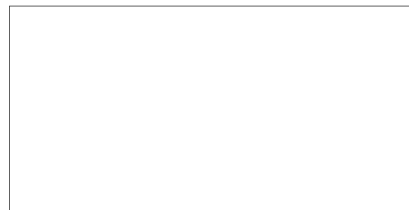


MINISTERUL ÎNVĂȚĂMÎNTULUI  
INSTITUTUL POLITEHNIC TIMIȘOARA  
FACULTATEA DE CONSTRUCȚII

CURS  
DE  
TOPOGRAFIE

PROF. ING. **BONEA IOAN**

STAT



LITOGRAFIA INSTITUTULUI POLITEHNIC TIMIȘOARA  
1955

MINISTERUL ÎNVĂȚĂMÎNTULUI  
INSTITUTUL POLITEHNIC TIMIȘOARA  
FACULTATEA DE CONSTRUCȚII

CURS  
DE  
**TOPOGRAFIE**

PROF. ING. **BONEA IOAN**

LITOGRAFIA INSTITUTULUI POLITEHNIC TIMIȘOARA  
1955

## P R E F A Ț A .

Cerințele pentru reeditarea Cursului de Topografie fiind mari, solicitat fiind atât de către studenți cât și de inginerii din practică, am dat încuviințarea fostului meu colaborator și actualmente coleg, Ing. Chiu Trifu, de a-l reedita, tăind capitolele ce nu interesează pe studenții Facultății de Construcții din Timișoara, cum ar fi de exemplu Capitolul de Topografie Mă-  
nieri.

Restul capitolelor, revăzute și la care am mai adăugat instrumentajul nou apărut pe gantier-rele noastre, au fost păstrate, cuprinzând problemele strict necesare inginerului practician.

Tratarea problemelor am căutat să fie făcută pe bază dialectică, ghidându-mă după tratatele de specialitate apărute recent în librăriile dela noi din țara.

A fost păstrat și capitolul de istoric topografiei, necesar pentru scoaterea în evidență a evoluției acestei științe, lupta contrastelor între vechi și nou și cauzele care au determinat regresia și progresele măsurătorilor geodezice, în decursul istoriei

Exemplificările s-au făcut cu date luate din R.P.R. și U.R.S.S.

Pentru munca depusă la scoaterea acestei noi ediții aduc mulțumirile mele tov. Ing. Chiu Trif

Timișoara, mai 1954.

Prof. I. BONEA.

BIBLIOGRAFIE CONSULTATA

Absalon Pop	Cadastru.
Bonea Ion	Curs de Geodezie, Ed. 1932
Bonea Ion	Curs de Geodezie Minieră, Ed. 936
Bonea Ion	Curs de Topografie, vol. I și II, Ed. 1950
Buruiană	Tratat de parcelare
Direcția Cadastrului	Instrucțiuni cadastrale
Hütte	Ediția românească
Niculescu G.I.	Curs de parcelare
Orășanu C.	Topografie. Geodezie
Stefănescu G.	Topometrie
Vidrașcu I.	Topografie. Geodezie
Buharin	Topografie generală
Nazarov V.	Geodezie
Orlov P.M.	Topografie
Vitkovici P.V.	Topografie
Gabriel I.	Topometrie
Peletan C.	Topografie
Russille H.	Geodezie și astronomia aplicată
Abendroth	Topografie
Helmert	Geodezie superioară
Jordan W.	Topografie. Geodezie.

## C U P R I N S U L

Introducere.....	Pag. 1
Istoric.....	5

### PARTEA I-a

#### St u d i u l e r o r i l o r

##### Cap. I. Noțiuni fundamentale și definiții.

I. Erori permanente și sistematice.....	14
II. Erori accidentale.....	15
1. Probabilitate simplă.....	15
2. Probabilitate compusă.....	16
3. Curba lui Gauss.....	17

##### Cap. II. Calculul erorilor simple și medii.

1. Metoda de calcul.....	21
2. Măsurători directe de aceeași precizie.....	26
3. Măsurători directe de precizie diferite.....	30
4. Măsurători indirecte.....	36
5. Măsurători directe cu condiții inițiale.....	60
6. Studiul triunghiului.....	77

### PARTEA II-a

#### P l a n i m e t r i e

##### Cap. I. Generalități.

1. Introducere, puncte topografice.....	82
2. Semnalizarea punctelor.....	91

	Pag.
3. Trasarea aliniamentelor.....	97
4. Instrumente pentru trasarea aliniamentelor .....	101
<u>Cap.II. Măsurarea directă a lungimilor.</u>	
I. Instrumente de măsurat lungimi.....	112
II. Greșeli și erori.....	133
<u>Cap.III. Măsurarea unghiurilor.</u>	
I. Principii generale.....	147
II. Organele și anexele instrumentelor de măsurat unghiuri.....	149
III. Verificarea și rectificarea instru- mentelor și eliminarea erorilor.....	172
IV. Teodolite uzuale.....	194
V. Metode pentru măsurarea unghiurilor..	204
<u>Cap.IV. Măsurarea indirectă a lungimilor.</u>	
A. Principii și metode.....	228
B. Aparate tahimetrice.....	241
C. Aplicațiuni.....	249
<u>Cap.V. Probleme de planimetrie.</u>	
1. Generalități.....	252
2. Probleme și aplicații.....	253
<u>Cap.VI. <u>Ridicarea planurilor și alegerea metodelor de ridicare.</u></u>	
A. Ridicarea suprafețelor mici.....	310
B. Ridicarea suprafețelor mari.....	325
<u>Cap.VII. <u>Calculul suprafețelor.</u></u>	
A. Metode de calcul.....	360
B. Detașări de suprafețe.....	373

	Pag.
<u>Cap.VIII. Raportarea și redactarea</u> <u>planurilor</u> .....	387

PARTEA III-a

A l t i m e t r i e

Cap.I. Generalități.

1. Considerațiuni generale.....	402
2. Principii.....	404

Cap.II. Aparate de nivelat.

A. Mirele.....	408
B. Nivelele.....	411

Cap.III. Metode de nivelment.

A. Nivelment geometric.....	431
B. Nivelment trigonometric.....	446
C. Nivelment tahimetric.....	457
D. Nivelment barometric.....	464

Cap. IV. Compensarea nivelmentului.

1. Poligonatii nivelitice.....	467
2. Rețele nivelitice.....	477

Cap.V. Aplicațiile nivelmentului.

1. Profile.....	497
2. Nivelarea suprafețelor.....	503
3. Trasarea curbelor de nivel.....	504
4. Nivelmentul râurilor și lacurilor.....	515

Cap. VI. Trasarea curbelor de  
racordare.

Pag.

1. Trasarea în arc de cerc.....	518
2. Trasarea curbelor cu puncte obligate.....	526
3. Trasarea curbelor de cale ferată.....	533



## I N T R O D U C E R E .

Topografia sau topometria este știința care se ocupă cu descrierea sau măsurarea scoarței pământului, așa cum de altfel reiese și din etimologia cuvântului (topos=loc și graphein=descriere sau pentru topometrie topos=loc și metron=metru), care ne-o definește ca fiind arta de a descrie locurile și de a le reproduce în chip convențional.

Se mai întâlnește denumirea de Geodezie, care la fel ca topografia se ocupă cu măsurarea porțiunilor de teren, însă atunci când ele sunt de suprafață întinsă, cum ar fi suprafața unui continent, a unei țări sau cel puțin cea a unei regiuni, caz în care se ține cont de curbura pământului și de alte elemente, așa cum vom vedea atunci când delimităm domeniul de aplicare al topografiei de cel al Geodeziei.

În topografie elementul de bază este punctul și după aceea unghiul.

Intrădevar, o suprafață poate fi reprezentată când fiecare punct al acestei suprafețe poate fi reprezentat pe un plan prin proiecție ortogonală.

Pentru reprezentarea punctelor noi luăm ca plan de proiecție, planul definit de suprafața mării, pentru proiectarea în plan orizontal, problemă cu care se ocupă partea din topografie denumită planimetrie.

Dar pentru rezolvarea diferitelor probleme, de multe ori ne interesează nu numai proiecția în plan orizontal a diferitelor puncte de pe teren, ci și înălțimile lor deasupra planului orizontal, pentru care, ca punct de comparație se ia cota mării, adică și înălțimea punctelor se măsoară luând ca plan de comparație tot nivelul mării, considerat de cotă zero. Acesta este domeniul cu care se ocupă partea de Topografie, denumită Altimetrie sau nivelment.

Pentru delimitarea domeniului de aplicare a metodelor Topografiei de domeniul Geodeziei să considerăm într-o primă aproximație forma pământului, ea fiind cea a unei sfere, deși în realitate este a unui elipsoid de revoluție și în acest caz luând ca plan de comparație, față de care facem ridicările, tot suprafața mării, aceasta însă nu mai este acum o suprafață plană, ci apare ca o calotă sferică.

Orî după cum știm, sfera nu este desfășurabilă, o calotă sferică, însă se poate desfășura, dar suferă deformațiuni, pentru acest motiv reprezentarea în plan

a porțiunilor mari, nu poate fi făcută fără ca porțiunea respectivă să nu sufere carăcari deformațiuni.

S'au imaginat diferite sisteme de proiecțiune: așa avem proiecțiunea echivalentă, în care lungimile și unghiurile sunt deformatate, dar suprafețele de pe teren sunt reprezentate prin suprafețe echivalente, egale cu mărimile.

Sunt alte sisteme în care este conservată valoarea unghiurilor, bine înțeles că acum lungimile suferă deformațiuni, aceasta este proiecțiunea conformă, în-  
trebuințată în Geodezie unde unghiul este considerat ca element de bază.

Sunt alte sisteme care nu păstrează nimic nedeformabil, dar se caută ca deformațiile să fie cât mai mici posibil.

Pentru țara noastră, sistemul de proiecțiune adoptat este proiecțiunea stereografică cu plan secant și cu centrul orașul Stalin, este proiecțiune conformă, făcând parte din grupul proiecțiunilor perspective, în care punctele de pe globul pământesc sunt proiectate pe un plan secant, dintr'un punct numit centru de perspectivă cu ajutorul unui fascicol de raze.

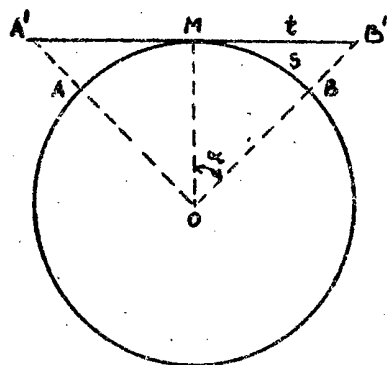


Fig.1

trul sferei și punctul respectiv și atunci proiecția punctului A și B va cădea pe planul de proiecție în A' respectiv B'.

