m p l u.

N = 6
n = 3

Recapitulaţia unghiurilor citite

(12) = $26^c50'30'',00$ (13) = $49^c54'57'',50$ (14) = $91^c36'26'',50$

(23) = $23^c04'23'',00$ (24) = $64^c85'93'',50$

(34) = $41^c81'49'',75$

Recapitulaţia unghiurilor definitive

[12] = $26^c50'31'',37$ [13] = $49^c54'61'',19$ [14] = $91^c36'20'',94$

[23] = $23^c04'29'',32$ [24] = $64^c35'89'',07$

[34] = $41^c81'59'',75$

Erori

$[12] = 26^c50'31'',87$
$(12) = 26^c50'30'',00$
$v_{12} = + 1'',87$

$[13] = 49^c54'61'',19$
$(13) = 49^c54'57'',50$
$v_{13} = + 3'',69$

$[14] = 91^c36'20'',94$
$(14) = 91^c36'26'',50$
$v_{14} = - 5'',56$

$[23] = 23^c04'29'',32$
$(23) = 23^c04'23'',00$
$v_{23} = + 6'',32$

$[24] = 64^c85'89'',07$
$(24) = 64^c85'93'',50$
$v_{24} = - 4'',43$

$[34] = 41^c81'59'',75$
$(34) = 41^c81'49'',75$
$v_{34} = + 10'',00$

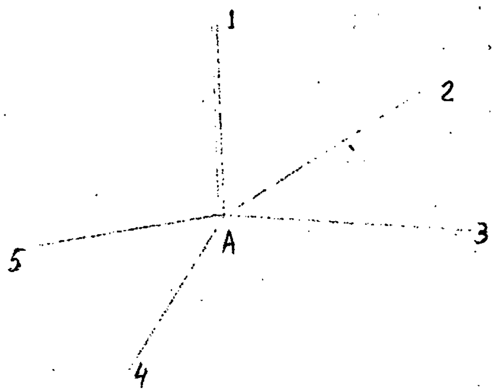
Ung.	V	VV
1 - 2	+ 1",87	3",4969
1 - 3	+ 3",69	13",6161
1 - 4	- 5",56	30",9136
2 - 3	+ 6",32	39",9424
2 - 4	- 4",43	16",6249
3 - 4	+10",00	100",0000

$|VV| = 207'',5939$

$$m = \pm\sqrt{\frac{|VV|}{N-n}} = \pm\sqrt{\frac{207'',5939}{6-3}} = \pm\sqrt{69,1979} = \pm 8'',32$$

$m = \pm 8'',32 < 9''$, deci observațiunile sînt valabile.

e) METODA SERIEI (METODA TURULUI DE ORIZONT)



Constă în a începe citirea pe o direcție de referință, spre exemplu A-1 și a citi toate punctele care sînt pe tur de orizont (2, 3, 4 și 5), închizînd turul pe direcția de referință A-1.

Operațiunile se repetă cu luneta peste cap.

Cele două tururi executate cu luneta în poziția I și II constituie o serie.

Observarea unghiurilor se face cu metoda reiterației, luîndu-se origini diferite ale limbului pentru un anumit număr de serii.

Direcția de referință poate fi un punct din triangulația veche, un punct al triangulației noi sau un punct care nu intră în triangulație, dar care este bine vizibil (cruce de biserică, coș de fabrică, etc).

Dacă neînchiderea (diferența dintre citirea de plecare de pe punctul de referință și citirea de sosire pe punctul de referință) este sub toleranță, se repartizează cu semn schimbat în mod egal tuturor unghiurilor (corecția = $-\frac{\text{neînchidere}}{\text{nr. vizelor}}$)

Toleranța erorii de închidere este dată de formula :

$$T = \pm \varepsilon'' \sqrt{n}, \text{ în care :}$$

n - numărul vizelor;
ε - variază cu ordinul triangulației :

- Ordinul I : ε = 4"
- Ordinul II și III : ε = 6"
- Ordinul IV - V : ε = 10" - 50" (după aparat)

Numărul seriilor este funcție de ordinul triangulației:

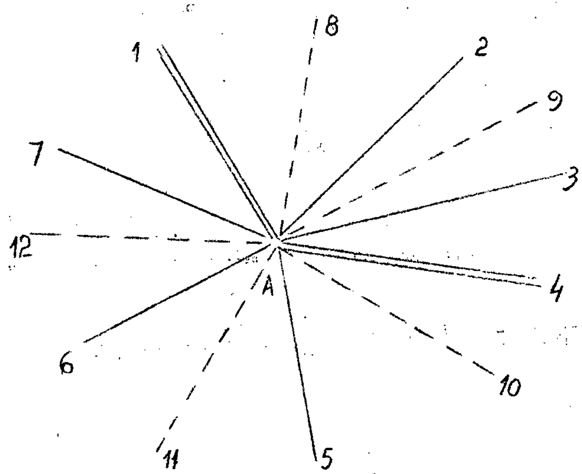
- Ordinul I : 24 serii (turul de orizont executat cu ambele poziții ale lunetei se repetă de 24 ori);
- Ordinul II : 16 serii;
- Ordinul III: 8 serii
- Ordinul IV și V : 2 serii.

În cazul triangulației de ordinul IV numărul vizelor dintr-o serie este limitat la 10. Dacă numărul punctelor este mai mare, se vor face 2 grupe care să conțină fiecare vize repartizate pe tot orizontul. În cel de al doilea grup se vor lua cel puțin 2 din vizele primului, din care una va fi direcția de referință, în scopul de a se putea face compensarea unghiurilor în stație.

Instrucțiunile D 12 Cadastrului interzic metoda seriei pentru triangulația primordială.

e_1) COMPENSAREA UNGHIURILOR ÎN STAȚIE ÎN CAZUL METODEI SERIEI

- Dacă numărul vizelor nu a fost mare, astfel că nu a fost necesar să se facă două grupe (două tururi de orizont parțiale), unghiurile definitive se calculează ca medie a valorilor obținute cu cele "n" serii, cu condiția ca observațiunile să aibă aceeași greutate.



- Dacă se fac două tururi parțiale, compensarea se face utilizînd cele două direcțiuni comune ambelor tururi :

- 1,2,3,4,5,6,7 = direcțiunile primului tur;
- 1,8,9,4,10,11 și 12 = direcțiunile turului doi;
- 1 și 4 = direcțiile comune, 1 fiind direcția de referință a ambelor tururi.

- Se calculează unghiul mediu 1A4 pentru fiecare tur.

- Se face media celor două valori, care este cea mai probabilă valoare a unghiului 1A4 :

$$\text{Ung. } 1A4_m = \frac{\text{Ung. } 1A4_{tur\ I} + \text{Ung. } 1A4_{tur\ II}}{2}$$

- Se face diferența dintre unghiul 1A4 mediu și unghiul 1A4 rezultat din turul I :

$$\text{Ung. } 1A4_m - \text{Ung. } 1A4_{tur\ I} = \Delta$$

- Unghiurile din primul tur (1A2, 1A3, 1A5, 1A6 și 1A7) se vor corecta cu $+\frac{\Delta}{4}$, iar unghiurile celui de al doilea tur (1A8, 1A9, 1A10, 1A11 și 1A12) cu $-\frac{\Delta}{4}$, obținîndu-se unghiurile compensate.

- Unghiul compensat 1A4 este egal cu media unghiului 1A4 rezultat din cele două tururi (sau : $1A4 = 1A4_{tur\ I} + \frac{\Delta}{2} = 1A4_{tur\ II} + \frac{\Delta}{2}$).

E x e m p l u, (figura de mai sus).

Numărul punctului vizat	Media direcțiilor observate								Corec- țiuni	Direcțiuni compensate			
	TUR I				TUR II								
	c	'	"		c	'	"			c	'	"	
1	0	00	00	00	0	00	00	00	0",00	0	00	00	00
8					43	81	18	43	+ 0",38	43	81	18	81
2	81	15	28	35					- 0",38	81	15	27	97
9					99	66	35	18	+ 0",38	99	66	35	56
3	108	25	81	28					- 0",38	108	25	80	90
4	121	77	18	33	121	77	16	82	- 0",76	121	77	17	58
10					142	05	32	10	+ 0",38	142	05	32	48
5	208	32	44	48					- 0",38	208	32	44	10
11					235	99	81	89	+ 0",38	235	99	82	27
6	300	12	32	17					- 0",38	300	12	31	79
12					312	15	29	71	+ 0",38	312	15	30	09
7	352	16	43	58					- 0",38	352	16	43	20

$$\Delta = 121^c77'18",33 - 121^c77'16",82 = 1",51$$

$$\frac{\Delta}{2} = \frac{1",51}{2} = 0",76$$

$$\frac{\Delta}{4} = \frac{1",51}{4} = 0",38$$

Direcțiunea comună se corectează cu ± 0",76, luîndu-se media.

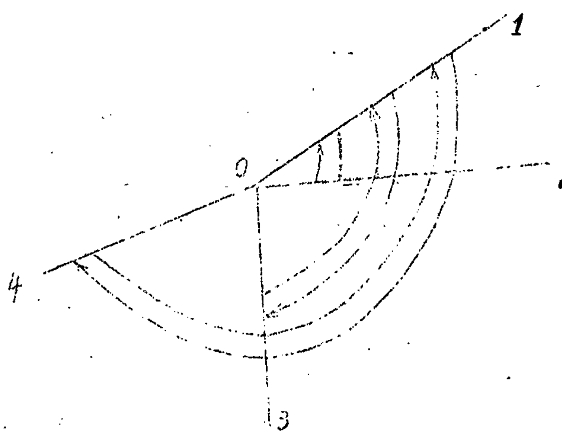
Direcțiunile primului tur se corectează cu - 0",38, iar ale turului 2 cu + 0",38.

f) METODA CUPLELOR DE REFERINTA

Constă în a observa fiecare direcțiune prin cupluri față de una din direcțiile aleasă ca direcția de plecare (0 - 1).

Numărul cuplurilor depinde de ordinul triangulației. Pentru triangulația de ordinul I se recomandă ca fiecare direcție să fie cuplată la direcția de referință cu 16 observațiuni de cuplu reiterate.

Toleranța admisibilă este ca fiecare observație-cuplu să nu difere de media aritmetică a tuturor cuplurilor cu mai mult de 16".



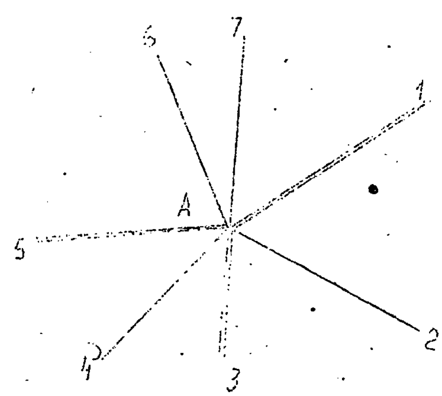
Această metodă se întrebuinţează în Franţa.

g) METODA SECTOARELOR

Constă în a diviza turul de orizont în mai multe sectoare, cu scopul ca unghiurile dinăuntrul unui sector să se observe în condiţiuni atmosferice apropiate, observarea direcţiunilor dintr-o staţie, efectuîndu-se în timp.

Direcţiile A - 1, A - 3 şi A - 5 se numesc direcţii principale.

Unghiurile (13), (35) şi (51) se numesc unghiuri de sector.



Unghiurile de sector se măsoară prin metoda reiteraţiei, luîndu-se ca origini diferite poziţii ale cercului orizontal.

In final se adună sectoarele, suma unghiurilor de sector trebuind a fi egală, matematic, cu 400^{g}. Diferenţa reprezintă neînchiderea, care se repartizează în raport invers cu greutatea fiecărui sector ($\frac{1}{p}$).

Greutatea fiecărui sector este în funcţie de numărul unghiurilor sectorului respectiv.

Directiunile intermediare (2, 4, 6, 7) se observă după citirea unghiurilor de sector, luînd ca direcţie de referinţă direcţia principală a sectorului respectiv. Citirile se fac cu reiteraţie. Neînchiderea (diferenţa dintre valoarea unghiului de sector şi suma unghiurilor elementare ale sectorului considerat) se repartizează proporţional cu greutatea unghiurilor elementare.

Metoda sectoarelor se utilizează în Elveţia.

x

x x

INTOCMIREA PLANULUI DE OBSERVAȚIUNI

După ce plantarea punctelor a fost terminată se întocmește o schiță definitivă care trebuie să cuprindă atât punctele vechi cît și cele noi.

Ținînd seama de datele culese pe teren (verificarea vizibilității tuturor vizelor) se duc pe schiță toate vizele posibile.

Cu ajutorul acestei schițe se întocmește planul de observațiuni, trecîndu-se apoi într-un tabel punctele care trebuie citite din fiecare stație.

Scopul întocmirii planului de observațiuni este stabilirea punctelor ce urmează să fie observate din fiecare stație, astfel ca să nu se citească decît punctele care ne interesează pentru calcul.

La întocmirea planului de observație trebuie să se țină seama de următoarele considerațiuni :

- Toate punctele de legătură (de ordin superior sau inferior) trebuie staționate, întrucît din ele se vor determina punctele noi.

- Punctele triangulației noi trebuie staționate și în special acelea din care se văd cît mai multe puncte vechi.

- Trebuie să staționăm în punctele pe care nu le putem determina prin vize dinafară (aceste puncte se vor determina prin Pothenot).

- In planul de observație trebuie să se prevadă puncte în plus, ca rezervă, pentru cazul dispariției unor semnale.

După întocmirea planului de observații se trece la alcătuirea planului de calcul (proiectului definitiv).

x

x x

REGULI PRACTICE DE TEREN

- Să nu se uite ca în fiecare stație să se ia înălțimea aparatului.

- De asemenea să nu se uite măsurarea înălțimii semnalelor. In cazul triangulației de ordinul IV este practic ca semnalele să aibă înălțime standard (aceeași înălțime).

- Niciodată să nu se citească triangulația fără umbrelă.

- Unghiurile orizontale să se observe, pe cît posibil, dimineață și spre seară. Se preferă observațiunile făcute spre seară, dimineața imaginea semnalelor fiind mai puțin clară.

- Vizele razante cu pămîntul trebuie complet evitate.

- Vizele ce trec peste păduri, cîmpii, ape, comunicații se pot da în bune condițiuni numai pe timp rău (ploaie sau vînt ușor).

- Este preferabil ca punctele situate la vestul stației să se observe dimineața, iar cele de la est seara, cînd sînt bine luminate.

- Pentru punctele a căror imagine nu este precisă (joacă) se va mări numărul punctărilor.

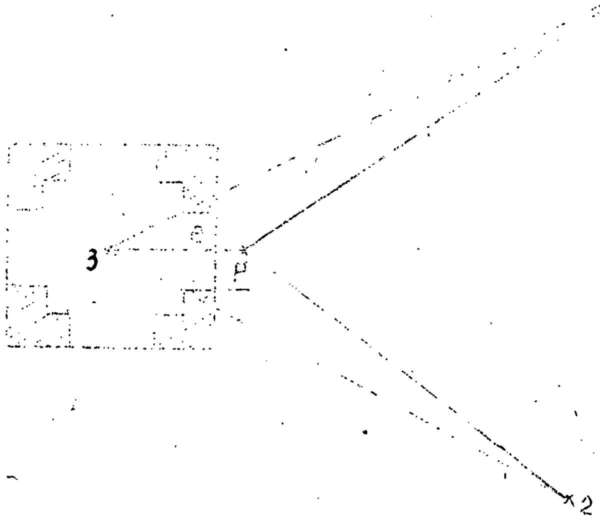
- Punctarea se va face de regulă între cele 2 fire reticulare. Punctarea se poate face și cu ambele fire, executînd același număr de punctări cu fiecare fir și luînd media citirilor.

- Dacă în cazul triangulației de ordinul IV se folosește metoda seriilor, se recomandă să se facă 3 serii și nu 2.

- Unghiurile verticale trebuie citite în orele cele mai calde ale zilei, cînd refracția atmosferică este minimă.

4. CENTRAREA VIZELOR

Sînt situațiuni cînd staționîndu-se într-o piramidă nu se pot vedea toate semnalele din cauza picioarelor piramidei.



Un alt caz este acela cînd sîntem într-un turn unde vizarea este limitată de ferestre.

Pentru a se putea face observațiile, mutăm stația din punctul matematic "3" undeva în afară, într-o stație excentrică "p".

a) Condițiile stației excentrice

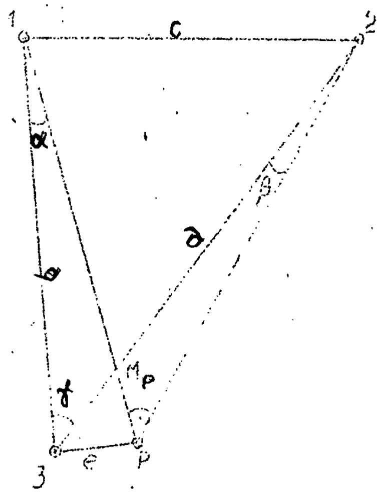
1. O stație excentrică trebuie să fie o sta-

ţie comodă, pentru a ne asigura precizia observaţiilor.

2. Staţia excentrică nu poate fi mai departe de punctul matematic ca $\frac{1}{1000}$ din lungimea laturei vizate.

In cazul triangulaţiei de ordinul I, excentricitatea "e" nu poate depăşi 20 m, indiferent de lungimea vizelor.

b) <u>Centrarea unghiurilor</u> (translocarea la centru sau readucerea unghiului la centrul staţiei).



Date :

- Coordonatele a două puncte de triangulaţie 2 şi 3.

- Se cere să se măsoare unghiurile triunghiului 123, în care vîrful 1 este punct nou.

Staţionînd-se în 1 şi 2 s-au măsurat unghiurile $2\hat{1}3$ şi $1\hat{2}3$.

Unghiul $1\hat{3}2$ nu se poate măsura, întrucît <u>vizarea spre cele două puncte</u> 1 şi 2 este împiedicată de picioarele piramidei.

Staţionăm în staţia excentrică P şi măsurăm unghiurile $2\hat{P}3$ şi $1\hat{P}3$.

Din figura de mai sus avem :

$$p = 2\hat{P}3 - 1\hat{P}3$$

$$\beta + p = \alpha + \gamma$$

Sau

$$\gamma = p + (\beta - \alpha)$$

Notăm :

(1) $$x = \beta - \alpha$$

Din triunghiul 13P avem :

$$\frac{\sin \alpha}{e} = \frac{\sin 1\hat{P}3}{b}$$

Sau :

(2) $$\sin \alpha = \frac{\sin 1\hat{P}3}{b} e$$

Din triunghiul 23P avem :

$$\frac{\sin \beta}{e} = \frac{\sin 2\hat{P}3}{a}$$

Sau

(3) $$\sin \beta = \frac{\sin 2\hat{P}3}{a} e$$

Unghiurile α şi β fiind foarte mici (e foarte mic faţă de distanţele 3 - 1 şi 3 - 2), putem înlocui $\sin \alpha$ şi $\sin \beta$:

$$\sin \alpha = \alpha'' \sin 1''$$

$$\sin \beta = \beta'' \sin 1''$$

Expresiunile (2) şi (3) devin :

(4) $$\alpha'' = \frac{e}{\sin 1''} \cdot \frac{\sin 1\hat{P}3}{b}$$

(5) $$\beta'' = \frac{e}{\sin 1''} \cdot \frac{\sin 2\hat{P}3}{a}$$

Inlocuim în (1) pe α şi β şi dînd factor comun pe $\frac{e}{\sin 1''}$:

(6) $$x'' = \frac{e}{\sin 1''} \left(\frac{\sin 2\hat{P}3}{a} - \frac{\sin 1\hat{P}3}{b} \right)$$

Din triunghiul 123 avem :

$$\frac{a}{\sin 2\hat{1}3} = \frac{b}{\sin 1\hat{2}3}$$

De unde:

(7) $$b = \frac{a}{\sin 2\hat{1}3} \sin 1\hat{2}3$$

Inlocuim în (4) pe b :

$$x'' = \frac{e}{\sin 1''} \left(\frac{\sin 2\hat{P}3}{a} - \frac{\sin 1\hat{P}3 \sin 2\hat{1}3}{a \sin 1\hat{2}3} \right)$$

Dăm factor comun pe $\frac{1}{a}$:

(8) $$\boxed{x'' = \frac{e}{a \sin 1''} \left(\sin 2\hat{P}3 - \frac{\sin 1\hat{P}3 \sin 2\hat{1}3}{\sin 1\hat{2}3} \right)}$$

In expresiunea de mai sus :

- x = corecţia, în secunde, ce se aplică unghiului măsurat "p" pentru a afla valoarea unghiului la centru "γ" ;
- e = distanţa 3 - P, care se măsoară cu panglica ;
- a = lungimea laturii 2 - 3, calculată din coordonate;
- $\frac{1}{\sin 1''} = \frac{1}{0.000.001.571} = 636.619,77$
- Unghiurile $2\hat{P}3$ şi $1\hat{P}3$ măsurate în P ;
- Unghiurile $2\hat{1}3$ şi $1\hat{2}3$ măsurate în 1 şi 2.

Notă.

Valorile unghiurilor α şi β au semne diferite după poziţia punctului P faţă de vîrful 3 al triunghiului.

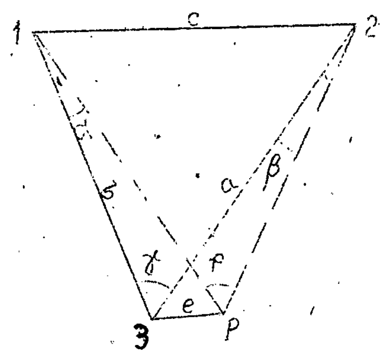
Se deosebesc patru cazuri :

Cazul 1

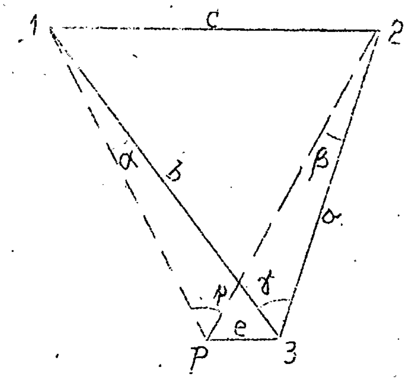
$$\alpha + \gamma = \beta + p$$

$$\gamma = p + (\beta - \alpha)$$

$$x'' = \beta - \alpha = \frac{e}{a} \cdot 636.619.77 \left(\sin 2\hat{P}3 - \frac{\sin 1\hat{P}3 \sin 2\hat{1}3}{\sin 1\hat{2}3} \right)$$



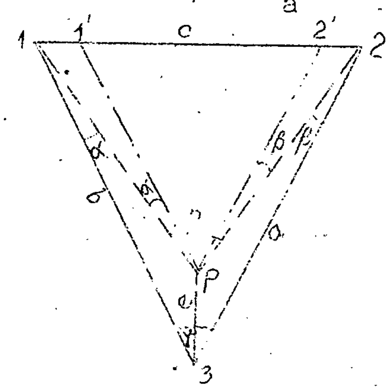
Cazul 1



Cazul 2

$$\alpha + p = \beta + \gamma$$
$$\gamma = p + (\alpha - \beta)$$

$$x'' = \alpha - \beta = \frac{e}{a} \cdot 636.619,77 \left(\frac{\sin 1\hat{P}3 \ \sin 2\hat{1}3}{\sin 1\hat{2}3} - \sin 2\hat{P}3 \right)$$

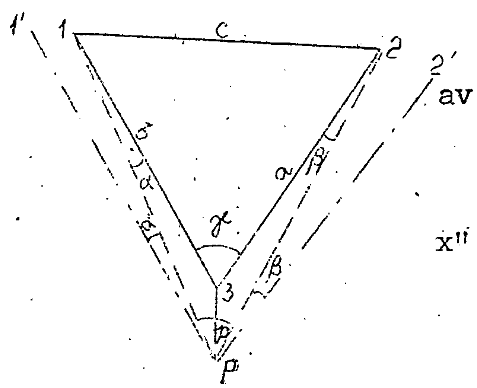


Cazul 3

Ducînd paralela P1' la latura 31 şi P2' la latura 32, avem :

$$\gamma = p - (\alpha + \beta)$$

$$x'' = -(\alpha + \beta) = \frac{e}{a} \cdot 636.619,77 \ x$$
$$x \left(\frac{\sin 1\hat{P}3 \ \sin 2\hat{1}3}{\sin 1\hat{2}3} + \sin 2\hat{P}3 \right)$$



Cazul 4

Ducînd paralelele P1' şi P2' avem :

$$\gamma = p + (\alpha + \beta)$$

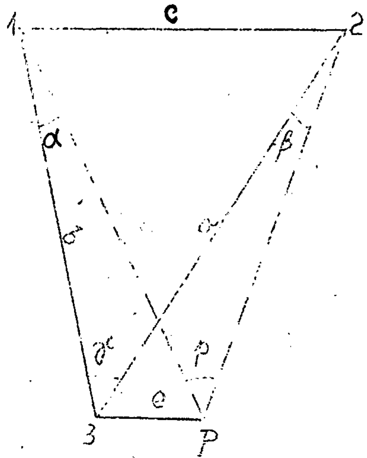
$$x'' = \alpha + \beta = \frac{e}{a} \cdot 636.619,77 \ x$$
$$x \left(\frac{\sin 1\hat{P}3 \ \sin 2\hat{1}3}{\sin 1\hat{2}3} + \sin 2\hat{P}3 \right)$$

E x e m p l u.

Fie 123 un triunghiu al reţelei de triangulaţie în curs de observare.

Staţionîndu-se în 1 şi 2 s-au observat unghiurile $2\hat{1}3$ şi $1\hat{2}3$:

$$2\hat{1}3 = 73^{c}21'30''$$
$$1\hat{2}3 = 71^{c}42'20''$$



Cum vizarea punctelor 1 şi 2 din 3 este împiedicată de picioarele piramidei, s-a staţionat excentric în P, măsurîndu-se unghiurile 2P3 şi 1P3 :

$$\widehat{2P3} = 122^c86'50''$$

$$\widehat{1P3} = 67^c50'10''$$

Măsurîndu-se cu o panglică latura 3P = e s-a găsit :

$$e = 0,52 \text{ m}$$

Calculîndu-se provizoriu laturile triangulaţiei (pînă la triunghiul 123) s-a găsit pentru latura 12 = C valoarea :

$$C = 1523,69 \text{ m.}$$

R e z o l v a r e.

$$p = \widehat{2P3} - \widehat{1P3} = 122^c86'50'' - 67^c50'10''$$

$$p = 55^c36'40''$$

$$\gamma^c = p + x$$

$$x'' = \beta - \alpha = \frac{e}{a \sin 1''}\left(\sin \widehat{2P3} - \frac{\sin \widehat{1P3} \sin \widehat{213}}{\sin \widehat{123}}\right)$$

Punctul 3 fiind nou, nu putem calcula direct pe "a".

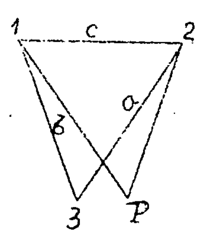
Pentru a afla lungimea laturii "a", rezolvăm triunghiul 123, luînd pentru unghiul γ^c o valoare provizorie :

$$\gamma^c = 200^c - (\widehat{123} + \widehat{213}) = 200^c - (71^c42'20'' + 73^c21'30'')$$

$$\gamma^c = 55^c36'50''$$

Rezolvăm triunghiul 123, în care cunoaştem unghiurile şi latura C.

Tabel pentru calculul triunghiului 123

Nr. de ordine	Triunghiul	Unghiul	Valoarea unghiului	Sinus	Latura Modulul	Lungimea laturii	Schiţa
1					1 - 2	1523,69	
2		3	$55^c36'50''$	0,764117			
3					2 - 3	1820,12	
4		1	$73^c21'30''$	0,913775			
5	123				M	1994,053	
6		2	$71^c42'20''$	0,900924			
7					1 - 3	1769,49	
8			$200^c00'00''$				

$$\frac{e}{a} \cdot \frac{1}{\sin 1''} = \frac{0,52}{1820,12} \times 636.619,77 = 178'',38$$

$$\sin 2\hat{P}3 = \sin 122^\circ 86'50'' = \cos 22^\circ 86'50'' = 0,936\ 191$$

$$\frac{\sin 1\hat{P}3 \ \sin 2\hat{1}3}{\sin 1\hat{2}3} = \frac{\sin 67^\circ 50'10'' \ \sin 73^\circ 21'30''}{\sin 71^\circ 42'20''} = \frac{0,872504 \times 0,912775}{0,900924} =$$

$$= 0,883981$$

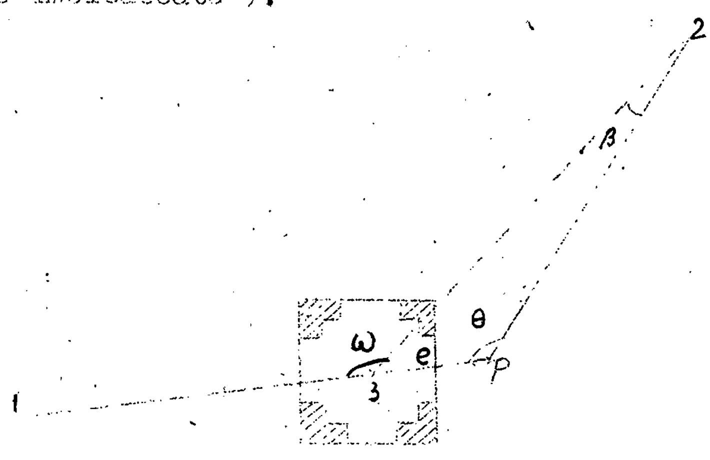
$$x = 178'',38\ (0,936191 - 0,883981) = 9'',31$$

$$\gamma = p + x = 55^\circ 36'40'' + 9'',31$$

$$\gamma = 55^\circ 36'49'',31$$

Se observă că unghiul γ ($55^\circ 36'49'',31$) diferă foarte puţin de valoarea aceluiaşi unghi calculată provizoriu pentru aflarea laturei a ($55^\circ 36'50''$), deoarece excentricitatea este foarte mică ($e = 0,52$ m).

c) <u>Centrarea direcţiunii</u> (cazul cînd <u>o singură viză</u> este împiedecată).



Fie două puncte de triangulaţie 1 şi 2 de coordonate cunoscute.

Se cere să se măsoare unghiul $1\hat{3}2 = \omega$, în situaţia că vizarea punctului 2 este împiedecată de piciorul piramidei (punctul 1 fiind un punct nou).

Facem o staţie excentrică pe prelungirea direcţiunii 1 - 3, în P.

Din figură avem :

(1) $$\omega = \theta + \beta$$

Din triunghiul 2P3 avem :

$$\frac{\sin\beta}{e} = \frac{\sin\theta}{a}$$

De unde :

(2) $$\sin\beta = \frac{\sin\theta}{a}\, e = \frac{e}{a} \sin\theta$$

β fiind foarte mic, putem înlocui :

$$\sin\beta = \beta''\ \sin 1''$$

Inlocuind în (2) :

(3) $$\boxed{\beta'' = \frac{1}{\sin 1''} \cdot \frac{e}{a} \sin\theta}$$

In expresiunea de mai sus :

- β se obţine în secunde;
- $\frac{1}{\sin 1''} = 636.619,77$
- e = excentricitatea, care se măsoară cu o panglică ;
- a = lungimea vizei 3-2, calculată din coordonate.

E x e m p l u.

a = 28.510,000 m
e = 5,810 m
$\theta = 139^c69'51''$

$$\beta'' = \frac{1}{\sin 1''} \cdot \frac{e}{a} \sin\theta$$

$$\beta'' = 636.619,77 \times \frac{28.510}{5,81} \times 0,583.902$$

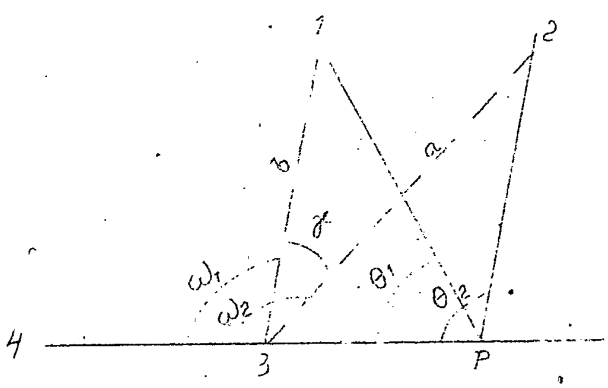
$$\beta'' = 75'',735$$

$$\omega = \theta + \beta = 139^c69'51'' + 75'',735$$

$$\omega = 139^c70'26'',735$$

Notă.

Considerînd vizarea a două direcţiuni împiedicată, unghiul la centru γ se poate obţine prin diferenţa unghiurilor ω_1 şi ω_2 :



$$\gamma = \omega_2 - \omega_1$$

$$\omega_2 = \theta_2 + \frac{1}{\sin 1''} \cdot \frac{e}{a} \sin\theta_2$$

$$\omega_1 = \theta_1 + \frac{1}{\sin 1''} \cdot \frac{e}{b} \sin\theta_1 ,$$

$$\gamma = \left[\theta_2 + \frac{1}{\sin 1''} \cdot \frac{e}{a} \sin\theta_2\right] - \left[\theta_1 + \frac{1}{\sin 1''} \cdot \frac{e}{b} \sin\theta_1\right]$$

Se observă că formula este valabilă numai pentru cazul alegerii punctului P pe prelungirea direcţiei 4 -3.

x

x x

5. PRECIZIA MASURARII UNGHIURILOR ORIZONTALE. ERORI.

a) Eroarea medie pătratică pentru o singură citire sau medie (e_s)

Orice instrument, cît de perfect, măsoară unghiurile cu anumite erori.

Experimental s-au stabilit erorile medii pătratice (e_q) ale teodolitelor Wild :

- Wild T2

$$e_s = \pm\sqrt{\frac{|vv|}{n-1}} = \pm 7'',0$$

- Wild T3

$$e_s = \pm\sqrt{\frac{|vv|}{n-1}} = \pm 6'',4$$

Cunoscîndu-se eroarea medie pătratică se poate calcula eroarea medie finală (eroarea de tirant a mediei aritmetice (e_m) pentru un număr "n" de reiterații :

$$e_m = \pm \frac{e_s}{\sqrt{n}}$$

E x e m p l u.

- Teodolit Wild T_2

Pentru 2 reiterații (n = 2) ..... $e_m = \frac{\pm 7''}{\sqrt{2}} = \pm 5''$

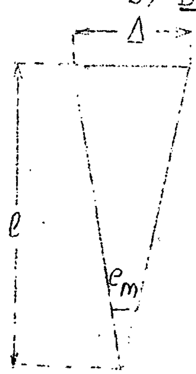
" 4 " (n = 4) ..... $e_m = \frac{\pm 7''}{\sqrt{4}} = \pm 3'',5$

" 8 " (n = 8) ..... $e_m = \frac{\pm 7''}{\sqrt{8}} = \pm 2'',5$

Mărind numărul reiterațiilor peste 10, eroarea de tirant e_m nu se mai micșorează în mod practic, deoarece erorile sistematice de vizare (punctare) și antrenarea limbului nu sînt atenuate prin reiterație.