Notăm arcul MB= s, proiecția lui MB' = t, eroarea ce se comite este:

$$A_1 = t - s$$

dar:  $t = R \operatorname{tg} \alpha$  și  $s = R \cdot \alpha$

înlocuind mai sus avem:  $A_1 = R \cdot \operatorname{tg} \alpha - R \cdot \alpha = R (\operatorname{tg} \alpha - \alpha)$

Desvoltând în serie pe  $\operatorname{tg} \alpha$  avem:

- 3 -

$$\Delta_1 = R \left[ \left( \alpha + \frac{1}{3} \alpha^3 + \frac{2}{3 \cdot 5} \alpha^5 + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 7} \alpha^7 + \dots \right) - \alpha \right] = R \cdot \frac{\alpha^3}{3}$$

$$\alpha = \frac{s}{R} \text{ deci: } \Delta_1 = R \cdot \frac{s^3}{3R^3} = \frac{s^3}{3R^2}$$

Pentru a ne putea da seamă de valoarea pe care o poate avea  $\Delta_1$  să luăm ca exemplu cazul cînd arcul  $AB = s = 50 \text{ km}$ .

$$= \frac{50^3 \text{ km}}{3 \times 6371^2} = \frac{125.000}{3 \times 40.589.641} = \frac{125.000.000 \text{ m}}{3 \times 40.589.641} = 1,25 \text{ m} = 125 \text{ cm}$$

Ca eroare admisibilă în măsurarea lungimilor putem considera în general eroarea de 5 cm la 100 m, deci eroarea găsită de noi de 125 cm/ 50 km este mai mică decît eroarea admisibilă.

Dacă distanțele sunt mai mici de 50 km, atunci eroarea va avea valori și mai neînsemnate. Cu toate că pentru această distanță, eroarea ce comitem, nețînînd cont de curbura pămîntului, este sub limita admisă, totuși nici aceste distanțe nu intră în domeniul Topografiei, ci cad în domeniul Geodeziei, pentru faptul că mai intervine și următorul criteriu.

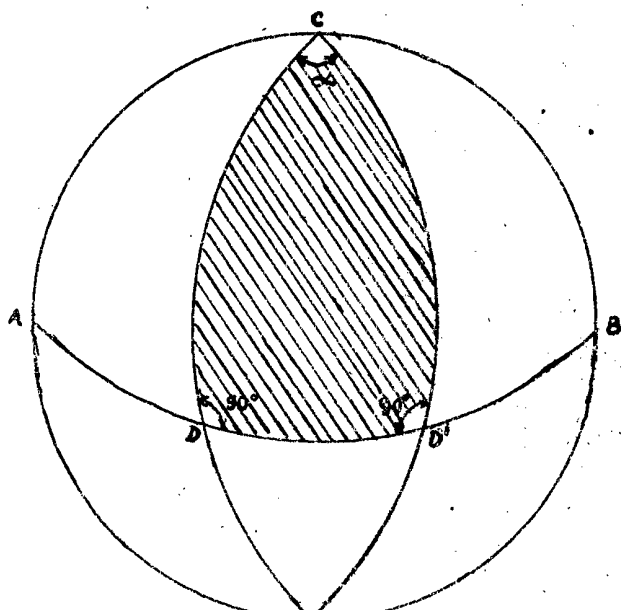


Fig. 2 c'

Triunghiul format pe o sferă, numit triunghi sferic, are suma unghiurilor mai mare de  $180^\circ$ .

Intr'adevăr, dacă în figura 2 am considera globul pămîntesc ca o sferă și fie  $AB$  linia ecuatorului, meridianul  $CD$  face cu linia ecuatorului un unghi de  $90^\circ$ .

La fel meridianul  $CD'$  face și el la rîndul său cu linia ecuatorului tot un unghi de  $90^\circ$ .

Deci în triunghiul sferic  $CDD'$  (hașurat) suma unghiurilor este:  
 $90^\circ + 90^\circ + \alpha > 180^\circ$

S-au putem spune că suma unghiurilor într'un

triunghi sferic este  $180^\circ +$ , unde este excesul sferic.

Valoarea excesului sferic este dată de expresiunea:

$$\epsilon = \frac{F}{R} \text{ unde } F \text{ este suprafața triunghiului, iar}$$

$R$  - raza pămîntului.

Dacă exprimăm acum pe  $\epsilon$  în secunde avem:

- 4 -

$$\begin{aligned} \varepsilon'' &= \frac{F}{R} s'' \text{ unde } s' = \frac{180^\circ}{\pi} \\ s' &= \frac{180 \times 60}{\pi} \\ s'' &= \frac{180 \times 60 \times 60}{\pi} = 206.265'' \end{aligned}$$

Pentru a ne da seamă de eroarea ce se comite, dacă nu se ține seamă de excesul sferic, să calculăm acest exces sferic pentru cazul când am avea un triunghi sferic dreptunghiular cu catetele de 20 km.

$$\begin{aligned} \varepsilon'' &= s'' \frac{F}{R} & F &= \frac{20 \times 20}{2} = 200 \text{ km}^2 \\ & & R &= 6.371 \text{ km.} \\ & & R^2 &= 40.589.641 \text{ km}^2. \end{aligned}$$

$$\varepsilon'' = 206.265 \frac{200 \text{ km}^2}{40.589.641 \text{ km}^2} = 1''$$

Dar în triangulațiile superioare nu se admite să avem eroare la măsurarea unghiurilor mai mare de 1'', iar la triangulația de ordinul I eroarea admisibilă este de  $\frac{1}{10}$ .

Deci în rezumat, domeniul topografiei se extinde numai în cazul când avem suprafețe de teren mai mici de 20 km<sup>2</sup>, porțiuni care la suprafața sferoidului pământesc sunt aproape confundate cu planul tangent la globul pământesc, în punctul în care lucrăm.

Așa că în Topografie nu mai ținem cont de curbura pământului, iar calculele pe care ne sprijinim sunt din domeniul geometriei plane și a trigonometriei plane.

În Geodezie ne ocupăm de suprafețele mai mari de 20 km<sup>2</sup>, caz în care va trebui să se țină cont de curbura pământului și de excesul sferic.

Acum calculele ne cer mai multe cunoștințe, ele sunt mai complicate și avem nevoie de întreaga analiză de astronomie și fizică.

## ISTORIC.

Topografia, sau ideea de a măsura terenul, apare odată cu trecerea popoarelor dela epoca nomadă la viața stabilă, epocă în care apare și ideea de proprietate și odată cu aceasta necesitatea de a fi măsurată proprietatea.

Evident că în această epocă, asupra căreia datele istorice pe care le avem, nu ne dau nici un fel de indicații asupra felului cum au fost făcute măsurătorile, este foarte probabil însă ca măsurătorile să fi fost făcute foarte rudimentar, așa cum se mai face încă la popoarele ne-civilizate.

Cele mai vechi date pe care le avem asupra evidenței măsurătorilor datează din anul 1700 (a.Cr.), document păstrat pe coaja de papyrus și din care reese că știința măsurătorilor terestre a fost cunoscută și practică de către casta preoțească din Egipt, care avea proprietățile ei vaste pe care le țineau în evidență și care trebuiau măsurate.

După Herodot (cartea II, cap. 109) Egiptenii sub Seostris, ar fi avut chiar un fel de cadastru, adică un birou de măsurători (1700 a.Cr.)

Tot Herodot ne spune că știința măsurătorilor și a geometriei a trecut dela Egipteni la Greci prin intermediul Fenicienilor și Caldeenilor și mai ales prin Thales din Milet care pe la anul 600 (a.Cr.) studia în Egipt matematicile.

Din studiul făcut de către Max Eyth, asupra piramidei Cheops reese că Egiptenii aveau cunoștințe precise asupra anului solar, asupra circumferinței pământului și asupra numărului  $\pi$  până la 5 zecimale.

Ceasul solar sau gnomonul și împărțirea zilei în 12 părți au cunoscut-o Grecii dela Babilonieni pe la 550 (a.Cr.) prin Aneximandru, un elev a lui Thales din Milet.

Gnomul după Herodot a servit Egiptienilor și Babilonienilor pentru determinarea timpului, dar și pentru determinarea meridianului locului.

În Eliada lui Homer se poate găsi că măsurătorile mai mari și problema reprezentării sub formă de hartă, preocupa în măsură foarte mare pe antici.

Nici un original al acestor hărți nu s-a păstrat pînă în zilele noastre, sunt însă date scrise în Herodot, care povestește că Aristagore din Milet a avut o placă de aramă pe care erau gravate toate țările cunoscute, cu munți, riuri și mări.

În această hartă, Herodot povestește că pămîntul era reprezentat sub formă de taler înconjurat de apele lui Oceanus, care la rîndul lui era mărginit de capătul lumii, iar marea mediterană împărțea pămîntul în două semicercuri.

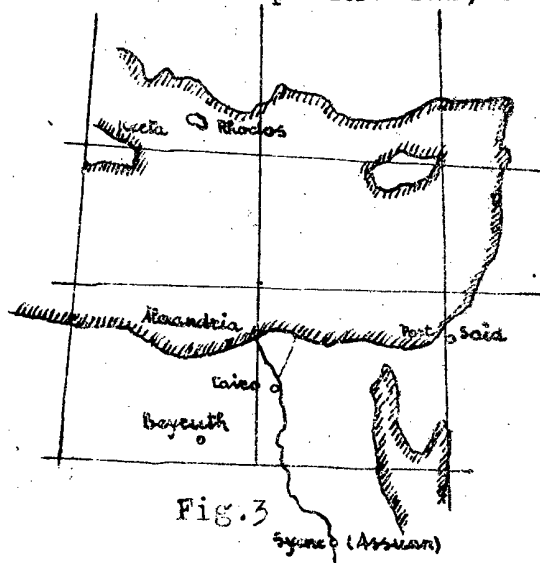
Mai tîrziu, pe la 550 (a.Cr.) încep Grecii să aibă faimă de renumiți matematicieni, între cari, în afară de Thales din Milet, putem cita pe Pythagoras, care făcea parte din școala filozofică ce susținea că elementele principale de bază, în natură sunt apa, focul și pămîntul.

Pythagoras la 582 (a.Cr.), prin silogium ajunge la concluzia că pămîntul, care este elementul de bază, trebuie să aibă o formă perfectă, ori formă geometrică cea mai perfectă fiind sfera, el trebuie să aibă această formă perfectă, deci este rotund.

După Pythagoras între anii 384-322 (a.Cr.) Aristoteles ajunge la aceeași concluzie, însă nu pe bază de concepție filozofică, ci prin concepție materialistă; el observă că o corabie apare vederii noastre cu partea de sus, ori dacă pămîntul n-ar fi rotund, este normal ca să fie văzută partea de jos, care este mai vizibilă ca cea de sus.

Deci Aristoteles arată că pămîntul are formă sferică, bazat pe date mai precise.

Cel care a făcut măsurători, care să aibă importanță însemnată pentru topografie, este Eratosthenes Batavus (276-194 a.Cr.) care scoate în evidență nu numai forma sferică a pămîntului, dar cu precizie destul de mare



pentru mijloacele de care dispunea, a determinat lungimea meridianului terestru, după cum se vede mai jos.

El a observat că la solstițiul de vară, atunci cînd în localitatea Syena (astăzi Assuan) soarele se găsește proiectat în fundul puțurilor adînci, adică se găsește la zenit, în același timp la Alexandria el face un unghi care este  $1/50$  din lungimea cercului.

- 7 -

Să vedem cum a procedat Eratosthenes.  
El a măsurat distanța dintre Alexandria și Syene prin zile de mers și găsește că această distanță are (pe vremea aceea) 5.000 stadii.

Cu ajutorul ceasului de soare (gnomonul), măsoară la Alexandria, unghiul făcut de gnomon, Fig.4, măsurând înălțimea  $h$  și umbra lăsată de el pe pământ  $m$ . A reprodus pe hîrtie triunghiul ABC, pe care suprapunîndu-l peste un cerc, a dedus că mărimea unghiului este  $1/50$  din lungimea cercului.

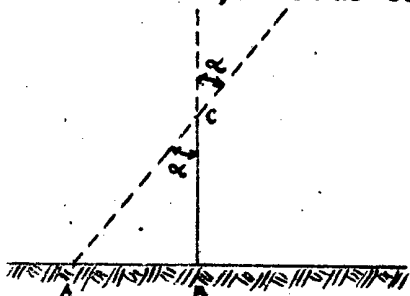


Fig.4

Avînd arcul de cerc de 5.000 stadii, corespunzător unghiului  $\alpha$  află lungimea meridianului ca fiind:  
 $5.000 \text{ stadii} \times 50 = 250.000 \text{ stadii}.$

Pentru a ne da seama care este lungimea meridianului în sistemul actual al măsurătorilor lui Eratosthenes Batavus, să facem următorul calcul, ținînd cont de faptul că o stadie are aproximativ 185 m.

$$250.000 \times 185 = 46.250.000 \text{ m.}$$

Măsurătorile executate în veacul trecut au dat pentru lungimea meridianului terestru cifra de 40.000.000 m, deci rezultatul la care a ajuns Eratosthenes nu este de desconsiderat, dacă se are în vedere faptul că mijloacele lui de măsurare, atît a unghiului, cît și ale lungimilor, erau foarte rudimentare și în plus că Alexandria nu este pe acelaș meridian cu Syene.

Măsurători pentru aflarea meridianului terestru, după Eratosthenes Batavus, au mai fost făcute de către Posidonius (135-51 a.Cr.), care ajunge la un rezultat mai apropiat ca cel al lui Eratosthenes.

El a observat că atunci, cînd steaua Canopus apare la orizont în insula Cypru (Fig.3), ea se găsește la Alexandria deasupra orizontului cu un unghi care este  $1/48$  din meridianul ceresc.

Distanța între Alexandria și Cypru a măsurat-o prin mersul corăbilor și găsește că această distanță este de 5.000 stadii, așa cum găsise Eratosthenes între Alexandria și Syene, deși aceste distanțe sunt diferite.

Prin acelaș calcul, ca și Eratosthenes, găsește lungimea meridianului ca fiind 240.000 stadii ( $48 \times 5.000 = 240.000 \text{ stadii}$ ), ceea ce raportat la sistemul

actual, ne dă;

$$240.000 \times 185 \text{ m} = 44.400.000 \text{ m.}$$

Cu toate că măsurătorile lui Posidonius duc la un rezultat mai aproape de adevăr, totuși se poate spune că cel care a fost creatorul Geografiei Matematice sau al Geodeziei este Eratosthenes.

Aceste începuturi timide, dar promițătoare ale Topografiei, născute din lupta critică a observațiilor cu speculațiile filozofice, au fost însă frinate în timpul evului mediu, caracterizat prin decadența hotărâtă a tuturor științelor pozitive.

Acum dătătoarea tonului este religia care consideră drept neadevăruri toate cele stabilite de anticii, priviți ca pîgâni, fapt care face ca hărțile evului mediu să facă o impresie supărătoare, fiind complet lipsite de bază științifică.

Așa se ajunge la concepții ca cea a lui Cosma Indicoleutul, care consideră pământul ca fiind drept-unghiular, avînd una din laturi lungime de 400 zile de mers, iar cealaltă de 200 zile de mers, iar alții aritând forma pământului ca fiind cea a unui deal ce se ridică din mijlocul mării, iar cerul asemenea unui cort cu marginile sprijinite pe pământ.

Alții considerau pământul ca avînd formă circulară plană, în centrul căreia era plasat Ierusalimul, iar Arabii plasînd în acest centru Mekka în locul Ierusalimului.

După această perioadă de stagnare încep să se face măsurători, bineînțeles rudimentare în secolul XVI, urmînd ca măsurătorile științifice să înceapă abia la începutul secolului XVII.

Se citează, ca un început la 1525 măsurătoarea făcută de medicul Fernel, care după ce împrăsiabil determină prin observații astronomice diferența de latitudine între Paris și Amiens, măsurînd distanța între aceste două localități cu ajutorul roții trăsorii sale, ajunge la rezultatul că lungimea unui grad de meridian este 57.070 toise.

Sau transformînd în metri găsim, (1 toise egală cu 1,949 m) că un grad meridian, conform măsurătorii lui Fernel, este de 111.232 m, deci sfertul de meridian ar fi de 10.011 m, rezultat foarte apropiat de realitate, eroarea fiind numai de 0,1 %.

O epocă nouă din Topografie începe Willobord Snellius (1580-1626), care pune bazele Topografiei, plecînd de la principiul folosirii triunghiului pentru măsurarea suprafețelor, punînd astfel în practică metoda triangulației.



- 9 -

Pentru măsurarea suprafețelor mari, ele le brăzdează cu o rețea de triunghiuri, măsură cu foarte mare precizie una din laturi, considerată ca bază de joncțiune și măsură toate unghiurile.

Cu aceste date sînt calculate, cu ajutorul formulelor trigonometrice, toate unghiurile, care pot îmbrățișa porțiuni de teren foarte mari, avînd distanța între punctele extreme ale rețelei de mii de kilometri.

Numai datorită ingeniozității lui Snellius și pasului gigant făcut înainte, prin aplicarea triangulației, a fost posibilă mai tîrziu legarea Europei de Africa, măsurînd în mod indirect una din laturile triangulației și dînd vize la cca. 300 km pentru măsurarea unghiurilor.

Acum măsurarea meridianului a fost făcută tot mai des, iar calculele executate au dat precizie mereu crescîndă.

Mai tîrziu se pune din nou problema asupra pămîntului și în special pe timpul lui Newton, cînd acesta anunță teoria sa asupra legii atracțiunii universale. Bazat pe această lege, exprimată în formula cunoscută:

$$F = f \frac{m \cdot M}{r^2}$$

adică forța de atracție este direct proporțională cu produsul maselor și invers proporțională cu pătratul distanței. Newton deduce pe cale matematică, că forma pămîntului este cea a unui elipsoid de revoluție.

Tot în acelaș timp Richers, preocupat de problema gravității, execută, pe diferite porțiuni ale scoarței pămîntului, o serie de măsurători cu ajutorul pendulului, confirmînd ca rezultat al acestor măsurători, părerile lui Newton, asupra formei turtite a pămîntului și admitînd ca fiind cea a unui corp de revoluție turtit la poli și umflat la ecuator.

În rezumat, Richers prin măsurătorile sale constată că perioada unei oscilațiuni a pendulului variază pe suprafața pămîntului. Ori aceasta perioadă (T) este dată de expresiunea:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

unde  $l$  este lungimea pendulului și  $(g)$  gravitația.

Deoarece în această relație  $l$  este constant, dacă T variază aceasta se datorește numai faptului că  $g$  variază, deducînd astfel în urma experienței, că accelerația gravității este mai mare spre poli și mai mică la ecuator și ca drept rezultat confirmînd teoria lui Newton.

Deși, atît Newton cît și Richers, primul pe bază matematică, iar al doilea cu ajutorul pendulului, ajung la acelaș rezultat, totuși legea enunțată de Newton s-a căutat a fi verificată pe teren prin măsurări de arce de meridian și pentru acest fapt sînt trimiși frații Cassini, care măsoară și la poli și la ecuator lungimea arcului de meridian de  $0^{\circ}$ , date cu care au găsit apoi lungimea razei.

Datorită însă unei erori, frații Cassini ajung la un rezultat contrar afirmațiilor lui Newton și ca urmare sunt trimise două expediții, pentru verificare, una la ecuator și alta la pol.

Aceste două expediții stabilesc în mod neîndoios că un grad de meridian spre poli este mai mare ca la ecuator, ceea ce era tocmai în concordanță cu teoria lui Newton.

De acum încolo problema măsurărilor de teren începe a interesa din ce în ce mai mult și ca drept rezultat se ajunge ca fiecare țară să caute a le executa ambiționîndu-se a avea lungimea propriului lor meridian.

Intre lucrările mari amintim măsurătorile executate de către Mechain și Delambre la 1792 între Barcelona și Dunkerque, cînd se pun bazele sistemului metric, definindu-se etalonul-metru ca fiind  $1 : 10.000.000$  parte din sfertul meridianului terestru.

Apoi triangulațiile de mare amploare executate sub direcția observatorului din Petrograd, prima executată la 1821-1831, care pornește de la Oceanul înghețat de Nord și se oprește pe malul Dunării, la comuna Necrașovca Veche lângă Ismail, unde poate fi văzut obeliscul ridicat în memoria acestei lucrări monumentale și cea de a doua care a fost executată între anii 1827-1861, plecînd din Islanda (Valenția) și terminîndu-se în munții Urali (Orse), urmînd aproximativ arcul  $52^{\circ}$  de latitudine nordică și îmbrățișînd  $69^{\circ}$ .

Triangulația din 1847-1856 executată între portul Brest (Franța) și Astrahan (U.R.S.S.), a trecut prin țara noastră, urmîrind arcul  $47^{\circ}30'$  latitudine nordică.

Pe baza acestor măsurători, după prof. Orlov U.R.S.S. a putut executa îndeșirea punctelor de triangulație, cum se arată în cap. Triangulație.

Măsurători de mare amploare au fost executate și în regiunea Oceanului înghețat de Nord în urma explorărilor făcute de U.R.S.S.

În măsurătorile lui Delambre și Mechain strecurîndu-se erori, s-a ajuns a se calcula și găsi că

lungimea sfertului de meridian nu este de 10.000.000 m, ci are 10.002.008 m și ca atare ca metru etalon se întrebuintează cel adoptat la 1880 de către "Confederația Generală de Măsuri și Greutăți, etalon păstrat în pavilionul Breteuil la Sevres, care este mai mic ca lungimea metrului teoretic.

Între timp și paralel cu aceste măsurători, făcute pentru determinarea caracteristicilor globului pământesc, au fost făcute de către toate țările, măsurători pentru stabilirea hărții respectivei țări, aceasta cu atât mai mult cu cât se simțea nevoia de hărți noi și precise, cerute de dezvoltarea și progresele realizate în diferite domenii: căi de comunicații, îmbunătățiri funciare, industrii, lucrări de artă, apărarea țării, etc.