Concluzie : Numărul reiterațiilor este limitat la 10.

b) Deplasările laterale datorite erorilor medii finale



$$\Delta = \ell \sin e_m$$

$$\sin e_m = e''_m \sin 1''$$

$$\boxed{\Delta = e''_m \times \ell \times \sin 1''}$$

- Δ = deplasarea exprimată în metri,
- ℓ = lungimea vizei în metri,

- e_m = eroare medie finală în secundă,
- $\sin 1'' = 0{,}000.001.570.7957$

E x e m p l u.

$\ell = 2000$ m

$e_m = \pm 2'',5$

$$\Delta = \pm 2'',5 \times 2000 \times 0{,}000.001.570.7957 \cong \pm 0{,}008 \text{ m}$$

c) <u>Toleranța închiderii turului de orizont</u> (T_H)

$$\boxed{T_H = \pm \mathcal{E}'' \sqrt{n}}$$

- $\mathcal{E}$ = eroarea medie de măsurare a unui unghi,
- n = numărul direcțiilor vizate.

Eroarea medie de măsurare a unui unghi ($\mathcal{E}$) este egală:

- Teodolit Wild T_2 ...... $\mathcal{E} = 6''$
- " " T_3 ... $\mathcal{E} = 4''$
- Tachimetru .... $\mathcal{E}$ = citirea prin estimație. (Exemple: tachimetre care citesc direct minutul, $\mathcal{E} = 50''$ = estimația ; tachimetre care dau citirea directă 20", $\mathcal{E} = 10''$ = estimația).

E x e m p l u.

- Triangulația de ordinul IV,
- Unghiul observat prin metoda seriei,
- Tur de orizont de 9 vize,
- Aparat : Starke Kammerer centi cu citire directă 20"

$$T_H = \pm \mathcal{E}'' \sqrt{n}$$

$$\mathcal{E} = \frac{20''}{2} = 10''$$

$$n = 9$$

$$T_H = \pm 10'' \sqrt{9} = \pm 30'' \text{ centi}$$

Pentru ca observațiunile să fie valabile trebuie ca pentru fiecare serie închiderea turului de orizont să fie mai mică ca 30".

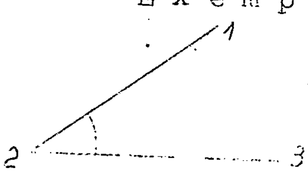
d) <u>Toleranța ecartului maxim al valorilor unghiulare ce intră în medie</u> ($T \Delta_{max}$)

Se utilizează aceeași formulă ca a toleranței de închidere a turului de orizont :

$$T \Delta_{max} = \pm \mathcal{E} \sqrt{n} \ ,$$

- n = numărul valorilor ce intră în medie,
- $\mathcal{E}$ = valorile arătate la "Toleranța închiderii turului de orizont".

E x e m p l u.



Măsurîndu-se unghiul 123 cu 4 reiterații, în cadrul unei triangulații de ordinul V, executată cu un tachimetru ce dă prin estimație 50", s-au obținut următoarele valori corectate de eroare

-de închidere ?

- Relaţia 1-a = 38^{c}52'36"
- " 2-a = 38^{c}53'17"
- " 3-a = 38^{c}53'02"
- " 4-a = 38^{c}52'91"

Pentru a putea face media celor 4 valori obţinute cu cele 4 reiteraţii, trebuie ca ecartul maxim (Δ_{max}) să fie inferior sau cel mult egal cu toleranţa :

$$\Delta_{max} \leq {}^T\Delta_{max}$$

$$\Delta_{max} = 38^c53'17" - 38^c52'36" = 81"$$

$$^T\Delta_{max} = \pm \mathcal{E}\sqrt{n} = \pm 50"\sqrt{4} = \pm 100"$$

81" < 100", deci se poate trece la calcularea mediei aritmetice, obţinîndu-se valoarea definitivă a unghiului 123.

e) Criterii după care se judecă că un unghi a fost bine măsurat în cazul triangulaţiei topografice

1. Inchiderea turului de orizont să nu depăşească toleranţa la fiecare repetiţie sau reiteraţie.

2. Ecartul maxim al seriei de valori obţinute pentru aceeaşi direcţie să nu depăşească toleranţa.

3. Calculîndu-se eroarea medie pătratică (e_q) trebuie satisfăcută dubla inegalitate :

$$\frac{{}^T\Delta_{max}}{2} > e_q > \frac{\Delta_{max}}{3},$$

E x e m p l u.

- Tachimetru Starcke ce dă prin citire directă 20" (estimaţie 10")
- Metoda reiteraţiei
- Numărul reiteraţiilor = 4
- Numărul direcţiilor = 4

Erorile de închidere a turului de orizont pentru fiecare reiteraţie fiind inferioare toleranţei, s-au calculat "unghiurile corectate".

Reiteraţia / Unghiul	Reiteraţia 1	Reiteraţia 2	Reiteraţia 3	Reiteraţia 4	Δ_{max}
152	81.04.79	81.04.72	81.04.81	81.04.73	04.81-04.72= 9"
153	222.00.86	222.00.79	222.00.83	222.00.89	00.89-00.79=10"
154	349.04.70	349.04.74	349.04.69	349.04.76	04.76-04.69= 7"

$T \Delta_{max} = \pm 10'' \sqrt{4} = \pm 20''$.

Ecartul maxim al celor 4 valori obţinute pentru fiecare unghi cu cele 4 reiteraţii fiind mai mic decît toleranţa, s-a calculat media aritmetică, obţinîndu-se următoarele <u>unghiuri definitive</u> :

Unghiuri	Valoarea unghiurilor definitive
152	81.04.76
153	222.00.84
154	349.04.72

<u>Calculul erorii medii pătratice e_q</u> $= \pm \sqrt{\frac{|VV|}{n-1}}$

Unghiul 152		Unghiul 153		Unghiul 154	
V	VV	V	VV	V	VV
3	9	2	4	2	4
4	16	5	25	2	4
5	25	1	1	3	9
3	9	5	25	4	16
$\lvert VV \rvert = 59$		$\lvert VV \rvert = 55$		$\lvert VV \rvert = 33$	
$e_q = \pm\sqrt{\frac{59}{4-1}} = \pm 4'',43$		$e_q = \pm\sqrt{\frac{55}{4-1}} = \pm 4'',28$		$e_q = \pm\sqrt{\frac{33}{4-1}} = \pm 3'',31$	

<u>Verificarea satisfacerii dublei inegalităţi</u>

$$\frac{T}{2} > e_q > \frac{\Delta_{max}}{3}$$

<u>Unghiul 152</u>

$$\frac{T}{2} = \frac{10''}{2} = 5''$$

$$e_q = 4'',43$$

$$\frac{\Delta max}{3} = \frac{9''}{3} = 3''$$

$5'' > 4'',43 > 3$

Unghiul 153

$$\frac{T}{2} = 5''$$

$$e_q = 4'',28$$

$$\frac{\Delta \max}{3} = \frac{10''}{3} = 3'',33$$

$$5'' > 4'',28 > 3'',33$$

Unghiul 154

$$\frac{T}{2} = 5''$$

$$e_q = 3'',31$$

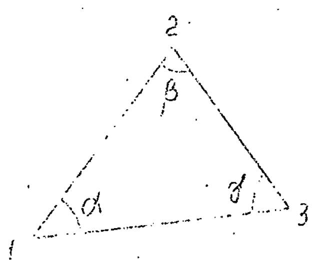
$$\frac{\Delta \max}{3} = \frac{7''}{3} = 2'',33$$

$$5'' > 3'',21 > 2'',33$$

Inegalitatea $\frac{T}{2} > e_q > \frac{\Delta \max}{3}$ fiind satisfăcută pentru toate unghiurile, conchidem că ele au fost bine măsurate.

In cazul că criteriul de mai sus nu este îndeplinit, observaţiile trebuie refăcute.

f) Toleranţa erorii de închidere a triunghiurilor (T_w)



Eroarea de închidere a unui triunghi (w) este dată de relaţia :

$$w = 200^c - (\alpha + \beta + \gamma^c)$$ x)

Toleranţa erorii de închidere a triunghiului se calculează cu formula:

$$T_W = \pm \varepsilon'' \sqrt{3} ,$$

în care ε are următoarele valori :

- Wild T_2 : $\varepsilon = 6''$
- Wild T_3 : $\varepsilon = 4''$
- Tachimetre care dau prin estimaţie 50" : $\varepsilon = 50''$
- " " " " " 10" : $\varepsilon = 10''$

E x e m p l u.

- Wild T_2
- Unghiurile măsurate

---

x) In cazul triangulaţiei topografice nu se ţine seama de excesul sferic care pentru laturi mici are valori neglijabile.

$\alpha = 41^c14'58''$

$\beta = 69^c70'24''$

$\gamma = 89^c15'10''$

$w = 200^c - (41^c14'58'' + 69^c70'24'' + 89^c15'10'') = -8''$

$T_w = \pm 6''\sqrt{3} = \pm 6'' \times 1,73 = \pm 10'',38$

$8'' < 10'',38$, deci unghiurile sînt bine măsurate şi se poate trece la compensarea triunghiului.

Dacă eroarea de închidere depăşeşte toleranţa, cercetăm fiecare din unghiurile α, β şi γ, aplicînd criteriul $\frac{T\,\Delta max}{2} > e_q > \frac{\Delta max}{3}$ pentru a vedea observaţiile din care vîrf al triunghiului trebuie refăcute.

g) <u>Calculul preciziei triangulaţiei cu ajutorul formulei internationale a lui Ferrero</u>

Eroarea mijlocie a unui unghi dintr-o triangulaţie oarecare se calculează cu formula apropiată a lui Ferrero :

$$E_{m\ ungh.} = \pm\sqrt{\frac{\Sigma w^2}{3N}}\ ,\quad \text{în care}$$

- W = eroarea de închidere a fiecărui unghi din reţea
- N = numărul triunghiurilor reţelei.

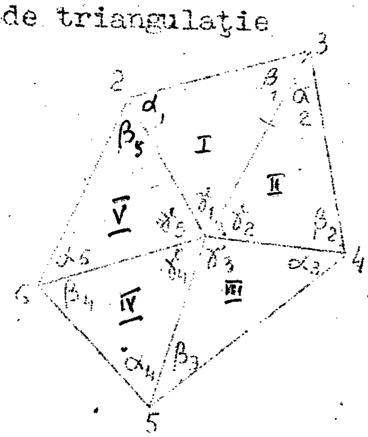
Eroarea mijlocie a unei direcţii este dată de formula:

$$E_{m\ dir.} = \pm\frac{E_{m\ ungh.}}{\sqrt{2}}$$

Toleranţa admisă pentru E_m ungh. = ± 3'',7, adică eroarea mijlocie a unui singur unghi trebuie să fie mai mică sau cel mult egală cu ± 3'',7.

E x e m p l u.

Poligon de triangulaţie cu 5 triunghiuri.



Triunghiul	w	w^2	Calcule
I	3",75	14,0625	$E_m \text{ ungh.} = \pm\sqrt{\frac{\sum w^2}{3\ N}}$
II	2",18	4,7524	
III	4",71	22,1841	$E_m \text{ ungh.} = \pm\sqrt{\frac{148,6363}{15}} =$
IV	6",63	43,9569	$= \pm\sqrt{9,9090} = \pm\ 3'',14$
V	7",98	63,6804	$E_m \text{ ungh.} = \pm\ 3'',1$

$$\sum w^2 = 148,6363$$

3",1 < 3",7, deci unghiurile poligonului de triangulaţie sînt bine măsurate.

........ooOOooo........

Ing. A. Mihail

Redactat : Galeriu Victor şi Vartolomei Mitrea.

Verificat : Anghel N.

CAPITOLUL III.

LUCRARI DE BIROU

A. UNGHIURI

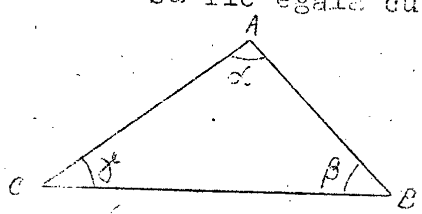
1/. COMPENSAREA UNGHIURILOR.

a). GENERALITĂŢI

Metoda triangulaţiei implică acoperirea teritoriului de ridicat, cu o reţea de figuri geometrice, bazate pe triunghiu

O astfel de reţea geometrică trebue să îndeplinească următoarele condiţiuni:

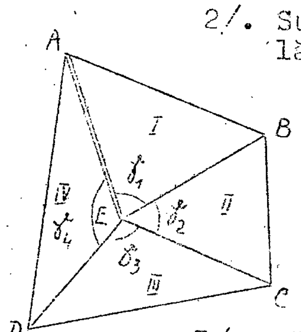
1/. Suma unghiurilor interioare ale unui triunghiu să fie egală cu 200^G.



$$\alpha + \beta + \gamma = 200^G.$$

Aceasta constitue compensarea I-a.

2/. Suma unghiurilor în jurul unui punct să fie egală cu 400^G.



$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + = 400^G.$$

Aceasta constitue compensarea II-a.

3/. Când avem grupate în jurul unui punct o serie de triunghiuri, calculând laturile în mod succesiv, din triunghiu în triunghiu, vom găsi pentru lungimea laturii comune a triunghiului I. cu a ultimului triunghiu o valoare egală cu cea iniţială.

Aceasta constitue compensarea III-a.

De exemplu în figura de mai sus (pct. 2), plecând de la o valoare pentru latura AE din triunghiul I şi trecând succesiv prin triunghiurile I, II, III, IV, în triunghiul IV, vom obţine pentru AE aceeaşi valoare ca cea de plecare. (AE latura comună).

Dar dacă aceste condiţiuni sunt îndeplinite într-o reţea geometrică, într-o reţea topografică - care este constituită din unghiuri măsurate pe teren - ele nu sunt niciodată îndeplinite în mod riguros.

./.

Pentru a putea introduce în calcul o rețea topografică, trebue însă ca ea să îndeplinească condițiunile rețelei geometrice.

Pentru a ajunge la această situație, va trebui să supunem unghiurile rețelei topografice unui calcul de ajustare, transformând rețeaua topografică într-o rețea geometrică. Aceste ajustări constituesc compensarea unghiurilor triangulației.

Compensarea unghiurilor în triangulație se poate face prin două metode:

- Metoda empirică LEHAGRE-BRONIMANN, metodă simplă care se bazează pe proprietățile figurilor geometrice și care se întrebuințează în triangulațiile locale (la rețele topografice);

- Metoda celor mai mici pătrate, metodă riguroasă care își bazează teoria pe calculul probabilităților și care este întrebuințată în rețelele geodezice.

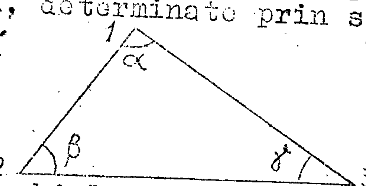
Această metodă este tratată în Cap.C.

Compensarea unghiurilor după metoda empirică, care face obiectul capitolului de față, punând bază pe figurile geometrice, prezintă aspecte diferite după figura geometrică la care se referă:

- Triunghiu simplu.
- Poligon cu centru (rețea de triunghiuri).
- Patrulater.
- Lanț de patrulatere.
- Lanț de triunghiuri.
- Lanț de poligoane (compensarea în restul rețelei).

b). COMPENSAREA UNGHIURILOR INTR-UN TRIUNGHIU.

Problema constă în a determina coordonatele unui punct (vârf), cunoscând coordonatele celorlalte două vârfuri, -deci latura determinată de ele și orientarea ei -, precum și toate cele 3 unghiuri ale triunghiului, determinate prin staționare în toate cele trei vârfuri. (1,2,3).



In cazul triunghiului, condiția unică este ca suma unghiurilor sale să fie egală cu 200^G.

$$\alpha + \beta + \gamma = 200^G.$$

In realitate, avem : $200^G - (\alpha + \beta + \gamma) = \varepsilon$

Eroarea ε se repartizează egal, limitându-ne la secunde,

..//..

la fiecare dintre unghiurile α, β şi γ, care astfel devin :

$$\alpha + \frac{\varepsilon}{3} = \alpha_1$$

$$\beta + \frac{\varepsilon}{3} = \beta_1$$

$$\gamma + \frac{\varepsilon}{3} = \gamma_1$$

Această ajustare constitue <u>compensarea I-a.</u>

Noile unghiuri, compensate, trebue să satisfacă riguros condiţia :

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 200^g.$$

In cazul când laturile triunghiului depăşesc lungimea de 7 km., suma unghiurilor unui triunghiu nu mai este 200^g, ci ea este alterată de "<u>excesul sferic</u>", iar în compensarea unghiurilor triunghiului trebue să se ţină seama şi de această valoare. Intrucât însă excesul sferic nu afectează triangulaţia topografică (ordinul IV şi V), ci numai triangulaţia geodezică, a cărei compensare se execută după metoda celor mai mici pătrate, problema excesului sferic este tratată la capitolul C/g.

In mod practic, trebue ca înainte de a se trece la compensarea unghiurilor, în mod obligatoriu să se cerceteze chiar pe teren dacă atât erorile de citire a unghiurilor în staţie cât şi eroarea de închidere a triunghiului se încadrează în toleranţe.

Pentru citirea unghiului în staţie, se reaminteşte că valoarea erorii este

$$E = \varepsilon\sqrt{n},$$

în care ε este eroarea caracteristică aparatului folosit iar n este numărul vizelor ce intră în turul de orizont respectiv.

Pentru aparatele întrebuinţate în mod curent, ε are valorile :

- pentru T.3 . . . . . $\varepsilon = 4^{cc}$
- pentru T.2 . . . . . $\varepsilon = 6^{cc}$
- pentru celelalte aparate . $\varepsilon = \frac{1}{2}$ din diviziunea minimă a aparatului.

Pentru triangulaţia de ordinul IV, în speţă, citirea direcţiunilor se face cu instrumente centezimale cu precizia de 5^{cc}, valoarea unghiurilor deducându-se din diferenţa mediilor aritmetice ale direcţiunilor citite cu o reiteraţie.

../..

Când se foloseşte un instrument cu precizia până la 20^{cc} centezimale, citirile se fac cu 2 reiteraţii în ambele poziţii ale lunetei şi la ambele microscoape, iar valoarea unghiurilor se deduce din diferenţa mediilor aritmetice ale citirilor.

Pentru eroarea de închidere a triunghiului, în lipsă de alte prescripţiuni se aplică aceeaşi formulă, în care însă n este numărul laturilor, adică 3. In afară de această formulă, se obişnueşte să se prescrie valoarea acestei neînchideri după ordinul triangulaţiei ce se execută. Astfel, în timp ce în cazul triangulaţiei primordiale neînchiderea unui triunghiu poate merge până la $9,3^{cc}$, în cazul unei triangulaţii de ordinul II, III şi IV toleranţa acestei neînchideri va fi din ce în ce mai largă faţă de valoarea indicată mai sus.

In cazul triangulaţiei de ordinul IV, la măsurători cadastrale, toleranţa admisă pentru neînchiderea triunghiului este de 48^{cc}.

Pentru a deţine rezultate bune, se recomandă ca un unghiu oarecare dintr-un triunghiu să nu fie mai mic de 30^{c}.

In ce priveşte laturile, într-o reţea de ord. IV, este bine ca acestea să fie peste 1200 m.

Se exemplifică mai jos compensarea unghiurilor într-un triunghiu, plecând chiar dela datele citite în teren.

..//..

Nr. staţiei 210. [illegible] DATA LOCALITATEA

Punctul vizat	Observatii pe tur de orizont: Poziţia I.			Poziţia II			(I+II)/2			Medii reduse		
	g	c	cc	g	c	cc	g	c	cc	g	c	cc
210	0	05	60	200	05	50	0	05	55	0	00	00
Bânţu	40	48	93	240	49	03	40	48	98	40	43	43
204	76	95	30	276	95	50	76	95	40	76	89	85
210	133	05	20	333	05	38	133	05	29	0	00	00
Bânţu	173	48	70	373	48	92	173	48	81	40	43	52
204	209	95	30	9	95	30	209	95	30	76	90	01
210	266	05	00	66	05	2[illegible]	266	05	10	0	00	00
Bânţu	306	48	50	106	48	66	306	48	58	40	43	48
204	342	95	06	142	95	00	342	95	03	76	89	93

Medii din toate obs.			Unghiul vertical: Poziţia I			Poziţia II			(I+II)/2			Înălţ. semn.
g	c	cc	g	c	cc	g	c	cc	g	c	cc	
0	00	00										
40	43	48										
76	89	93										

NOTA: Observaţiunile s-au executat prin metoda reiteraţiei, cu 3 origini, după procedeul folosit în "SOVROMPETROL" (vezi cap. "Măsurarea unghiurilor orizontale" din vol.I.)

COMPENSAREA I-a:

$\beta = (210)-(204) = 183.26.01 - 147.69.24 =$

$\gamma = (Bânţu)-(210) = 392.97.85 - 265.00.81 =$

$\alpha = (204)-(Bânţu) = 76.89.93 - 40.43.48 =$

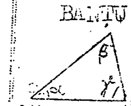
$\alpha + \beta + \gamma + \quad =$

Unghiuri observate	Compensare	Unghiuri compensate
= 35 56 77	− 8	35 56 69
= 127 97 04	− 10	127 96 94
= 36 46 45	− 8	36 46 37
= 200 00 26		200 00 00

$\mathcal{E} = +26^{cc}$

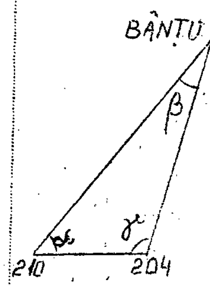
$\mathcal{E}_1 = -\frac{26}{3} = -8,^{cc}67.$

Nr. staţiei BANTU   STAREA ATMOSFERICA senin   i = 1,30 m.   Data 03.01.53   LOCALITATEA NEMOEŞTI

Punctul vizat	Observaţii pe tur de orizont – Poziţia I. g	c	cc	Poz.II. g	c	cc	$\frac{I+II}{2}$ g	c	cc	Medii reduse g	c	cc	Medii din toate obs. g	c	cc	Unghiul vertical – Poz.I. g	c	cc	Poz.II. g	c	cc	$\frac{I+II}{2}$ g	c	cc	Inălţ. semn.	OBS.
Semnal x	0	06	00	200	05	45	0	05	73	0	00	00	0	00	00											
204	147	75	04	347	74	80	147	74	92	147	69	19	147	69	24	100	66	00	99	32	50	100	66	75		BANTU 
210	183	31	85	383	31	50	183	31	67	183	25	94	183	26	02											
Semnal x	133	05	50	333	05	20	133	05	35	0	00	00														
204	280	74	80	80	74	50	280	74	65	147	69	30														
210	316	31	53	116	31	40	316	31	46	183	26	11														
Semnal x	266	05	00	66	05	20	266	05	10	0	00	00														
204	13	74	10	213	74	58	13	74	34	147	69	24														
210	49	31	00	249	31	22	49	31	11	183	26	01														
Nr. staţiei 204				i = 1,38 m.																						
Osoiu	0	05	18	200	04	32	0	04	75	0	00	00	0	00	00											
Bânţu	393	02	43	193	02	50	393	02	47	392	97	72	392	97	85	99	34	55	100	64	10	99	35	23		
210	265	05	55	65	05	48	265	05	51	265	00	76	265	00	81											
Osoiu	133	04	70	333	04	40	133	04	55	0	00	00														
Bânţu	126	02	45	326	02	60	126	02	53	392	97	98														
210	398	05	42	198	05	40	398	05	41	265	00	86														
Osoiu	266	05	10	66	05	30	266	05	20	0	00	00														
Bânţu	259	03	00	59	03	10	259	03	05	392	97	85														
210	131	06	02	331	06	00	131	06	01	265	00	81														

CALCULUL LATURILOR

- Triunghiu -

Nr. ord.	Triunghiul	Unghi	Valoarea unghiurilor definitive	Valoarea naturală a sinusurilor	Laturile și modulul	Lungimea laturilor și valoarea modul.	SCHIȚA
1	2	3	4	5	6	7	8
1					B-2o4	3o24,53	
2		α	36.46.37	o.541.962			
3					2o4-21o	2958,17	
4		β	35.56.69	o.53o.o71			
5					M	558o,7o4	
6		γ	127.96.94	o.9o5.o31			
7					21o-B	5o5o,71	
8							

NOTA:

1/. Latura (B-2o4) = 3o24,53 s-a dedus din coordonatele lui B și 2o4, astfel :

	X	Y
Bânțu	8o.o57,91	6o.112,17
Δ X, Δ y	-1 2o8,8o	- 2 772,47
2o4	78.849,11	57.339,7o

$$D = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{1208{,}80^2 + 2772{,}47^2} = 3024{,}53.$$

2/. Modul $M = \dfrac{\text{Bânțu-2o4}}{\sin\alpha} = \dfrac{3024{,}53}{0{,}541962} = 5580{,}704.$

Latura (2o4-21o) = M. sin β

Latura (21o-B) = M. sin γ

Modulul se extrage cu 3 zecimale, pentru a obține laturile cu 2 zecimale.

..//..

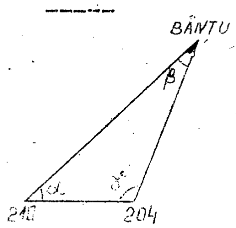
CALCULUL COORDONATELOR

- Triunghiu -

Stația	Punct vizat	Orientări definitive g	c	cc	Distanțe m. cm.	Valori naturale	ΔX m cm.	Δy m. cm.	Coordonate rectangulare X m. cm.	Y m. cm.	Punctul
204									78.849,11	57.339,70	204
	210	298	20	53	2958,17	0,999.603 0,028.187	-2956,99	- 83,38	75.892,12	57.256,32	210
210	Bânțu	61	74	16	5050,71	0,824.792 0,565.435	+4165,79	+ 2855,85	80.057,91 0,00 80.057,91	60.112,17 0,00 60.112,17	Bânțu

NOTA:

ORIENTAREA LATURILOR



- Se deduce orientarea $G_{B \to 204}$, din coordonatele acestor puncte :

$$tg\omega = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{-1208,80}{-2772,47} = 0,436001.$$

$$\omega = 26^{G}17^{c}.47^{cc}.$$

..//..

$$\omega_{B \to 204} = 226^G.17^c.47^{cc}.$$

- Se deduc orientările laturilor :

$$\omega_{204 \to 210} = \omega_{204 \to B} - \gamma =$$

$$= 426.17.47 - 127.96.94 =$$

$$= 298^G.20^c.53^{cc}.$$

$$\omega_{210 \to B} = \omega_{210 \to 204} - \alpha =$$

$$= 98.20.53 - 36.46.37 =$$

$$= 61^G.74^c.16^{cc}.$$

- Verificare : $\omega_{B \to 204} = \omega_{B \to 210} - \beta =$

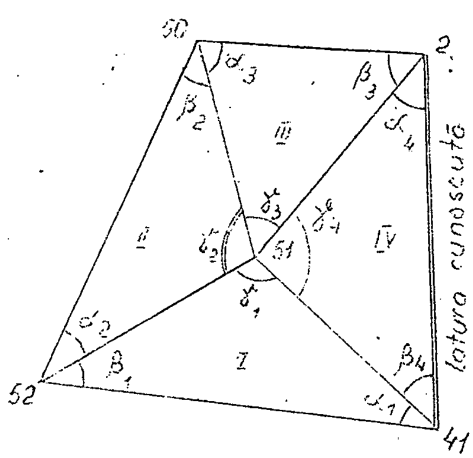
$$= 261.74.16 - 35.56.69 =$$

$$= 226^G.17^c.47^{cc}.$$

c). COMPENSAREA UNGHIURILOR INTR-UN POLIGON CU CENTRU (REȚEA DE TRIUNGHIURI).

Problema constă în a determina coordonatele mai multor puncte ce pot fi grupate într-un ansamblu de forma unui poligon cu centru, adică într-o rețea alcătuită din mai multe triunghiari, grupate în jurul unui punct, cunoscând una din laturile rețelei (respectiv coordonatele punctelor ce o definesc) și orientarea ei, precum și toate unghiurile rețelei, determinate prin staționare în toate punctele ce o constituesc.

De notat că în fiecare punct se dau numai vizele necesare stabilite prin proect, în interesul preciziei și al repidității lucrării.



..//..

In cazul reţelei de triunghiuri se aplică unghiurilor trei compensări :

- Compensarea I-a.

Este compensarea deja arătată la triunghiu, impusă de condiţia ca suma unghiurilor într-un triunghiu să fie egala cu 200^G.

Ea se aplică fiecăruia din triunghiurile componente ale reţelei.

Astfel, în triunghiul I :

$$200^G - (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) = \varepsilon_1$$

Se aplică fiecărui unghiu α_1, β_1, γ_1 corecţia $\frac{\varepsilon_1}{3}$ şi ele devin :

$$\alpha'_1 = \alpha + \frac{\varepsilon_1}{3}$$

$$\beta'_1 = \beta + \frac{\varepsilon_1}{3}$$

$$\gamma'_1 = \gamma + \frac{\varepsilon_1}{3}$$

Noile unghiuri se numesc unghiuri mijlocii şi îndeplinesc condiţia triunghiului :

$$\alpha'_1 + \beta'_1 + \gamma'_1 = 200^G.$$

Se procedează analog în triunghiurile II, III, IV, etc.

Toleranţa admisă la compensarea I-a - în cazul poligonului cu centru, la triangulaţia de ord.IV, pentru măsurători cadastrale este de 48^{cc}.

- Compensarea II-a.

Este impusă de condiţia ca suma unghiurilor în jurul unui punct să fie egală cu 400^G.

Această condiţie este de fapt îndeplinită întotdeauna prin operaţiunea de compensare a neînchiderii ce se aplică după măsurarea unghiurilor în jurul fiecărui punct de staţie. Ea nu mai persistă însă din moment ce s-a efectuat compensarea I-a, care a schimbat puţin şi valoarea unghiurilor la centru din fiecare triunghiu.

Aşa dar vom avea :

$$400^G - (\gamma'_1 + \gamma'_2 + \cdots\cdots + \gamma'_n) = \varepsilon_2 .$$

Eroarea ε_2 se împarte la numărul n al unghiurilor γ, unghiuri la centru - ($\frac{\varepsilon_2}{n}$) - limitându-ne la secunde şi

./.

se aplică fiecaruia din unghiurile γ :

$$\gamma''_1 = \gamma'_1 + \frac{\varepsilon_2}{n}$$

$$\gamma''_2 = \gamma'_2 + \frac{\varepsilon_2}{n}$$

. . . .

$$\gamma''_n = \gamma'_n + \frac{\varepsilon_2}{n}$$

$$\gamma''_1 + \gamma''_2 + \cdots + \gamma''_n = 400^G.$$

Prin această a II-a compensare stricându-se condiţiunea stabilită prin compensarea I-a ca suma unghiurilor într-un triunghiu să fie 200^G, ea trebuie din nou satisfăcută prin corectarea în mod convenabil a celor două unghiuri α şi β din fiecare triunghiu, cu câte $\frac{1}{2}$ din corecţia $\frac{\varepsilon_2}{n}$, aplicată cu semn invers semnului atribuit corecţiei unghiului γ .

In modul acesta, unghiurile mijlocii α', β', şi γ', devin unghiuri partial compensate α'', β'' şi γ'', îndeplinind condiţia : $\alpha'' + \beta'' + \gamma'' = 200^G$.

Toleranţă admisă la compensarea II-a, în cazul poligonului cu centru, la o triangulaţie de ord.IV. pentru măsurători cadastrale, este $16^{cc}\sqrt{n}$, în care n este numărul unghiurilor la centru din poligon.

- Compensarea III-a.

Este cunoscută şi sub denumirea de "compensarea pe laturi".

Plecând de la o latură cunoscută a unuia din triunghiurile reţelei şi calculând riguros toate laturile triunghiurilor în mod succesiv, din triunghiu în triunghiu, va trebui să găsim în final, prin calcul, pentru lungimea laturei de plecare, o valoare egală cu cea iniţială, - pe care o cunoaştem fie prin măsurătoare directă, fie prin calcul din coordonatele punctelor ce definesc latura respectivă.

Această condiţie este satisfăcută în cazul unei reţele geometrice, pe baza relaţiei matematice dintre unghiuri şi laturile opuse, exprimată prin teorema sinusurilor :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Aplicându-se această relaţie pentru unghiurile α şi β, respectiv laturile opuse, în fiecare din triunghiurile reţelei, făcând produsul termenilor I între ei şi al termenilor II între ei, precum şi simplificările necesare, se ajunge la expresia relaţiei de condiţie a reţelei geometrice :

$$\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2 \cdot \cdot \cdot \sin\alpha_n = \sin\beta_1 \cdot \sin\beta_2 \cdot \cdot \cdot \sin\beta_n$$

..//..

Notând termenul I cu P_α, iar termenul II cu P_β, vom avea aceeaşi relaţie sub forma :

$$P_\alpha = P_\beta$$

In triunghiurile topografice ale reţelei topografice, avem însă $(\alpha_1 \pm x)$; $(\alpha_2 \pm x)$, . . . $(\beta_1 + x)$, $(\beta_2 + x)$ ... etc., în loc de α_1, α_2, . . . β_1, β_2 . . .

Introducând aceste valori în relaţia de mai sus şi desvoltând-o după teorema lui Taylor, ajungem la expresia :

$$x = \frac{P_\beta - P_\alpha}{P_\alpha \cdot S_\alpha + P_\beta \cdot S_\beta} = \mathcal{E}_3$$

în care :

x este valoarea corecţiunei ce trebue aplicată unghiurilor α şi β ;

P_α este produsul valorilor: $\sin\alpha_1$, $\sin\alpha_2$, . . $\sin\alpha_n$;

P_β este produsul valorilor: $\sin\beta_1$, $\sin\beta_2$, . . $\sin\beta_n$;

S_α este suma algebrică a valorilor:

$$\frac{\text{Diferenţa tabulară } \Delta\sin\alpha_1}{\sin\alpha_1} + \frac{\Delta\sin\alpha_2}{\sin\alpha_2} + \cdots\cdots + etc$$

S_β este suma algebrică a valorilor :

$$\frac{\text{Diferenţa tabulară } \Delta\sin\beta_1}{\sin\beta_1} + \frac{\Delta\sin\beta_2}{\sin\beta_2} + \text{----} \ etc$$

P_α : P_β, S_α şi S_β, se calculează cu şase zecimale pentru valorile unghiurilor parţial compensate.

Această corecţie $x = \mathcal{E}_3$, se aplică uniform unghiurilor parţial compensate α cu semnul respectiv rezultat din calcul (deci se adună algebric), iar unghiurilor β tot uniform, dar cu semnul schimbat, deci se scad obţinându-se unghiurile definitive : $\alpha''' + \beta''' + \gamma''' = 200^G$.

De notat că, la calculul valorilor $\frac{\Delta\sin\alpha}{\sin\alpha}$ şi $\frac{\Delta\sin\beta}{\sin\beta}$, se va ţine seama de semnul diferenţei tabulare a liniei sinus diferenţa fiind pozitivă pentru unghiurile până la 100^G şi negativă pentru unghiurile între $100^G - 200^G$.

De notat, deasemeni, că la calculul valorii $x = \mathcal{E}_3$,

./.

pentru a obţine rezultatul în secunde centezimale, se înmulţeşte numărătorul cu 1.000.000, adică, după efectuarea diferenţei ce reprezintă numărătorul şi care se prezintă sub forma unei valori cu şase zecimale, se mută virgula cu şase cifre la dreapta; numai după această operaţie efectuându-se împărţirea.

După aplicarea compensării III-a se face verificarea operaţiunii.

Condiţia de verificare este

$$P_{\alpha}' = P_{\beta}',$$

sau cel puţin : $x = \dfrac{P'_{\beta} - P_{\alpha}}{P_{\alpha}' \cdot S_{\alpha} + P_{\beta}' \cdot S_{\beta}} < 0{,}5^{cc}$

P_{α}' şi P_{β}' sunt noile valori rezultate pe baza sinusurilor unghiurilor definitive α şi β (obţinute după compensarea III-a), considerate până la a 6-a cifră semnificativă spre a se asigura precizia până la secundă.

Valorile definitive sinα şi sinβ, ale unghiurilor definitive, se pot obţine în două moduri :

- Fie că se scot din nou, din table, valorile sinα şi sinβ ale unghiurilor α şi β definitive.
- Fie că se înmulţeşte x cu diferenţa tabulară respectivă şi se adaugă, cu semnul rezultat, la valoarea sinα, respectiv sinβ, deja extrasă din table, pentru unghiul α (sau β), nesupus compensării a III-a.

Toleranţa admisă la compensarea III-a în cazul poligonului cu centru, la o triangulaţie de ord.IV pentru măsurători cadastrale, este $8^{cc}\sqrt{n}$, n fiind numărul unghiurilor care formează poligonul sau numărul laturilor periferice.

Se exemplifică mai jos, compensarea unghiurilor într'o reţea de triunghiuri.

../..

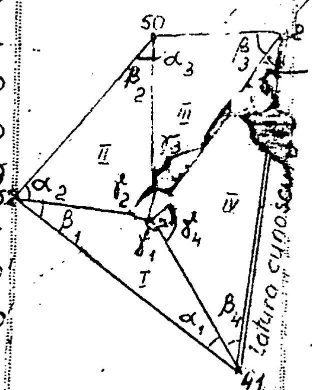
COMPENSAREA UNGHIURILOR

- într-o rețea de triunghiuri -

COMPENSAREA UNGHIURILOR INTR-O REȚEA DE TRIUNGHIURI CU AJUTORUL VALORILOR NATURALE

Un-ghi-ul	Unghiuri citite	Comp. I. ε_1	Unghiuri mijlocii	Comp II ε_2	Ung. parțial comp.	sin α	Dif. tab x sin α	Δsinα / sinα	sin β	dif. tab. x sin β	Δsinβ / sin β	Comp. III ε_3	Unghiuri definitive
1	32.62.74	+ 11	32.62.85	+ 1	32.62.86	0,490382	1^{37}	2^{79}				-20^{cc}	32.62.66
1	110.96.43	+ 12	110.96.55	-2^{cc}	110.96.55								110.96.53
1	56.40.48	+ 12	56.40.60	+1	56.40.61				0,774564	0,99	1,27	+20	56.40.81
Σ	199.99.65	$+35^{cc}$	200.00.00	0	200.00.00							0	200.00.00
2	46.24.24	-15	46.24.09	+ 1	46.24.10	0,664147	1^{17}	1^{76}				-20	46.23.90
2	102.60.77	-16	1[illegible].60.61	-2^{cc}	102.60.59								102.60.59
2	51.15.45	-15	51.15.30	+1	51.15.31				0,719797	1,09	1,51	+20	51.15.51
Σ	200.00.46	-46^{cc}	200.00.00	0	200.00.00							0	200.00.00
3	127.13.61	- 2	127.13.59	+1	127.13.60	0,910522	0^{65}	0^{71}				-20	127.13.40
3	54.11.19	- 1	54.11.18	-1^{cc}	54.11.17								54.11.17
β_3	18.75.24	- 1	18.75.23	0	18.75.23				0,290320	1,51	5,20	+20	18.75.43
Σ	200.00.04	-4^{cc}	200.00.00	0	200.00.00							0	200.00.00
α_4	22.95.66	-7	22.95.59	+1	22.95.60	0,352828	1^{45}	4^{17}				-20	22.95.40
γ_4	132.31.81	-8	132.31.73	-2^{cc}	132.31.71								132.31.71
β_4	44.72.75	-7	44.72.68	+ 1	44.72.69				0,646180	1,20	1,86	+20	44.72.89
Σ	200.00.22	-22^{cc}	200.00.00	0	200.00.00							0	200.00.00

SCHIȚA



Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2013/01/16 : CIA-RDP80T00246A066400010005-9

Compensarea I-a pe triunghiuri.

Compensarea II-a:

$$\sum_{\gamma} = 400^{G}.00^{c}.07^{cc}$$

$$\varepsilon_2 = -7^{cc}$$

$$\frac{\varepsilon_2}{4} \simeq -2^{cc}$$

Compensarea III-a:

$P_\alpha = 0{,}104629 - S_\alpha = +8{,}01 \quad P_\beta = 0{,}104591 \quad - S_\beta = +9{,}84$

$$X = \frac{P_\beta - P_\alpha}{P_\alpha S_\alpha + P_\beta S_\beta} = \frac{0{,}104591 - 0{,}104629}{0{,}104629 \cdot 8{,}01 + 0{,}104591 \cdot 9{,}84}$$

$$X = \frac{-38}{1{,}86725} = -20^{cc}{,}3 = \varepsilon_3$$

Verificare :

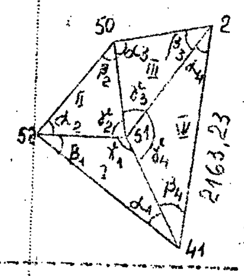
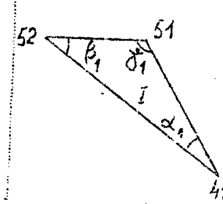
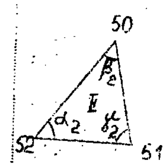
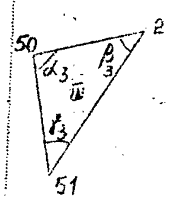
$P'_\alpha = 0{,}104611$

$P'_\beta = 0{,}104612$

$P'_\alpha \simeq P'_\beta$

CALCULUL LATURILOR

- Rețea de triunghiuri -

Nr. ord.	Triunghiul	Unghiul	Valoarea unghiurilor definitive	Valoarea naturală a sinusurilor	Laturile și modul	Lungimea laturilor și val. modul	SCHIȚA
1	2	3	4	5	6	7	8
1 2		γ_4	132.31.71	0,873896	2-41	2163,23	
3 4	IV	β_4	44.72.89	0,646204	2-51	1599,60	
5 6		α_4	22.95.40	0,352798	M	2475,386	
7 8			200.00.00		51-41	873,31	
1 2		β_1	56.40.31	0,774590	51-41	873,31	
3 4	I	γ_1	110.96.53	0,985204	52-41	1110,77	
5 6		α_1	32.62.66	0,490355	M	1127,449	
7 8			200.00.00		52-51	552,85	
1 2		β_2	51.15.51	0,719819	52-51	552,85	
3 4	II	γ_2	102.60.59	0,999162	52-50	767,40	
5 6		α_2	46.23.90	0,664123	M	768,040	
7 8			200.00.00		50-51	510,07	
1 2		β_3	18.75.43	0,290351	50-51	510,07	
3 4	III	γ_3	54.11.17	0,751270	50-2	1319,79	
5 6		α_3	127.13.40	0,910535	M	1756,746	
7 8			200.00.00		2-51	1599,59	

NOTA: 1. Pentru aflarea modulului M și pentru calculul laturilor în fiecare triunghiu, a se vedea calculul laturilor în cazul triunghiului.

2. Latura 2-41 s-a dedus din coordonate :

	X	Y
2	11.144,02	10.031,80
Δx, Δy	- 1.400,82	- 1.648,41
41	9.743,20	8.383,39

$$D = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{1400,82^2 + 1648,41^2}$$
$$= 2163,25 \text{ m.}$$

Pentru a avea o continuitate în calcul (la mașina de calcul) se vor adăuga datele în formular, astfel ca ultima latură dintr-un triunghiu să fie prima în cel următor, deci latură comună, ș.a.m.d.

./.

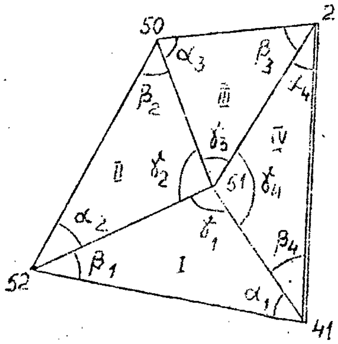
CALCULUL COORDONATELOR

- Rețea de triunghiuri -

Statia	Pct. vizat	Orientări definitive G c cc	Dist. m.	Valori naturale	ΔX	ΔY	Coordonate rectangulare X	Y	Pct.
41	52	367.48.66	1110^{77}	o,488805 o,872393	-542,95	+969,03	9743,20 9200,25	8383,39 9352,42	41 52
	5o	64.83.95	767^{40}	o,851320 o,524646	+653,30	+402,61	9853,55	9755,03	5o
5o	51	213.68.44	51o^{07}	o,215302 o,976986	-108,79	-498,33	9744,76	9256,70	51
51	2	67.79.61	1599^{60}	o,874759 o,484558	+1399,26	+775,10	11144,02 0,00 11144,02	10031,80 0,00 10031,80	2

NOTA:

ORIENTAREA LATURILOR



- Se deduce orientarea $\omega_{41\rightarrow 2}$, din coordonatele acestor puncte :

$$tg\,\omega' = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{+1400,82}{+1648,41} = 0,849800.$$

$$\omega' = 44^G.\,84^c.21^{cc} = \omega_{41\rightarrow 2}.$$

- Se deduc orientările laturilor :

$$\omega_{41\rightarrow 52} = \omega_{41\rightarrow 2} - \beta_4 - \alpha_1 =$$
$$= 444.84.21 - 44.72.89 - 32.62.66 =$$
$$= 367^G.48^c.66^{cc}.$$

$$\omega_{52\rightarrow 50} = \omega_{52\rightarrow 41} - \beta_1 - \alpha_2 =$$
$$= 167.48.66 - 56.40.81 - 46.23.90 =$$
$$= 64^G.83^c.95^{cc}.$$

$$\omega_{50\rightarrow 51} = \omega_{50\rightarrow 52} - \beta_2 =$$
$$= 264.83.95 - 51.15.51 =$$
$$= 215^G.68^c.44^{cc}.$$

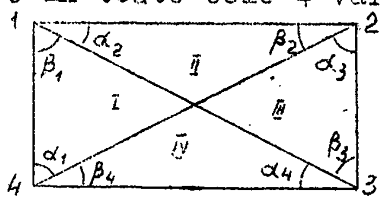
$$\omega_{51\rightarrow 2} = \omega_{51\rightarrow 50} + \gamma_3 =$$
$$= 13.68.44 + 54.11.17 =$$
$$= 67^G 79^c.61^{cc}.$$

- Verificare : $\omega_{2\rightarrow 41} = \omega_{2\rightarrow 51} - \alpha_4 =$
$$= 267.79.61 - 22.95.40 = 244^G.84^c\,21^{cc}.$$

./.

d). COMPENSAREA UNGHIURILOR INTR-UN PATRULATER.

Problema constă în a determina coordonatele a două puncte, cunoscând coordonatele altor două puncte cu care pot fi asamblate într-un patrulater, deci latura determinată de ele şi orientarea ei, precum şi toate unghiurile patrulaterului determinate prin staţionare în toate cele 4 vârfuri.



Pentru ca patrulaterul să poată fi compensat, trebue îndeplinite următoarele condiţii :

- Să se vadă între ele punctele ce determină laturile;
- Să se vadă între ele punctele ce determină diagonalele patrulaterului (1 cu 3;2 cu 4).

In cazul patrulaterului se aplică unghiurilor trei compensări :

- Compensarea I-a.

Este impusă de condiţia ca suma unghiurilor citite (α si β) ale patrulaterului să fie egală cu 400^G:

$$\alpha_1+\beta_1+\alpha_2+\beta_2+\alpha_3+\beta_3+\alpha_4+\beta_4 = 400^G.$$

In realitate avem :

$$400^G - (\Sigma\alpha + \Sigma\beta) = \varepsilon_1$$

Se repartizează ε_1 în mod egal la toate cele 8 unghiuri :

$$\alpha'_1 = \alpha_1 + \frac{\varepsilon_1}{8}$$

$$\beta'_1 = \beta_1 + \frac{\varepsilon_1}{8}$$

. . . .

$$\alpha'_4 = \alpha_4 + \frac{\varepsilon_1}{8}$$

$$\beta'_4 = \beta_4 + \frac{\varepsilon_1}{8}$$

Noile unghiuri compensate se chiamă unghiuri mijlocii şi îndeplinesc condiţia :

$$\alpha'_1 + \beta'_1 + \alpha'_2 + \beta'_2 + \alpha'_3 + \beta'_3 + \alpha'_4 + \beta'_4 = 400^G$$

Toleranţa admisă la compensarea I-a în cazul patrulaterului, la triangulaţie de ord.IV, pentru măsurători cadastrale, este de 36^{cc}.

- Compensarea II-a.

Comparând unghiurile mijlocii periferice din triunghiurile opuse I-III şi cele din triunghiurile opuse II-IV ale patrulate-

./.

rului, ar trebui să fie satisfăcute relaţiile :

$$\alpha'_1 + \beta'_1 = \alpha'_3 + \beta'_3$$

$$\alpha'_2 + \beta'_2 = \alpha'_4 + \beta'_4$$

In realitate vom avea :

$$\alpha'_1 + \beta'_1 - \alpha'_3 - \beta'_3 = \mathcal{E}_2$$

$$\alpha'_2 + \beta'_2 - \alpha'_4 - \beta'_4 = \mathcal{E}'_2$$

Eroarea $\mathcal{E}_2$ se împarte la 4 şi se atribue cu semn schimbat în triunghiul I (lui α'_1 şi β'_1), iar în triunghiul III se atribue cu semnul rezultat din relaţia (lui α'_3 şi β'_3).

Analog se procedează cu eroarea $\mathcal{E}'_2$ în triunghiurile II şi IV.

Se obţin astfel unghiurile parţial compensate :

$$\alpha''_1 = \alpha'_1 - \frac{\mathcal{E}_2}{4}; \qquad \alpha''_2 = \alpha'_2 - \frac{\mathcal{E}'_2}{4};$$

$$\beta''_1 = \beta'_1 - \frac{\mathcal{E}_2}{4}; \qquad \beta''_2 = \beta'_2 - \frac{\mathcal{E}'_2}{4};$$

$$\alpha''_3 = \alpha'_3 + \frac{\mathcal{E}_2}{4}; \qquad \alpha''_4 = \alpha'_4 + \frac{\mathcal{E}'_2}{4};$$

$$\beta''_3 = \beta'_3 + \frac{\mathcal{E}_2}{4}; \qquad \beta''_4 = \beta'_4 + \frac{\mathcal{E}'_2}{4};$$

Noile unghiuri satisfac relaţiile necesare în triunghiurile opuse:

$$\alpha''_1 + \beta''_1 = \alpha''_3 + \beta''_3$$

$$\alpha''_2 + \beta''_2 = \alpha''_4 + \beta''_4$$

Toleranţa admisă la compensarea II-a în cazul patrulaterului, la triangulaţie de ord. IV, pentru măsurători cadastrale, este de 28cc.

-Compensarea III-.

Este compensarea pe laturi, care se aplică pentru valorile unghiurilor parţial compensate întocmai ca într-o reţea de triunghiuri, prin formula :

$$x = \frac{P_\beta - P_\alpha}{P_\alpha \cdot S_\alpha + P_\beta \cdot S_\beta} - \mathcal{E}_3$$

$x = \mathcal{E}_3$ se atribue cu semnul rezultat din calculul unghiurilor parţial compensate α'' şi cu semn schimbat unghiurilor β'', obţinându-se astfel unghiurile definitive.

./.

După aplicarea compensării III-a se face verificarea operațiunii, trebuind să rezulte :

$$P'_{\alpha} = P'_{\beta}$$

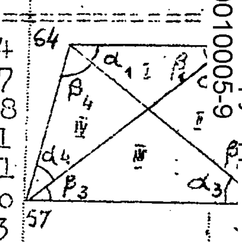
Toate prescripțiile enunțate la rețeaua de triunghiuri pentru compensarea III-a și verificarea ei sunt valabile și pentru compensarea III-a în patrulater.

Toleranța admisă la compensarea III-a în cazul patrulaterului, la triangulație de ord.IV, pentru măsurători cadastrale, este de 14^{cc}.

Se exemplifică mai jos compensarea unghiurilor în patrulater, prin două exemple numerice pe două formulare diferite.

FORMULAR I.

COMPENSAREA UNGHIURILOR IN PATRULATERUL 1,2,3,4

Numirea ungh.	Unghiul citit G c cc	Comp. I. ε_1	Unghiul mijlociu G c cc	Comp. II ε_2	Unghiurile part. compens. G c cc	Sinus α	Dif. tab. sinus α	$\frac{\Delta \sin\alpha}{\sin\alpha}$	sinus β	Dif. tab sin β	$\frac{\Delta \sin\beta}{\sin\beta}$	Comp. III. ε_3	Unghiuri definitive G c cc	SCHIȚĂ
1	61.57.89.	+ 4	61.57.93	- 7	61.57.86	0,823341	0,89	1,08				-2^{cc}	61.57.84	
1	89.98.28.	+ 4	89.98.32	- 7	89.98.25				0,987646	0,23	0,23	+ 2	89.98.27	
2	18.03.21.	+ 4	18.03.25	- 5	18.03.20	0,279472	1,51	5,40				- 2	18.03.18	
2	30.40.71.	+ 4	30.40.75	- 6	30.40.69				0,459678	1,39	3,02	+ 2	30.40.71	
3	63.87.92.	+ 4	63.87.96	+ 7	63.88.03	0,843318	0,85	1,00				- 2	63.88.01	
3	87.67.97	+ 4	87.68.01	+ 7	87.68.08				0,981335	0,30	0,30	+ 2	87.68.10	
4	34.14.86	+ 4	34.14.90	+ 5	34.14.95	0,511060	1,35	2,64				- 2	34.14.93	
4	14.28.85	+ 3	14.28.88	+ 6	14.28.94				0,222579	1,53	6,87	+ 2	14.28.96	

Compensarea I-a

$\Sigma\ 399^G.99^c.69^{cc}\ +31^{cc}$

$\varepsilon_1 = +\ 31^{cc}.$

$\frac{\varepsilon_1}{8} \simeq +\ 4^{cc}.$

Compensarea II-a

$400^G.00.00.\quad 0\quad 400.00.00$

$\alpha_1 + \beta_1 = 151.56.25$

$\alpha_3 + \beta_3 = 151.55.97$

$\varepsilon_2 = +\ 28^{cc}.$

$\frac{\varepsilon_2}{4} = +\frac{28}{4} = +\ 7^{cc}.$

$\alpha_2 + \beta_2 = 48.44.00$

$\alpha_4 + \beta_4 = 48.43.78$

$\varepsilon'_2 = +\ 22^{cc}$

$\frac{\varepsilon'_2}{4} = +\ 5{,}5^{cc}.$

Compensarea III-a

$P_\alpha' = 0{,}099170\quad - S_\alpha = 10{,}12\quad P_\beta = 0{,}099165\quad - S_\beta = 10{,}42\quad 0\ 400.0.0$

$x = \frac{P_\beta - P_\alpha}{P_\alpha \cdot S_\alpha + P_\beta S_\beta} = \frac{0{,}099165 - 0{,}099170}{0{,}099165 \cdot 10{,}12 + 0{,}099170 \cdot 10{,}42}$

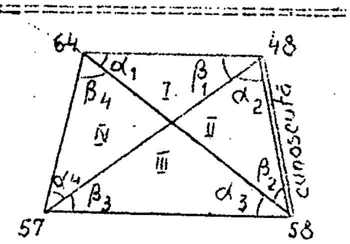
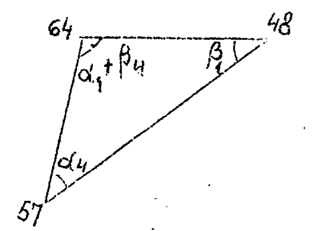
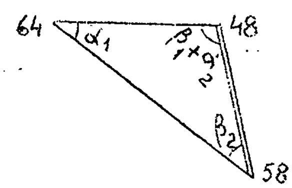
$x = \varepsilon_3 = -\frac{5}{2{,}036901} = -\ 2^{cc}{,}45$

Verificare : $P'_\alpha = 0{,}099168$; $P'_\beta = 0{,}099167$

$P'_\alpha = P'_\beta$

CALCULUL LATURILOR

- PATRULATER - FORMULAR I. -

Nr. ord.	Triunghiul	Unghiul	Valoarea unghiurilor definitive	Valoarea naturală a sinusurilor	Laturile și modul	Lungimea laturilor și valoarea modul	SCHITA
1	2	3	4	5	6	7	8
1 2 3. 4 5 6 7 8	48-58-57	β_3 α_2 $\alpha_3+\beta_2$	$87^{G}.68^{c}.10^{cc}$ 18.03.18 94.28.72 $200^{G}.00.00$	0,981336 0,279468 0,995978	48-58 57-58 M 57-48	1102,78 314,05 1123,753 1119,23	
1 2 5 6 7 8	48-57-64	$\alpha_1+\beta_4$ β_1 α_4	$75^{G}.86^{c}.80^{cc}$ 89.98.27 34.14.93 $200^{G}.00.00$	0,929011 0,987647 0,511057	57-48 57-64 M 64-48	1119,23 1189,87 1204,754 615,70	
1 2 3 4 5 6 7 8	64-48-58	β_2 α_1 $\beta_1+\alpha_2$	$30^{G}.40^{c}.71^{cc}$ 61.57.84 108.01.45	0,459681 0,823339 0,992106	64-48 48-58 M 64-58	615,70 1102,78 1339,407 1328,83	Verificare : 

NOTA: 1/. Pentru aflarea modulului M și pentru calculul laturilor în fiecare triunghiu, a se vedea calculul laturilor în cazul triunghiului.

2/. Latura 48-58 s-a dedus din coordonate :

	X	Y
48	9980,18	7465,20
Δx, Δy	- 164,58	- 1090,43
58	9815,60	6374,77

$$D = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{164,58^2 + 1090,43^2} =$$
$$= 1102,78 \text{ m.}$$

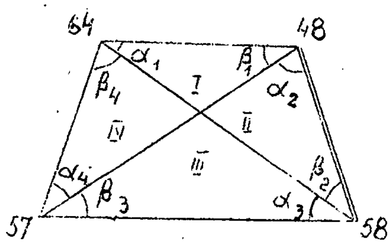
3/. Laturile se calculează pe triunghiuri mari.

CALCULUL COORDONATELOR

- Patrulater - . Formular I.-

Staţia	Pct. vizat	Orientări definitive G c cc	Dist. m.	Valori naturale	Δx	Δy	Coordonate rectangulare X	Y	Pct
58	57	315.24.94	314,05	0.971448 0.237253	-305,08	+74,51	9815,60 9510,52	6374,77 6449,28	58 57
57	64	393.41.91	1189,87	0.103183 0.994662	-122,78	+1183,52	9387,74	7632,80	64
64	48	117.55.11	615,70	0.962237 0.272213	+592,44	-167,60	9980,18 0,00 9980,18	7465,20 0,00 7465,20	48

NOTA:



ORIENTAREA LATURILOR :

- Se deduce orientarea $\omega_{48 \longrightarrow 58}$, din coordonatele acestor puncte :

$$tg\,\omega' = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{164,58}{1090,43} = 0,150931$$

$$\omega' = 9^G.53^c.66^{cc}.$$

$$\omega_{48 \to 58} = 209^G.53^c.66^{cc}.$$

- Se deduc orientările laturilor :

$$\omega_{58 \to 57} = \omega_{58 \to 48} - (\beta_2 + \alpha_3) = \\ = 409.53.66 - 94.28.72 = \\ = 315^G.24^c.94^{cc}$$

$$\omega_{57 \to 64} = \omega_{57 \to 58} - \beta_3 - \alpha_4 = \\ = 515.24.94 - 87.68.10 - 34.14.93 = \\ = 393^G.41^c.91^{cc}.$$

$$\omega_{64 \to 48} = \omega_{64 \to 57} - (\beta_4 + \alpha_1) = \\ = 193.41.91 - 75.86.80 = \\ = 117^G.55^c.11^{cc}.$$

- Verificare :

$$\omega_{48 \to 58} = \omega_{48 \to 64} - (\beta_1 + \alpha_2) = \\ = 317.55.11 - 108.01.45 = \\ = 209^G.53^c.66^{cc}.$$

FORMUIAR II

Regiunea A.	CALCULUL PATRULATERULUI	Operator N Data: 12.I.195[illegible]

COMPENSAREA TRIUNGHIURILOR

	ΔA G	c	cc	cor.		ΔB G	c	cc	cor.
1	24.	45.	88	- 3	5	37.	53.	42	- 5
2	51.	97.	85	- 3	6	38.	90.	60	- 5
3	66.	60.	17	- 4	7	87.	10.	84	- 6
4	56.	96.	24	- 4	8	36.	45.	35	- 5
Σ	200.	00.	14	-14	Σ	200.	00.	21	-21

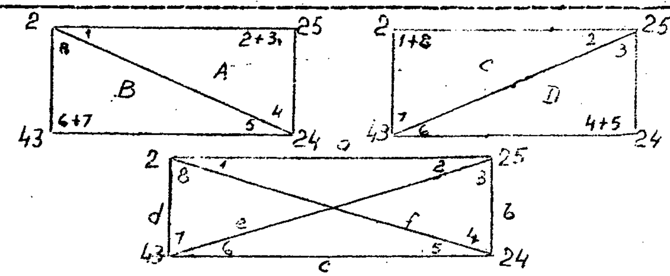
VALORI COMPENSATE PENTRU ACORDUL SINUS

–	ΔC G	c	cc	cor.		ΔD G	c	cc	cc
1	24.	45.	85	+ 6	3	66.	60.	13	[illegible]
2	51.	97.	82	+ 6	4	56.	96.	20	–
7	87.	10.	78	+ 7	5	37.	53.	37	- 6
8	36.	45.	30	+ 6	6	38.	90.	55	- 6
Σ	199.	99.	75	+25	Σ	200.	00.	25	-25

Condiție: egale, de semn contrar

COMPENSAREA CENTRULUI (control)

	G	c	cc		G	c	cc
1	24.	45.	91	5	37.	53.	31
2	51.	97.	88	6	38.	90.	49
1+2	76.	43.	79	=5+6	76.	43.	80
3	66.	60.	06	7	87.	10.	85
4	56.	96.	14	8	36.	45.	36
3+4	123.	56.	20	=7+8	123.	56.	21



./.

(continuă în pag, următoare)

(urmare)

ACORDUL SINUSURILOR

Unghiurile	Nr. unghi	Valoarea unghiului G	c	cc	Corecţia "	Sinusul unghiului	Corect. sin	ΔSin. 1"	ΔSin.1" / Sin ∢	Valori compensate G	c	cc	Sinus
depe stânga	1	24.	45.	91	+15 cc	0,374820	+ 24	1,46	3,89	24	46	07	0,374844
	3	66	60	06	+16	0,865504	+ 15	0,79	0,91	66	60	22	0,865519
	5	37	53	31	+16	0,556002	+ 21	1,31	2,35	37	53	47	0,556023
	7	87	10	85	+17	0,979567	+ 5	0,32	0,32	87	11	02	0,979572
							Σ sin 1"/sin∢ = 7,47						
unghiurile pe dreapta	2	51	97	88	-16 cc	0,728741	- 18	1,08	1,48	51	97	72	0,728723
	4	56	96	14	-17	0,780051	- 14	0,98	1,25	56	95	97	0,780037
	6	38	90	49	-16	0,573783	- 21	1,29	2,24	38	90	33	0,573762
	8	36	45	36	-16	0,541829	- 22	1,34	2,47	36	45	20	0,541807
							Σ sin 1"/sin∢ = 7,44						

sin.1.sin3.sin.5 sin.7. = P.st.
sin.2 sin 4 sin 6 sin 8 = P.dr.
Σ sin 1"/sin.(1.3.5.7) = S.st.
Σ sin 1"/sin.(2.4.6.8) = S.dr.

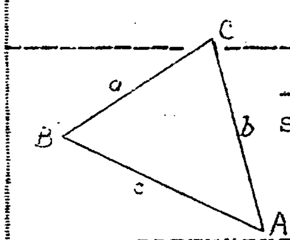
$$\frac{P.st. - P.dr.}{P.st.S.st. + P.dr.S.dr.} = \text{Corecţia } \varepsilon''$$

P.st. = 0,176685
P.dr. = 0,176728
ε" = - 16,3"

Control
P.st. = 0,176708
P.dr. = 0,176707

Eroarea ε se atribue cu semn schimbat unghiurilor de pe stânga.

Rezolvarea triunghiurilor
(Calculul laturilor).



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = r$$

a = r.sin A
b = r.sin B
c = r.sin C

M1 =	1256,004	M3 =	1310,816
a1 =	979,73	d3 =	728,84
b =	470,81	M4 =	1000,166
M2 =	820,559	a4 =	979,73
c =	710,21		

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2013/01/16 : CIA-RDP80T00246A066400010005-9

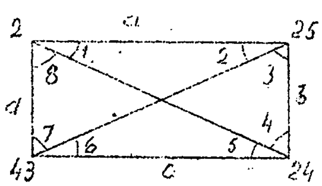
CALCULUL COORDONATELOR

- Patrulater - Formular 11.

Staţia	Pct vizat	Orientări definitive G c cc	Distanţe m.	Valori naturale	Δx	Δy	Coordonate rectangulare X	Y	Pct.
25							12.084,83	1o.3o5,21	25
	24	163.41.56	47o,81	o.543556 o.839.374	+255,91	-395^{19}	12.34o,74	9.91o,o2	24
24	43	268.92.12	71o,21	o.883186 o.469o23	-627,25	-333^{10}	11.713,49	9.576,92	43
43	2	342.9o.77	728,84	o.781336 o.62411o	-569,47	-454^{88}	11.144,o2 o,oo 11.144,o2	1o.o31,8o o,oo 1o.o31,8o	2

NOTA

1). Calculul laturei cunoscute a :



	X	Y
25	12.o84,83	1o.3o5,21
Δx, Δy	- 94o,81	- 273,41
2	11.144,o2	1o.o31,8o

$$D = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{940,81^2 + 273,41^2} =$$

$$= 979,73.$$

2) Orientarea laturilor :

- Se deduce orientarea $\omega_{2 \to 25}$, din coordonatele acestor puncte :

$$\cotg.\omega' = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{+273,41}{+940,81} = 0,290.611$$

$$\omega' = 81^G.99^c.50^{cc}. = \omega_{2 \to 25}$$

- Se deduc orientările laturilor :

$$\omega_{25 \to 24} = \omega_{25 \to 2} - (\hat{2} + \hat{3}) =$$
$$= 281.99.50 - (51.97.72 + 66.60.22) =$$
$$= 163^G.41^c.56^{cc}.$$

$$\omega_{24 \to 43} = \omega_{24 \to 25} - (\hat{4} + \hat{5}) =$$
$$= 363.41.56 - (56.95.97 + 37.53.47) =$$
$$= 268^G.92^c.12^{cc}.$$

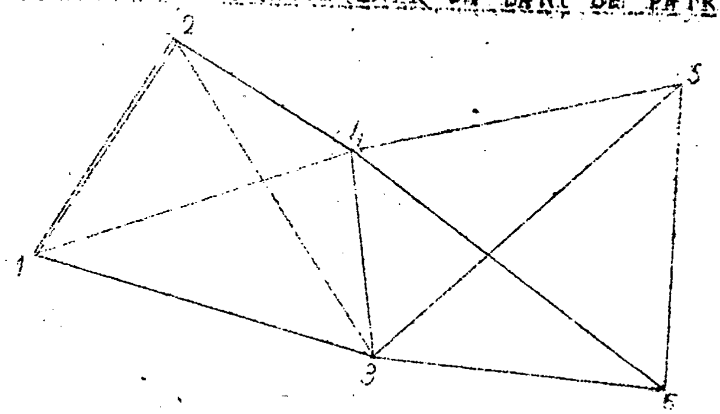
$$\omega_{43 \to 2} = \omega_{43 \to 24} - (\hat{6} + \hat{7}) =$$
$$= 468.92.12 - (38.90.33. + 87.11.02) =$$
$$= 342^G.90^c.77^{cc}$$

../..

- Verificare :

$$\omega_{2\to 25} = \omega_{2\to 43} - (\hat{8} + \hat{1}) =$$
$$= 142.90.77 - (36.45.20 + 24.46.07) =$$
$$= 81^{g}.99^{c}.50^{cc}.$$

e). COMPENSAREA UNGHIURILOR INTR-UN LANT DE PATRULATERE

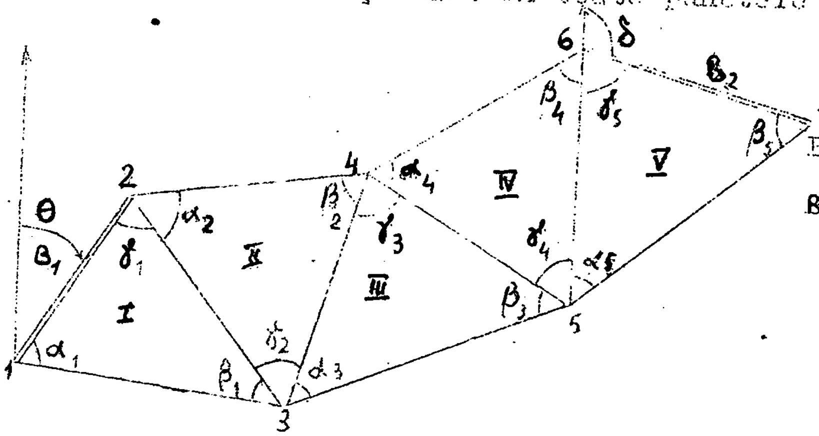


In cazul când avem un lanț de patrulatere, compensarea unghiurilor se face în fiecare patrulater în parte, plecând dela o bază cunoscută (1-2).

Problema nu prezintă particularități deosebite față de cazul patrulaterului simplu.

f). COMPENSAREA UNGHIURILOR INTR-UN LANT DE TRIUNGHIURI.