### PROBLEMELE ȘI DIVIZIUNEA TOPOGRAFIEI.

În lumina celor stabilite în partea de introducere, se poate cu ușurință enunța care sînt problemele topografiei, ele reducîndu-se în ultima analiză la următoarele două:

- 1. Măsurarea unei porțiuni de teren cu scopul de a se stabili relațiile care există între diferite puncte ale acestei porțiuni de teren și

- 2. Reprezentarea grafică a acestor măsurători în așa fel ca un punct oarecare din spațiu să poată fi cu exactitate determinat.

Prima parte constituie problema ridicării planurilor, iar cea de a doua este raportarea lor.

Pentru rezolvarea acestor probleme, operațiunile de care ne servim în topografie, cuprind următoarele mari serii de lucrări:

- 1/. Determinarea proiecțiilor octogonale pe un plan orizontal, a suprafeței de teren măsurate și reprezentarea lor pe acest plan, așa cum am mai amintit, prin unghiuri egale și laturi omoloage.

Este partea de topografie numită PLANIMETRIA.

- 2/. Determinarea relațiilor ce există în spațiu între diferite puncte ale suprafeței măsurate sau mai bine zis determinarea diferenței de nivel ce există

între aceste puncte,este operația denumită Altimetrie sau Nivelment.

- 3/. Operațiunile de măsurare fiind afecta-  
te de erori înainte de a se trece la raportarea lor pe plan,  
este necesar a se stabili care sînt valorile lor reale sau  
mai bine zis,cele mai probabile.

Partea de topografie care se ocupă cu  
această problemă,este calculul erorilor și compensațiuni.

- 4/. In fine,ultima operațiune,după ce am  
cules de pe teren toate datele necesare și am făcut compen-  
sarea erorilor'comise,este raportarea planurilor.

In curs pentru a se putea face calcu-  
larea erorilor și compensările necesare,atunci cînd se tra-  
tează problemele de planimetrie și cele de nivelment,este  
necesar a inversa ordinea stabilită anterior și ca atare se  
vor urmări aceste probleme în următoarea ordine:

- 1/. Calculul erorilor.
  - 2/. Planimetrie.
  - 3/. Altimetrie sau nivelment.
  - 4/. Raportarea planurilor.
-

## P A R T E A I.

### STUDIUL ERORILOR.

#### Cap. I.

#### Notiuni fundamentale și definițiuni.

Asupra uneia și aceleiași mărimi, dacă se fac mai multe măsurători, de fiecare dată se obține o altă valoare, deci nici odată nu obținem acelaș rezultat.

Diferența între măsurătorile efectuate, va fi cu atât mai mică cu cât instrumentele, de care ne servim, ne dau preciziiune mai mare, însă nici odată măsurătorile nu vor fi așa de precise încât diferențele între ele să dispară complet, iar rezultatul final al acestor măsurători să devină cu certitudine "valoarea adevărată" a mărimii măsurate.

Diferențele dintre rezultatul final sau valoarea cea mai probabilă a mărimii măsurate care știm că este media aritmetică a măsurătorilor și valoarea adevărată a ei este eroarea.

Dintr-un început trebuie să facem o remarcă și anume că măsurătorile ce executăm, pot fi afectate de greșeli și de erori, înțelegând prin greșeli îndepărtările grosolane dela adevăr, greșeli care pot fi evitate după cum vom vedea mai târziu, prin atenție, control și repetarea operațiunilor și avem erori care sunt inerente măsurătorilor, care nu depind de voința noastră.

Ca un exemplu să presupunem că am măsurat o lungime oarecare AB, de 6 ori și rezultatul măsurătorilor sau observațiunilor (O) este:

- $O_1 = 96,128 \text{ m}$
- $O_2 = 96,130 \text{ m}$
- $O_3 = 96,132 \text{ m}$
- $O_4 = 96,250 \text{ m}$
- $O_5 = 96,134 \text{ m}$
- $O_6 = 96,140 \text{ m}.$

În măsurătorile efectuate, după cum vedem, niciodată nu am obținut aceeași valoare pentru lungimea măsurată și atunci pentru aflarea celei mai probabile valori a ei ar urma să facem media aritmetică a celor 6 observațiuni.

Dar dintre cele 6 observațiuni, 4 este mult diferită ca valoare de celelalte observațiuni, deci în această observațiune s-a comis necondiționat o greșală și ca atare o vom lăsa la o parte, iar valoarea cea mai probabilă a lungimei AB o vom lua ca fiind media aritmetică numai a celor 5 observațiuni considerate ca bune.

Erorile așa cum am amintit, sînt mici îndepărtări de la valoarea reală, care nu depind de voința noastră, care însă prin abilitate, metode raționale și aparate din ce în ce mai perfecționate, pot fi reduse ca mărime, însă nu pot fi nici odată anulate.

Ele pot fi de două feluri: permanente și accidentale. Să vedem care sînt și cînd avem erori permanente și care sînt și cînd avem erori accidentale.

Erori permanente sau sistematice, care sînt datorite unor cauze permanente, cum ar fi curbura pămîntului, acțiunea gravitației, greșeli de fabricarea instrumentelor, temperatură, umiditate, etc.

Aceste cauze persistă în mod permanent și anume în tot timpul operațiunii în același sens, ca atare și efectul lor este permanent și în același sens adică ori pozitiv, ori negativ, dar niciodată nu se întîmplă să fie cînd pozitiv, cînd negativ.

Erorile sistematice, ori cît de mici ar fi ele, producîndu-se în același sens se acumulează după fiecare observație și ca atare devin foarte periculoase mai ales atunci cînd nu le cunoaștem cauzele cari le produc.

Așa că, pentru a putea fi posibilă anularea sau micșorarea acestor erori, este necesar a se studia cauzele care le produc. Pentru acest motiv, atunci cînd eșim pe teren cu instrumentele, trebuie în prealabil făcută verificarea lor, să vedem greșelile lor de fabricație pentru a elimina erorile sistematice pe care le produc.

De exemplu, înainte de a măsura lungimile cu panglică, lanțul, etc., acestea sînt verificate pentru a se stabili adevărata lor lungime, să vedem dacă nu au suferit deformațiuni care le-au schimbat lungimea de fabricație, pentru ca în caz afirmativ să se poate face corectările necesare.

Erori accidentale care sînt datorite unor cauze intîmplătoare, cauze diferite, pe care le cunoaştem.

Aceste erori nu pot fi apreciate de noi, ceea ce putem însă afirma despre ele este că variază intîmplător, cînd într-un sens, cînd într-altul, adică sînt cînd pozitive, cînd negative şi ca atare prin alternaţa aceasta a semnelor, chiar atunci cînd ele sînt de valoare apreciabilă, totuşi, există posibilitatea de a fi compensate.

In plus aceste erori mai au următoarele caracteristici, bazate pe calculul probabilităţilor şi anume:

- a/. Probabilitatea ca o eroare să apară pozitivă sau negativă este aceeaşi,
- b/. Probabilitatea de a avea o eroare mai mică este mai mare decît probabilitatea de a avea o eroare mai mare,
- c/. Probabilitatea cea mai mare de a nu face greşeli o avem atunci cînd măsurătorile sînt executate foarte îngrijit.

Pentru a putea pune în evidenţă cele de mai sus, să facem o mică incursiune în calculul probabilităţilor.

Dela început trebuie făcută o remarcă şi anume că avem probabilitate simplă şi probabilitate compusă.

- 1/. Probabilitate simplă, este raportul dintre numărul de cazuri, sau evenimente favorabile şi numărul de cazuri sau evenimente posibile, ceea ce s-ar putea exprima sub forma:

$$p = \frac{\text{evenimente favorabile}}{\text{evenimente posibile}}$$

Acest raport este mai mic ca unitatea, adică  $p < 1$ , întrucît posibilitatea cea mai mare este ca numărul evenimentelor favorabile, să fie mai mic ca cel al evenimentelor posibile.

Atunci cînd  $p = 1$ , adică dacă numărul evenimentelor favorabile este egal cu cel al evenimentelor posibile, avem certitudine.

Exemplu de probabilitate simplă:

Dacă se aruncă un ban în sus, posibilitatea de a cădea marca este =  $1/2$  sau aruncînd un zar posibilitatea de a da de exemplu un 4, este =  $1/6$ .

- 16 -

Adică numărul evenimentelor favorabile  
atît în cazul banului, cît și în cazul zarului, este egal cu 1,  
dar evenimentele posibile în primul caz sunt 2, iar în cel  
de al doilea 6.

Dacă aruncăm de două ori banul, cazurile  
posibile sunt (notînd marca cu "m" și leul cu "l")

lm, ll, ml, mm, cazurile favorabile fiind  
numai acele în cari avem pe m, deci numărul cazurilor sau eve-  
nimentelor posibile este 4, iar al celor favorabile 3.

Așa că acum raportul între cazurile fa-  
vorabile și cele posibile, adică probabilitatea, devine  $p = 3/4$ .

Dacă aruncăm banul de trei ori, avem ur-  
mătoarele cazuri posibile:

lll, llm, lmm, lml, mll, mlm, mml, mmm, adică  
numărul evenimentelor posibile este 8, iar al celor favorabi-  
le, eliminînd cazul lll care este nefavorabil, este de 7, deci  
posibilitatea este  $p = 7/8$ .

Generalizînd, avem:

$$p = \frac{n - 1}{n}$$

unde "x" este numărul încercărilor.

- 2/. Probabilitatea compusă, este produsul  
probabilităților simple, adică  $pc = p \cdot p$ .

De exemplu probabilitatea de a vea un  
dublu șase, aruncînd două zaruri este:

$$pc = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

În cazul zarului probabilitatea simplă  
este:  $p = \frac{1}{6}$  așa cum am văzut, deoarece din cele 6 fețe ale  
lui una singură are pe 6, adică numărul evenimentelor posi-  
bile este 6, iar al celor favorabile 1.

Să vedem în cazul probabilității com-  
puse, dacă se adeverește expresiunea de mai sus adică,  $pc = pp$ .

Pentru aceasta să facem toate combina-  
țiile posibile în cazul aruncării a două zaruri și se va  
obține următorul tablou:



1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6
3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6
4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6
5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6
6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6

Adică tocmai 36 cazuri posibile și un singur caz favorabil, pentru a avea un dublu șase, ca atare posibilitatea compusă  $p_c = 1/36$ , raport obținut mai sus făcînd produsul probabilităților simple.

Să vedem acum probabilitățile ce avem pentru a obține o sumă din combinația celor șase cifre gravate pe fiecare zar, atunci cînd sînt aruncate în același timp două zaruri.

Pentru aceasta să facem în ordinea crescîndă a acestor sume, următorul tablou:

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	2.6	3.6	4.6	5.6	6.6
	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	
		3.1	3.2	3.3	3.4	4.4	5.4	6.4		
			4.1	4.2	4.3	5.3	6.3			
				5.1	5.2	6.2				
					6.1					

După cum se vede din acest tablou cea mai mare probabilitate o avem pentru suma de 7, pentru care avem cel mai mare număr de elemente favorabile (6), din numărul total de 36 evenimente posibile și cea mai mică probabilitate pentru sumele 2 și 12 pentru care avem ca evenimente favorabile numai 1.