Problema constă în a determina coordonatele mai multor puncte ce pot fi asamblate sub forma unui lanț de triunghiuri, cunoscând cele 2 baze ale lanțului (una de plecare și alta de închidere) - respectiv coordonatele punctelor ce le determină și orientarea lor, precum și toate unghiurile lanțului de triunghiuri, determinate prin staționare în toate punctele ce îl constituesc.



B_1 = baza de plecare

B_2 = bază de control (închidere).

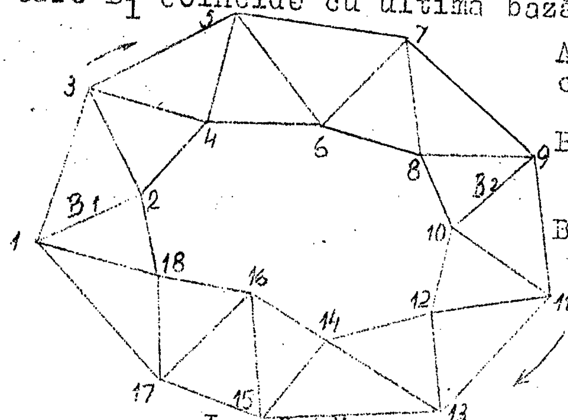
In botezarea vârfurilor şi unghiurilor se ţine seama de următoarele :

- numerele de ordine ale vârfurilor se dau alternativ, având numerele fără soţ pe o parte a lanţului, iar cele cu soţ pe cealaltă parte ;

- unghiul β se opune totdeauna laturii cunoscute, în sensul succesiunii calculului laturilor dela B_1 spre B_2;

- unghiul γ este unghiul cuprins între laturile interioare din lanţ.

Un caz particular al lanţului de triunghiuri îl constitue <u>lanţul de triunghiuri închis în inel.</u> In acest caz baza de plecare B_1 coincide cu ultima bază de control.



Aci intervenind o a doua bază B_2 - care constiţue prima bază de control.

B_1 : bază de plecare şi a doua bază de control.

B_2 : prima bază de control.

→ sensul de calcul.

In afară de aspect, figura, cazul aceste nu prezintă particularităţi în calcul.

In cazul lanţului de triunghiuri se aplică 3 compensări:

- <u>Compensarea I-a</u>

Este aceeaşi ca la triunghiu şi reţeaua de triunghiuri, impusă de condiţia ca suma unghiurilor într-un triunghiu să fie egală cu 200^G.

Astfel, în triunghiul I avem :

$$200^G - (\alpha + \beta + \gamma) = \varepsilon_1$$

Se aplică fiecărui unghiu α_1, β_1, γ_1, corecţia $\frac{\varepsilon_1}{3}$:

$$\alpha'_1 = \alpha_1 + \frac{\varepsilon_1}{3}$$
$$\beta'_1 = \beta_1 + \frac{\varepsilon_1}{3}$$
$$\gamma'_1 = \gamma_1 + \frac{\varepsilon_1}{3}$$

Noile unghiuri se numesc unghiuri mijlocii şi îndeplinesc condiţia triunghiului :

$$\alpha'_1 + \beta'_1 + \gamma'_1 = 200^G.$$

Se procedează analog în fiecare din triunghiurile lanţului.

<u>Toleranţa</u> admisă la compensarea I-a în cazul lanţului de triunghiuri, la triangulaţia de ord. IV, pentru măsurători cadastrale, este aceeaşi ca în cazul poligonului cu centru: <u>48^{cc}</u>.

./.

Compensarea II-a.

Este cunoscută sub denumirea de "acordul orientărilor bazelor".

Plecând de la orientarea cunoscută a primei baze (B_1) şi calculând din aproape în aproape orientările laturilor interioare ale lanţului, trebuie să se ajungă pe orientarea cunoscută a celei de a doua baze (B_2).

Astfel, vom avea :

$$\theta_{1\to2} = \theta$$
$$\theta_{2\to3} = \theta_{1\to2} + 200^G - \gamma'_1$$
$$\theta_{3\to4} = \theta_{2\to3} + 200 + \gamma'_2$$
$$\theta_{4\to5} = \theta_{3\to4} + 200 - \gamma'_3$$
$$\theta_{5\to6} = \theta_{4\to5} - 200 + \gamma'_4$$
$$\theta_{6\to7} = \theta_{5\to6} + 200 - \gamma'_5$$

$$\theta_{6\to7} = \theta + 200^G + (\gamma'_2 + \gamma'_4) - (\gamma'_1 + \gamma'_3 + \gamma'_5)$$

Această formulă, generalizată, se prezintă astfel :

$$\theta_{(n-1)\to n} = \theta + 200^G + \Sigma\gamma'_{par} - \Sigma\gamma'_{impar},$$

în cazul când numărul triunghiurilor din lanţ este fără soţ.

In cazul când triunghiurile din lanţ sunt în număr cu soţ, formula devine :

$$\theta_{(n-1)\to n} = \theta + \Sigma\gamma'_{par} - \Sigma\gamma'_{impar}.$$

In realitate însă, orientarea dedusă $\theta_{(n-1)\to n}$ diferă de orientarea cunoscută δ :

$$\delta - \theta_{(n-1)\to n} = \varepsilon_2$$

Această eroare ε_2 se repartizează la numărul unghiurilor interioare γ', menţinându-se semnul pentru unghiurile cu număr de ordine par şi schimbându-se semnul pentru unghiurile cu număr de ordine impar :

$$\gamma''_1 = \gamma'_1 - \frac{\varepsilon_2}{n}$$
$$\gamma''_2 = \gamma'_2 + \frac{\varepsilon_2}{n}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\gamma''_n = \gamma'_n \pm \frac{\varepsilon_2}{n}$$

Ca verificare, va trebui să găsim :

./..

$$\theta + 200^G + \Sigma\gamma''_{par} - \Sigma\gamma''_{impar} = \delta$$

Modificând însă unghiurile γ' în γ'', nu se mai menţine suma unghiurilor în triunghiu egală cu 200^G. In consecinţă, se modifică în sens convenabil şi valorile celorlalte două unghiuri din triunghiu : α' şi β', corectându-le pe fiecare cu cantitatea $\frac{\mathcal{E}_2}{2n}$ afectată cu semn schimbat faţă de semnul atribuit corecţiei $\frac{\mathcal{E}_2}{n}$ din triunghiul respectiv.

Astfel vom avea :

$$\gamma'' = \gamma' + \frac{\mathcal{E}_2}{n},$$

în timp ce :

$$\alpha'' = \alpha' - \frac{\mathcal{E}_2}{2n};$$

$$\beta'' = \beta' - \frac{\mathcal{E}_2}{2n}.$$

Noile unghiuri sunt unghiuri parţial compensate şi satsfac condiţia triunghiului:

$$\alpha'' + \beta'' + \gamma'' = 200^G.$$

Toleranţa admisă la compensarea II-a în cazul lanţului de triunghiuri, la triangulaţia de ord.IV., pentru măsurători cadastrale, este $16^{cc}\sqrt{n}$ (ca în cazul poligonului cu centru), n fiind numărul unghiurilor interioare ce intră în acordarea orientării bazelor.

- Compensarea III-a .

Această compensare se face pe baze.

Plecând dela baza cunoscută B_1 şi calculând din aproape în aproape laturile triunghiurilor din lanţ, va trebui să ajungem în final pe valoarea bazei cunoscute B_2.

Această condiţie nefiind satisfăcută niciodată într-un lanţ topografic de triunghiuri, se demonstrează analog ca în cazul reţelei de triunghiuri, pe baza teoremei lui Taylor, că eroarea este dată de formula :

$$x = \frac{B_2 . P_\beta - B_1 . P_\alpha}{B_1 . P_\alpha . S_\alpha + B_2 . P_\beta . S_\beta} = \mathcal{E}_3$$

în care :

$$P_\alpha = \sin\alpha''_1 . \sin\alpha''_2 . . . . \sin\alpha''_n$$
$$P_\beta = \sin\beta''_1 . \sin\beta''_2 . . . . \sin\beta''_n$$

$$S_\alpha = \frac{\Delta\sin\alpha''_1}{\sin\alpha''_1} + \frac{\Delta\sin\alpha''_2}{\sin\alpha''_2} + . . . + \frac{\Delta\sin\alpha''_n}{\sin\alpha''_n}$$

$$S_\beta = \frac{\Delta\sin\beta''_1}{\sin\beta''_1} + \frac{\Delta\sin\beta''_2}{\sin\beta''_2} + . . . + \frac{\Delta\sin\beta''_n}{\sin\beta''_n}$$

Toate aceste valori se calculează cu şase zecimale pe baza unghiurilor parţial compensate.

Corecţia $\mathcal{E}_3$, limitată la secunde, se aplică cu semnul rezultat din formula unghiurilor parţial compensate α" din fiecare triunghi şi cu semn schimbat unghiurilor parţial compensate β", obţinându-se astfel unghiurile definitive :

$$\alpha''' + \beta''' + \gamma''' = 200^g.$$

După aplicarea corecţiei $\mathcal{E}_3$ se face verificarea compensării III-a, după aceleaşi prescripţiuni enunţate la compensarea III-a şi verificarea ei în cazul poligonului cu centru.

Toleranţa admisă la compensarea III-a, în cazul lanţului de triunghiuri, la triangulaţia de ord.IV., pentru măsurători cadastrale, este $8^{cc}\sqrt{n}$ (ca la poligonul cu centru), în care n este numărul laturilor periferice ale lanţului de triunghiuri.

De notat următoarele prescripţiuni ce trebuesc luate în considerare în cazul lanţului de triunghiuri :

- Orientările bazelor B_1 şi B_2 trebuesc determinate pe aceeaşi cale: fie din coordonate, fie astronomic.

- Lungimile bazelor B_1 şi B_2 se măsoară în acelaş mod şi cu aceeaşi precizie (cu aceleaşi aparate şi de acelaş număr de ori), iar dacă au fost anterior măsurate cu mijloace diferite, se etalonează una în raport de cealaltă.

- Lungimea bazelor trebuie să fie egală cu lungimea mijlocie a laturilor triunghiurilor lanţului.

In orice caz, baza de control B_2 nu poate fi mai mică decât 1/2 din baza de plecare B_1. Totdeauna se porneşte la calcul dela baza mai mare către baza mai mică. Baza de control trebue să fie situată la o distanţă de cel mult 8 km. de baza de plecare.

- Intr-un lanţ mai vast de triunghiuri, se va lua câte o bază de control la fiecare 8-10 triunghiuri şi în limita distanţei specificată mai sus (8 km. între baze).

Se exemplifică mai jos compensarea unghiurilor într-un lanţ de triunghiuri.

./.

COMPENSAREA UNGHIURILOR
într-un lanț de triunghiuri

Compensarea unghiurilor într-o rețea de triunghiuri cu ajutorul valorilor naturale

Unghiul	Unghiuri citite G c cc	Comp. I. ε_1 cc	Unghiuri mijlocii G c cc	Comp. II. ε_2 cc	Ung. parțial compens. G c cc	sin α	Dif. tab. x sin α	$\frac{\Delta \sin \alpha}{\sin \alpha}$	sin β	Dif. tab. x sin β	$\frac{\Delta \sin \beta}{\sin \beta}$	Comp. III. ε_{3cc}	Unghiuri definitiv G c cc
α_1	62.54.96	-4	62.54.92	-2	62.54.90	0,831897	0,87	1,05				-5	62.54.85
γ_1	50.42.06	-4	50.42.02	+5	50.42.07								50.42.07
β_1	87.03.11	-5	87.03.06	-3	87.03.03				0,979319	0,32	0,33	+5	87.03.08
Σ	200.00.13	-13	200.00.00	0	200.00.00							0	200.00.[illegible]
α_2	81.46.95	-7	81.46.88	+3	81.46.91	0,957934	0,45	0,47				-5	81.46.[illegible]
γ_2	49.82.60	-7	49.82.53	-5	49.82.48								49.82.48
β_2	68.70.66	-7	68.70.59	+2	68.70.61				0,881596	0,74	0,84	+5	68.70.66
Σ	200.00.21	-21	200.00.00	0	200.00.00							0	200.00.00
α_3	43.76.22	-5	43.76.17	-2	43.76.15	0,634533	1,21	1,91				-5	43.76.10
γ_3	98.63.08	-5	98.63.03	+5	98.63.08								98.63.08
β_3	57.60.85	-5	57.60.80	-3	57.60.77				0,786363	0,97	1,23	+5	57.60.82
Σ	200.00.15	-15	200.00.00	0	200.00.00							0	200.00.00
α_4	46.09.43	+4	46.09.47	+2	46.09.49	0,662429	1,18	1,78				-5	46.09.44
γ_4	101.36.75	+4	101.36.79	-5	101.36.74								101.36.74
β_4	52.53.70	+4	52.53.74	+3	52.53.77				0,734724	1,06	1,44	+5	52.53.82
Σ	199.99.88	+12	200.00.00	0	200.00.00							0	200.[illegible].00
α_5	59.18.86	-2	59.18.84	-3	59.18.81	0,801455	0,94	1,17				-5	59.18.76
γ_5	87.25.82	-2	87.25.80	+5	87.25.85								87.25.85
β_5	53.55.38	-2	53.55.36	-2	53.55.34				0,745453	1,05	1,41	+5	53.55.39
Σ	200.00.06	-6	200.00.00	0	200.00.00							0	200.00.00
						$P_\alpha = 0,268459$		$S_\alpha = 6,38$	$P_\beta = 0,371845$		$S_\beta = 5,25$		

$\theta_{1-2} = 53^G.11^c.46^{cc}$.

$\delta = \theta_{6-7} = 167^G.99^c.69^{cc}$.

$\delta' = \theta_{1-2} + 200 + \Sigma\gamma'_p - \Sigma\gamma'_i$

$\delta' = 53.11.46 + 200.00.00 + 151.19.32 - 236.30.85$

$\delta' = 167^G.99^c.93^{cc}$.

$\varepsilon_2 = \delta - \delta'$

$\varepsilon_2 = 167.99.69 - 167.99.93$

$\varepsilon_2 = -24^{cc}$; $\frac{\varepsilon_2}{5} = -4^{cc},80$

(urmare)

COMPENSAREA III-a

$$B_1 = 2463{,}96 \text{ m.} \; ; \; B_2 = 1778{,}79 \text{ m.}$$

$$\varepsilon_3 = x = \frac{B_2 \cdot P_\beta - B_1 \cdot P_\alpha}{B_1 \cdot P_\alpha \cdot S_\alpha + B_2 \cdot P_\beta \cdot S_\beta}$$

$$x = \varepsilon_3 = \frac{661{,}434168 - 661{,}472238}{4220{,}192878 + 3472{,}529382} = \frac{-0{,}038070}{7692{,}722260} = -\underline{4^{cc}{,}95}$$

VERIFICAREA COMPENS. III-a

$P'_\alpha = 0{,}263451$

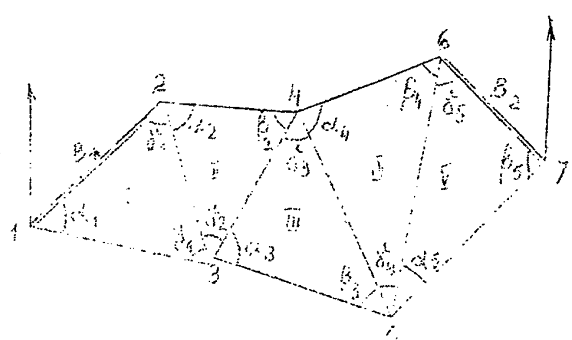
$P'_\beta = 0{,}371854$

$B_2 \cdot P'_\beta = 661{,}450177$

$B_1 \cdot P'_\alpha = 661{,}452526$

$$x' = \frac{\div 0{,}002349}{7692{,}680545} = \underline{\div 0{,}3^{cc}}$$

SCHIȚA



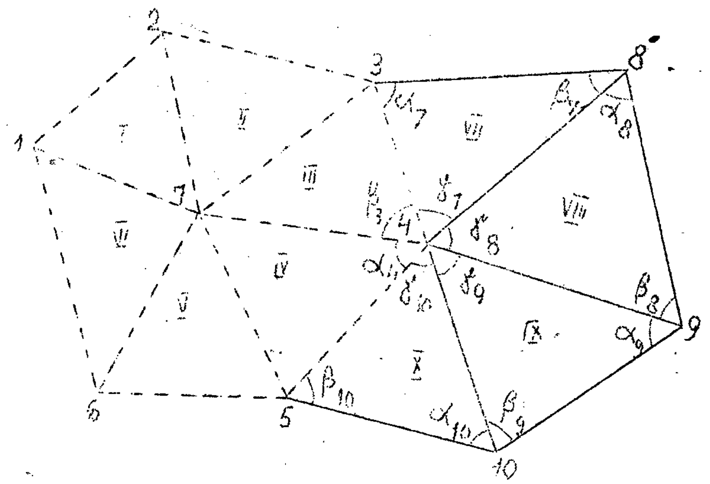
g). COMPENSAREA UNGHIURILOR INTR-UN LANŢ DE POLIGOANE (IN RESTUL REŢELEI)

Problema constă în a determina coordonatele mai multor puncte ce pot fi grupate într-un lanţ de poligoane, pe baza unei laturi cunoscute şi a orientării acestei laturi, precum şi a cunoaşterii unghiurilor reţelei - determinate prin staţionare în toate punctele ce o constituesc.

In fapt, primul poligon din lanţ se rezolvă aşa cum s-a arătat la compensarea unghiurilor într-un poligon cu centru, trecându-se apoi la calculul laturilor acestui poligon - fiindu-ne necesare pentru efectuarea compensării unghiurilor din poligonul vecin.

Problema compensării unghiurilor se pune în mod deosebit în poligonul următor din lanţ, în care o parte din triunghiuri sunt deja rezolvate definitiv în cadrul primului poligon (ex. triunghiurile III şi IV), compensarea urmând să se aplice numai restului reţelei (ex. triunghiurile VII, VIII, IX, X).

Acesta este cazul când se extinde o lucrare veche (vezi figura: lucrarea veche este punctată, lucrarea nouă este linia continuă).



In acest caz se aplică 3 compensări :

- Compensarea I-a :

Se aplică numai în triunghiurile noui, pe baza condiţiei ca suma unghiurilor într-un triunghiu să fie egală cu 200^G.

$$200^G - (\alpha + \beta + \gamma) = \varepsilon_1.$$

$$\alpha' = \alpha + \frac{\varepsilon_1}{3}$$

$$\beta' = \beta + \frac{\varepsilon_1}{3}$$

$$\gamma' = \gamma + \frac{\varepsilon_1}{3}$$

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 200^G.$$

./.

Toleranța în cazul triangulației de ord. IV pentru măsurători cadastrale este aceeași ca cea arătată la poligonul cu centru, adică 48^{cc}.

- Compensarea IIIa.

Este impusă de condiția ca suma unghiurilor în jurul unui punct să fie egală cu 400^G.

Deosebirea față de compensarea II-a într-un poligon cu centru, constă în valorile unghiurilor la centru care se iau în considerare pentru satisfacerea condiției. Astfel, pentru triunghiurile vechi se consideră unghiurile la centru definitive; pentru triunghiurile noui se consideră unghiurile la centru mijlocii.

In cazul rețelei din figură vom avea :

$$400^G - (\alpha_4''' + \beta_3''' + \gamma_7' + \gamma_8' + \gamma_9' + \gamma_{10}') = \varepsilon_2$$

Eroarea ε_2 se împarte numai la numărul unghiurilor la centru γ', deci nu și la unghiurile definitive.

Vom avea :

$$\gamma_7'' = \gamma_7' + \frac{\varepsilon_2}{4}$$

$$\gamma_8'' = \gamma_8' + \frac{\varepsilon_2}{4}$$

$$\gamma_9'' = \gamma_9' + \frac{\varepsilon_2}{4}$$

$$\gamma_{10}'' = \gamma_{10}' + \frac{\varepsilon_2}{4}$$

Noile unghiuri parțial compensate împreună cu unghiurile definitive (vechi) satisfac condiția :

$$\alpha_4''' + \beta_4''' + \gamma_7'' + \gamma_8'' + \gamma_9'' + \gamma_{10}'' = 400^G$$

In triunghiurile noui stricându-se, prin compensarea II-a, condițiunea stabilită prin compensarea I-a ca suma unghiurilor într-un triunghiu să fie 200^G, ea trebuie din nou satisfăcută prin corectarea în mod convenabil a celor două unghiuri α și β din fiecare triunghiu nou, cu câte 1/2 din corecția $\frac{\varepsilon_2}{4}$, aplicată cu semn invers semnului atribuit corecției unghiului "γ". In modul acesta, unghiurile mijlocii α' și β' devin și ele unghiuri parțial compensate : α'', β'', îndeplinind condiția :

$$\alpha'' + \beta'' + \gamma'' = 200^G.$$

Toleranța admisă la compensarea II-a la o triangulație de ord. IV, pentru măsurători cadastrale, este ca și la poligonul cu centru, de $16^{cc}\sqrt{n}$, în care n este numărul unghiurilor la centru din triunghiurile noui (din restul rețelei).

- Compensarea III-a.

Dacă la compensarea I-a şi a II-a s-a procedat oarecum asemănător ca în cazul normal al poligonului cu centru, compensarea III-a în restul reţelei nu se face pe laturi ca la poligonul cu centru, ci pe baze - ca la lanţul de triunghiuri. Una din laturile definitive ale triunghiurilor vechi - care separă poligonul compensat de restul reţelei necompensate (de exemplu, în figură, latura 3-4) se consideră bază de plecare B_1, iar a doua din laturile definitive ale triunghiurilor vechi - care deasemenea separă cele două reţele (de exemplu, în figură, latura 4-5) se consideră ca bază de închidere B_2.

Principiul compensării, formula erorii, repartiţia ei, toleranţa şi prescripţiunile, rămân valabile întocmai cum au fost arătate la compensarea III-a în lanţul de triunghiuri.

Deci eroarea este :

$$x = \varepsilon_3 = \frac{B_2 . P_\beta - B_1 . P_\alpha}{B_1 . P_\alpha . S_\alpha + B_2 . P_\beta S_\beta}$$

Verificarea compensării se face ca la poligonul cu centru şi la lanţul de triunghiuri.

Toleranţa în cazul triangulaţiei de ord.IV. pentru măsurători cadastrale, este aceeaşi ca şi în cazul poligonului cu centru şi al lanţului de triunghiuri, adică $8^{cc}\sqrt{n}$, în care n este numărul laturilor periferice ale restului reţelei (din triunghiurile noi).

De notat că, pentru baze, se menţine prescripţiunea că baza de control B_2 nu poate fi mai mică decât 1/2 din baza de plecare B_1, pornindu-se la calcul dela baza mai mare către baza mai mică.

Se exemplifică mai jos modul de compensare a unghiurilor în restul reţelei.

COMPENSAREA UNGHIURILOR

în restul reţelei

Compensarea unghiurilor într-o reţea de triunghiuri cu ajutorul valorilor naturale

Unghiul	Unghiuri citite G c cc	Comp. I. ε_1 cc	Unghiuri mijlocii G c cc	Comp. II ε_2 cc	Ung. part. compens. G c cc	sin α	Dif. tab. x sin α	Δ sin α sin α	sin β	Dif. tab. x sin β	Δ sin β sin β	Comp. III. ε_3 cc	U… d… G c…
α_7	68.18.23	− 4	68.18.19	− 2	68.18.17	0,877678	1,38	1,57				− 3	68.1…
γ_7	47.96.88	− 3	47.96.85	+ 5	47.96.90								47.9…
β_7	83.85.00	− 4	83.84.96	− 3	83.84.93				0,967992	0,39	0,40	+ 3	83.9…
Σ	200.00.11	−11	200.00.00	0	200.00.00							0	200.0…
α_8	49.62.49	− 2	49.62.47	− 2	49.62.45	0,702923	1,11	1,58				− 3	49.…
γ_8	58.57.17	− 2	58.57.15	+ 5	58.57.20								58.…
β_8	91.80.40	− 2	91.80.38	− 3	91.80.35				0,991723	0,20	0,20	+ 3	91.…
Σ	200.00.06	− 6	200.00.00	0	200.00.00							0	200.…
α_9	72.31.14	− 5	72.31.09	− 3	72.31.06	0,906894	0,66	0,73				− 3	72.…
γ_9	60.75.42	− 4	60.75.38	+ 6	60.75.44								60.…
β_9	66.93.57	− 4	66.93.53	− 3	66.93.50				0,868125	0,78	0,90	+ 3	66.…
Σ	200.00.13	−13	200.00.00	0	200.00.00							0	200.…
α_{10}	66.18.72	+ 5	66.18.77	− 2	66.18.75	0,862238	0,80	0,93				− 3	66.…
γ_{10}	59.91.22	+ 5	59.91.27	+ 5	59.91.32								59.…
β_{10}	73.89.90	+ 6	73.89.96	− 3	73.89.93				0,917125	0,63	0,69	+ 3	73.…
Σ	199.99.84	+16	200.00.00	0	200.00.00							0	200.…
						P_α = 0,482421	S_α=4,81		P_β=0,764315	S_β=2,19			

COMPENSAREA II-a $\begin{matrix}\alpha_4 = 41^G.15^c.28^{cc}. \\ \beta_3 = 131^G.65^c.86^{cc}.\end{matrix}$) unghiuri definitive

$$\gamma'_7 + \gamma'_8 + \gamma'_9 + \gamma'_{10} + \alpha_4 + \beta_3 = 399^G.99^c.79^{cc}.$$

$$\varepsilon_2 = + 21^{cc}; \quad \frac{\varepsilon_2}{4} = + \frac{21}{4} = \underline{5^{cc}}.$$

COM. III-a (3-4) = B_1 = 3421,32 m. (4-5) = B_2 = 2159,42 m.

$$x = \frac{B_2 \cdot P_\beta - B_1 \cdot P_\alpha …}{B_1 \cdot P_\alpha \cdot S_\alpha + B_2 P_\beta S_\beta …}$$

$$\varepsilon_3 = x = \frac{1650,477097 - 1650,516616}{7938,984923 + 3614,544842} = \frac{-39519}{11.553,529765} = -3…$$

(continuă pe pag. următoare)

./.

VERIFICAREA COMPENSARII III-a

$P'_\alpha = 0,482415$

$P'_\beta = 0,764321$

$B_2 \cdot P'_\beta = 1650,490053$
$B_1 \cdot P'_\alpha = 1650,496088$) Diferența = 0,006035

$B_1 \cdot P'_\alpha \cdot S_\alpha = 7938,886183$
$B_2 \cdot P'_\beta \cdot S_\beta = 3614,573216$) Suma = 11.553,459399

$x' = 0^{cc},5$

TOLERANŢELE ADMISE IN COMPENSAREA UNGHIURILOR DUPA METODA EMPIRICA

Lehagne - Bronnimann - pentru triangulaţia de ord.IV. - măsurători cadastrale -

	Compens. I-a ε_1	Compens. II. ε_2	Compens.II-a ε_3	OBSERVATIUNI
Triunghiu	48^{cc}	-	-	
Poligon cu centru (reţea de triunghiuri)	48^{cc}	$16^{cc}\sqrt{n_1}$	$8^{cc}\sqrt{n_2}$	n_1 = numărul unghiurilor la centru din poligon. n_2 = numărul unghiurilor ce formează poligonul sau, numărul loturilor periferice.
Patrulater	36^{cc}	28^{cc}	14^{cc}	
Lanţ de patrulatere	36^{cc}	28^{cc}	14^{cc}	
Lanţ de triunghiuri	48^{cc}	$16^{cc}\sqrt{n_1}$	$8^{cc}\sqrt{n_2}$	n_1 = numărul unghiurilor interioare ce intră în acordarea orientării bazelor. n_2 = numărul loturilor periferice ale lanţului de triunghiuri.
Lanţ de poligoane	48^{cc}	$16^{cc}\sqrt{n_1}$	$8^{cc}\sqrt{n_2}$	n_1 = numărul unghiurilor la centru din triunghiurile noui (din restul reţelei). n_2 = numărul loturilor periferice din triunghiurile noui (din restul reţelei).

2). ORIENTAREA DIRECŢIILOR

a). GENERALITATI.

Pentru a se putea calcula coordonatele triangulaţiei este necesar să se determine orientarea unei laturi din care se va deduce orientarea tuturor celorlalte laturi ale poligonaţiei triangulaţiei.

Se preferă să se determine chiar orientarea bazei, dela care se începe calculul coordonatelor.

In cazul că în zona triangulaţiei nu sunt puncte geodezice cu ajutorul cărora să se poată determina orientarea bazei sau a altei laturi, se va stabili direcţiunea meridianului astronomic (nordul geografic) la un capăt al bazei printr-unul din procedeele arătate mai jos.

Când avem o triangulaţie în lanţ de triunghiuri sau patrulatere neînchise este nevoe să determinăm şi orientarea bazei de închidere. Orientarea bazei de închidere se va determina prin acelaş procedeu (metoda) ca bază de plecare.

Stabilirea orientării bazei cu ajutorul busolei (prin determinarea nordului magnetic) nu este admisibilă într-o triangulaţie datorită preciziei necorespunzătoare variaţiunilor declinaţiei magnetice.

b). METODE PENTRU DETERMINAREA MERIDIANULUI ASTRONOMIC (nordul geografic)

Meridianul astronomic se determină prin observarea astrelor.

Pentru observaţiunile de noapte, teodolitele trebue prevăzute cu dispozitive de luminat reticulul, iar semnalele terestre vor trebui deasemenea iluminate. Un mijloc practic este de a da foc unei grămezi de paie în spatele semnalului în momentul vizării. Dacă semnalizarea luminoasă a capătului bazei la care se dă viza, este dificilă, se va viza un alt semnal urmând ca prin operaţiuni de zi să se transmită orientarea la bază. Pentru vizările în vecinătatea zenitului se vor folosi oculare speciale (oculare cu prisme zenitale sau oculare frînte).

Metodele astronomice ne furnizează direcţia meridianului astronomic cu preciziuni diferite. Metodele simple ("simplă observare a stelei polare şi constelaţiunilor Casiopea şi Carul Mare şi "observarea trecerii unei stele la înălţimi egale" asigură determinarea meridianului cu o precizie de câteva minute.

Metodele de determinarea direcţiei meridianului astronomic prin calcul impun cunoaşterea coordonatelor astrelor (unghiu orar, declinaţie) şi variaţiunea azimutelor lor. Aceste date trebue obţinute din timp dela Institutul Astronomic. Deasemenea este necesar să se cunoască longitudinea şi latitudinea locului unde facem observaţiunile, care se iau de pe harta 1:100.000 sau 1:200.000. Precizia determinării meridianului cu

./..

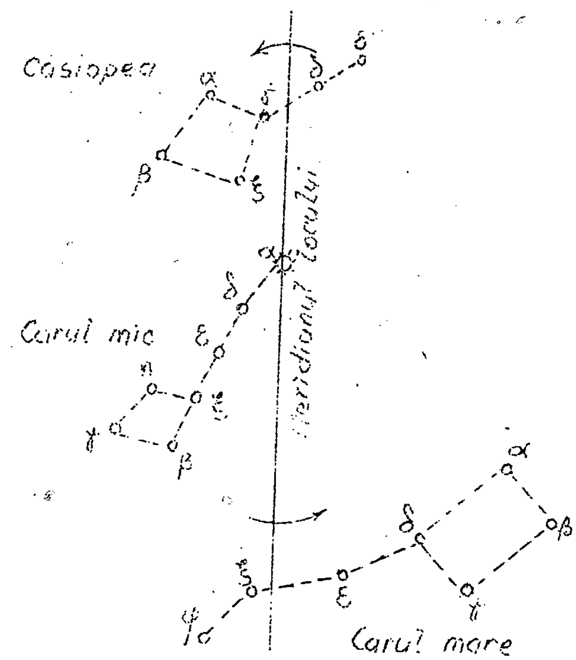
acesta metodă este în jur de 1 minut (conti).

1/. <u>Determinarea meridianului geografic prin simpla observare a stelei polare faţă de constelaţiunile Casiopea şi Carul Mare.</u>

Steaua polară este una din stelele circumpolare, raza cercului descris în mişcarea sa de rotaţie în jurul polului nord al sferei cereşti fiind foarte mică. Această rază variază cu 19" (sexe) anual.

In cursul unei zile siderale (ziua siderală este mai scurtă decât ziua solară cu $3^{m}56^{sec}$.) steaua polară trece de două ori prin meridianul locului.

Această trecere are loc când steaua polară ajunge pe linia dreaptă, dusă prin pătrimea distanţei dela steaua δ la steaua γ a constelaţiei Casiopea şi prin pătrimea distanţei dela steaua ξ la steaua ε din constelaţia Carul Mare. In acest moment se vizează steaua polară, direcţiunea vizei fiind chiar direcţiunea meridianului geografic.



Se observă că procedeul nu necesită niciun calcul. Precizia de determinare a direcţiei nordului geografic cu acest procedeu este satisfăcătoare pentru nevoile topografice curente.

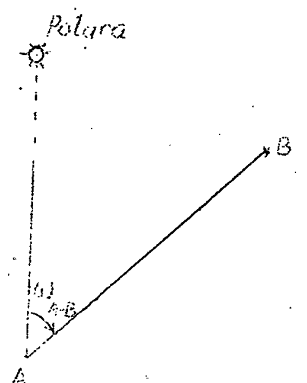
MODUL DE LUCRU

<u>Fie a se determina orientarea laturei AB.</u>

Staţionăm cu aparatul în punctul A.

După ce am adus zero-urile limbului în coincidenţa cu zero-urile alidadei, blocăm mişcarea înregistratoare.

Urmărind cu ochii liberi constelaţiile Casiopea şi Carul Mare şi steaua polară în momentul când apreciat că sunt în poziţiunea indicată mai sus vizăm polara după care blocăm mişcarea generală.



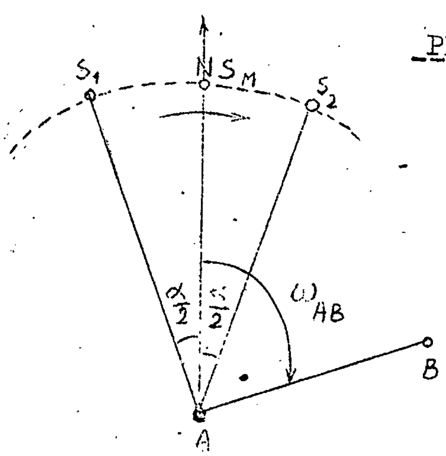
Dela mişcarea înregistratoare vizăm apoi semnalul din B, iluminat la timpul oportun.

Citirea din aparat va fi însăşi orientarea direcţiunea AB.

Desvantajul metodei constă în aceea că necunoscând ora trecerii polarei la meridian suntem imobilizaţi o bună parte a nopţii. Pe de altă parte aprecierea poziţiei astrelor şi vizarea polarei este dificilă datorită trecerii repezi a stelei polare la meridian. Pentru controlul determinării şi sporirea preciziei este bine ca operaţiunile să se repete noaptea următoare. In cazul unei diferenţe mici se va adopta ca orientare media celor două valori.

2/. Determinarea meridianului geografic prin observarea trecerii unei stele la înălţimi egale.

Stelele descriu pe bolta cerească o mişcare aparentă de rotaţie uniformă în jurul axei de rotaţie a pământului. Mişcarea complicată se produce în timpul unei zile siderale, în care stelele trec de două ori pela meridianul locului, la un interval de cca 12 ore.



PRINCIPIUL METODEI

Fie S_1 poziţia unei stele pe bolta cerească înainte de trecerea sa la meridian.

In mişcarea sa aparentă spre Est steaua va urca spre meridian ajungând în S_M, după care va coborî ajungînd după un interval de timp în poziţia S_2 simetrică cu S_1 faţă de meridianul locului (nord geografic).

Staţionând cu teodolitul în A, vom repera cele două poziţiuni simetrice ale stelei prin măsurarea unghiurilor S_1AB respectiv S_2AB sub aceiaşi înclinare a lunetei.

Orientarea laturei AB va fi egală cu media unghiurilor S_1AB şi S_2AB:

1) $\omega_{AB} = S_1AB - \frac{\alpha}{2}$

Adunând (1) cu (2)

$2\,\omega_{AB} = S_1AB + S_2AB$

De unde :

$$\omega_{AB} = \frac{S_1\,AB + S_2\,AB}{2}$$

Această metodă este simplă fiind la îndemîna operatorului întrucît nu avem nevoe să cunoaştem coordonatele geografice ale locului de staţie (longitudine, latitudine) sau coordonate cereşti (unghiu orar, declinaţie) nefiind necesar calculul corecţiei declinaţiei întrucît stelele spre deosebire de soare şi planete , au declinaţii fixe pe sfera cerească. Pe de altă parte stelele neavînd diametru aparent vizarea lor este lesnicioasă.

Pentru a micşora deviaţiile datorite refracţiei atmosferice, se va alege o stea depărtată de orizont. Practic, vizarea se va face asupra unei stele caracteristice situată la Vest de planul ce trece prin locul de staţie şi steaua polară, însă destul de aproape de polară. Alegînd o stea situată la Vest de polară înseamnează că ea se va găsi în momentul primei vizări înaintea trecerii la meridian.

MODUL DE LUCRU

Staţionând cu teodolitul în A aducem reperii alidadei în coincidenţa cu limbul gradat, după care, dela mişcarea generală vizăm semnalul iluminat din B. Facem citirea şi blocăm mişcarea generală.

Dirijăm luneta spre steaua polară şi ne alegem o stea distinctă situată la vest de polară. Vizăm cu încrucişarea firelor reticulare, steaua aleasă, blocăm mişcarea verticală a lunetei şi citim unghiul orizontal şi vertical.

Urmărind prin lunetă steaua vizată, observăm că imaginea ei fuge din intersecţia firelor reticulului deplasîndu-se în sus şi spre stînga (lunetele dau imaginea inversată). Dela mişcarea înregistratoare orizontală menţinem firul reticular vertical pe polară fără a schimba unghiul de înclinare al lunetei.

După un anumit interval de timp cu atît mai mare cu cît steaua aleasă este situată mai spre Vest de polară, steaua va ajunge la aceiaşi înclinare ca în momentul primei vizări, imaginea ei suprapunîndu-se pe încrucişarea firelor reticulare. Citim unghiul orizontal cît şi unghiul vertical pentru a controla dacă luneta nu s-a deplasat în plan vertical.

Spre a verifica dacă în timpul operaţiunii nu s-a acţionat mişcarea generală şi pentru a cerceta închiderea turului de orizont, se va viza din nou semnalul din B. Pentru a nu se produce greşeli prin confundarea stelei asupra căreia se fac observaţiunile, se va alege o stea cît mai distinctă care se va urmări cu firul reticular vertical continuu între cele 2 vizări.

EXEMPLU NUMERIC

Determinarea meridianului prin observarea trecerii unei stele la înălţimi egale.

Staţia A.
Punct de referinţă: Biserica X.
Data: 15 Mai 1954.
Operator . . . . .   Teodolit WILD Seria . .

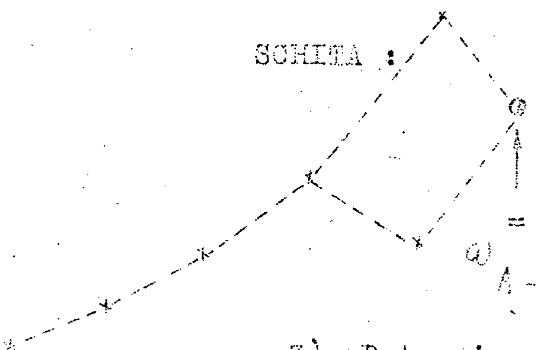
..//..

OBSERVAȚIUNI	Ora observației	Unghiul orizontal									
		I (x)			II (x)			Media			
			G	c	cc	G	c	cc	G	c	cc
I	$22^h.05^m.36^s.$	$\alpha_1 =$							25.	18.	36
II	$1^h.51^m.22^s.$	$\alpha_2 =$							114.	93.	[illegible]
Media		α_m							70.	06.	02.

Unghiul vertical : $68^G.19^c.52^{cc}$.

(x) se trec citirile la vernie-re, cînd se lucrează cu tachimetrul.

SCHITA :



$$\omega_{A \to X} = 200^G - \alpha_m =$$

$$= 200^G.00^c.00^{cc} - 70^G.06^c.02^{cc}.$$

$$\omega_{A \to X} = 129^G.93^c.98^{cc}.$$

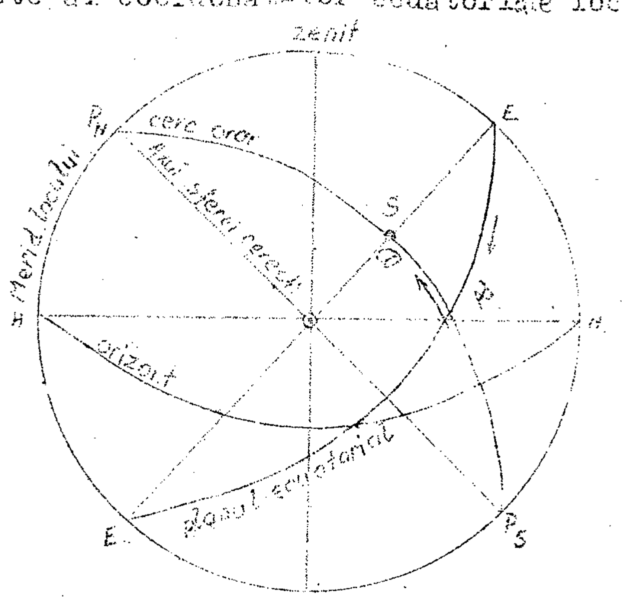
3). <u>Determinarea meridianului geografic prin observarea soarelui la înălțimi egale.</u>

Determinarea meridianului prin observațiunea soarelui este la înălțimi egale mai dificile ca acea prin observarea unei stele la înălțimi egale datorită :

- declinației variabile a soarelui.
- diametrul aparent al soarelui, observațiunile trebuind raportate la centrul discului solar.

<u>Coordonate ecuatoriale locale.</u>

Poziția unui astru pe bolta cerească se poate defini prin mai multe sisteme de coordonate cerești. Unul din aceste sisteme este al coordonatelor ecuatoriale locale care sunt :

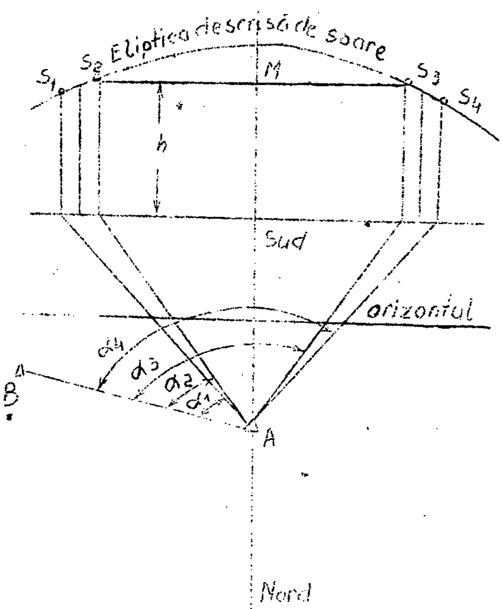


<u>Unghiul orar</u> (AH) al unui astru este unghiul diedru format de meridianul locului și cercul orar care trece prin astrul asupra căruia se fac observațiunile. Unghiul orar se socotește în timp. El reprezintă timpul dintre trecerea astrului la meridianul locului și poziția sa în momentul considerat.-

<u>Declinația</u> (D) este distanța unghiulară a astrului deasupra sau dedesubtul planului ecuatorial. Declinația se socotește dela 0° la 90°.-

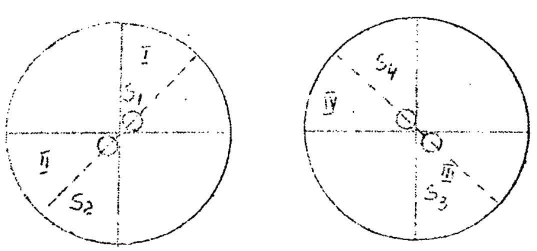
Stelele au declinații fixe pe bolta cerească. Soarele și planetele au declinații variabile.-

<u>Principiul metodei</u> este identic cu acela al determinării meridianului prin observațiunea unei stele la înălțimi egale. Soarele trecînd la amiază la meridian se vor face observațiuni înainte și după masă.-



Observațiunile înainte de amiază se vor face între orele 8 și 10, iar după amiază între orele 14 și 15.-

Observațiunile nu se vor face înainte de ora 8, nici între 10 și 14 și nici după ora 15. Observațiunile făcute înainte de ora 9 și după ora 17, antrenează erori din cauza variațiunilor mari de temperatură, iar cele care s-ar face dela orele 10-14 nu sunt defavorabile executării vizelor descrise în jurul trecerii la meridian, soarele deplasîndu-se în direcția orizontală față de operator, se mișcă foarte repede. Intrucît nu putem viza centrul soarelui căci aprecierea centrului discului solar ar fi eronată, se vor face cîte două rînduri de observații, atît înainte cît și după amiază, prima vizare făcîndu-se cu firele reticulare tangente ca în poz. I din figura alăturată, iar a doua cînd soarele ajunge în poziția II (respectiv III și IV după masă).-



Timpul la care urmează să se facă observațiunile după amiază se calculează scăzînd din 12 ore la care s-a vizat pe soare în poziția I și II.-

Se notează la un cronometru reglat după ora oficială timpul în care s-a făcut tragerea din cele 4 vize și unghiurile orizontale α_1, α_2, α_3 și α_4.-

Toate citirile se fac la înclinări constante.-

./.

Media celor două citiri făcute dimineaţa ne dă momentul trecerii centrului discului solar la înălţimea "h", media citirilor de după masă ne dă trecerea soarelui la înălţime. Făcînd semi-suma celor două medii vom obţine timpul şi poziţia soarelui la meridian.

Meridianul astfel determinat poate fi considerat ca precis în cazul cînd observaţiunile sunt făcute la solstiţii, adică la 21 Iunie şi 23 Decembrie, date la care variaţia declinaţiei soarelui este aproape nulă.

Pentru observaţiunile făcute la alte date decît la solstiţii trebue ca valorii rezultate să i se aplice o corecţie datorită variaţiei declinaţiunii soarelui şi care este dată de formula :

$$C = \pm \frac{d}{2 \cos.\varphi \sin \frac{T_2 - T_1}{2}}$$

în care :

- d = variaţia declinaţiei soarelui între momentele celor două observaţiuni.

Ea este dată de formula :

$$d = \frac{\delta_2 - \delta_1}{24} (T_2 - T_1)$$

δ_1 şi δ_2 fiind declinaţiile soarelui în două zile consecutive la data observaţiunii.

Expresia $\frac{\delta_2 - \delta_1}{24}$ reprezintă variaţia declinaţiei soarelui într-o oră şi se găseşte direct în "Connaissance des temps" pentru fiecare zi, fiind de ordinul zecilor de secunde (sexa).

- T_1 este ora primei observaţiuni.
- T_2 este ora observaţiunii a doua.
- φ este latitudinea locului.

Semnul corecţiunii C se ia negativ între 22 Decembrie şi 21 Iunie, iar între 22 Iunie şi 21 Decembrie se ia pozitiv.

Referitor la modul de lucru în teren care rezultă din expunerea de mai sus, se accentuează următoarele :

- Citirile azimutale se leagă de un punct fix de referinţă.

- Poziţiile în care trebue să se prindă soarele în cîmpul lunetei sunt cele din figură şi anume :

I şi II pentru citirile de dimineaţa
III şi IV pentru citirile de după masă.

Urcarea soarelui se vede drept coborîre şi invers, deoarece luneta inversează imaginea.

Inclinarea lunetei, odată fixată pentru observaţiunea I, rămîne aceiaşi pentru toate observaţiunile, bizeîndu-se cercul vertical. Pentru a se ajunge să se observe soarele în poz. II, se urmăreşte mişcarea acestuia numai dela şurubul micrometric (înregistrator) al cercului orizontal . Pentru poziţiile III şi IV. se procedează analog. Imaginea soarelui în lunetă, mişcîndu-se cu viteză mare, vizările trebue făcute precis şi repede, spre a nu se comite erori prea mari.

- Exemplu numeric.

a). Observarea reperului s-a făcut la solstițiu. (21 Iunie).

Stația A.
Punct de referință: Biserica X.
Data: 21 Iunie 1954.
Operator : . . . . . . Teodolit WILD seria . . .

DIMINEAȚA

OBSERVAȚIUNI	Ora observației	Unghiul orizontal								
		I (x)			II (x)			Media		
		°	'	"	°	'	"	°	'	"
I	$9^h.15^m.22^s$.	$\alpha_1=$						17.	48.	23.
II	$9^h.19^m.07^s$	$\alpha_2=$						19.	47.	31.
Ora medie	$9^h.17^m.15^s$.							18.	47.	77.

Unghiul vertical = $46^c.57'18''$.

(x) Se trec citirile la verniere; cînd se lucrează cu tahimetrul.

DUPA AMIAZA.

OBSERVAȚIUNI	Ora observației	Unghiul orizontal								
		I			II			Media		
		°	'	"	°	'	"	°	'	"
III.	$14^h.\ 40^m.\ 51^s$.	$\alpha_3=$						95.	54.	33.
IV.	$14^h.\ 44^m.\ 40^s$.	$\alpha_4=$						97.	53.	35.
Ora medie	$14h.\ 42^m.\ 46^s$.							96.	53.	84.

$$\alpha_m = \frac{18^c.47'.77''+96^c.53'84''.}{2} = \frac{115^c.01'.61''}{2} = 57^c.00'.80''.$$

$$\omega_{A-X} = 200-57.00.80 = \underline{142^c.99'.20''}.$$

b). Observarea soarelui s-a făcut la data de 15 Mai anul . . . . . din punctul A a cărui latitudine geografică este $43^c.52'$ (sexa).

In acest caz, unghiul mediu obținut, α_m, trebue corectat cu valoarea corecțiunii c:

$$c = \pm \frac{d}{2\cos.\varphi \sin.\left(\frac{T_2-T_1}{2}\right)}$$

Pentru exemplul de faţă, considerăm aceleaşi date ca în exemplul de mai sus, înregistrarea şi efectuarea mediilor executându-se, identic.

Vom avea :

$$T_1 = 9^h.17^m.15^s.$$
$$T_2 = 14^h.42^m.46^s.$$
$$\varphi = 43^o.52' \text{ (sexa).}$$
$$\alpha_m = 57^c.00'80''.$$

- Se calculează valoarea d, adică variaţia declinaţiunii soarelui între momentele T_1 şi T_2:

$$d = \frac{\delta_2 - \delta_1}{24} \left(T_2 - T_1 \right)$$

Valoarea $\frac{\delta_2 - \delta_1}{24}$ o găsim în "Connaissance des temps" în dreptul anului respectiv, luna Mai, ziua 15. Presupunem că această valoare este de 27", 52 (sexa), pe care o transformăm în gradaţiune centezimală.

$$27'',52 = 84^{cc},94.$$

$$T_2 - T_1 = 14^h.42^m.46^s. - 9^h.17^m.15^s. =$$
$$= 5^h.25^m.31^s \simeq$$
$$\simeq \underline{5^h.26^m.}$$

Acest număr complex se transformă în număr zecimal:

$$5^h.26^m = \underline{5^h.43}$$

$$d = 84'', 94 \times 5^h,43 = 461'',22$$

$$\underline{d = 4'61''.}$$

- Se transformă latitudinea (sexa) în gradaţiune centezimală :

$$\varphi = 43^o52' = 48^c.74'.07''.$$

$$\cos\varphi = \cos 48^c.74'.07'' = 0,720.954$$

- Se transformă timpul în grade sexagesimale prin înmulţirea cu 15:

$$\frac{T_2 - T_1}{2} = \frac{5^h.43}{2} = 2^h.715$$

$$2,715 \times 15 = 40^o,725 = 40^o43'30''$$

$$40^o43'30'' = 45^c25'.00$$

$$\sin\frac{T_2 - T_1}{2} = \sin 45^c25'00'' = 0,652.429$$

- Semnul corecţiunii C este negativ, observaţiunile fiind făcute între 22 Decembrie -21 Iunie.

$$C = -\frac{d}{2.\cos\varphi.\sin\frac{T_2 - T_1}{2}}$$
$$= -\frac{4'.61''}{2 \times 0,720954 \times 0,652429} =$$
$$= -\frac{4'.61''}{0,940743}$$
$$= -4'.90''$$

- Direcţiunea punctului Sud, faţă de punctul de referinţă X, este:

$$\alpha'_m = 57^{G}.00'.80'' - 0^{G}.04'.90'' =$$
$$= 56^{G}.95'.90''.$$

- Orientarea $A \rightarrow X$ va fi :

$$\theta_{A \rightarrow X} = 200^{G} - 56^{G}.95'.90'' =$$
$$= 143^{G}.04'.10''.$$

4). Determinarea meridianului geografic prin calcul, prin observarea polarei.

Baza metodei o constitue faptul cunoscut că steaua polară se găseşte totdeauna pe direcţia generală Nord, poziţia ei fiind însă deviată în mod variabil, dela un moment la altul, faţă de axa Nord - Sud.

Metoda îşi propune să determine tocmai această deviaţiune azimutală faţă de meridian, a unghiului de referinţă al polarei măsurat în momentul observării. Această deviaţiune se găseşte gata calculată în "Tabelele azimuturilor polarei" din "Connaissance des temps", fără de care metoda nu se poate aplica.

Tabelele azimuturilor polarei au două variabile : Unghiul orar al polarei în momentul observării şi latitudinea punctului de staţie.

- Unghiul orar al polarei se calculează prin formula :

$$H = T + a \pm b,$$

în care :

- H este unghiul orar ;
- T este timpul civil la Greenwich, corespunzător timpului civil citit în momentul observării polarei;
- a şi b sunt nişte valori de timp, care se găsesc în anumite tabele tot în "Connaissance des temps".

- Latitudinea punctului de staţie se poate extrage de pe hărţile care dau coordonate geografice.

Odată cu ea, se extrage şi longitudinea, fiind necesară a fi adăogată, în unităţi de timp, la timpul civil local, pentru a se afla timpul civil la Greenwich.

Dacă hărţile dau longitudinea în raport de alte origini: Paris sau Insula de Fier, se ţine seama că diferenţele de longitudine între cele 3 origini existente sunt următoarele :

Greenwich - Insula de Fier = $-17^{0}.39'.46''$.
Greenwich - Paris = $+2^{0}.20'.14''$.
Insula de Fier-Paris = $+20^{0}.00'.00''$.

- Pe baza unghiului orar H şi a latitudinii punctului de staţie, determinate ca mai sus, se extrage din "tabelele azimuturilor polarei", din "Connaissance des temps", valoarea (în unităţi sexagesimale) a deviaţiunii azimutale θ, a polarei, faţă de meridianul punctului A, în momentul observării.

Acest "azimut" este occidental (pozitiv) dacă H este cuprins între $0-12^h$, şi oriental (negativ) dacă H este cuprins între 12^h şi 24^h.

Valoarea găsită se adaugă sau se scade la unghiul de referinţă respectiv al polarei (în momentul considerat):

$$U = U_o \pm C,$$

astfel : - Se scade dacă gradaţiunea cercului orizontal al instrumentului creşte dela stînga la dreapta (pozitiv);
- Se adună dacă gradaţiunea aceasta creşte dela dreapta la stînga (negativ).

Modul de lucru în teren este asemănător cu cel indicat la metoda observării trecerii unei stele la înălţimi egale, determinat de necesitatea iluminării gradaţiunilor instrumentului şi a punctului de referinţă.

Se înregistrează o singură dată unghiul azimutal (de referinţă) pe steaua polară faţă de un punct de referinţă iluminat, precum şi ora civilă locală a observării.

Este bine ca operaţiunea să se repete odată sau de două ori, pentru verificare, în care caz se va adopta media rezultatelor obţinute.

Toate celelalte operaţiuni sunt de calcul.
Se exemplifică mai jos aplicarea acestei metode.

Exemplu numeric.

Determinarea meridianului prin calcul, prin observarea Polarei.

S-a observat steaua polară în punctul A, la data de 15 Septembrie anul . . . ora $3^h.05^m.30^s$ timp civil, citindu-se unghiul azimutal U_o pe punctul de referinţă biserica X, cu un instrument a cărui gradaţiune este pozitivă (creşte dela stînga, spre dreapta):

$$U_o = 55^c12'94''.$$

Coordonatele geografice ale punctului A sunt :

Latitudinea A = $44^o26'30'' = \varphi$.

Longitudinea A

Est Greenwich,

în timp = $1^h.44^m.27^s$.

Se cere orientarea direcţiunii $A \longrightarrow X$ (implicit direcţia meridianului punctului A).

Rezolvare:

Problema constă în a găsi corecţiunea C care trebue aplicată azimutului U_o citit pe polară, pentru a afla azimutul real al polarei în momentul considerat.

Această corecțiune este dată de tabelele XIX din "Connaissance des temps", în funcție de unghiul orar H și de latitudinea φ a punctului A.

- Unghiul orar H se calculează după formula (pentru punctul A de longitudine estică) :

$$H = T + a - b$$

- Se calculează T : timpul civil la Greenwich, corespunzător timpului civil al observării în punctul A :

timp, civil în A	$4^h.34^m.24^s$.
longitudinea A în timp față de Greenwich	$1^h.44^m.27^s$.
T =	$2^h.49^m.57^s$.

- Se extrage a din "Connaissance des temps" tabloul X, care se prezintă astfel (valorile sunt presupuse):

TABLOUL X

pentru valorile lui a în anul . . . . . .

Zile	August	Septembrie	Octombrie	etc.
. . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
14	. . . .	$21^h.44^m.50^s$.	. . . .	. . . .
15	. . . .	$21^h.48^m.45^s$.	. . . .	. . . .
16	. . . .	$21^h.52^m.41^s$.	. . . .	. . . .
. .	. . . .	. . . . . .	. . . .	. . . .

Pentru 15 Septembrie anul . . . . . . ,

$$a = 21^h.48^m.45^s.$$

- Se extrage b din "Connaissance des temps" tabloul XI., care se prezintă astfel (valorile sunt presupuse):

TABLOUL XI

pentru valorile lui b în anul . . . . . .

Ora / ziua		1^h	2^h	3^h	4^h	etc.
. . . . . .		. . .	. . .	. . .	. . .	
August 28	—	. . .	$0^m.38^s$.	$0^m.47^s$.	. . .	
Sept. 27	—	. . .	$0^m.37^s$.	$0^m.47^s$.	. . .	
Oct. 27	—	. . .	$0^m.38^s$.	$0^m.47^s$.	. . .	
. . .		. . .	. . .	. . .	. . .	

Pentru timpul civil $T = 2^h.49^m.57^s$ şi data de 15 Sept. anul . . . . , vom interpola :

Pentru 2^h . . . . 0^m37^s.
Pentru 3^h . . . . 0^m47^s.

Pentru $2^h49^m57^s$ . . . . 0^m45^s.

Deci : $b = 0^m.45^s$.

- Se calculează H

$$H = T + a - b$$
$$H = 2^h49^m57^s + 21^h48^m45^s - 0^h0^m45^s$$
$$H = 24^h38^m42^s - 0^h0^m45^s.$$
$$H = 24^h37^m57^s.$$

Valoarea fiind superioară lui 24^h se ia numai cantitatea ce depăşeşte 24 ore (deci se referă la ziua următoare, adică 16 Septembrie) :

$$H = 0^h37^m57^s.$$

- Pe baza datelor :

$$H = 0^h37^m57^s \text{ şi}$$
$$\varphi = 44^o26'3o'',$$

corespunzătoare punctului A, se caută în tabloul XII din "Connaissance des temps" valoarea corecţiunii de aplicat azimutului citit pe polară : V_o, pentru a afla azimutul real al acesteia în momentul observării.

Acest tablou se prezintă astfel (datele sunt presupuse):

T A B L O U L XII.

de azimuturi ale Polarei în anul . . . . .

Orar H 0^h-12^h. Az.+ occid. 12^h-24^h − Az. orient.	φ . . .	43^o	44^o	45^o	. . .	. . .	etc.
	2	3	4	5	6	7	
o.3o 23.3o	. . .	. . .	o.52.4	o.53.3	. . .	. . .	. . .
o.4o 23.2o	. . .		o.55.3	o.56.3	. . .	. . .	. . .
o.5o 23.1o	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Se fac două interpolări : pentru latitudine şi pentru oră.

Interpolarea pentru latitudinea $\varphi = 44^o.26'$.

- Pentru ora $0^h.30^m$. : $0.53,3 - 0.52,4 = 0,009$

$$\frac{26}{60} \times 0,00,9 = 0.00,39$$

$$0,52,4 + 0.00,39 = \underline{0^o.52',79}$$

- Pentru ora $0^h.40^m$.

$$0.56,3 - 0.55,3 = 0.01,00$$

$$\frac{26}{60} \times 0,01,00 = 0.00,43$$

$$0.55,3 + 0.00,43 = \underline{0^o.55',73}$$

Interpolarea pentru ora $0^h37^m57^s$:

$7^m57^s = 7^m,95$ (transformare în număr zecimal).

Pentru 10^m. avem: $0.55,73 - 0.52,79 = 0^o.02',94$.

Pentru $7^m,95$ avem : $\dfrac{7,95 \times 0.02,94}{10} = 0^o.02',34$

Pentru $0^h37^m57^s$ avem :

$$0^o.52',79 + 0^o.02',34 = \underline{0^o.55',13}.$$

In grade centezimale vom avea :

$$C = 0^o.55',13 = \underline{1^c02'10''}$$

- Această corecţiune C se scade din azimutul U_o, deoarece s-a folosit un instrument cu gradaţiune pozitivă :

$$U = U_o - C$$

Vom avea :

$$U = 55^c12'94'' - 1^c02'10''$$

$$\underline{U = 54^c10'84''}$$

Atunci :

$$\omega_{A \to X} = 200^c - U =$$

$$= 200^c.00.00 - 54^c.10.84$$

$$\underline{\omega_{A \to X} = 145^c.89'.16''}.$$

5.- Determinarea meridianului geografic prin observarea polarei la elongaţie maximă (la maxima digresiune.)

Metoda este în totul asemănătoare cu metoda precedentă (prin observarea polarei), prezentînd însă o precizie mai mare.

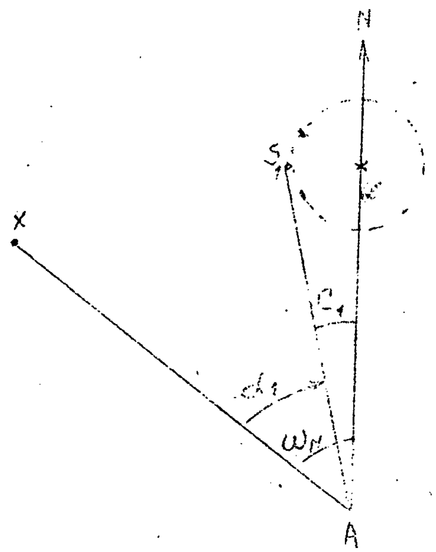


Fig. a

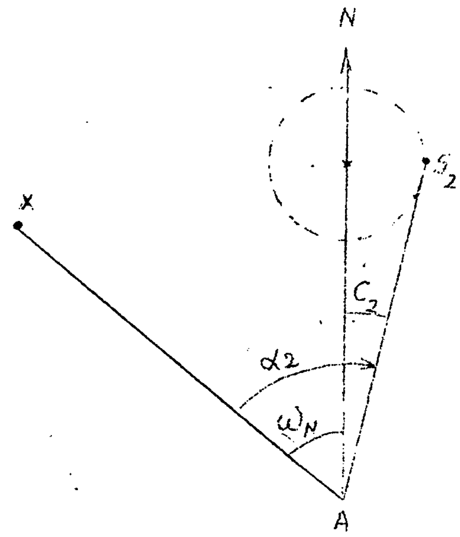


Fig. b

In mişcarea lor pe cercul aparent, stelele se văd, la două momente opuse, sub cel mai mare unghiu posibil faţă de meridianul locului (β_1 sau β_2), după care îşi schimbă sensul aparent al mişcării. Acest unghiu maxim se numeşte elongaţie maximă sau digresiune maximă. Timpul digresiunii maxime a polarei este de circa 15 minute înainte şi după punctul matematic, perioadă în care mişcarea ei este aproape insensibilă.

Datorită acestui fapt, steaua poate fi observată într-un timp mult mai îndelungat, deci unghiul azimutal U_o - înregistrat - va fi mult mai cert, iar eroarea de înregistrare a timpului civil în momentul observării nu influenţează asupra preciziei decît cu mult mai puţin decît în cazul obişnuit.

Ca şi în cazul precedent, se determină unghiul orar $H = T + a - b$ şi latitudinea φ.

Pe baza acestor elemente, aşa cum s-a arătat în exemplul numeric precedent, se extrage din "Tabloul azimuturilor polarei" din "Connaissance des temps", valoarea C a deviaţiei azimutului, care în cazul digresiunii occidentale se adaugă la unghiul de referinţă :

$$\omega_N = \alpha_1 + C_1,$$

iar în cazul digresiunii orientale se scade din unghiul de referinţă :

$$\omega_N = \alpha_2 - C_2$$

Problema specială constă în a determina momentul digresiunii maxime pentru a-l folosi pentru observare.

./.

Acest moment rezultă din formula unghiului orar :

$$H = T + a - b$$

de unde :

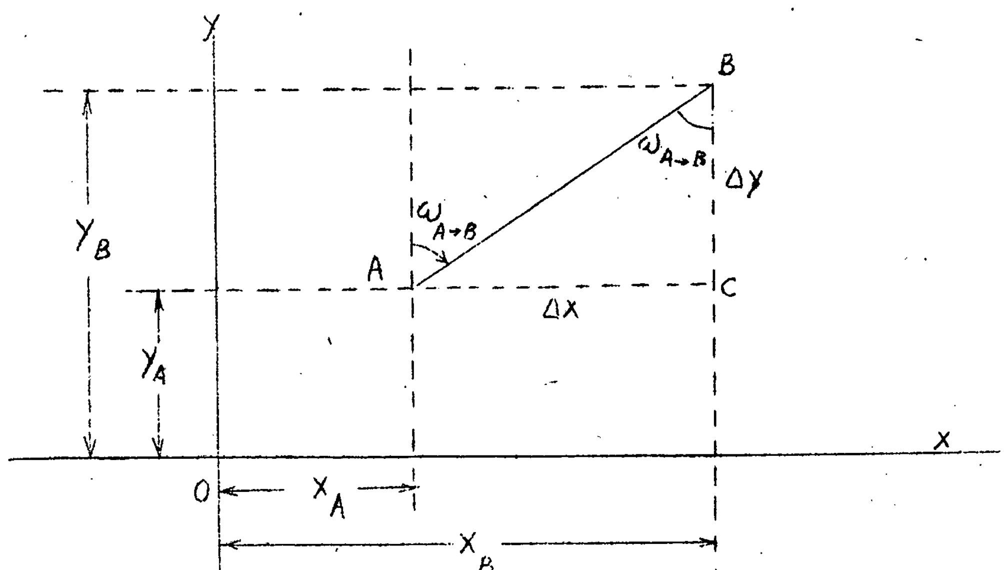
$$T = H - a + b$$

H ne este indicat de "tabloul azimuturilor polarei", fiind ora pentru care tabloul XII dă valorile maxime pentru latitudinea punctului de stație, iar a și b se extrag așa cum s-a arătat în exemplul numeric precedent din tablourile X și XI.

La această valoare, adăogându-se valoarea în timp a longitudinii punctului de stație, se găsește ora de elongație maximă, potrivită pentru observare.

c). CALCULUL ORIENTARII UNEI DIRECTIUNI, DIN COORDONATELE A DOUA PUNCTE ALE ACELEI DIRECTIUNI.

In cazul cînd se cunosc coordonatele a două puncte, orientarea direcțiunii determinate de cele două puncte se poate calcula din coordonate.



Se cunosc punctele $A(X_A, Y_A)$ și $B(X_B, Y_B)$, situate în sistemul de axe rectangulare YOX.

Pentru a găsi orientarea direcțiunii AB, notată cu $\theta_{A\to B}$, se consideră triunghiul dreptunghiu ABC, format din latura AB și din paralelele duse prin cele două puncte A și B la axele de coordonate OX și OY.

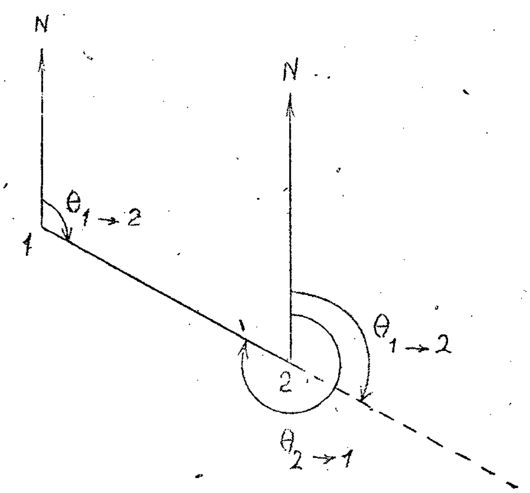
./.

Ca-drah	Grade G	ΔX	ΔY	Tg = 0, ...		cotg = 0, ...	
I	0 - 1oo	+	+	+	∢ direct	+	∢ complimentar
II	1oo - 2oo	+	-	-	∢ complim. + 1oo^{G}	-	∢ direct + 1oo^{G}.
III	2oo - 3oo	-	-	+	∢ direct + 2oo^{G}.	+	∢ complim. + 2oo^{G}.
IV	3oo - 4oo	-	+	-	∢ complim. + 3oo^{G}.	-	∢ direct + 3oo^{G}.

Pentru determinarea orientărilor laturilor triangulaţiei, se folosesc, în afară de orientarea cunoscută a bazei, valorile unghiurilor definitive α, β şi γ din triangulaţia respectivă.