În lumina celor stabilite pînă acum se poate vedea confirmarea acelor caracteristici enunțate pentru erorile accidentale.

Într'adevăr, probabilitatea ca eroarea să apară pozitivă sau negativă este aceeași, pentru că suntem în cazul probabilității simple în care avem ca evenimente posibile două și evenimente favorabile 1 și pentru un caz și pentru celălalt.

- 3/. Curba lui Gauss (denumită și clopotul lui Gauss).

Probabilitatea de a face la măsurători o eroare este o funcție de aceasta eroare, adică:  
 $P_1 = \psi(\gamma_1)$

Dar probabilitatea de a comite o eroare nu este funcție numai de eroare, ci este funcție și de

interval, așa de exemplu probabilitatea ca o eroare să se găsească între  $+\infty$  și  $-\infty$  este 1, iar pentru o porțiune oarecare este cu mult mai mică.

Ca atare pentru a reprezenta probabilitatea sub forma unei funcții, va trebui să se introducă și intervalul, să înmulțim funcția cu intervalul, așa că probabilitatea ar fi dată de expresiunea:

$$P = \Psi(v) dv$$

Pentru erorile  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$  probabilitățile respective ar fi:

$$P_1 = \Psi(v_1)$$

$$P_2 = \Psi(v_2)$$

$$P_n = \Psi(v_n)$$

Probabilitatea compusă va fi produsul probabilităților simple, deci:

$$(1) P = \Psi(v_1) \cdot \Psi(v_2) \cdot \Psi(v_3) \dots \Psi(v_n)$$

Pentru ca această probabilitate să fie maximă, va trebui ca derivata lui P să fie nulă;

$$(2) \frac{\Psi'(v_1)}{\Psi(v_1)} + \frac{\Psi'(v_2)}{\Psi(v_2)} + \frac{\Psi'(v_3)}{\Psi(v_3)} + \dots + \frac{\Psi'(v_n)}{\Psi(v_n)} = 0$$

Aceasta este prima condiție pentru a avea cea mai mare probabilitate.

Inmulțind în relația (2) fiecare termen cu  $\frac{(v_i)}{\Psi(v_i)}$  unde  $i = 1, 2, \dots, n$ , se obține:

$$v_1 \frac{\Psi'(v_1)}{\Psi(v_1)} + v_2 \frac{\Psi'(v_2)}{\Psi(v_2)} + \dots + v_n \frac{\Psi'(v_n)}{\Psi(v_n)} = 0$$

Notăm:  $\frac{\Psi'(v_1)}{v_1 \Psi(v_1)} = K_1, \frac{\Psi'(v_2)}{v_2 \Psi(v_2)} = K_2, \dots, \frac{\Psi'(v_n)}{v_n \Psi(v_n)} = K_n$ .

urmează că:  $\frac{\Psi'(v_1)}{\Psi(v_1)} = v_1 K_1, \frac{\Psi'(v_2)}{\Psi(v_2)} = v_2 K_2, \dots, \frac{\Psi'(v_n)}{\Psi(v_n)} = v_n K_n$ .

Inmulțind fiecare parte a relației (2) cu variația elementară și integrând avem:

$$\int \frac{\Psi'(v_i)}{\Psi(v_i)} dv_i = \int K \cdot v_i dv_i$$

In urma acestor operațiuni după formula generală:

se obține:

$$\log \Psi(v) = \frac{\kappa v^2}{2} + \log C$$

$$(v_1) = C \cdot e^{\frac{\kappa v_1^2}{2}}$$

$$(v_2) = C \cdot e^{\frac{\kappa v_2^2}{2}}$$

$$\dots$$

$$(v_n) = C \cdot e^{\frac{\kappa v_n^2}{2}}$$

Aceste expresiuni trebuie să satisfacă și condiția  $(\infty) = 0$  ceea ce nu rezultă din forma obținută, așa că înlocuim:

$$\frac{\kappa}{2} = -h^2 \quad \text{și avem:}$$

- 19 -

$$\begin{aligned} \psi(v_1) &= C e^{-h^2 v_1^2} \\ \psi(v_2) &= C e^{-h^2 v_2^2} \\ &\vdots \\ \psi(v_n) &= C e^{-h^2 v_n^2} \end{aligned}$$

După cum se observă, semnul erorii nu influențează rezultatul final, deoarece eroarea este ridicată la pătrat.

Cu datele de mai sus, formula care dă posibilitatea de a avea erorile  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ , care am văzut că este egală cu produsul probabilităților simple va fi:

$$P = (C e^{-h^2 v_1^2}) \cdot (C e^{-h^2 v_2^2}) \cdot (C e^{-h^2 v_3^2}) \cdot \dots \cdot (C e^{-h^2 v_n^2}) = C^n e^{-h^2 (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_n^2)}$$

Această funcțiune va avea o valoare maximă când exponentul său va fi minim, adică atunci când:

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_n^2 = \text{Minim}$$

adică atunci când suma pătratelor erorilor este minim.

Funcțiunea de mai sus poate fi scrisă sub forma:

$P = C e^{-h^2 v^2}$  unde  $v$  este eroarea,  $P$  este probabilitatea ei, iar  $C$  și  $h$  niște coeficienți sau parametri, care depind de natura observațiilor, de modul și precizia cu care au fost făcute observațiile.

Dacă se reprezintă grafic această funcțiune, se obține curba lui Gauss sau clopotul lui Gauss.

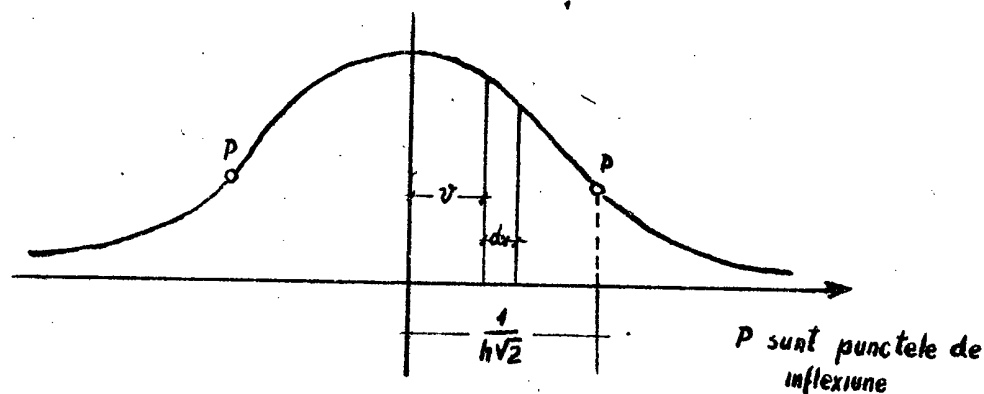


Fig. 5.

Probabilitatea de a avea o eroare cuprinsă între  $v$  și  $v + dv$  (în spațiul hașurat), va fi dată de expresiunea:

$$P = \int C \cdot e^{-h^2 v^2} dv$$

Cu cât spațiul este mai restrâns, cu atât probabilitatea va fi și ea mai mică.

Probabilitatea de a avea eroare între  $-\infty$  și  $+\infty$  este 1, adică certitudinea, ceea ce se poate scrie:

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} C e^{-h^2 \nu^2} = 1.$$

Dacă se notează  $x = h\nu$ , se va obține integrala lui Poisson:

$$P = \frac{C}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

În această integrală:

Pentru cazul când  $P = 1$  avem:

$$P = \frac{C}{h} \sqrt{\pi} = 1.$$

De unde se scoate valoarea constantei de integrare:

$$C = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$$

Deci funcțiunea care ne dă probabilitatea devine

$$(3) \psi(\nu) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \nu^2}$$

Din această ecuație se obțin punctele de inflexiune care au foarte mare importanță prin faptul că ne ajută la determinarea erorii comise asupra măsurătorilor pe care o notăm cu  $m$ .

Într'adevăr, dacă derivăm de două ori funcțiunea (3) și rezultatul obținut se egalează cu zero, se va deduce constanta  $h$ , care este constanta de pondere:

$$h = \frac{1}{m\sqrt{2}} \text{ de unde scoatem că } m = \frac{1}{h\sqrt{2}}$$

## CAP. II.

### CALCULAREA ERORILOR SIMPLIE și MEDII.

#### 1. Metode de calcul.

Având o funcțiune oarecare  $u=f(x,y,z)$  și cunoscând erorile care afectează pe  $x,y$  și  $z$ , se cere să calculăm eroarea totală  $\Delta u$  a funcțiunii. Pentru aceasta ne putem folosi de următoarele trei metode:

##### - a/ Metoda directă:

Fie funcțiunea  $u = xy$  în care erorile ce afectează pe  $x,y$  sunt  $\Delta x$ , respective  $\Delta y$ , se cere să aflăm eroarea ce afectează funcțiunea  $U$ , adică pe  $\Delta u$ .

Înlocuind în expresiunea  $u = xy$  valorile erorilor avem:

$$U' = u \pm \Delta u = (x \pm \Delta x) (y \pm \Delta y),$$

unde rezolvând partea a doua avem:

$$u' = xy \pm x \cdot \Delta y \pm y \Delta x \pm \Delta x \cdot \Delta y \text{ sau}$$

$$u' - u = xy \pm x \cdot \Delta y \pm y \Delta x \pm \Delta x \cdot \Delta y - xy = \pm \Delta u$$

$$\pm \Delta u = \pm x \Delta y \pm y \Delta x \pm \Delta x \cdot \Delta y.$$

##### -b/ Metoda diferențială:

Într'ucît putem avea funcțiuni mult mai complicate, caz în care metoda directă este foarte greoaie, pe tru ușurința calculului, se întrebuintează fie metoda diferențială, fie mai ales o altă metodă, pe care o vom vedea mai jos și anume metoda logaritmică.

Metoda diferențială constă în interpretarea analitică a creșterilor parțiale  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ .

Având:  $u + \Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ ,

desvoltînd în serie Taylor pe  $f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ , obține

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) = f(x, y, z) + \frac{1}{1!} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z \right) + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Delta y^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \Delta z^2 + \dots \right)$$

neglijând infiniții mici de ordin superior și înlocuind rezultatul obținut, avem:

$$\Delta u = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z.$$

Deoarece  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  pot avea semne pozitive sau negative, spre a scăpa de aceste semne se ia prin definiția eroarea medie a funcțiunii U, este:

$$m u = \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z \right)^2}$$

c/. Metoda logaritmică.

Această metodă se bazează pe diferențele logaritmice, sau mai bine zis, pe variația logaritmului în raport cu variația variabilei.

Fie funcțiunea:  $U = f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$ .