Calculul orientărilor laturilor se bazează pe următoarele principii :

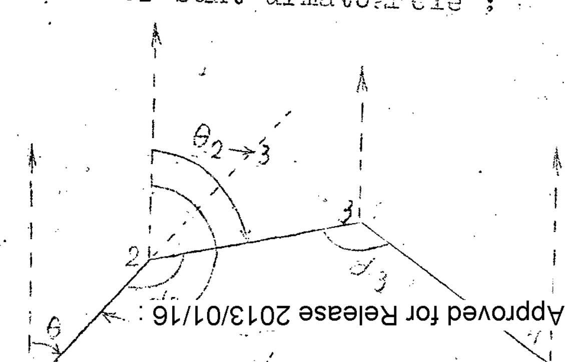
- Orientările unei drepte considerate din cele 2 extremităţi ale ei, diferă între ele cu 2oo^{G}.



$$\theta_{2\to1} = \theta_{1\to2} + 2oo^{G}.$$

- Orientarea unei laturi ce pleacă ~~dintr-un~~ punct este egală cu orientarea inversă a laturei precedente ce se termină în acelaş punct, mai puţin unghiul interior pe care-l formează între ele cele două laturi considerate.

Pe baza acestor principii, formulele pentru calculul orientărilor laturilor sunt următoarele :



- <u>Când direcțiunea considerată (AB, AC, AD, AE) se situează în a doua jumătate a cadranului respectiv :</u>

Cadranul I . . . . . $\cot g\, \omega_{AB} = \dfrac{\Delta Y_1}{\Delta X_1}$

Cadranul II . . . . $\cot g\, \omega'_{AC} = \dfrac{\Delta X_2}{\Delta Y_2}$ . . . $\omega_{AC} = 100^c + \omega'_{AC}$

Cadranul III. . . . $\cot g\, \omega'_{AD} = \dfrac{\Delta Y_3}{\Delta X_3}$ . . . $\omega_{AD} = 200^c + \omega'_{AD}$

Cadranul IV . . . $\cot g\, \omega'_{AE} = \dfrac{\Delta X_4}{\Delta Y_4}$ . . . $\omega_{AE} = 300^c + \omega'_{AE}$

Ca exemple numerice, se vor vedea exemplele de calculul orientărilor şi coordonatelor, întocmite pentru triangulaţie (triunghiu, reţea de triunghiuri şi patrulater).

B. CALCULUL

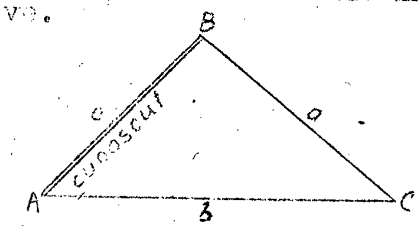
LATURILOR, ORIENTARILOR LATURILOR ŞI COORDONATELOR

Calculul triangulaţiei trebue să fie făcut cu proectul în faţă, pentru a se exclude posibilitatea de a comite greşeli.

a) Calculul lungimii laturilor.

După ce se face compensarea unghiurilor, prima operaţie la care se trece este calculul laturilor.

Principiul de bază pentru calculul laturilor este rezolvarea fiecărui triunghiu succesiv, prin teorema sinusurilor, plecând dela o latură cunoscută din triunghiu şi dela valorile unghiurilor definitive.



În general, avem : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

Ca procedeu se calculează întîiu modulul triunghiului respectiv.

Modulul M este cîtul dintre numărul ce reprezintă lungimea bazei (laturii cunoscute) prin valoarea numerică a sinusului unghiului opus bazei. Astfel, în figură avem : $M = \frac{c}{\sin C}$

Valoarea lui M se limitează la 3 zecimale.

Apoi, pentru determinarea unei laturi, se înmulţeşte modulul cu sin unghiului opus laturii de determinat. Astfel :

$$a = M. \sin A$$
$$b = M. \sin B$$

Pentru verificare, se determină în final latura de plecare, cu modulul folosit: $c = M. \sin C$.

Lungimea bazei se poate obţine în 2 moduri :

- Fie prin măsurătoare directă pe teren, aşa cum s-a arătat în vol.I. (partea II. cap.II. "Măsurătoarea bazei".
- Fie prin calcul, din coordonatele punctelor de capăt ce determină baza, puncte care deci sunt integrate în triangulaţia de calculat :

$A\ (X_1,\ Y_1) \qquad B\ (X_2,\ Y_2)$.

$$D = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}$$

La III. (cap.I.) pct.1/b,c,d,s-a exemplificat formularul şi modul de calcul al laturilor în cazul triunghiului, poligonului cu centru şi patrulaterului.

La patrulater, laturile se calculează pe triunghiuri mari, în care una din laturi este o diagonală întreagă.

De notat că, acolo unde sunt de rezolvat mai multe triunghiuri succesive (poligon cu centru, patrulater, lanţ de triunghiuri, etc.), înscrierea triunghiurilor în formular se face în ordinea rezolvării lor. In cadrul unui triunghiu, se începe cu înscrierea în tabel a laturii cunoscute şi a unghiului care se opune acesteia, încheindu-se cu latura comună triunghiului următor şi cu unghiul opus acesteia.

b). Calculul orientărilor laturilor.

Pentru a determina orientările laturilor unei triangulaţii, este necesar să se cunoască orientarea bazei.

- Orientarea bazei se poate determina astfel :

- Fie din coordonatele punctelor de capăt ale bazei, dacă acestea sunt puncte geodezice de ordin superior, fiind obligatoriu a le îngloba în triangulaţia nouă.

- Fie prin una din metodele arătate la Cap. "Determinarea orientării direcţiunilor", adică: observarea trecerii unei stele la înălţimi corespondente, observarea trecerii stelei polare la meridian sau la maxima digresiune şi observarea trecerii soarelui la înălţimi egale.

O asemenea metodă se aplică în unul din punctele de capăt ale bazei.

In cazul când în regiunea de măsurat există numai un punct geodezic de ordin superior (I-II), acesta va constitui un vîrf al triangulaţiei noui, iar reţeaua nouă se va orienta, dacă este posibil, prin transmiterea orientării geodezice citită în acest punct.

In cazul unei triangulaţii locale (de ord.IV), se poate folosi orientarea unei triangulaţii vecine, cu condiţiunea ca acea triangulaţie să fi fost executată în condiţiuni tehnice asemănătoare şi nici un punct al triangulaţiei noui să nu fie depărtat mai mult de 7 km. de latura triangulaţiei vecine.

- Calculul orientării bazei din coordonate se execută după principiul arătat în Cap. "Determinarea orientării direcţiunilor".

Practic se indică următorul procedeu :

Se fac diferenţele ΔX şi ΔY ale coordonatelor celor 2 puncte cunoscute,

Se calculează apoi valoarea naturală pe baza formulelor:

$$tg.\omega = \frac{\Delta X}{\Delta Y} , \quad cotg.\omega = \frac{\Delta Y}{\Delta X} ,$$

împărţind valoarea mică la valoarea mare, pentru a se obţine un cît subunitar.

Pentru stabilirea orientărilor corespunzătoare valorilor subunitare găsite pentru tg sau cotg, se va ţine seama de următoarele relaţii :

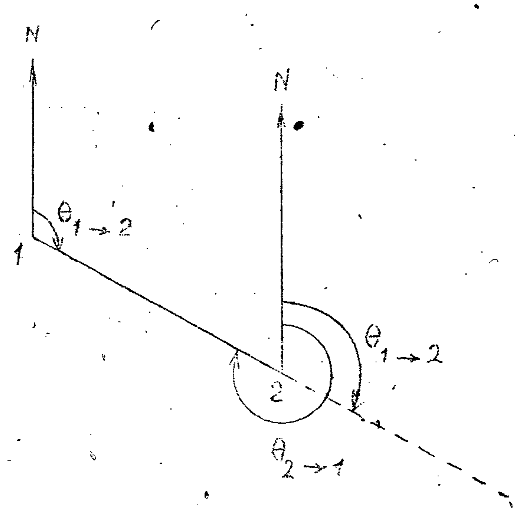
./.

Cadran	Grade G	ΔX	ΔY	Tg = 0, ...		cotg = 0, ...	
I	0 - 100	+	+	+	∢ direct	+	∢ complimentar
II	100 - 200	+	-	-	∢complim. + 100^G	-	∢direct + 100^G.
III	200 - 300	-	-	+	∢direct + 200^G.	+	∢ complim.+200^G.
IV	300 - 400	-	+	-	∢complim.+300^G.	-	∢ direct + 300^G.

Pentru determinarea orientărilor laturilor triangulaţiei, se folosesc, în afară de orientarea cunoscută a bazei, valorile unghiurilor definitive α, β şi γ din triangulaţia respectivă.

Calculul orientărilor laturilor se bazează pe următoarele principii :

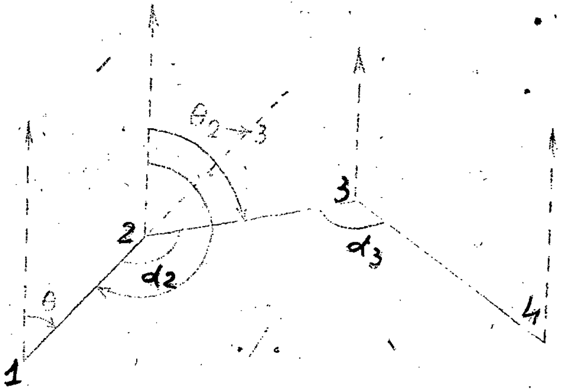
- Orientările unei drepte considerate din cele 2 extremităţi ale ei, diferă între ele cu 200^G.



$$\theta_{2\to 1} = \theta_{1\to 2} + 200^G.$$

- Orientarea unei laturi ce pleacă dintr-un punct este egală cu orientarea inversă a laturei precedente ce se termină în acelaş punct, mai puţin unghiul interior pe care-l formează între ele cele două laturi considerate.

Pe baza acestor principii, formulele pentru calculul orientărilor laturilor sunt următoarele :



$$\theta_{1\to 2} = \theta \text{ - determinat direct}$$
$$\theta_{2\to 3} = \theta_{1\to 2} + 200 - \alpha_2$$
$$\theta_{3\to 4} = \theta_{2\to 3} + 200 - \alpha_3$$

- -

$$\theta_{(n-1)\to n} = \theta_{(n-2)\to(n-1)} + 200 - \alpha_{(n-1)}$$
$$\theta_{(n-1)} = \theta_{(n-1)\to n} + 200 - \alpha_n$$

Ca verificare, vom avea :

$$\theta_{1\to 2} = \theta_{n\to 1} + 200 - \alpha_1$$

Aceste formule sunt valabile atît pentru poligoanele convexe cît şi pentru cele concave.

La triunghiu, reţeaua de triunghiuri şi patrulater, s-a exemplificat modul de calcul a orientărilor laturilor, în NOTA de pe foaia de calcul a coordonatelor. Calculul este analog şi pentru cazul lanţului de triunghiuri, ghidându-ne totdeauna după o schiţă fidelă a triangulaţiei.

c). Calculul coordonatelor.

Pentru a obţine coordonatele punctelor noui ce fac parte din triangulaţia ce trebue calculată, se calculează ca o drumuire obişnuită ce pleacă dela unul din punctele cunoscute (un capăt al bazei), trece prin punctele de determinat şi se închide pe al doilea punct cunoscut (al doilea capăt al bazei).

Elementele pe care se bazează drumuirea sunt: laturile extrase din foaia de calcul a laturilor şi orientările acestor laturi - deduse aşa cum s-a arătat mai sus.

Deoarece unghiurile au fost compensate, iar laturile au fost determinate în mod riguros, drumuirea pentru calculul coordonatelor nu trebue să dea neînchideri, deci nici compensări.

In cazul lanţului de triunghiuri, când ambele baze sunt determinate prin coordonate, calculul coordonatelor ia aspectul a două drumuiri : una pe o margine a lanţului, iar alta pe cealaltă margine.

In cazul când din reţeaua triangulaţiei nu face parte cel puţin un punct geodezic de ordin superior, se va alege o origine a axelor de coordonate astfel încît întreaga suprafaţă de ridicat să fie în cadranul I.

Aceste coordonate locale, urmează apoi să fie transcalculate în sistemul geodezic de îndată ce se pot determina coordonatele geodezice cel puţin ale unui punct.

Coordonatele definitive ale triangulației se exprimă în metri și centimetri, eventual pînă la milimetri.

La triunghiu, rețeaua de triunghiuri și patrulater, s-a exemplificat modul de calcul al coordonatelor și formularul respectiv.

Ing. A. Mihail

=====oOo=====

Redactat: GĂLAN ION
Corectat: Ing. MIHAIL ALEXANDRU

C. ELEMENTELE GEOMETRICE ALE ELIPSOIDULUI TERESTRU

Apropiindu-se forma globului terestru de aceea a unui elipsoid de revoluţie, în calculul liniilor şi unghiurilor geodezice vor intra implicit elementele geometrice ale acestuia. Vom trece în revistă pe cele mai importante şi care vor juca rol important în determinările lucrărilor curente de geodezie.

a. Puncte pe elipsă

Intrucît la baza tuturor calculelor stă "punctul", începem prin a determina matematic valoarea coordonatelor acestuia, în cazul de faţă; punctul pe elipsă.

In fig. nr. 1, în punctul A se duc tangenta şi normala la elipsă.

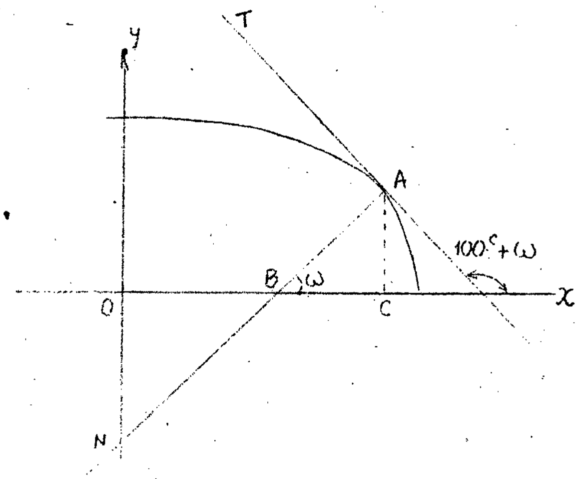


Fig. nr. 1

Din geometria analitică ştim ecuaţia unei drepte ce trece prin 2 puncte $A(x_1;y_1)$ şi $B(x_2;y_2)$ adică

$$(1)\quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Factorul $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m =$ coeficientul unghiular al dreptei.

Acest coeficient unghiular este tangenta unghiului pe care îl face dreapta cu direcţia pozitivă a axei absciselor. In cazul nostru $m = tg(100 + \omega)$.

Analiza matematică ne spune că acelaşi coeficient unghiular la elipsă $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ este :

$$(2)\quad m = \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y} = \text{tang}\,(100 + \omega)$$

însă $tg\,(100 + \omega) = -\,cotg\,\omega = -\frac{\cos\omega}{\sin\omega}$, deci şi

$$(3)\quad \frac{b^2x}{a^2y} = \frac{\cos\omega}{\sin\omega} \quad \text{sau} \quad b^2x\sin\omega = a^2y\cos\omega$$

Ridicăm la patrat :

$$(4)\quad \begin{aligned} b^4x^2\sin^2\omega - a^4y^2\cos^2\omega &= 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \end{aligned}$$

Acesta este sistemul de ecuaţii care rezolvîndu-se, ne va da valoarea coordonatei x şi y a punctului pe elipsă. Procedăm prin metoda substituţiei, întîi în favoarea lui x şi apoi a lui y, găsim :

$$(5) \quad y^2 = \frac{b^4 x^2 \sin^2\omega}{a^4 \cos^2\omega}$$

înlocuim în ecuaţia elipsei :

$$(6) \quad b^2x^2 + a^2 \frac{b^4x^2 \sin^2\omega}{a^4 \cos^2\omega} = a^2b^2$$

Făcînd simplificările posibile şi izolînd pe x^2 :

$$(7) \; x^2\left(1 + \frac{b^2 \sin^2\omega}{a^2 \cos^2\omega}\right) = a^2 \quad \text{sau} \quad x^2 = \frac{a^2}{1 + \dfrac{b^2 \sin^2\omega}{a^2 \cos^2\omega}}$$

$$\text{sau} \quad x^2 = \frac{a^4 \cos^2\omega}{a^2 \cos^2\omega + b^2 \sin^2\omega}$$

Prin analogie găsim pe y^2 :

$$(8) \quad y^2 = \frac{b^2 \sin^2\omega}{a^2 \cos^2\omega + b^2 \sin^2\omega}$$

Transformînd numitorul, adică reprezentîndu-l numai prin semiaxa mare - a - şi excentricitatea - e - unde :

$$b^2 = a^2(1 - e^2)$$

$$a^2 \cos^2\omega + a^2(1 - e^2) \sin^2\omega = a^2 \cos^2\omega + a^2\sin^2\omega - a^2e^2\sin^2\omega =$$

$$= a^2(\sin^2\omega + \cos^2\omega) - a^2e^2 \sin^2\omega = a^2 (1 - e^2 \sin^2\omega)$$

Deci

$$x^2 = \frac{a^4 \cos^2\omega}{a^2 (1 - e^2 \sin^2\omega)}$$

sau

$$(9) \quad \boxed{\begin{aligned} x &= \frac{a \cdot \cos\omega}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\omega}} \\ y &= \frac{a(1 - e^2) \sin\omega}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\omega}} \end{aligned}}$$

Formulele (9) sînt valorile căutate ale unui punct pe elipsă.

5. Normala la elipsă

Normala la elipsă este perpendiculara pe tangentă într-un punct considerat şi lungimea ei este segmentul cuprins între punctul pe elipsă şi locul de intersecţie al normalei cu axa absciselor.

Din fig. 1 se observă că BC este proiecţia lui AB pe axa x-ilor.

Notăm lungimea normalei cu Ln

$$x = Ln \cos\omega ,$$

dar

$$x = \frac{a \cos \omega}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \omega}}, \text{ deci}$$

$$Ln \cos \omega = \frac{a \cos \omega}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \omega}}$$

$$\boxed{Ln = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \omega}}} \qquad (10)$$

Astfel s-a calculat lungimea normalei la elipsoidul terestru în funcție de latitudine. Dăm mai jos un tablou cuprinzînd lungimea normalelor din grad în grad pentru latitudinea Romîniei.

Latitudine Grad. centesimală	Lung. normalei
48	6.388.456
49	6.388.795
50	6.389.134
51	6.389.473
52	6.389.812
53	6.390.151
54	6.390.485
55	6.390.818

Cu acest tablou se poate afla valoarea normalei în orice punct al țării, interpolîndu-se latitudinea acestuia, între două grade imediat vecine.

c. <u>Curbura curbelor plane</u>

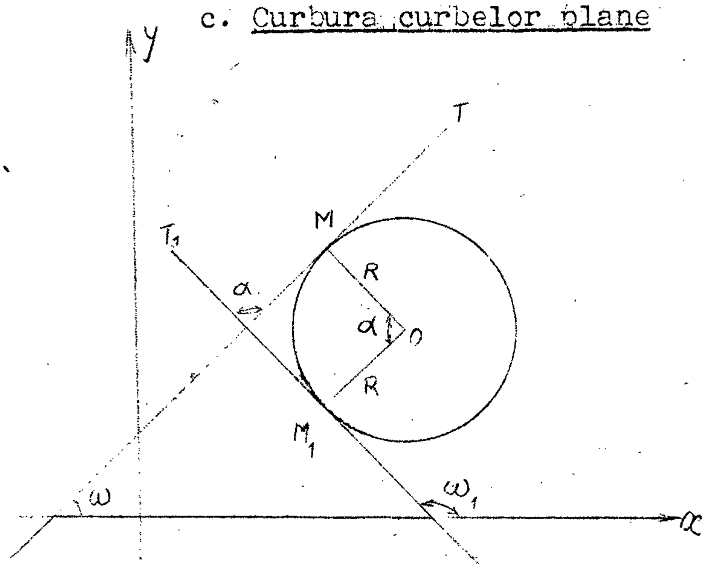


Fig. nr. 2

Curbura unei curbe variază invers proporțional cu raza. Pentru acest lucru se ia ca dimensiune a curburii inversa razei respective

$$C = \frac{1}{R}$$

Din fig. nr. 2 se observă că

$$\text{Lung.arc. } MM_1 = R\alpha$$

sau

$$R = \frac{\text{lung.arc. } MM_1}{\alpha}$$

deci curbura C :

$$C = \frac{1}{R} = \frac{\alpha}{\text{arc } MM_1}$$

Dar α este şi unghiul pe care.il fac cele două tangente T şi T_1 în punctele M şi M_1 şi astfel se poate spune :

Curbura unei curbe este raportul dintre unghiul celor două tangente prin lungimea arcului dintre punctele lor de tangenţă.

Considerînd arcul MM_1 ca fiind infinit de mic, unghiul dintre cele două tangente se numeşte : "unghi de contingenţă".

In cazul unei alte curbe - în afara cercului - raza capătă numele de "rază de curbură medie" şi curbura, "curbura medie a arcului MM_1".

In ipoteza că unul din puncte se apropie de-a lungul arcului de celălalt indefinit, analiza matematică ne dă :

$$\text{lim.c} = \lim \frac{\alpha}{\text{lung.arc. } MM_1} = \frac{d\alpha}{d\,\text{lung.arc. } MM_1}.$$

Aceasta este valoarea curburii în punctul M - şi se defineşte ca fiind : "raportul dintre unghiul de contingenţă prin diferenţiala de ord. I a arcului".

Tabloul de mai jos conţine raza medie de curbură pentru punctele de latitudine peste care se întinde ţara noastră.

Latitudine Grad. centesimală	Raza	Latitudine Grad. centesimală	Raza
48	6.377.02	52	6.379.702
49	6.377.677	53	6.380.377
50	6.378.352	54	6.381.049
51	6.379.027	55	6.381.719

d. Raza şi latitudinea geocentrică a pămîntului

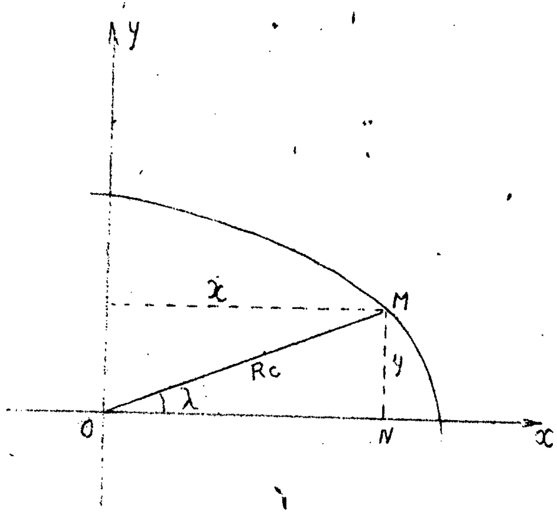


Fig. nr. 3

In fig. nr. 3 scoatem valoarea lui Rc :

$$Rc^2 = x^2 + y^2$$

însă ştim că un punct M pe elipsă are ca elemente rectangulare :

$$x = \frac{a \cdot \cos\omega}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\omega}}$$

$$y = \frac{a(1 - e^2)\sin\omega}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\omega}}$$

$$Rc^2 = \frac{a^2 \cos^2\omega}{1 - e^2 \sin^2\omega} + \frac{a^2(1-e^2)^2 \sin^2\omega}{1 - e^2 \sin^2\omega}$$

$$Rc^2 = \frac{a^2 \cos^2 a + a^2(1 - e^2)^2 \sin^2\omega}{1 - e^2 \sin^2\omega}$$

$$Rc^2 = \frac{a^2 \cos^2 a + a^2 \sin^2\omega + a^2 e^4 \sin^2\omega - 2 a^2 e^2 \sin^2\omega}{1 - e^2 \sin^2\omega}$$

$$Rc^2 = a^2 \frac{1 - 2 e^2 \sin^2\omega + e^4 \sin^2\omega}{1 - e^2 \sin^2\omega}$$

Efectuînd împărţirea

$$Rc^2 = a^2 (1 - e^2 \sin^2\omega + e^4 \sin^2\omega - e^4\sin^4\omega)$$

deci

$$Rc = a\sqrt{1 - e^2\sin^2\omega + e^4\sin^2\omega - e^4\sin^4\omega}$$

Dezvoltînd valoarea de sub radical după binomul lui Newton, la puterea 1/2, aflăm valoarea definitivă a lui Rc

$$Rc = \boxed{a \left(1 - \frac{1}{2} e^2\sin^2\omega + \frac{1}{2} e^4\sin^2\omega - \frac{1}{8} e^4\sin^4\omega\right)}$$

Rc este raza geocentrică a pămîntului şi ea reprezintă <u>"distanţa de la centrul pămîntului la un punct de pe glob".</u>

Ea este în funcţie de latitudinea locului.

Prin <u>"latitudine geocentrică a unui punct" se înţelege unghiul pe care îl face raza geocentrică a pămîntului cu axa pozitivă a absciselor.</u>

In fig. 3 din triunghiul dreptunghi OMN se scoate tg λ

$$\text{tg}\ \lambda = \frac{y}{x}$$

Căutînd a obţine valoarea lui tg λ în funcţie de semiaxa mare şi excentricitatea elipsei, se găseşte :

$$\text{tg}\ \lambda = \frac{(1 - e^2) \sin\omega}{\cos\omega} = (1 - e^2)\ \text{tg}\ \omega$$

ştiind că excentricitatea = 0,081.998,

$$\text{tg}\ \lambda = 0,993.277\ 33\ \text{tg}\,\omega\ .$$

Aplicînd această formulă se poate calcula latitudinea geocentrică, cunoscîndu-se valoarea latitudinii geografice a unui punct.

Se dă mai jos tabloul necesar pentru latitudinile geografice ale Romîniei :

ω^c	λ^c
48^c	$47^c78'57'',587$
49^c	$43^c78'54'',182$
50^c	$49^c78'52'',895$
51^c	$50^c78'54'',733$
52^c	$51^c78'56'',580$
53^c	$52^c78'62'',249$
54^c	$53^c78'63'',934$
55^c	$54^c78'78'',205$

e. <u>Raza medie a globului terestru</u>

Pentru determinarea razei mijlocii a pămîntului în funcţie de semiaxa principală și excentricitate, se pornește de la consideraţia că paralelele sînt cercuri - elipsoidul fiind de revoluţie - şi deci vom avea ca semiaze cele trei direcţiuni ox, oy şi oz, reprezentate prin : a, a, b.

Media aritmetică a celor trei mărimi va fi raza mijlocie a pămîntului, deci :

$$r_m = \frac{a + a + b}{3} = \frac{2a + b}{3}$$

Excentricitatea elipsoidului fiind :

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

vom scoate pe b şi îl vom înlocui în expresiunea razei :

$$b^2 = a^2 - e^2a^2$$

de unde

$$b = \sqrt{a^2 - e^2a^2} \quad \text{sau} \quad b = a\sqrt{1 - e^2}$$

înlocuim în ecuaţia lui r_m

$$r_m = \frac{2a + a\sqrt{1 - e^2}}{3}$$

$$r_m = \frac{a}{3} (2 + \sqrt{1 - e^2}) = \frac{a}{3} \left[2 + (1 - e^2)^{\frac{1}{2}} \right]$$

Ridicăm la puterea $\frac{1}{2}$ binomul $(1 - e^2)$ după binomul lui Newton,

$$(1 - e^2)^2 = 1 - \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{8} e^4 - \frac{1}{16} e^6 \ldots$$

înlocuim

$$r_m = \frac{a}{3} (3 - \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{8} e^4 - \frac{1}{16} e^6 \ \ldots)$$

sau

$$r_m = \boxed{a \left(1 - \frac{1}{6} e^2 - \frac{1}{24} e^4 - \frac{1}{48} e^6 \ldots \right)}$$

In formula de mai sus, înlocuind valorile semiaxei principale şi excentricităţii,

$$a = 6.378.388$$
$$e^2 = 0.006.722.66$$

găsim pentru r_m valoarea

$$r_m = 6.371.229 \text{ m.}$$

f. Lungimea arcelor de meridiane şi paralele

Considerînd un arc de meridian cuprins între limitele sale ω'' şi ω' şi plecînd de la formula razei de curbură în funcţie de semiaxa mare şi excentricitate se ajunge la formula :

$$\boxed{\begin{aligned} M = 6.378.388 \Big[& 0,993.317.217 \ (\omega'' - \omega') - \\ & - 0.002.525.234 \ (\sin 2\omega'' - \sin 2\omega') + \\ & + 0,000.002.648 \ (\sin 4\omega'' - \sin 4\omega') \Big] \end{aligned}}$$

Se demonstrează astfel că lungimea arcului unui meridian pentru o valoare constantă a unghiului la centru variază proporţional cu latitudinea, avînd valoarea cea mai mare la pol şi cea mai mică la ecuator.

S-a calculat astfel arcul de amplitudine 100^c (ecuator - pol) şi s-a găsit valoarea :

$$\frac{Lm}{4} = 10.002.288 \text{ m}$$

de unde se poate deduce lungimea totală a meridianului terestru

$$Lm_{total} = 40.009.152 \text{ m}$$

Ştiind că lungimea normalei este :

$$L_{normalei} = a\,(1 - e^2 \sin^2\omega)^{\frac{1}{2}}$$

şi că din fig. 1

$$(1) \qquad x = L_{normalei} \cos\omega$$

vom avea

$$x = \cos\omega \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\omega}}$$

Lungimea arcului de paralel este

$$(2) \qquad \ell_p = 2\,\pi\, x$$

înlocuim în formula (2) valoarea lui x din formula (1),

$$\ell_p = 2\,\pi\, a \frac{\cos\omega}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\omega}}$$

lungimea arcului de paralel de 1 grad centezimal este atunci :

$$\ell_p\, 1^c = \frac{2\,\pi\, a}{400^c} \cdot \frac{\cos\omega}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\omega}} \text{ sau}$$

$$\ell_p\, 1^c = \boxed{\pi\, a \cos\omega \frac{1}{200^c \sqrt{1 - e^2 \sin^2\omega}}}$$

In valori numerice

$$\ell_p\, 1^c = \boxed{100191{,}484.298.24 \frac{\cos\omega}{\sqrt{1 - 0.006.722.67 \sin^2\omega}}}$$

Cu ajutorul acestei formule se calculează lungimea paralelului ecuatorului, deci la latitudinea $\omega = 0^c$,

lung. ecuator = 40.076.593.719 m.

g. Determinarea excesului sferic

Deşi triunghiurile geodezice de ordin superior sînt considerate aşternute pe elipsoid, fără prea mare eroare se pot considera acestea ca trasate pe sfera de curbură medie, cu restricţia ca latura să nu depăşească 270 - 300 km. Pentru lanţurile cu laturi excepţional de mari se vor calcula acestea ca triunghiuri elipsoidice.

Şi în acest caz, rezolvarea acestor triunghiuri, în special în privinţa unghiurilor, suferă modificări după cum latura triunghiului considerat este mai mică sau depăşeşte 64 km.

Din geometrie se ştie că unghiurile unui triunghi sferic însumate, depăşesc 200^c cu o cantitate relatic mică, funcţie imediată de lungimea laturilor. După cum laturile sînt mai mari sau mai mici decît 64 km, această cantitate poartă numele de "<u>exces sferoidic</u>", respectiv "<u>exces sferic</u>".

In ţara noastră şi în general în toate ţările, laturile triunghiurilor geodezice nu depăşesc 64 km, fapt care face să determinăm aici doar excesul sferic.

Teorema lui Legeandre enunţă faptul că unui triunghi sferic cu latura foarte mică faţă de raza sferei respective i se poate asimila un triunghi plan de latură egală, cînd unghiurilor triunghiului sferic li se aplică o corecţiune de exces sferic.

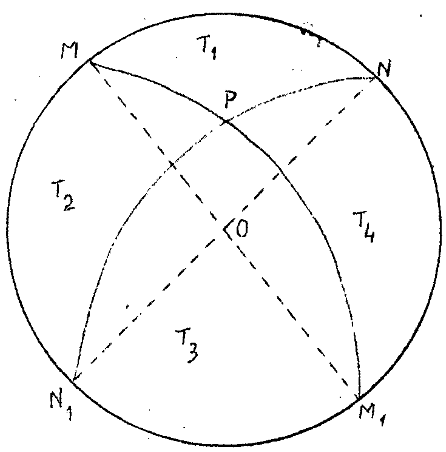


Fig. nr. 4

S-au format în fig. nr. 4 pe sfera O, trei fusuri care au ca măsură :

Fusul NN_1 = supr. triunghiurilor $T_1 + T_2$

Fusul PP_1 = supr. triunghiurilor $T_1 + T_3$

Fusul MM_1 = supr. triunghiurilor $T_1 + T_4$

Aceste trei fuse sferice acoperă o emisferă şi în funcţie de suprafaţa sferei putem scrie :

$$(1)\quad 3T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = \frac{4\pi R^2}{2} + 2T_1$$

Considerăm fusurile ca având α, β, γ grade centesimale. In acest caz suprafeţele fusurilor vor fi :

$$\text{Fus } NN_1 = \frac{\alpha}{400^c} 4\pi R^2$$

$$\text{Fus } PP_1 = \frac{\beta}{400^c} 4\pi R^2$$

$$\text{Fus } MM_1 = \frac{\gamma}{400^c} 4\pi R^2$$

Suma lor reprezintă o emisferă + 2 suprafeţe de fus NN_1. Deci

$$\frac{4\pi\alpha R^2}{400^c} + \frac{4\pi\beta R^2}{400^c} + \frac{4\pi\gamma R^2}{400^c} = \frac{4\pi R^2}{400^c}(\alpha + \beta + \gamma)$$

$$(\alpha + \beta + \gamma)\cdot\frac{4\pi R^2}{400^c} = \frac{4\pi R^2}{2} + 2T_1$$

Impărţim prin $\frac{4\pi R^2}{400^c}$

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{4\pi R^2}{2} \cdot \frac{400^c}{4\pi R^2} + 2 T_1 \frac{400^c}{2\pi R^2}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 200^c + 2 T_1 \frac{400}{4\pi R^2}$$

Se observă deci că suma celor trei unghiuri ale unui triunghi sferic depăşeşte 200^c cu $2 T_1 \frac{400}{4\pi R^2}$, cantitate numită exces sferic.

Transformînd gradele în radiani se ajunge la formula excesului sferic în funcţie de suprafaţa triunghiului T_1 şi raza medie de curbură.

$$\varepsilon = \boxed{636.620 \frac{T_1}{R^2}}$$

Se demonstrează, folosindu-se formulele suprafeţelor celor două triunghiuri echivalente - sferic şi plan - că fiecare unghi al triunghiului plan este mai mic decît omogenul său din cel sferic, cu o cantitate egală cu a treia parte din excesul sferic. Deci :

$$A = \alpha - \frac{\varepsilon}{3}$$

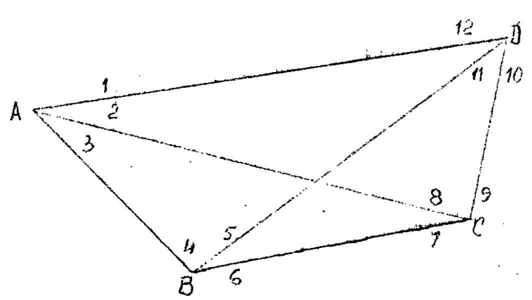
$$B = \beta - \frac{\varepsilon}{3}$$

$$C = \gamma - \frac{\varepsilon}{3}$$

Din formula excesului sferic se observă că acesta este direct proporţional cu suprafaţa triunghiului şi deci cu latura lui. De asemenea fiind invers proporţional cu raza medie a pămîntului, dependentă de latitudine, excesul sferic este implicit în funcţie de latitudinea la care se găseşte triunghiul de considerat.

Exemplu

Să se calculeze excesul sferic pentru triunghiurile patrulaterului ABCD cu laturile : AB = 3223 m ; BC = 3577 m ; CD = 2333 m ; AD = 6444 m şi avînd unghiurile provizorii :



(9 - 7) = $150^c44'72'',824$
(12 - 10) = $63^c58'54'',063$
(3 - 1) = $64^c85'92'',237$
(6 - 4) = $121^c10'66'',767$

Latitudinea patrulaterului = $46^c30'$ = $51^c66'67''$

a) calculul razei medii ρ

ρ^c	Raza medie	ΔR_m
51	6.379.027	675
52	6.379.702	

Rm = 6.379.027 × (0ᶜ66' 67" × 675) = 6.379.477 m

Rm = 6.379.477 m

b) Coeficientul constant al excesului

$$\frac{1}{\sin 1''} \cdot \frac{1}{2\,R^2} = \frac{636.620}{2 \times 6.379.477^2} = 10^{-13} \times 78213$$

c) Suprafața dublă a triunghiurilor

$$\text{Supr. } T = \frac{1}{2}\, b \cdot c \sin A \quad \text{sau} \quad 2\,T = b \cdot c \sin A$$

Tr	bc.sin A	2 T
I	$\overline{BC}$ x $\overline{CD}$ sin (9 - 7) = 3.577 x 2333 x 0,702.132	5.859.391
II	$\overline{CD}$ x $\overline{AD}$ sin (12 - 10) = 2333 x 6444 x 0,840.820	12.640.763
III	$\overline{AD}$ x $\overline{AB}$ sin (3 - 1) = 6.444 x 3223 x 0,851.400	17.682.737
IV	$\overline{AB}$ x $\overline{BC}$ sin (6 - 4) = 3.223 x 3577 x 0,945.542	10.900.843

d) Calculul excesului sferic

Tr	2 T	$\frac{1}{2\,R_m^2 \sin 1''}$	ε"	Observații
I	5.859.391	10^{-13} x 78213	0",04583	
II	12.640.763	10^{-13} x 78213	0",09887	
III	17.682.737	10^{-13} x 78213	0",13830	
IV	10.900.843	10^{-13} x 78213	0",08526	

$$\varepsilon = 10^{-13} \times 78213 \times 2\,T$$

Excesul sferic calculat pentru cele 4 triunghiuri, se va repartiza în mod egal pe unghiuri și se va scădea din unghiurile provizorii citite pe teren - obținîndu-se astfel unghiurile provizorii ale triunghiurilor plane respective.

D. COMPENSAREA REȚELELOR GEODEZICE

Metoda celor mai mici patrate

Lucrările de teren procură calculatorului mult mai multe elemente decît îi sînt acestuia necesare pentru rezolvarea figurilor. Aceste elemente luate în plus îi servesc pentru verificarea operațiunilor sale de calcul. Foarte rar se întîlnesc cazuri cînd aceste date culese în plus și care n-au intrat în rezolvarea figurilor să verifice perfect calculul. De cele mai multe ori compararea lor arată mici nepotriviri.

In primul caz, prin verificare avem "concordanță", iar în cel de al doilea "discordanță". Această discordanță, inerentă aproape lucrărilor de specific, poate să fie "de unghiuri", cînd condițiunea sumei unghiurilor din figură nu este îndeplinită sau "de laturi", cînd se constată că mărimea unei laturi, măsurată direct pe teren în plus de necesarul elementelor de calcul nu închide perfect figura.

Cum tendința geodezului este de a construi cu datele din teren o rețea pur geometrică, aceste discordanțe sau erori care afectează măsurile unghiulare sau liniare trebuiesc anulate prin aplicarea unor corecțiuni. Determinarea acestor diferențe și aplicarea corecturilor formează obiectul "compensării sau ajustării rețelei geodezice".

S-a văzut în capitolele precedente la "metode pentru măsurarea unghiurilor" sau la "măsurarea bazelor" că se fac în geodezie observațiuni cît mai multe asupra aceluiași element. Această abundență de observațiuni servește pentru ca din media lor să iasă o valoare cît mai aproape de cea reală.

Această mică diferență dintre valoarea aflată din media observațiunilor făcute asupra aceleiași mărimi, adică dintre valoarea provizorie și valoarea reală a mărimii, este eroarea făcută și ea trebuie determinată. Ele devin "necunoscutele" problemei în cazul de față.

Cu aceste erori necunoscute și cantitățile măsurate direct în teren, se construiesc o serie de ecuațiuni care au la bază relațiile geometrice ale figurilor din rețea. Aceste ecuații, condiționînd exactitatea calculelor ulterioare, poartă numele de "ecuații de condiție".

Acestor erori necunoscute li se mai pune condițiunea ca suma patratelor lor să fie un minim.

Din geometria analitică se știe că o funcție variabilă atinge un minim (respectiv un maxim) atunci cînd derivata sa de prim ordin este nulă. Erorile cu care avem de aface sint mici și atunci cînd ridicăm la patrat ele devin și mai mici. Acest fapt a dat și numele de "metoda celor mai mici patrate"

Fiecare din mărimile provizorii ne furnizează cîte o eroare - deci o necunoscută - și dat fiind faptul că relațiile geometrice dintre elementele unei figuri nu ne pot da un număr de ecuații egale cu numărul necunoscutelor, vom avea de rezolvat un sistem cu mult mai puține ecuații decît necunoscute. Sistemul este rezolvabil numai dacă numărul ecuaţiilor egalează pe acela al necunoscutelor.

Din această cauză se folosesc nişte constante ajutătoare, care transformă sistemul nerezolvabil într-un sistem normal, care să conţină atîtea ecuaţii cîte necunoscute are.- Aceste constante poartă numele de "corelate" şi sînt valorile căutate în noul sistem de ecuaţii, care dat fiind forma lor, poartă numele de "sistem de ecuaţii normale simetrice".

Odată aflate aceste corelate, se determină cu uşurinţă erorile care aplicate valorilor provizorii observate le transformă în valori reale ale unei reţele geometrice.

a. Legile lui Gauss referitoare la numărul necesar al ecuaţiilor de condiţiune în reţea

Cum relaţiunile geometrice pe baza cărora se elaborează ecuaţiunile de condiţie se referă la dimensiuni unghiulare sau liniare, vom avea în sistem ecuaţii de condiţie pentru unghiuri sau pentru laturi. Nu sînt necesare totdeauna toate ecuaţiile ce se pot scoate din relaţiunile geometrice, ci numai un număr dintre ele. Determinarea acestui număr strict de ecuaţiuni se face după legile lui Gauss.

Ecuaţii de condiţie pentru laturi

Enunţul legii lui Gauss pentru determinarea numărului de ecuaţii de condiţie pentru laturi se bazează pe relaţiunile dintre punctele noi şi liniile noi în cadrul construirii poligoanelor. El observă că numărul de linii noi necesare construcţiei unui poligon în funcţie de punctele noi create se dezvoltă după expresiunea :

$$\ell = 2\,P - 3$$

unde P reprezintă numărul punctelor figurii.

Astfel la 4 puncte se pot duce 5 direcţiuni, la 6 puncte se pot duce 9 direcţiuni etc.

Numărul ecuaţiilor pentru laturi este dat de numărul liniilor de prisos la construirea poligonului respectiv şi el este dat de diferenţa dintre numărul total de laturi al reţelei "L" şi numărul " " al liniilor necesare construirii reţelei.

Deci

$$N_\ell = L - \ell$$

înlocuim valoarea lui $\ell = 2\,P - 3$

$$N_\ell = \boxed{L - 2\,P + 3.}$$

Ecuaţii de condiţie pentru unghiuri

Elaborarea formulei pentru determinarea numărului necesar de ecuaţii de condiţie pentru unghiuri, are la bază două relaţiuni geometrice ale poligonului.

1. Intr-un poligon, numărul de laturi strict necesar construirii acestuia este egal cu numărul punctelor, adică :

$$L = P$$

2. Intr-un poligon cu "L" laturi, suma unghiurilor inte-

rioare cu de două ori atîtea unghiuri drepte, cîte laturi are poligonul, minus două.

Deci un poligon fără nici o diagonală nu poate furniza decît o singură ecuaţie de condiţiune.

O diagonală dusă într-un poligon determină 2 poligoane, deci două ecuaţii; două diagonale determină trei poligoane; trei diagonale formează 4 poligoane. Se observă deci că "D" diagonale duse într-un poligon, formează în interiorul acestuia "D + 1" poligoane şi fiecare poligon furnizînd cîte o ecuaţie de unghiuri "D + 1" ecuaţii de condiţie pentru unghiuri.

$$N_u = D + 1.$$

Este demonstrat faptul că într-un poligon de - L - laturi (se înţelege cu diagonale cu tot), numărul diagonalelor este egal cu diferenţa dintre numărul total de laturi şi numărul de puncte al poligonului:

$$D = L - P.$$

Inlocuit în expresia de sus, ne dă formula de determinare a numărului necesar de ecuaţii pentru unghiuri :

$$N_u = \boxed{L - P + 1}$$

3. <u>Numărul total de ecuaţii de condiţiune</u>

Legile lui Gauss determină numărul necesar de ecuaţii de condiţiune dintr-o reţea geodezică pentru compensarea prin metoda celor mai mici patrate, înainte de începerea calculului. El este reprezentat de suma ecuaţiilor pentru laturi şi unghiuri :

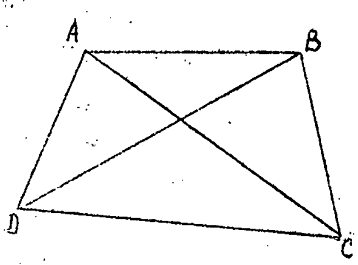
$$N = N_u + N_\ell$$

$$N = L - 2P + 3 + L - P + 1$$

$$N = \boxed{2L - 3P + 4.}$$

<u>Exemplu numeric</u>

Să se determine numărul necesar al ecuaţiilor de condiţiune din patrulaterul ABCD.



$$N_u = L - P + 1 = 6 - 4 + 1 = 3 \text{ ec.}$$

Din cele 4 triunghiuri pe care ni le furnizează patrulaterul luăm numai 3 pentru elaborarea ecuaţiilor necesare. Pentru bună regulă se elimină triunghiul care are suprafaţa cea mai mică :

$$N_\ell = L - 2P + 3 = 6 - 8 + 3 = 1 \text{ ec.}$$

Pentru singura ecuaţie de condiţiune pentru laturi luăm pe aceea care se formează luînd ca centru de eroare acel vîrf al patrulaterului, care nu face parte din triunghiul cel mai mare:

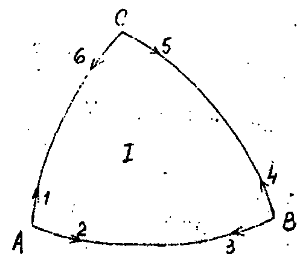
$$N = 2L - 3P + 4 = 12 - 12 + 4 = 4 \text{ ec.}$$

Pentru compensarea prin metoda celor mai mici patrate a unui patrulater sînt necesare deci numai 4 ecuaţii de condiţiune.

b. <u>Formarea ecuaţiilor de condiţiune</u>

In triunghiul alăturat ABC s-au notat direcţiunile laturilor cu numerele de la 1...6; astfel că unghiurile A; B; C vor fi utilizate în formule prin diferenţa direcţiunilor, adică :

$$A = (2 - 1) \; ; \quad B = (4 - 3) \; ; \quad C = (6 - 5).$$



Fiecare din aceste direcţiuni au afectate cîte o valoare unghiulară parţială, pe care o notăm cu v_1 ... v_6. Deci unghiurile de calcul, debarasate de erorile lor vor fi :

$$(2) \qquad \begin{aligned} A &= \left[(2 + v_2) - (1 + v_1)\right] \\ B &= \left[(4 + v_4) - (3 + v_3)\right] \\ C &= \left[(6 + v_6) - (5 + v_5)\right] \end{aligned}$$

Unghiurile citite de pe teren vor trebui să îndeplinească condiţiunea că suma lor să fie egală cu două unghiuri drepte. Suma lor însă totdeauna este mai mică sau mai mare, cu o cantitate pe care în formulă o notăm cu "E_1" şi care are inclus şi excesul sferic al triunghiului :

$$(3) \qquad (2 - 1) + (4 - 3) + (6 - 5) = 200 + E_1$$

Dacă socotim unghiurile debarasate de erorile lor, vom putea scrie relaţia :

$$(4) \quad \left[(2 + v_2)-(1 + v_1)\right] + \left[(4 + v_4)-(3 + v_3)\right] + \left[(6 + v_6)-(5 + v_5)\right] = 200^c + \varepsilon_1$$

în care ε este excesul sferic al triunghiului ABCD.

Dezvoltînd relaţia (4)

$$(2 - 1)+(v_2 - v_1)+(4 - 3)+(v_4 - v_3)+(6 - 5)+ (v_6 - v_5) = 200^c + \varepsilon_1$$

şi scăzînd relaţia (3), obţinem :

$$(5) \qquad (v_2 - v_1) + (v_4 - v_3) + (v_6 - v_5) = \varepsilon_1 - E_1.$$

Relaţia (5) ne arată că suma erorilor direcţiunilor este tocmai diferenţa dintre neînchiderea triunghiului mai puţin excesul sferic.

Dacă notăm $E_1 - \varepsilon_1 = w_1$ şi ordonăm erorile după numărul direcţiunilor, obţinem ecuaţia de condiţie pentru unghiuri a triunghiului ABC :

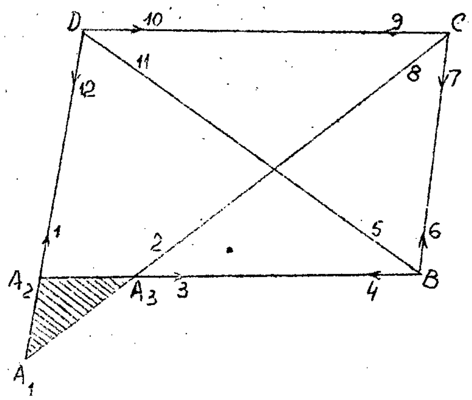
$$(6) \qquad \boxed{-v_1 + v_2 - v_3 + v_4 - v_5 + v_6 + w_1 = 0}$$

Pentru generalizarea formulei se notează coeficienţii ± 1 ai erorilor v_1 .... v_6 cu a_1 ...... a_6. Relaţia (6) devine :

$$(7) \qquad \boxed{a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 + a_5v_5 + a_6v_6 + w_1 = 0.}$$

Pentru determinarea ecuaţiei de condiţiune pentru laturi, se pleacă de la constatarea că orice vîrf al reţelei geodezice în care se intersectează trei laturi poate constitui un triunghi de eroare, în sensul că cele trei laturi nu se întîlnesc în acelaşi punct.

Să luăm de exemplu patrulaterul ABCD. Am amintit la determinarea numărului de ecuaţii de condiţiune pentru laturi, după legile lui Gauss, că pentru compensarea unui poligon cu 4 puncte nu este necesară decît o singură ecuaţie pentru laturi. Şi se ia ca centru de eroare, vîrful care este în afara triunghiului cu suprafaţa cea mai mare. Considerăm acest punct ca fiind vîrful A în care se formează triunghiul de eroare, A_1, A_2, A_3.



Condiţia de anulare a triunghiului de eroare va fi :

$$\overline{A_1C} = \overline{A_3C}$$

Din triunghiul A_1DC se deduce :

$$\frac{\overline{A_1C}}{\sin (12 - 10)} = \frac{\overline{DC}}{\sin (2 - 1)}$$

sau

$$\overline{A_1C} = \overline{DC}\,\frac{\sin (12 - 10)}{\sin (2 - 1)}$$

Din triunghiul A_3BC, teorema sinusurilor ne dă relaţia

(8) $$\frac{\overline{A_3C}}{\sin (6 - 4)} = \frac{\overline{BC}}{\sin (3 - 2)} \quad \text{sau} \quad \overline{A_3C} = \overline{BC}\,\frac{\sin (6 - 4)}{\sin (3 - 2)}.$$

Din triunghiul BCD, bazîndu-ne pe aceeaşi teoremă, avem :

(9) $$\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = \frac{\sin (11 - 10)}{\sin (6 - 5)}$$

Condiţia de anulare a triunghiului de eroare este

$$\overline{A_1C} = \overline{A_3C}$$

sau

$$\overline{DC}\,\frac{\sin (12 - 10)}{\sin (2 - 1)} = \overline{BC}\,\frac{\sin (6 - 4)}{\sin (3 - 2)}$$

înlocuim relaţia (9) în locul lui $\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}$:

(10) $$\frac{\sin (12 - 10)}{\sin (2 - 1)} = \frac{\sin (11 - 10)}{\sin (6 - 5)} \cdot \frac{\sin (6 - 4)}{\sin (3 - 2)}$$

sau

$$\frac{\sin (2 - 1) \cdot \sin (6 - 4) \cdot \sin (11 - 10)}{\sin (3 - 2) \cdot \sin (6 - 5) \cdot \sin (12 - 10)} = 1$$

Se notează cu $P_1 = \sin (2 - 1) \cdot \sin (6 - 4) \cdot \sin (11-10)$
$P_2 = \sin (3 - 2) \cdot \sin (6 - 5) \cdot \sin (12-10)$

Vom avea atunci relaţia

(11) $$\frac{\sin (2 - 1) \cdot \sin (6 - 4) \cdot \sin (11 - 10)}{\sin (3 - 2) \cdot \sin (6 - 5) \cdot \sin (12 - 10)} = \frac{P_1}{P_2}.$$

Această relaţie se adresează şi se aplică unei figuri pur geometrice. De regulă însă această egalitate nu este satisfăcută din cauza erorilor direcţiunilor, pe care le-am notat cu v.

Dîndu-le locul în formula (11), aceasta devine :

$$\frac{\sin\left[(2-1)+(v_2-v_1)\right]\cdot\sin\left[(6-4)+(v_6-v_4)\right]\cdot\sin\left[(11-10)+(v_{11}-v_{1o})\right]}{\sin\left[(3-2)+(v_3-v_2)\right]\cdot\sin\left[(6-5)+(v_6-v_5)\right]\cdot\sin\left[(12-10)+(v_{12}-v_{1o})\right]} = 1$$

Dezvoltînd în serie fiecare factor după teorema lui Taylor:

$$f(a + x) = f(a) + x\,\frac{df(a)}{da} + \ldots\ldots$$

unde x este creşterea funcţiei, vom avea :

$$\left.\begin{aligned}
\sin\left[(2-1)+(v_2-v_1)\right] &= \sin(2-1) + \triangle(2-1)\,(v_2-v_1)\\
\sin\left[(6-4)+(v_6-v_4)\right] &= \sin(6-4) + \triangle(6-4)\,(v_6-v_4)\\
\sin\left[(11-1o)+(v_{11}-v_{1o})\right] &=\\
&= \sin(11-10) + \triangle(11-10)\,(v_{11}-v_{1o})
\end{aligned}\right\}\ \text{numărătorul expresiei}$$

$$\left.\begin{aligned}
\sin\left[(3-2)+(v_3-v_2)\right] &= \sin(3-2) + \triangle(3-2)\,(v_3-v_2)\\
\sin\left[(6-5)+(v_6-v_5)\right] &= \sin(6-5) + \triangle(6-5)\,(v_6-v_5)\\
\sin\left[(12-10)+(v_{12}-v_{1o})\right] &=\\
&= \sin(12-10) + \triangle(12-10)\,(v_{12}-v_{1o})
\end{aligned}\right\}\ \text{numitorul expresiei}$$

în care $\triangle(2-1),\ldots\ldots\triangle(12-10)$ nu sînt altceva decît diferenţele tabulare, respective sin 1" din dreptul valorii numerice a unghiurilor respective.

Inmulţim între ei factorii numărătorului :

$$\begin{aligned}
(12)\quad &\left[\sin(2-1) + \triangle(2-1)(v_2-v_1)\right]\cdot\left[\sin(6-4) + \triangle(6-4)(v_6-v_4)\right]\cdot\\
&\cdot\left[\sin(11-1o) + \triangle(11-10)(v_{11}-v_{1o})\right] = \sin(2-1)\cdot\sin(6-4)\cdot\\
&\cdot\sin(11-1o) + \sin(2-1)\,\sin(11-1o)\;\triangle(6-4)\,(v_6-v_4) +\\
&+ \sin(6-4)\,\sin(11-1o)\;\triangle(2-1)\,(v_2-v_1) +\\
&+ \sin(11-1o)\;\triangle(2-1)\,(v_2-v_1)\;\triangle(6-4)\,(v_6-v_4) +\\
&+ \sin(2-1)\,\sin(6-4)\;\triangle(11-1o)\,(v_{11}-v_{1o}) +\\
&+ \sin(2-1)\;\triangle(6-4)\,(v_6-v_4)\;\triangle(11-1o)\,(v_{11}-v_{1o}) +\\
&+ \sin(6-4)\;\triangle(2-1)\,(v_2-v_1)\;\triangle(11-10)\,(v_{11}-v_{1o}) +\\
&+ \triangle(2-1)\,(v_2-v_1)\;\triangle(6-4)\,(v_6-v_4)\;\triangle(11-1o)\,(v_{11}-v_{1o}).
\end{aligned}$$

Din cei 8 termeni numai patru sînt importanţi, şi anume termenii 1; 2; 3 şi 5. Ceilalţi termeni 4; 6; 7; 8 vor fi neglijaţi, ei reprezentînd valori foarte mici.

Pentru omogenizarea formulei şi generalizarea ei vom nota conform formulei (11) cu

$$(13) \qquad P_1 = (2-1) \cdot \sin(6-4) \cdot \sin(11-10).$$

Pentru ca acest produs de trei factori să apară în toţi cei 4 termeni pe care i-am ales din relaţia (12), recurgem la un artificiu de calcul, şi anume vom înmulţi şi împărţi fiecare din termenii 2; 3 şi 5 cu sinusul unghiului care îi lipseşte.

Vom obţine la sfîrşit expresia numărătorului astfel :

$$P_1 + P_1 \frac{\Delta(2-1)(v_2-v_1)}{\sin(2-1)} + P_1 \frac{\Delta(6-4)(v_6-v_4)}{\sin(6-4)} + P_1 \frac{\Delta(11-10)(v_{11}-v_{10})}{\sin(11-10)}$$

Vom proceda în acelaşi mod şi pentru numărător şi vom obţine valoarea lui :

$$P_2 + P_2 \frac{\Delta(6-5)(v_6-v_5)}{\sin(6-5)} + P_2 \frac{\Delta(3-2)(v_3-v_2)}{\sin(3-2)} + P_2 \frac{\Delta(12-10)(v_{12}-v_{10})}{\sin(12-10)}$$

Astfel se va obţine ecuaţia de condiţiune pentru laturi :

$$\frac{P_1 + P_1 \frac{\Delta(2-1)(v_2-v_1)}{\sin(2-1)} + P_1 \frac{\Delta(6-4)(v_6-v_4)}{\sin(6-4)} + P_1 \frac{\Delta(11-10)(v_{11}-v_{10})}{\sin(11-10)}}{P_2 + P_2 \frac{\Delta(3-2)(v_3-v_2)}{\sin(3-2)} + P_2 \frac{\Delta(6-5)(v_6-v_5)}{\sin(6-5)} + P_2 \frac{\Delta(12-10)(v_{12}-v_{10})}{\sin(12-10)}} = 1 \qquad (14)$$

c. Rezolvarea ecuaţiilor de condiţiune

Cum am amintit la început, ecuaţiile de condiţiune se pot rezolva pe calea obişnuită a algebrei, după ce au fost transformate în ecuaţii simetrice prin intermediul unor constante numite "corelate". Redăm mai jos modul de transformare al ecuaţiilor de condiţiune în ecuaţii normale şi rezolvarea acestora.

Presupunem că avem spre rezolvare un sistem de 4 ecuaţii conţinînd 12 necunoscute : $v_1 \ldots\ldots v_{12}$:

$$\left.\begin{array}{l}
a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{12}v_{12} + w_1 = 0 \\
b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_{12}v_{12} + w_2 = 0 \\
c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + c_{12}v_{12} + w_3 = 0 \\
d_1v_1 + d_2v_2 + d_3v_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + d_{12}v_{12} + w_4 = 0
\end{array}\right\} \quad (1)$$

Condiţiunea necesară pentru compensarea prin metoda celor mai mici pătrate este aceea că aceste necunoscute (corecţiunile) trebuiesc astfel determinate ca suma patratelor lor să fie minimă.

Din reprezentarea funcţiilor se ştie că o funcţie atinge un minim sau un maxim atunci cînd derivata de ordinul I a funcţiei se anulează. Avînd deci suma patratelor erorilor

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots\dots\dots\dots + v_{12}^2$$

o diferenţiem şi o anulăm. Adică punem condiţia,

$$(2) \quad v_1 dv_1 + v_2 dv_2 + v_3 dv_3 + \dots\dots\dots\dots + v_{12} dv_{12} = 0.$$

Punem această condiţie (2) ecuaţiilor (1) şi pentru a le transforma în ecuaţii simetrice le înmulţim pe fiecare cu nişte coeficienţi λ_1; λ_2; λ_3; λ_4. Derivata constantei $w_1 \dots\dots v_4$ este nulă.

Sistemul (1) devine :

$$
(3) \quad
\begin{aligned}
&\lambda_1 a_1 dv_1 + \lambda_1 a_2 dv_2 + \lambda_1 a_3 dv_3 + \dots\dots\dots + \lambda_1 a_{12} dv_{12} = 0\\
&\lambda_2 b_1 dv_1 + \lambda_2 b_2 dv_2 + \lambda_2 b_3 dv_3 + \dots\dots\dots + \lambda_2 b_{12} dv_{12} = 0\\
&\lambda_3 c_1 dv_1 + \lambda_3 c_2 dv_2 + \lambda_3 c_3 dv_3 + \dots\dots\dots + \lambda_3 c_{12} dv_{12} = 0\\
&\lambda_4 d_1 dv_1 + \lambda_4 d_2 dv_2 + \lambda_4 d_3 dv_3 + \dots\dots\dots + \lambda_4 d_{12} dv_{12} = 0
\end{aligned}
$$

Adunînd ecuaţiile sistemului pe coloane şi dînd factor comun, obţinem expresia :

$$
\begin{aligned}
(4) \quad & dv_1(a_1\lambda_1 + b_1\lambda_2 + c_1\lambda_3 + d_1\lambda_4) + dv_2(a_2\lambda_1 + b_2\lambda_2 +\\
& + c_2\lambda_3 + d_2\lambda_4) + dv_3(a_3\lambda_1 + b_3\lambda_2 + c_3\lambda_3 + d_3\lambda_4) + \dots\dots\\
& \dots\dots + dv_{12}(a_{12}\lambda_1 + b_{12}\lambda_2 + c_{12}\lambda_3 + d_{12}\lambda_4) = 0
\end{aligned}
$$

Făcînd comparaţia valorii coeficienţilor lui $dv_1 \dots\dots dv_{12}$ între ecuaţia (2) şi (4) găsim ecuaţiile erorilor în funcţie de corelate :

$$
(5) \quad
\begin{aligned}
v_1 &= a_1\lambda_1 + b_1\lambda_2 + c_1\lambda_3 + d_1\lambda_4\\
v_2 &= a_2\lambda_1 + b_2\lambda_2 + c_2\lambda_3 + d_2\lambda_4\\
v_3 &= a_3\lambda_1 + b_3\lambda_2 + c_3\lambda_3 + d_3\lambda_4\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
v_{12} &= a_{12}\lambda_1 + b_{12}\lambda_2 + c_{12}\lambda_3 + d_{12}\lambda_4
\end{aligned}
$$

Aceste ecuaţii poartă numele de "<u>ecuaţiile corelatelor</u>".

Să trecem acum la rezolvarea ecuaţiilor de condiţiune prin intermediul corelatelor $\lambda_1 \dots\dots \lambda_4$.

Valorile necunoscutelor $v_1 \dots\dots v_{12}$ din ecuaţiile corelatelor se înlocuesc în ecuaţiile (1) :

$$
\begin{aligned}
& a_1(a_1\lambda_1 + b_1\lambda_2 + c_1\lambda_3 + d_1\lambda_4) + a_2(a_2\lambda_1 + b_2\lambda_2 +\\
& \quad + c_2\lambda_3 + d_2\lambda_4) + a_3(a_3\lambda_1 + b_3\lambda_2 + c_3\lambda_3 + d_3\lambda_4) +\\
& \quad + \dots\dots\dots + a_{12}(a_{12}\lambda_1 + b_{12}\lambda_2 + c_{12}\lambda_3 + d_{12}\lambda_4) + w_1 = 0\\
& b_1(a_1\lambda_1 + b_1\lambda_2 + c_1\lambda_3 + d_1\lambda_4) + b_2(a_2\lambda_1 + b_2\lambda_2 +\\
& \quad + c_2\lambda_3 + d_2\lambda_4) + b_3(a_3\lambda_1 + b_3\lambda_2 + c_3\lambda_3 + d_3\lambda_4) +\\
& \quad + \dots\dots\dots + b_{12}(a_{12}\lambda_1 + b_{12}\lambda_2 + c_{12}\lambda_3 + d_{12}\lambda_4) + w_2 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(6)\quad & c_1(a_1\lambda_1 + b_1\lambda_2 + c_1\lambda_3 + d_1\lambda_4) + c_2(a_2\lambda_1 + b_2\lambda_2 + \\
& + c_2\lambda_3 + d_2\lambda_4) + c_3(a_3\lambda_1 + b_3\lambda_2 + c_3\lambda_3 + d_3\lambda_4) + \\
& + \ldots\ldots + c_{12}(a_{12}\lambda_1 + b_{12}\lambda_2 + c_{12}\lambda_3 + d_{12}\lambda_4) + w_3 = 0 \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& c_1(a_1\lambda_1 + b_1\lambda_2 + c_1\lambda_3 + d_1\lambda_4) + c_2(a_2\lambda_1 + b_2\lambda_2 + \\
& + c_2\lambda_3 + d_2\lambda_4) + c_3(a_3\lambda_1 + b_3\lambda_2 + c_3\lambda_3 + d_3\lambda_4) + \\
& + \ldots\ldots + d_{12}(a_{12}\lambda_1 + b_{12}\lambda_2 + c_{12}\lambda_3 + d_{12}\lambda_4) + w_4 = 0
\end{aligned}
$$

Se procedează la desfacerea parantezelor şi la ordonarea termenilor ecuaţiilor după corelate. Pentru uşurarea calculului se vor întrebuinţa notaţiile de mai jos, numite şi "<u>notaţiile lui Gauss</u>".

$$
\begin{aligned}
& & [aa] &= a_1a_1 + a_2a_2 + a_3a_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{12}a_{12} \\
[ab] &= & [ba] &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{12}b_{12} \\
[ac] &= & [ca] &= a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{12}c_{12} \\
[ad] &= & [da] &= a_1d_1 + a_2d_2 + a_3d_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{12}d_{12} \\
& & [bb] &= b_1b_1 + b_2b_2 + b_3b_3 + \ldots\ldots\ldots + b_{12}b_{12} \\
[bc] &= & [cb] &= b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 + \ldots\ldots\ldots + b_{12}c_{12} \\
[bd] &= & [db] &= b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3 + \ldots\ldots\ldots + b_{12}d_{12} \\
& & [cc] &= c_1c_1 + c_2c_2 + c_3c_3 + \ldots\ldots\ldots + c_{12}c_{12} \\
[cd] &= & [dc] &= c_1d_1 + c_2d_2 + c_3d_3 + \ldots\ldots\ldots + c_{12}d_{12} \\
& & [dd] &= d_1d_1 + d_2d_2 + d_3d_3 + \ldots\ldots\ldots + d_{12}d_{12}
\end{aligned}
$$

Prin folosirea notaţiilor de mai sus se obţin "<u>ecuaţiile normale simetrice</u>"

$$
(7)\quad \begin{cases}
[aa]\,\lambda_1 + [ab]\,\lambda_2 + [ac]\,\lambda_3 + [ad]\,\lambda_4 + w_1 = 0 \\
[ba]\,\lambda_1 + [bb]\,\lambda_2 + [bc]\,\lambda_3 + [bd]\,\lambda_4 + w_2 = 0 \\
[ca]\,\lambda_1 + [cb]\,\lambda_2 + [cc]\,\lambda_3 + [cd]\,\lambda_4 + w_3 = 0 \\
[da]\,\lambda_1 + [db]\,\lambda_2 + [dc]\,\lambda_3 + [dd]\,\lambda_4 + w_4 = 0
\end{cases}
$$

Ecuaţiile normale se mai numesc simetrice pentrucă aranjamentul lor este simetric faţă de diagonala $[aa] \ \ldots\ldots \ [dd]$. Această simetrie permite simplificări şi verificări de calcule.

Vom utiliza pentru desfăşurarea calculului într-un mod mai simplu ecuaţiile normale sub forma (8)

$$
\begin{aligned}
a\quad & A_1\lambda_1 + B_1\lambda_2 + C_1\lambda_3 + D_1\lambda_4 + w_1 = 0 \\
b\quad & B_1\lambda_1 + B_2\lambda_2 + C_2\lambda_3 + D_2\lambda_4 + w_2 = 0
\end{aligned}
$$

(3)

$$c \quad C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2 + C_3 \lambda_3 + D_3 \lambda_4 + w_3 = 0$$

$$d \quad D_1 \lambda_1 + D_2 \lambda_2 + D_3 \lambda_3 + D_4 \lambda_4 + w_4 = 0$$

Vom rezolva sistemul prin metoda substituţiei. Scoatem valoarea lui λ_1 din prima ecuaţie :

(8 bis) $$\boxed{\lambda_1 = -\frac{B_1}{A_1}\lambda_2 - \frac{C_1}{A_1}\lambda_3 - \frac{D_1}{A_1}\lambda_4 - \frac{w_1}{A_1}}$$

şi o înlocuim pe rînd în celelalte 3 ecuaţii, reducînd în acelaşi timp termenii asemenea :

$$\left(B_2 - B_1\frac{B_1}{A_1}\right)\lambda_2 + \left(C_2 - B_1\frac{C_1}{A_1}\right)\lambda_3 + \left(D_2 - B_1\frac{D_1}{A_1}\right)\lambda_4 + \left(w_2 - B_1\frac{w_1}{A_1}\right) = 0$$

(9) $$\left(C_2 - C_1\frac{B_1}{A_1}\right)\lambda_2 + \left(C_3 - C_1\frac{C_1}{A_1}\right)\lambda_3 + \left(D_3 - C_1\frac{D_1}{A_1}\right)\lambda_4 + \left(w_3 - C_1\frac{w_1}{A_1}\right) = 0$$

$$\left(D_2 - D_1\frac{B_1}{A_1}\right)\lambda_2 + \left(D_3 - D_1\frac{C_1}{A_1}\right)\lambda_3 + \left(D_4 - D_1\frac{D_1}{A_1}\right)\lambda_4 + \left(w_4 - D_1\frac{w_1}{A_1}\right) = 0$$

Pentru simplificarea expresiilor vom nota cu :

$$B_2 - B_1\frac{B_1}{A_1} = B'_2 \; ; \quad C_2 - B_1\frac{C_1}{A_1} = C'_2 \; ; \quad D_2 - B_1\frac{D_1}{A_1} = D'_2 \; ; \quad w_2 - B_1\frac{w_1}{A_1} = w'_2$$

şi $\sum'_2 = B'_2 + C'_2 + D'_2 + w'_2$.