Logaritmiind această funcțiune avem expresiunea:

$$\log U = \log x + \log y + \log z.$$

a cărei diferențială ne dă:

$$\frac{\partial \log u}{\partial u} \Delta u = \frac{\partial \log x}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \log y}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \log z}{\partial z} \Delta z$$

de unde se deduce:

$$\Delta u = \frac{\frac{\partial \log x}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \log y}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \log z}{\partial z} \Delta z}{\frac{\partial \log U}{\partial u}}$$

In expresiunea de mai sus

$$\frac{\partial \log x}{\partial x}; \quad \frac{\partial \log y}{\partial y}; \quad \frac{\partial \log z}{\partial z}$$

sunt găsite în tabelele de logaritme, ele reprezentînd variația logaritmilor lui  $x, y, z$ , pentru o creștere a acestor variabile.

Aceste valori multiplicat respective cu  $\Delta x, \Delta y$  și  $\Delta z$ , pe cari le cunoaștem și făcînd suma lor se obține partea de la numărător a expresiunei de mai sus, iar

$\frac{\partial \log u}{\partial u}$  se găsește tot din tablele de logaritmi.

Exemple:

1) Să luăm un exemplar pe care să-l rezolvăm prin toate cele trei metode.

Se cere să se arate care este eroarea totală și medie a funcției  $F = a \cdot b$  ce reprezintă suprafața unui dreptunghi atunci când  $a$  și  $b$  sunt afectate de erori date.

Luăm cazul când:

$$\begin{aligned} a &= 400 \text{ m}; & a &= +0,5 \text{ m} \\ b &= 600 \text{ m}; & b &= -0,6 \text{ m} \end{aligned}$$

Fig.6.

Metoda I:

$$\begin{aligned} F &= a \cdot b = 240.000 \text{ m}^2 & F' &= (a + \Delta a)(b + \Delta b) = 400,5 \times 599,4 \\ F' &= 240.059,70 \text{ m}^2 & \Delta F &= F' - F = 59,70 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Metoda II:

$$F = a \cdot b \quad \Delta F = \frac{\partial F}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial F}{\partial b} \Delta b.$$

Derivând funcțiunea noastră:

$$F = a \cdot b \text{ avem } \Delta F = b \Delta a + a \cdot \Delta b.$$

unde introducând valorile date se obține:

$$\Delta F = (600 \times 0,5) + 400 \times (-0,6) = 300 - 240 = 60,00 \text{ m}^2$$

Eroarea medie este dată de formula:

$$\Delta F' = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial a} \Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial b} \Delta b\right)^2}$$

unde introducând valorile ce avem se obține:

$$\Delta F' = \pm \sqrt{300^2 + 240^2} = \pm 381,13 \text{ m}^2.$$

Metoda III:

În această metodă valoarea erorii este dată, așa cum am văzut, de formula:

$$\Delta F = \frac{\frac{\partial \log a}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial \log b}{\partial b} \Delta b}{\frac{\partial F}{\partial F}}$$

-1. Pentru ușurința și sistematizarea calculului datele se trec într-un tablou, la fel ca cel de mai jos, în care: în coloana 1 se înscrie formula, care în cazul nostru este  $F = ab$ , în coloana 2 argumentul, adică pentru cazul nostru valorile lui  $a$  și  $b$ , în coloana 3 trecem logaritmul

argumentului respectiv. Coloanele 4 și 5 sunt rezervate pentru diferențele logaritmice din tabele, adică în coloana 4 se înscrie diferența dintre logaritmul argumentului nostru:  $a = 400,00 \text{ m}$ , logaritmul care este egal cu 2,6020600 și logaritmul imediat următor, logaritmul numărului 400,01, care este egal cu 2,6020708.

Diferența aceasta are valoarea:  
 $2,6020708 - 2,6020600 = 108.$

În coloana 5 trecem cîtimea pentru care avem diferența de mai sus, cîtime care este egală cu:  
 $400,01 - 400,00 = 0,01.$

Coloanele 6 și 7 servesc pentru diferențele calculate la valoarea erorilor noastre care se trec în coloana 6.

Produsul dintre coloana 4 și 6 împărțit cu cîtimele din coloana 5, reprezintă valoarea diferențelor calculate și se trec în coloana 7, aceste diferențe calculate și înscrise în coloana 7 reprezintă tocmai pe:

$$\frac{\partial \log a}{\partial a} \Delta a, \text{ respectiv pe } \frac{\partial \log b}{\partial b} \Delta b.$$

Formu- la	Argumen- tul	Logarit- mul	Diferen- țele din tabele		Diferen- țele cal- culate		F
			val. pt.	Pt. val.	Pt. val.	val. pt.	
1	2	3	4	5	6	7	8
F=a.b	a=400m	2,6020600	108	0,01m	0,5m	5400	$\Delta F$ 1080 181 10 59,66 m <sup>2</sup>
	b=600m	2,7781513	72	0,01m	0,6m	4320	
	F=240.000 m <sup>2</sup>	5,3802113	181	10		1080	

Logaritmul funcțiunii este 5,380 2113, găsit în tabele pentru 240.000 m<sup>2</sup>. Diferența din tabele pentru variația logaritmului funcțiunii este 181, adică egală cu diferența dintre logaritmul lui 240010 și cel al lui 240000 m<sup>2</sup>. (181=5,3802203-5,3802112). Această diferență este pentru o variație a funcțiunii egală cu:

$$240.010 - 240.000 = 10 \text{ m}^2.$$

Suma diferențelor calculate ne va da numără-



torul din expresiunea lui F, numărătorul este dat de varia-  
 ția logaritmului funcțiunii în raport cu variația ei ( $\frac{181}{10}$ ).

Eroarea medie este:

$$\Delta F = \pm \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial \log a}{\partial a} \Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial \log b}{\partial b} \Delta b\right)^2}}{\left(\frac{\partial \log F}{\partial F}\right)^2} = \pm \frac{\sqrt{5400^2 + 4320^2}}{181} = \pm 382,02$$

2/. In triunghiul ABC sunt date: C=2000m,  $\Delta C = -0,5m$ ,  
 $\alpha = 88^\circ 20' 30''$ ,  $\beta = 85^\circ 28' 30''$ ,  $\Delta \alpha = 2'$ ,  $\Delta \beta = -1'$ .

Se cere să se determine înălțimea h și eroarea sim-  
 plă care afectează aceasta înălțime. Nu se mai rezolvă pro-  
 blema, dăm doar formulele care ne conduc la rezolvarea ei.

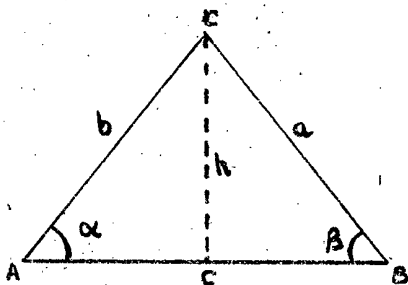


Fig. 7.

$$h = \frac{C \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \gamma}$$

iar:

$$\Delta h = \frac{\frac{\partial \log C}{\partial C} \Delta C + \frac{\partial \log \sin \alpha}{\partial \alpha} \Delta \alpha + \frac{\partial \log \sin \beta}{\partial \beta} \Delta \beta - \frac{\partial \log \sin \gamma}{\partial \gamma} \Delta \gamma}{\frac{\partial \log h}{\partial h}}$$

După cum se observă imediat, rezolvarea cea mai  
 simplă a problemei este prin metoda diferențelor logaritmice.

3/. Se dau coordonatele polare ale punctului Po,

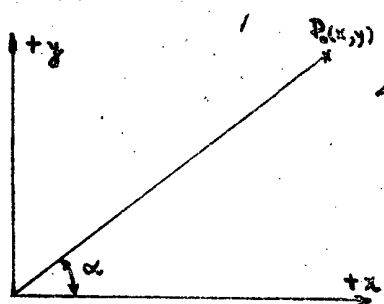


Fig. 8.

$r = 500m$ ,  $\alpha = 78^\circ 26' 40''$   
 precum și erorile care le afectează  
 $\Delta r = -0,5m$ ,  $\Delta \alpha = +20''$

Se cer coordonatele carteziene  
 x, y precum și erorile  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ .

4/. In problema anterioară se dau coordonatele carteziene ale punctului  $P_0$ ;  $x=100$  m,  $y=200$  m și erorile  $\Delta x = -0,2$  m,  $\Delta y = +0,3$  m. Se cere să se afle coordonatele polare ale lui  $P_0$ , adică  $\rho$  și  $\alpha$  precum și erorile  $\Delta \rho$  și  $\Delta \alpha$ .

5/. In figura 9 sînt date:  $\alpha = 10''$ ,  $R = 6371$  km,  $\Delta \alpha = +0,1''$ ,  $\Delta R = 1$  km, se cere să se afle  $D$  și  $\Delta D$ .

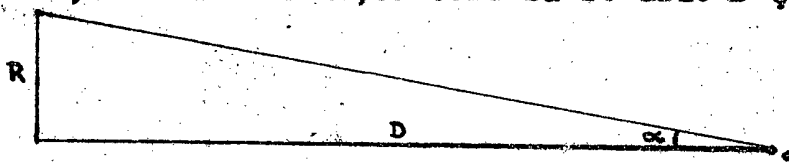


Fig. 9.

Formula care ne dă pe  $D$  este  $D = \frac{R}{\operatorname{tg} \alpha}$ , iar

$$\Delta D = \frac{\frac{\partial \log R}{\partial R} \Delta R - \frac{\partial \log \operatorname{tg} \alpha}{\partial \alpha} \Delta \alpha}{\frac{\partial \log D}{\partial D}} \text{ iar eroarea medie:}$$

$$m_D = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial \log R}{\partial R} \Delta R\right)^2 + \left(\frac{\partial \log \operatorname{tg} \alpha}{\partial \alpha} \Delta \alpha\right)^2}}{\left(\frac{\partial \log D}{\partial D}\right)^2}$$

Măsurători directe de aceeași precizie.

Făcîndu-se o serie de măsurători, observațiuni, asupra unei lungimi oarecare  $AB$ , se vor obține diferite valori:  $O_1, O_2, O_3, \dots, O_n$ .

Valoarea cea mai probabilă sau cea mai apropiată de adevăr, a lungimii măsurate, așa cum am mai amintit, este media aritmetică a observațiilor  $O_1, O_2, O_3, \dots, O_n$ , adică:

$$\frac{O_1 + O_2 + O_3 + \dots + O_n}{n}$$

Partea de la numărător a acestei expresiuni se poate pune sub forma unei sume și întrebuițînd notațiile lui Gauss care notează suma în forma  $[ \ ]$ , avem:

$$M = \frac{[O]}{n}$$

Eroarea ce se face la fiecare măsurătoare sau observație este:

$$(1) \begin{aligned} \varphi_1 &= M - O_1 \\ \varphi_2 &= M - O_2 \\ \varphi_3 &= M - O_3 \\ &\vdots \\ \varphi_n &= M - O_n \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Aceste erori pot fi calcu-} \\ \text{late, deoarece atit } M \text{ cit si} \\ O_1, O_2, \dots, O_n \text{ x sunt} \\ \text{cunoscute.} \end{array}$$

$$\frac{\sum \varphi_i}{[ \varphi ]} = \frac{\sum (M - O_i)}{x M - [O]} \quad \text{Adunînd avem:}$$

Aşa că pentru control va trebui să avem  $[ \varphi ] = 0$  !  
 In urma observațiilor făcute  $O_1, O_2, \dots, O_n$ , avem media aritmetică a lor și deci valoarea cea mai probabilă  $M$ , a lungimei măsurată.