Sistemul se va putea scrie atunci astfel :

$$B'_2 \lambda_2 + C'_2 \lambda_3 + D'_2 \lambda_4 + w'_2 = 0$$

(10) $$C'_2 \lambda_2 + \left(C_3 - C_1\frac{C_1}{A_1}\right)\lambda_3 + \left(D_3 - C_1\frac{D_1}{A_1}\right)\lambda_4 + \left(w_3 - C_1\frac{w_1}{A_1}\right) = 0$$

$$D'_2 \lambda_2 + \left(D_3 - D_1\frac{C_1}{A_1}\right)\lambda_3 + \left(D_4 - D_1\frac{D_1}{A_1}\right)\lambda_4 + \left(w_4 - D_1\frac{w_1}{A_1}\right) = 0$$

Din prima ecuaţie a sistemului (10) extragem valoarea lui λ_2

(10 b) $$\boxed{\lambda_2 = -\frac{C'_2}{B'_2}\lambda_3 - \frac{D'_2}{B'_2}\lambda_4 - \frac{w'_2}{B'_2}}$$

şi o substituim în celelalte două :

$$C'_2\left(-\frac{C'_2}{B'_2}\lambda_3 - \frac{D'_2}{B'_2}\lambda_4 - \frac{w'_2}{B'_2}\right) + \left(C_3 - C_1\frac{C_1}{A_1}\right)\lambda_3 + \left(D_3 - C_1\frac{D_1}{A_1}\right)\lambda_4 +$$

$$+ \left(w_3 - C_1 \frac{w_1}{A_1} \right) = 0$$

$$D_2' \left(- \frac{C_2'}{B_2'} \lambda_3 - \frac{D_2'}{B_2'} \lambda_4 - \frac{w_2'}{B_2'} \right) + \left(D_3 - D_1 \frac{C_1}{A_1} \right) \lambda_3 +$$

$$+ \left(D_4 - D_1 \frac{D_1}{A_1} \right) \lambda_4 + \left(w_4 - D_1 \frac{w_1}{A_1} \right) = 0$$

Reducînd termenii asemenea şi ordonînd sistemul se poate scrie sub forma :

$$\lambda_3 \left(C_3 - C_1 \frac{C_1}{A_1} - C_2' \frac{C_2'}{B_2'} \right) + \lambda_4 \left(D_3 - C_1 \frac{D_1}{A_1} - C_2' \frac{D_2'}{B_2'} \right) +$$

$$+ \left(w_3 - C_1 \frac{w_1}{A_1} - C_2' \frac{w_2'}{B_2'} \right) = 0$$

(11)

$$\lambda_3 \left(D_3 - D_1 \frac{C_1}{A_1} - D_2' \frac{C_2'}{B_2'} \right) + \lambda_4 \left(D_4 - D_1 \frac{D_1}{A_1} - D_2' \frac{D_2'}{B_2'} \right) +$$

$$+ \left(w_4 - D_1 \frac{w_1}{A_1} - D_2' \frac{w_2'}{B_2'} \right) = 0$$

Pentru simplificare se notează :

$$C_3' = C_3 - C_1 \frac{C_1}{A_1} - C_2' \frac{C_2'}{B_2'} \quad ; \quad w_3' = w_3 - C_1 \frac{w_1}{A_1} - C_2' \frac{w_2'}{B_2'}$$

$$D_3' = D_3 - C_1 \frac{D_1}{A_1} - C_2' \frac{D_2'}{B_2'} \quad ; \quad \Sigma_3' = C_3' + D_3' + w_3' .$$

Sistemul devine

$$(12) \quad \begin{cases} C_3' \lambda_3 + D_3' \lambda_4 + w_3' = 0 \\ D_3' \lambda_3 + \left(D_4 - D_1 \frac{D_1}{A_1} - D_2' \frac{D_2'}{B_2'} \right) \lambda_4 + \left(w_4 - D_1 \frac{w_1}{A_1} - D_2' \frac{w_2'}{B_2'} \right) = 0 \end{cases}$$

Din ecuaţia întîia a sistemului (12) aflăm valoarea corelatei λ_3 :

$$(12\ b) \quad \boxed{\lambda_3 = - \frac{D_3'}{C_3'} \lambda_4 - \frac{w_3'}{C_3'}}$$

cu care transformăm ecuaţia a doua într-o ecuaţie cu o singură necunoscută λ_4, şi anume :

$$- D_3' \frac{D_3'}{C_3'} \lambda_4 - D_3' \frac{w_3'}{C_3'} + \left(D_4 - D_1 \frac{D_1}{A_1} - D_2' \frac{D_2'}{B_2'}\right)\lambda_4 + \left(w_4 - D_1 \frac{w_1}{A_1} - D_2' \frac{w_2'}{B_2'}\right) = 0$$

sau

$$(13) \qquad \lambda_4\left(D_4 - D_1 \frac{D_1}{A_1} - D_2' \frac{D_2'}{B_2'} - D_3' \frac{D_3'}{C_3'}\right) + \left(w_4 - D_1 \frac{w_1}{A_1} - D_2' \frac{w_2'}{B_2'} - D_3' \frac{w_3'}{C_3'}\right) = 0$$

Din această ecuaţie scoatem valoarea corelatei λ_4 :

$$\lambda_4 = - \frac{w_4 - D_1 \frac{w_1}{A_1} - D_2' \frac{w_2'}{B_2'} - D_3' \frac{w_3'}{C_3'}}{D_4 - D_1 \frac{D_1}{A_1} - D_2' \frac{D_2'}{B_2'} - D_3' \frac{D_3'}{C_3'}}$$

Folosim tot pentru simplificare notaţiile :

$$D_4' = D_4 - D_1 \frac{D_1}{A_1} - D_2' \frac{D_2'}{B_2'} - D_3' \frac{D_3'}{C_3'}$$

$$w_4' = w_4 - D_1 \frac{w_1}{A_1} - D_2' \frac{w_2'}{B_2'} - D_3' \frac{w_3'}{C_3'}$$

Vom avea astfel valoarea corelatei a patra sub forma :

$$(13\ b) \qquad \boxed{\lambda_4 = - \frac{w_4'}{D_4'}}$$

In sfîrşit am ajuns la aflarea valorilor corelatelor în funcţie de coeficienţii ecuaţiilor normale. Astfel avem în ordinea rezolvării lor :

$$(14) \qquad \begin{cases} \lambda_4 = - \frac{w_4'}{D_4'} \\ \lambda_3 = - \frac{D_3'}{C_3'} \lambda_4 - \frac{w_3'}{C_3'} \\ \lambda_2 = - \frac{C_2'}{B_2'} \lambda_3 - \frac{D_2'}{B_2'} \lambda_4 - \frac{w_2'}{B_2'} \\ \lambda_1 = - \frac{B_1}{A_1} \lambda_2 - \frac{C_1}{A_1} \lambda_3 - \frac{D_1}{A_1} \lambda_4 - \frac{w_1}{A_1} \end{cases}$$

Pentru uşurarea calculului ecuaţiilor simetrice se întrebuinţează un tablou recapitulativ de formă trapezoidală de forma celui alăturat.

Pentru lămurire vom explica ce anume reprezintă fiecare linie şi coloană din tablou.

Tablou pentru rezolvarea ecuaţiilor normale

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	w	$\sum$	Val. corelatelor	$w\lambda$
1	A_1	B_1	C_1	D_1	w_1	$\sum_1$	$\lambda_1 = -\frac{B_1}{A_1}\lambda_2 - \frac{C_1}{A_1}\lambda_3 -$	
2		$-\frac{B_1}{A_1}$	$-\frac{C_1}{A_1}$	$-\frac{D_1}{A_1}$	$-\frac{w_1}{A_1}$	$-\frac{\sum_1}{A_1}$	$-\frac{D_1}{A_1}\lambda_4 - \frac{w_1}{A_1}$	$w_1\lambda_1$
3		B_2	C_2	D_2	w_2	$\sum_2$		
4		$-B_1\frac{B_1}{A_1}$	$-B_1\frac{C_1}{A_1}$	$-B_1\frac{D_1}{A_1}$	$-B_1\frac{w_1}{A_1}$	$-B_1\frac{\sum_1}{A_1}$	$\lambda_2 = -\frac{C'_2}{B'_2}\lambda_3 - \frac{D'_2}{B'_2}\lambda_4 -$	
5		B'_2	C'_2	D'_2	w'_2	$\sum'_2$	$-\frac{w'_2}{B'_2}$	
6			$-\frac{C'_2}{B'_2}$	$-\frac{D'_2}{B'_2}$	$-\frac{w'_2}{B'_2}$	$-\frac{\sum'_2}{B'_2}$		$w_2\lambda_2$
7			C_3	D_3	w_3	$\sum_3$		
8			$-C_1\frac{C_1}{A_1}$	$-C_1\frac{D_1}{A_1}$	$-C_1\frac{w_1}{A_1}$	$-C_1\frac{\sum_1}{A_1}$	$\lambda_3 = -\frac{D'_3}{C'_3}\lambda_4 - \frac{w'_3}{C'_3}$	
9			$-C'_2\frac{C'_2}{B'_2}$	$-C'_2\frac{D'_2}{B'_2}$	$-C'_2\frac{w'_2}{B'_2}$	$-C'_2\frac{\sum'_2}{B'_2}$		
10			C'_3	D'_3	w'_3	$\sum'_3$		
11				$-\frac{D'_3}{C'_3}$	$-\frac{w'_3}{C'_3}$	$-\frac{\sum'_3}{C'_3}$		$w_3\lambda_3$
12				D_4	w_4	$\sum_4$		
13				$-D_1\frac{D_1}{A_1}$	$-D_1\frac{w_1}{A_1}$	$-D_1\frac{\sum_1}{A_1}$		
14				$-D'_2\frac{D'_2}{B'_2}$	$-D'_2\frac{w'_2}{B'_2}$	$-D'_2\frac{\sum'_2}{B'_2}$		
15				$-D'_3\frac{D'_3}{C'_3}$	$-D'_3\frac{w'_3}{C'_3}$	$-D'_3\frac{\sum'_3}{C'_3}$		
16				D'_4	w'_4	$\sum'_4$	$\lambda_4 = -\frac{w'_4}{D'_4}$	
17					$-\frac{w'_4}{D'_4}$	$-\frac{\sum'_4}{D'_4}$		$w_4\lambda_4$

Tabloul are 8 coloane în capul cărora se scriu cele 4 corelate $\lambda_1 \dots \lambda_4$, termenul liber w, suma, valoarea corelatelor şi, în sfîrşit, produsul termenului constant prin corelata respectivă.

Linia 1-a. In dreptul fiecărei corelate se înscriu coeficienţii de la prima ecuaţie a sistemului simetric, termenul constant w al ecuaţiei şi apoi suma algebrică a acestor coeficienţi. Această linie se completează de aşa manieră ca să iasă în relief faţă de celelalte linii, de exemplu : printr-o altă culoare, altă scriere etc.

Deci în linia 1-a vor apare : $A_1 = [aa]$; $B_1 = [ab]$; $C_1 = [ac]$; $D_1 = [ad]$; $w_1 =$ şi $\sum_1 = A_1 + B_1 + C_1 + D_1 + w_1$.

Linia 2-a. Această linie cuprinde coeficienţii găsiţi în urma scoaterii din ecuaţie a valorii corelatei λ_1 în funcţie de celelalte. Deci în ea vom scrie cîturile luate cu semn contrar dintre coeficienţii primei ecuaţii şi coeficientul primei corelate λ_1. Deci :

$$-\frac{B_1}{A_1} = -\frac{[ab]}{[aa]} \; ; \quad -\frac{C_1}{A_1} = -\frac{[ac]}{[aa]} ; \quad -\frac{D_1}{A_1} = -\frac{[ad]}{[aa]} ; \quad -\frac{w_1}{A_1} \; ; \quad -\frac{\sum_1}{A_1}$$

Linia 3-a. In această linie se înscriu aşa cum se găsesc coeficienţii, termenul liber şi suma acestora din ecuaţia a doua a sistemului normal de ecuaţii. Se observă că primul coeficient $B_1 = [ab] = [ba]$ nu se mai scrie. Se va avea însă în vedere ca să fie inglobat în suma $\sum_2$.

Linia 4-a. Aici apare în dreptul fiecărei coloane produsul dintre primul coeficient al ecuaţiei a doua şi fiecare valoare omogen aşezată din coloana doua.

$$-B_1 \frac{B_1}{A_1} \; ; \quad -B_1 \frac{C_1}{A_1} \; ; \quad -B_1 \frac{D_1}{A_1} \; ; \quad -B_1 \frac{w_1}{A_1} \; ; \quad -B_1 \frac{\sum_1}{A_1} .$$

Linia 5-a, cuprinde coeficienţii primei ecuaţii a sistemului normal de trei ecuaţii cu trei necunoscute λ_2, λ_3 şi λ_4, rezultat din substituirea valorii primei corelate scoasă în ecuaţia întîia a sistemului iniţial de 4 ecuaţii simetrice.

Practic, aceşti coeficienţi se obţin din însumarea algebrică a coloanelor 3 şi 4 din tablou. Adică :

$$B'_2 = B_2 - B_1 \frac{B_1}{A_1} \; ; \quad C'_2 = C_2 - B_1 \frac{C_1}{A_1} \; ; \quad D'_2 = D_2 - B_1 \frac{C_1}{A_1} \; ;$$

$$w'_2 = w_2 - B_1 \frac{w_1}{A_1} \; ; \quad \sum{}'_2 = \sum{}_2 - B_1 \frac{\sum_1}{A_1}$$

Această linie apare în tablou distinct de restul calculului, scrisă cu aceleaşi caractere sau culoare ca şi linia 1-a.

Linia 6-a este rezultatul extragerii valorii celei de a doua corelate λ_2 din sistemul normal redus la cele 3 ecuaţii. El cuprinde cîturile cu semn schimbat al restului coeficienţilor ecuaţiei prin coeficientul corelatei λ_2, adică :

$$-\frac{C'_2}{B'_2} \; ; \quad -\frac{D'_2}{B'_2} \; ; \quad -\frac{w'_2}{B'_2} \; ; \quad -\frac{\Sigma'_2}{B'_2}$$

Linia 7-a cuprinde coeficienţii celei de a treia ecuaţie a sistemului simetric iniţial. Se observă că cei din stînga diagonalei nu apar în tablou (C_1 şi C_2). In suma Σ_3 ei însă vor fi incluşi prin valorile lor din linia 1 şi 3.

$$C_3 \; ; \quad D_3 \; ; \quad w_3 \; ; \quad \Sigma_3 \; .$$

Linia 8-a. In această linie apar aceleaşi cîturi din linia 2-a, înmulţite de această dată prin C_1. Nu apar coeficienţii lui λ_1 şi λ_2. Adică vom înscrie în coloanele respective valorile

$$-C_1\frac{C_1}{A_1} \; ; \quad -C_1\frac{D_1}{A_1} \; ; \quad -C_1\frac{w_1}{A_1} \; ; \quad -C_1\frac{\Sigma_1}{A_1} \; .$$

In linia 9-a se înscriu coeficienţii (parţiali) rezultaţi în ecuaţia II a sistemului de 3 ecuaţii, după ce am introdus aici valoarea lui λ_2 scoasă din prima ecuaţie a aceluiaşi sistem. Mai precis, sînt coeficienţii rezultaţi din înlocuirea valorii λ_2 în expresia $C'_2\lambda_3$ din ecuaţia secundă. Aceştia vor fi dar :

$$-C'_2\frac{C'_2}{B'_2} \; ; \quad -C'_2\frac{D'_2}{B'_2} \; ; \quad -C'_2\frac{w'_2}{B'_2} \; ; \quad -C'_2\frac{\Sigma'_2}{B'_2}$$

Linia 10-a cuprinde coeficienţii primei ecuaţii a sistemului redus la două ecuaţii cu două necunoscute λ_3 şi λ_4, după simplificarea de formă făcută prin înlocuirea cu C'_3, D'_3 şi w'_3. Practic această linie se obţine prin însumarea celor trei linii imediat superioare, adică vom avea :

$$C'_3 = C_3 - C_1\frac{C_1}{A_1} - C'_2\frac{C'_2}{B'_2} \; ; \quad D'_3 = D_3 - C_1\frac{D_1}{A_1} - C'_2\frac{D'_2}{B'_2}$$

$$w'_3 = w_3 - C_1\frac{w_1}{A_1} - C'_2\frac{w'_2}{B'_2} \; ; \quad \Sigma'_3 = \Sigma_3 - C_1\frac{\Sigma_1}{A_1} - C'_2\frac{\Sigma'_2}{B'_2}$$

Valorile vor fi scrise cu aceleaşi caractere sau culoare ca şi liniile 1 şi 5.

In linia 11-a se înscriu coeficienţii lui λ_4 şi w_4 din prima ecuaţie a sistemului de 2 ecuaţii după izolarea corelatei λ_3. Deci vor apare aici :

$$-\frac{D'_3}{C'_3}\ ;\quad -\frac{w'_3}{C'_3}\ ;\quad -\frac{\sum'_3}{C'_3}\ .$$

Linia 12-a cuprinde coeficienţii de la dreapta diagonalei a celei de a patra ecuaţie a sistemului simetric iniţial. Se renunţă la scrierea celor din stînga diagonalei, însă în mod necondiţionat ei vor intra în valoarea sumei de pe această linie, adică :

$$D_4\ ;\quad w_4\ ;\quad \sum_4 = D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + w_4\ .$$

Linia 13-a este rezultatul înmulţirii liniei a 2-a cu valoarea D_1

$$-D_1\frac{D_1}{A_1}\ ;\quad -D_1\frac{w_1}{A_1}\ ;\quad -D_1\frac{\sum_1}{A_1}\ .$$

Linia 14-a este formată din valorile liniei 6, înmulţite cu D'_2.

$$-D'_2\frac{D'_2}{B'_2}\ ;\quad -D'_2\frac{w'_2}{B'_2}\ ;\quad -D'_2\frac{\sum'_2}{B'_2}$$

In linia 15-a apar produsele dintre D'_3 şi valorile omogen situate în linia 11, adică :

$$-D'_3\frac{D'_3}{C'_3}\ ;\quad -D'_3\frac{w'_3}{C'_3}\ ;\quad -D'_3\frac{\sum'_3}{C'_3}$$

Linia 16-a are înscrişi coeficienţii ultimei ecuaţii reduse la o singură necunoscută λ_4. In mod practic, ei reprezintă suma algebrică pe coloană a celor 4 linii imediat superioare (12, 13, 14, 15).

In tablou ele vor apare cu aceleaşi distincţii ca şi liniile 1, 5 şi 10.

$$D'_4 = D_4 - D_1\frac{D_1}{A_1} - D'_2\frac{D'_2}{B'_2} - D'_3\frac{D'_3}{B'_3}\ ;\quad w'_4 = w_4 - D_1\frac{w_1}{A_1} - D'_2\frac{w'_2}{B'_2} -$$

$$-D'_3\frac{w'_3}{C'_3}\ ;\quad \sum'_4 = \sum_4 - D_1\frac{\sum_1}{A_1} - D'_2\frac{\sum'_2}{B'_2} - D'_3\frac{\sum'_3}{C'_3}$$

Linia 17-a este formată din cîturile rezultate dintre elementele liniei a 16-a prin coeficientul D'_4 luate cu semn schimbat.

$$-\frac{w'_4}{D'_4}\ ;\quad -\frac{\sum'_4}{D'_4}$$

Primul cît reprezintă valoarea definitivă a primei corelate calculate, adică a lui λ_4.

Verificarea valorilor tabloului

La început, cînd am făcut aprecierile cuvenite asupra posibilităţilor de rezolvare a sistemului normal, am arătat că simetria lui faţă de diagonala principală ne va permite simplificări şi verificări. Se observă că termenii $\sum$ (sumă) nu apar în ecuaţiile sistemului. Ei servesc în tabloul rezolvării sistemului tocmai pentru verificările menţionate.

Pentru a fi pe deplin convinşi că rezolvarea noastră este condusă cu siguranţă, verificarea prin aceşti termeni sumă se va face la fiecare linie. Deşi este o operaţie în plus, ea economiseşte mult timp însă, pentru că greşelile sînt inerente.

a. Verificarea pentru liniile 2; 6; 11 şi 17.

Verificarea pentru aceste linii constă în aceea că diferenţa dintre termenul sumă şi termenii din stînga sa trebuie să fie egală cu unitatea.

Pentru exemplificare, vom demonstra cu termenii din linia a 2-a.

Plecînd de la relaţia dintre coeficienţii primei ecuaţii normale şi sumă :

$$\sum_1 = A_1 + B_1 + C_1 + D_1 + w_1$$

împărţim ecuaţia prin $- A_1$. Vom avea :

$$-\frac{\sum_1}{A_1} = -1 - \frac{B_1}{A_1} - \frac{C_1}{A_1} - \frac{D_1}{A_1} - \frac{w_1}{A_1}$$

sau

$$\frac{\sum_1}{A_1} - \frac{B_1}{A_1} - \frac{C_1}{A_1} - \frac{D_1}{A_1} - \frac{w_1}{A_1} = 1$$

expresie care arată pe deplin ceea ce trebuia să demonstrăm.

b. Verificarea pentru liniile 4; 8; 9; 13; 14 şi 15

Termenii $\sum$ din coloana a 6-a a acestor linii, trebuie să fie egali cu suma algebrică a celorlalţi termeni din stînga lui, ţinînd seama şi de termenul care nu mai apare în tablou.

Pentru demonstrare, împărţim aceeaşi relaţie din cazul precedent :

$$\sum_1 = A_1 + B_1 + C_1 + D_1 + w_1$$

prin raportul $- \frac{B_1}{A_1}$.

Vom găsi expresia :

$$- B_1 \frac{\Sigma_1}{A_1} = - B_1 - B_1 \frac{B_1}{A_1} - B_1 \frac{C_1}{A_1} - B_1 \frac{D_1}{A_1} - B_1 \frac{w_1}{A_1}$$

In acelaşi mod se poate demonstra valabilitatea verificării şi pentru celelalte linii.

După ce tabloul a fost controlat astfel, se procedează la calcularea corelatelor λ_1; λ_2; λ_3; λ_4.

Calcularea valorii corelatelor λ.

Inainte de a aşeza valorile în tablou, am scris relaţia (14), în care au fost scoase valorile corelatelor în ordinea calculării lor. Ultima linie a tabloului recapitulativ ne dă direct valoarea corelatei λ_4.

$$\lambda_4 = - \frac{w'_4}{D'_4}$$

Pentru aflarea corelatei λ_3, înlocuim valoarea aflată a corelatei λ_4 în formula :

$$\lambda_3 = - \frac{D'_3}{C'_3} \lambda_4 - \frac{w'_3}{C'_3}$$

restul coeficienţilor valorici îi luăm din linia 11 a tabloului.

Corelata II se găseşte înlocuind valorile obţinute ale corelatelor λ_3 şi λ_4 în relaţia :

$$\lambda_2 = - \frac{C'_2}{B'_2} \lambda_3 - \frac{D'_2}{B'_2} \lambda_4 - \frac{w'_2}{B'_2}$$

restul coeficienţilor putînd fi luaţi din linia 6 a tabloului.

In sfîrşit se află valoarea ultimei corelate λ_1 în funcţie de celelalte trei aflate şi de coeficienţii din linia a doua, aplicaţi la formula :

$$\lambda_1 = - \frac{B_1}{A_1} \lambda_2 - \frac{C_1}{A_1} \lambda_3 - \frac{D_1}{A_1} \lambda_4 - \frac{w_1}{A_1}$$

Pentru a fi siguri că nu am greşit calculul corelatelor, se înlocuesc acestea în ecuaţiile sistemului normal. Coeficienţii lor numerici vor fi luaţi din liniile 1; 3; 7 şi 12.

Nu totdeauna aceste ecuaţii sînt verificate perfect. Se consideră calculul făcut bine dacă diferenţa pe ecuaţii nu depăşeşte cinci miimi de secundă, adică

$$\varepsilon < 0'',005.$$

Toate aceste valori ale corelatelor se înscriu în tabloul rezolvării ecuaţiilor pe coloana 7.

Ultima coloană, a 8-a, cuprinde produsele parţiale ale termenului constant prin valoarea corelatei. Ultima linie a tabloului - a 18-a, înscrie suma acestor produse parţiale. Mai tîrziu se va vedea că suma $w\lambda$ va trebui să concorde cu suma patratelor corecţiunilor de direcţiune $[vv]$ sau cel puţin să concorde la primele două cifre semnificative. Ele vor fi însă de semn contrar.

Rezolvarea ecuaţiilor corelatelor

Avînd valoarea corelatelor, vom căuta să aflăm corecţiunile de direcţiune v_1 ..... v_{12}; acestea vor rezulta din înlocuirea în ecuaţiile corelatelor a valorilor corelatelor aflate din sistemul normal.

Amintim aceste ecuaţii (5) :

$$v_1 = a_1 \lambda_1 + b_1 \lambda_2 + c_1 \lambda_3 + d_1 \lambda_4$$
$$v_2 = a_2 \lambda_1 + b_2 \lambda_2 + c_2 \lambda_3 + d_2 \lambda_4$$
$$v_3 = a_3 \lambda_1 + b_3 \lambda_2 + c_3 \lambda_3 + d_3 \lambda_4$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$v_{12} = a_{12} \lambda_1 + b_{12} \lambda_2 + c_{12} \lambda_3 + d_{12} \lambda_4$$

Introducînd în aceste relaţii valorile corelatelor şi coeficienţii ecuaţiilor de condiţiune, vom găsi corecţiunile căutate. Pentru simplificarea calculului vom uza tabloul alăturat, care pe coloane va avea produsele coeficienţilor ecuaţiilor prin corelata respectivă, iar pe linii vom afla valoarea corecţiunilor de direcţiune v_1 .... v_{12}.

Nr. indicilor corecţiilor	$a\lambda_1$	$b\lambda_2$	$c\lambda_3$	$d\lambda_4$	v	vv
1	$a_1\lambda_1$	$b_1\lambda_2$	$c_1\lambda_3$	$d_1\lambda_4$	v_1	v_1^2
2	$a_2\lambda_1$	$b_2\lambda_2$	$c_2\lambda_3$	$d_2\lambda_4$	v_2	v_2^2
3	$a_3\lambda_1$	$b_3\lambda_2$	$c_3\lambda_3$	$d_3\lambda_4$	v_3	v_3^2
4	$a_4\lambda_1$	$b_4\lambda_2$	$c_4\lambda_3$	$d_4\lambda_4$	v_4	v_4^2
5	$a_5\lambda_1$	$b_5\lambda_2$	$c_5\lambda_3$	$d_5\lambda_4$	v_5	v_5^2
6	$a_6\lambda_1$	$b_6\lambda_2$	$c_6\lambda_3$	$d_6\lambda_4$	v_6	v_6^2
7	$a_7\lambda_1$	$b_7\lambda_2$	$c_7\lambda_3$	$d_7\lambda_4$	v_7	v_7^2
8	$a_8\lambda_1$	$b_8\lambda_2$	$c_8\lambda_3$	$d_8\lambda_4$	v_8	v_8^2
9	$a_9\lambda_1$	$b_9\lambda_2$	$c_9\lambda_3$	$d_9\lambda_4$	v_9	v_9^2

(Continuarea tabelei)

Nr.indicilor corecţiilor	$a\lambda_1$	$b\lambda_2$	$c\lambda_3$	$d\lambda_4$	v	vv
10	$a_{10}\lambda_1$	$b_{10}\lambda_2$	$c_{10}\lambda_3$	$d_{10}\lambda_4$	v_{10}	v_{10}^2
11	$a_{11}\lambda_1$	$b_{11}\lambda_2$	$c_{11}\lambda_3$	$d_{11}\lambda_4$	v_{11}	v_{11}^2
12	$a_{12}\lambda_1$	$b_{12}\lambda_2$	$c_{12}\lambda_3$	$d_{12}\lambda_4$	v_{12}	v_{12}^2
S	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	[vv]

In tabloul de mai sus, dacă se va aduna pe coloane, rezultatul va trebui să fie nul cu excepţia ultimei coloane "vv". Practic, această condiţie nu este decît rar îndeplinită. Este suficient însă ca valoarea tezultată să fie inferioară unei miimi de secundă:

$$\varepsilon < 0''.001.$$

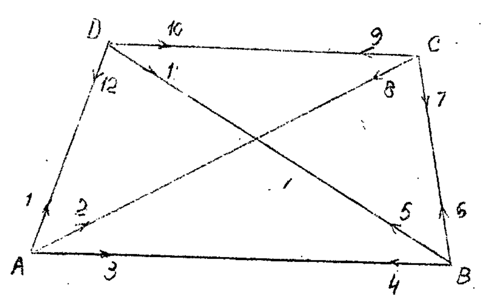
O verificare de ansamblu a calculului o dă şi condiţia ce se pune sumei [vv] . Ea trebuie să fie egală cu $w\lambda$ din tabloul pentru rezolvarea ecuaţiilor normale sau cel puţin să concorde la primele două cifre semnificative.

Reducerea corectiunilor de direcţiune pentru menţinerea originei la zero

Corecţiunile aflate v_1 ...... v_{12} sînt erorile pe care le conţin direcţiunile observate pe teren. Ele vor trebui afectate acestor direcţiuni observate pentru a obţine direcţiunile definitive ale laturilor reţelei sau figurii considerate.

S-a constatat că ar fi un isvor de greşeli mai puţin şi o uşurare de calcul dacă se va căuta ca originea să fie menţinută la valoarea 0°.00'.00".000 (este vorba aici de direcţiunea de origină a fiecărui vîrf observat).

Să reconsiderăm o figură cu 12 direcţiuni.



Alegem pentru fiecare vîrf o direcţiune origină ; de exemplu 1; 4; 7 şi 10.

In tabloul direcţiunilor observate, acestea au fost reduse la 0°00'00"000. In momentul cînd noi le afectăm corecţiunile v_1 ... ... v_{12}, direcţiunile de origină vor diferi de zero cu v_1; v_4; v_7 şi v_{10}. Pentru a menţine totuşi originea la zero, va trebui să scădem din corecţiunile celorlalte vize ale staţiunii, eroarea direcţiunii de origină. Vom avea deci pentru vîrful A :

$$0^c.00'.00''.000$$

$$(2 - 1) \div (v_2 - v_1)$$

$$(3 - 1) \div (v_3 - v_1)$$

Pentru vîrful B :

$$0^c.00'.00''.000$$

$$(5 - 4) \div (v_5 - v_4)$$

$$(6 - 4) \div (v_6 - v_4)$$

Pentru vîrful C :

$$0^c.00'.00''.000$$

$$(8 - 7) \div (v_8 - v_7)$$

$$(9 - 7) \div (v_9 - v_7)$$

Pentru vîrful D :

$$0^c.00'.00''.000$$

$$(11 - 10) \div (v_{11} - v_{10})$$

$$(12 - 10) \div (v_{12} - v_{10})$$

Operaţiunile pentru menţinerea originei zero după aplicarea corecţiunilor de direcţiune s-ar putea concentra într-un tablou de forma celui de mai jos.

Aceste direcţiuni definitive sînt cele care vor intra în calcularea laturilor reţelei. De aici încolo calculul decurge ca şi în metoda Lehagre - Bröniman pe care am expus-o într-un capitol anterior.

Numărul direcției	Calculul reducerii corecțiilor			Direcții observate	Direcții definitive
	$v_{dir.}$	$v_{orig.}$	$v_{dir.}-v_{orig.}$		
1	v_1	v_1	0	$0^c00'00''000$	$0^c00'00''000$
2	v_2	v_1	$v_2 - v_1$	(2 - 1)	$(2 - 1) \div (v_2 - v_1)$
3	v_3	v_1	$v_3 - v_1$	(3 - 1)	$(3 - 1) \div (v_3 - v_1)$
4	v_4	v_4	0	$0^c00'00''000$	$0^c00'00''000$
5	v_5	v_4	$v_5 - v_4$	(5 - 4)	$(5 - 4) \div (v_5 - v_4)$
6	v_6	v_4	$v_6 - v_4$	(6 - 4)	$(6 - 4) \div (v_6 - v_4)$
7	v_7	v_7	0	$0^c00'00''000$	$0^c00'00''000$
8	v_8	v_7	$v_8 - v_7$	(8 - 7)	$(8 - 7) \div (v_8 - v_7)$
9	v_9	v_7	$v_9 - v_7$	(9 - 7)	$(9 - 7) \div (v_9 - v_7)$
10	v_{10}	v_{10}	0	$0^c00'00''000$	$0^c00'00''000$
11	v_{11}	v_{10}	$v_{11} - v_{10}$	(11 - 10)	$(11-10) \div (v_{11}-v_{10})$
12	v_{12}	v_{10}	$v_{12} - v_{10}$	(12 - 10)	$(12-10) \div (v_{12}-v_{10})$

-----oooOooo-----

Ing.A.MIHAIL

Redactat şi verificat
Ştefănescu Spiridon

B I B L I O G R A F I E

1. Bonea I. . . . . Curs de Topografie
2. Costăchel Aurel . . . . Curs de Topografie
3. Filimon Raul . . . . Curs de Topografie
4. Nicolau Gh. Bîrlad . . . . . . Buletin Fotogrametric
5. Orăşeanu Cezar . . . . Topografie
6. Orăşeanu Cezar . . . . Geodezie
7. Orlov P.M. . . . . Curs de Geodezie
8. Pătraşcu şi Stanciu . . . . . Triangulaţia geodezică de ord.IV.
9. Prévot E. . . . . Topographie
10. Rabinovici I.L. . . . . Tratat de Geodezie.
11. Roussilhe H. . . . . Géodezie
12. Tardi P. . . . . Traité de Géodézie.

TABLA DE MATERII

VOLUMUL I.

VOLUMUL II.

(continuarea din capitolul II volumul I.)

SFIRŞITUL VOLUMULUI II.

Buc., 11.V.1954

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2013/01/16 :
CIA-RDP80T00246A066400010005-9