Insă valoarea reală, absolută, a acestei lungimi nu este  $M$ , ci o valoare pe care nu o cunoaștem niciodată și pe care și o notăm cu  $O$ .

Intre  $O$  și observațiile  $O_1, O_2, O_3, \dots, O_n$ , avem diferențe cari sînt erorile absolute  $\varepsilon$  după cum urmează:

$$(2) \begin{aligned} O - O_1 &= \varepsilon_1 \\ O - O_2 &= \varepsilon_2 \\ O - O_3 &= \varepsilon_3 \\ &\vdots \\ O - O_n &= \varepsilon_n \end{aligned}$$

Aceste erori  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n$  sînt erori absolute, spre deosebire de  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$ , cari reprezentînd diferențele dintre valoarea probabilă a lungimei și observațiunile respective, sînt erori relative, probabile sau reziduale.

Diferența dintre valoarea absolută  $O$  a lungimei măsurate și valoarea ei cea mai probabilă, adică notată la noi cu  $\mu$  este eroarea mediei aritmetice  $O - \mu = \mu -$ .

In sistemul (2) avînd erorile absolute  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n$ , pe cari să presupunem că le-am cunoaște, deși erorile absolute nu pot fi nici odată determinate, am fi conșuși a lua ca valoare pentru eroarea medie "n" valoarea dată de media aritmetică a erorilor absolute, adică:

$$\mu = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_n}{n} = \frac{[\varepsilon]}{n}$$

Ceeace nu este însă just și pentru a pune aceasta în evidență să luăm următoarele exemple:

Presupunem că:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= -1 \\ \varepsilon_2 &= +2 \\ \varepsilon_3 &= -2 \\ \varepsilon_4 &= +1 \\ \varepsilon_5 &= 0 \end{aligned}$$

Dacă am face simpla medie aritmetică a acestor erori, am obține o valoare egală cu zero sau neținând cont de semne, am avea valoarea 6.

Să luăm însă și următorul exemplu:

$$\varepsilon_1 = -3$$

$$\varepsilon_2 = +3$$

$$\varepsilon_3 = 0$$

$$\varepsilon_4 = 0$$

$$\varepsilon_5 = 0$$

Făcându-se și acum media rezultă, la fel ca în exemplul precedent, o valoare egală cu zero sau fără a ține cont de semne, tot ca în cazul precedent, am obține valoarea 6.

Însă în primul exemplu măsurătorile au fost mai precise, deoarece cea mai mare eroare comisă a fost  $\pm 2$ , pe când în exemplul din urmă eroarea maximă a fost  $\pm 3$ .

Pentru acest motiv eroarea medie "m" se definește ca fiind:

$$m^2 = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n} \text{ sau } m = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}$$

Într'adevăr acum pentru primul caz eroarea medie ar fi:

$$m_1 = \pm \sqrt{\frac{10}{5}} = \pm \sqrt{2},$$

iar pentru cazul doi avem:  $m_2 = \pm \sqrt{\frac{18}{5}} = \pm \sqrt{3,6}.$

Cu alte cuvinte  $m_1 < m_2$ , ceea ce concordă cu realitatea.

Pentru a afla eroarea medie "m" dată de relația de mai sus:

$$m^2 = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}, \text{ unde } [\varepsilon\varepsilon] \text{ nu poate fi}$$

nici odată determinată, așa cum de altfel am mai amintit, să înlocuim în relațiile (2) pe  $0 = M + \mu$  se va obține:

$$M + \mu - 0_1 = \varepsilon_1 \quad \text{sau cu ajutorul relațiilor (1)}$$

$$M + \mu - 0_2 = \varepsilon_2 \quad \mu + v_1 = \varepsilon_1$$

$$M + \mu - 0_3 = \varepsilon_3 \quad \mu + v_2 = \varepsilon_2$$

$$(3) \quad \mu + v_3 = \varepsilon_3$$

$$\vdots \quad \mu + v_n = \varepsilon_n$$

Însumând avem

$$\text{adică: } [v] + n\mu = [\varepsilon] \text{ unde } [v] = 0, \text{ deci } [\varepsilon] = n\mu.$$

Ridicând la pătrat relațiile (3) se va obține:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^2 &= \nu_1^2 + 2\nu_1\mu + \mu^2 \\ \varepsilon_2^2 &= \nu_2^2 + 2\nu_2\mu + \mu^2 \\ &\vdots \\ \varepsilon_n^2 &= \nu_n^2 + 2\nu_n\mu + \mu^2 \end{aligned}$$

$$\underline{\varepsilon_n^2 = \nu_n^2 + 2\nu_n\mu + \mu^2}$$

$$[\varepsilon\varepsilon] = [\nu\nu] + 2\mu[\nu] + n\mu^2, \text{ dar } [\nu] = \phi, \text{ deci}$$

$$(4) [\varepsilon\varepsilon] = [\nu\nu] + n\mu^2$$

Stim însă că  $[\varepsilon] = n\mu$  sau ridicînd la pătrat:

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_n)^2 = (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2) + 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \dots) = n^2\mu^2$$

În practică s-a văzut că sumele lui  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  alternează așa că se poate neglija termenul al 2-lea, el tinzînd către zero, așa că avem:  $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2 = n^2\mu^2$  sau:

$$[\varepsilon\varepsilon] = n^2\mu^2$$

Introducînd acum în relația (4) vom avea:

$$[\varepsilon\varepsilon] = [\nu\nu] + \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n} \text{ adică } \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n} = \frac{[\nu\nu]}{n-1}$$

Deci eroarea medie "m" va fi:

$$m^2 = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n} = \frac{[\nu\nu]}{n-1} \quad m = \sqrt{\frac{[\nu\nu]}{n-1}}$$

iar pentru eroarea mediei aritmetice am avut:

$$[\varepsilon\varepsilon] = n^2\mu^2 \text{ deci } \mu^2 = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n^2} = \frac{[\nu\nu]}{n(n-1)}$$

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[\nu\nu]}{n(n-1)}} = \frac{m}{\sqrt{n}}$$

Exemple numerice:

1) Între două puncte de triangulație, măsurîndu-se de 5 ori distanța dintre ele, au fost găsite datele din tabloul de mai jos.

Se cere să se afle valoarea cea mai probabilă a acestei lungimi, precum și eroarea medie și cea a mediei aritmetice.

Nr. obs.	Valoarea observației m	$\checkmark$ mm	$\checkmark\checkmark$ mm	Calculule și rezultate
1	128,465 m	4	16	$M = \frac{642,345}{5} = 128,469$ metri
2	128,472 m	-3	9	Eroarea medie $m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{x-1}} = \pm \sqrt{\frac{228}{4}} = \pm 7,5$
3	128,468 m	1	1	Eroarea mediei aritmetice:
4	128,460 m	9	81	$M = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{x(x-1)}} = \frac{m}{\sqrt{x}} = \pm \frac{7,5}{\sqrt{5}} = 3,3$
5	128,480 m	-11	121	Valoarea probabilă a lungimei măsurate:
0	= 642,345 m	$[v] = 0$	$[vv] = 228$	$0 = M \pm 3,3 \text{ mm} = 128,469 \pm 0,0033$

2/ Un unghi oarecare „ $\alpha$ ” a fost măsurat de 5 ori și au fost găsite următoarele rezultate:

$O_1 = 35^\circ 45' 18''$

$O_2 = 35^\circ 45' 15''$

$O_3 = 35^\circ 45' 20''$  Se cere să aflăm pe  $M, m, \mu, O$ .

$O_4 = 35^\circ 45' 14''$

$O_5 = 35^\circ 45' 16''$

3/ Măsurători directe de precizuni diferite.

Acesta este cazul când executăm o măsurătoare cu mai multe instrumente, cari dau precizie diferită. Ca un exemplu să presupunem că am măsura o distanță oarecare AB, cu lanțul, cu panglica și cu firul de invar și ca rezultat al măsurătorilor am găsi:

- In măsurătoarea cu lanțul  $O_1 = 102 \text{ m}$

- In măsurătoarea cu panglica  $O_2 = 100,5 \text{ m}$

- In măsurătoarea cu firul de invar  $O_3 = 100,02 \text{ m}$ .

Dacă acum am pune problema ca să aflăm valoarea cea mai probabilă a acestei lungimi, este evident că nu mai putem face, simplu, media aritmetică a celor trei observațiuni, așa cum am făcut în cazul măsurătorilor de aceeași precizie, pentru motivul că la măsurarea cu lanțul avem eroare mult mai mare decât în cazul, de exemplu, al măsurării cu firul de invar, așa că, dacă s-ar face numai media aritmetică, am fi conduși spre un rezultat mai eronat decât în cazul că am admite ca buna observațiunea făcută în măsurarea cu firul de invar, care dă o valoare mult mai apropiată de valoarea absolută a acestei lungimi.

Ca atare va fi nevoie să înmulțim fiecare observațiune cu un coeficient de precizie, de greutate, sau de pondere, corespunzător etalonului cu care a fost executată măsurătoarea respectivă.

Numai astfel va putea fi întrebuițat rezultatul celor trei observațiuni rădă ca rezultatul final să fie influențat.

### Principiul lui Legendre.

Înainte de a trece la stabilirea relațiilor care ne dau valorile lui  $M$ ,  $m$  și  $\mu$  pentru cazul măsurătorilor directe de precizie diferită, este necesar să introducem o noțiune nouă, cunoscută sub numele de principiul micilor pătrate sau principiul lui Legendre, care ne dă metoda prin care poate fi determinată valoarea cea mai probabilă a unei mărimi, asupra căreia au fost mai multe observațiuni.

Principiul lui Legendre spune că:  
valoarea cea mai probabilă a unei măsurători este aceea pentru care suma pătratelor erorilor este un minim.

Acest principiu a fost enunțat de către Legendre, la anul 1805 și de atunci el a fost adoptat universal în calculul erorilor.

Conform acestui principiu urmează că pentru a avea valoarea cea mai probabilă a unei mărimi trebuie ca:

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_n^2 = \text{Minim}$$

Adică sub forma simbolică  $[v^2] = \text{minim}$ .

Dar pentru ca o funcțiune să ne dea un minim trebuie ca derivata acelei funcțiuni să fie zero, așa că: derivând funcțiunea de mai sus, în raport cu variabila care este  $M$ , știm că:

$$(1) \begin{aligned} v_1 &= M - O_1 \\ v_2 &= M - O_2 \\ v_3 &= M - O_3 \\ &\vdots \\ v_n &= M - O_n \end{aligned}$$

vom avea:  $2v_1 \frac{\partial v_1}{\partial M} + 2v_2 \frac{\partial v_2}{\partial M} + 2v_3 \frac{\partial v_3}{\partial M} + \dots + 2v_n \frac{\partial v_n}{\partial M} = 0$

sau: (2)  $v_1 \frac{\partial v_1}{\partial M} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial M} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial M} + \dots + v_n \frac{\partial v_n}{\partial M} = 0$

In cazul nostru relațiile(1) derivind în raport cu singura variabilă M;

$$\frac{\partial v_1}{\partial M} = 1; \quad \frac{\partial v_2}{\partial M} = 1; \quad \dots \quad \frac{\partial v_n}{\partial M} = 1.$$

asa că expresiunea (2) devine:  $v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n = 0$ .

Simbolic ar fi  $[v] = 0$ , ceea ce a mai fost găsit și în cazul măsurătorilor directe de aceeași precizie

Introducând valorile lui  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ , din relațiile(1) expresiunea devine:

$$(M-O_1) + (M-O_2) + (M-O_3) + \dots + (M-O_n) = 0,$$

deci:  $M = \frac{O_1 + O_2 + O_3 + \dots + O_n}{n} = \frac{[O]}{n}$

Am stabilit astfel că cea mai probabilă valoare a lui M, este media aritmetică a observațiilor.

De aci prin generalizare se ajunge la enunțarea principiului lui Legendre, că acela este cea mai probabilă valoare a unei mărimi pentru care suma pătratelor erorilor este un minim.

De altfel Legendre, cînd a enunțat principiul acesta, nu a probat valabilitatea lui, ci a semnalat doar că prin aplicarea acestui principiu sunt neutralizate efectele erorilor extreme, el plecînd dela observațiunea că valoarea cea mai probabilă este media aritmetică a măsurătorilor.

Bazat pe calculul probabilităților Gauss aduce și o demonstrație principiului lui Legendre, care este analog momentului de inerție al unui corp în raport cu axul ce trece prin centrul de greutate al acelu corp.

Să trecem acum la stabilirea relației care ne dă pe M în cazul măsurătorilor directe de precizii diferite și pentru aceasta să presupunem că am executat asupra ei o serie de n măsurători cu instrumente de diferite precizii, evident că atunci pentru fiecare observațiune avem o eroare medie(m) diferită:



Valoarea unei singure observațiuni	Coefficientul de greutate respectiv	Eroarea $V$	Eroarea medie $m$
$O_1$	$P_1$	$V_1$	$m_1$
$O_2$	$P_2$	$V_2$	$m_2$
$O_3$	$P_3$	$V_3$	$m_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$O_n$	$P_n$	$V_n$	$m_n$

Intre eroarea " $V$ " și eroarea medie " $m$ " există un raport, adică dacă eroarea este mică și eroarea medie este mică.

Să presupunem că lungimea dată a fost măsurată de " $n$ " ori cu o unitate fictivă, care ar da la prima măsurătoare o eroare fictivă  $V_1$  la a două, eroarea fictivă  $V_2$  și așa mai departe pînă la  $V_n$  și o eroare medie  $m_0 = \frac{V_0}{(n-1)}$  în acest caz am avea:

$$\frac{V_1}{m_0} = \frac{V_1}{m_1}; \quad \frac{V_2}{m_0} = \frac{V_2}{m_2}; \quad \dots \dots \dots \frac{V_n}{m_0} = \frac{V_n}{m_n}$$

sau:

$$\begin{aligned} V_1 &= V_1 \frac{m_0}{m_1} \\ V_2 &= V_2 \frac{m_0}{m_2} \\ &\vdots \\ V_n &= V_n \frac{m_0}{m_n} \end{aligned}$$

Conform principiului lui Legendre, valoarea cea mai probabilă fiind cea pentru care suma pătratelor erorilor este minimă, deci:

$$\begin{aligned} V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + \dots + V_n^2 &= \text{Minim, adică:} \\ \left( V_1 \frac{m_0}{m_1} \right)^2 + \left( V_2 \frac{m_0}{m_2} \right)^2 + \left( V_3 \frac{m_0}{m_3} \right)^2 + \dots + \left( V_n \frac{m_0}{m_n} \right)^2 &= \text{Minim.} \end{aligned}$$

Notăm raportul:

$$\left( \frac{m_0}{m_1} \right)^2 = P_1; \quad \left( \frac{m_0}{m_2} \right)^2 = P_2; \quad \dots \dots \dots \left( \frac{m_0}{m_n} \right)^2 = P_n$$

Ceeace după cum se știe din Analiza Matematică, revine că de-  
rivata funcțiunii să fie egală cu zero:

Derivând funcțiunea de mai sus avem:  
 $2p_1 v_1 \partial J_1 + 2p_2 v_2 \partial J_2 + \dots + 2p_n v_n \partial J_n = 0$   
dar pentru că:  $\partial J_1 = \partial J_2 = \partial J_3 = \dots = \partial J_n = 1$ , avem:

$$p_1 v_1 + p_2 v_2 + p_3 v_3 + \dots + p_n v_n = 0,$$

sau pus sub forma simbolică:  $[p v] = 0$

Știm însă că:

$$v_1 = M - O_1$$

$$v_2 = M - O_2$$

$$v_3 = M - O_3$$

⋮

$$v_n = M - O_n$$

Cu aceste date relația noastră devine:

$$p_1(M - O_1) + p_2(M - O_2) + p_3(M - O_3) + \dots + p_n(M - O_n) = 0$$

Desvoltind se obține:

$$M(p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n) = p_1 O_1 + p_2 O_2 + \dots + p_n O_n.$$

de unde rezultă valoarea cea mai probabilă:

$$M = \frac{p_1 O_1 + p_2 O_2 + p_3 O_3 + \dots + p_n O_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n} = \frac{[pO]}{[p]}$$

În aceasta expresiune  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ , sînt coeficienți  
de pondere, care așa cum s-a amintit, corespund etalonului cu  
care se fac măsurătorile, ei fiind cu atît mai mari cu atît  
etalonul respectiv ne dă o precizie mai mare sau cu alte cu-  
vinte, ar reveni ca și cum cu instrumentul mai precis am exe-  
cuta mai multe măsurători.

Formula de mai sus, cunoscută și în meca-  
nică: adică suma momentelor forțelor, luate în raport cu un  
punct, este egală cu momentul rezultantei în raport cu același  
punct  $MR = [pO]$

Să determinăm pe  $m$  și  $M$

Stim că:

$$\begin{array}{l} 0 - 0_1 = \varepsilon_1 \\ 0 - 0_2 = \varepsilon_2 \\ 0 - 0_3 = \varepsilon_3 \\ \vdots \\ 0 - 0_n = \varepsilon_n \end{array} \quad \begin{array}{l} M - 0_1 = \mathcal{I}_1 \\ M - 0_2 = \mathcal{I}_2 \\ M - 0_3 = \mathcal{I}_3 \\ \vdots \\ M - 0_n = \mathcal{I}_n \end{array} \quad 0 - M = \mu$$

Inlocuind pe  $M = 0 - \mu$

$$\begin{array}{l} 0 - \mu - 0_1 = \mathcal{I}_1 \\ 0 - \mu - 0_2 = \mathcal{I}_2 \\ 0 - \mu - 0_3 = \mathcal{I}_3 \text{ sau } \mathcal{I}_3 \\ \vdots \\ 0 - \mu - 0_n = \mathcal{I}_n \end{array} \quad \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \mathcal{I}_1 + \mu \\ \varepsilon_2 = \mathcal{I}_2 + \mu \\ \varepsilon_3 = \mathcal{I}_3 + \mu \\ \vdots \\ \varepsilon_n = \mathcal{I}_n + \mu \end{array}$$

Dar valorile lui  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n$  nu pot fi niciodată determinate, întrucît valoarea adevărată ( $0$ ) nu este niciodată cunoscută, se poate însă considera că  $\varepsilon_i$  este aproape egal cu  $m_i$  și atunci relațiile noastre devin:

$$\begin{array}{l} m_1 = \mathcal{I}_1 + \mu \\ m_2 = \mathcal{I}_2 + \mu \\ m_3 = \mathcal{I}_3 + \mu \\ \vdots \\ m_n = \mathcal{I}_n + \mu \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ridicînd la pătrat: } m_1^2 = \mathcal{I}_1^2 + 2\mathcal{I}_1\mu + \mu^2 \\ m_2^2 = \mathcal{I}_2^2 + 2\mathcal{I}_2\mu + \mu^2 \\ m_3^2 = \mathcal{I}_3^2 + 2\mathcal{I}_3\mu + \mu^2 \\ \vdots \\ m_n^2 = \mathcal{I}_n^2 + 2\mathcal{I}_n\mu + \mu^2 \end{array}$$

Înmulțind cu  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ , adică cu coeficienții de pondere, respectiv avem:

$$\begin{array}{l} m_1^2 p_1 = p_1 \mathcal{I}_1^2 + 2p_1 \mathcal{I}_1 \mu + p_1 \mu^2 \\ m_2^2 p_2 = p_2 \mathcal{I}_2^2 + 2p_2 \mathcal{I}_2 \mu + p_2 \mu^2 \\ m_3^2 p_3 = p_3 \mathcal{I}_3^2 + 2p_3 \mathcal{I}_3 \mu + p_3 \mu^2 \\ \vdots \\ m_n^2 p_n = p_n \mathcal{I}_n^2 + 2p_n \mathcal{I}_n \mu + p_n \mu^2 \end{array}$$

Insumînd  $[p m m] = [p \mathcal{I} \mathcal{I}] + 2\mu [p \mathcal{I}] + \mu^2 [p]$

Așa cum s-a stabilit anterior  $[p \mathcal{I}] = 0$  deci

$$(1) [p.m.m.] = [p \mathcal{I} \mathcal{I}] + \mu^2 [p]$$

avem însă:

$$P_1 = \frac{m_0^2}{m_1^2} ; P_2 = \frac{m_0^2}{m_2^2} ; \dots \dots P_n = \frac{m_0^2}{m_n^2}$$

de unde:

$$\begin{aligned} m_0^2 &= P_1 m_1^2 \\ m_0^2 &= P_2 m_2^2 \\ m_0^2 &= P_3 m_3^2 \\ &\vdots \\ m_0^2 &= P_n m_n^2 \\ \hline n m_0^2 &= [p m m] \end{aligned}$$

Inlocuind în relația (1):  $n m_0^2 = [p \mathcal{J} \mathcal{J}] + \mu^2 [p]$

Dacă punem prin analogie cu cazul măsurătorilor de același precizie:

$$\mu = \frac{m_0}{\sqrt{[p]}} \quad \text{sau} \quad \mu^2 = \frac{m_0^2}{[p]}$$

$$n m_0^2 = [p \mathcal{J} \mathcal{J}] + m_0^2 \quad m_0^2 (n-1) = [p \mathcal{J} \mathcal{J}]$$

Deci eroarea medie a unei singure observații este:

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[p \mathcal{J} \mathcal{J}]}{n-1}}$$

Iar eroarea medie aritmetică este:

$$\mu = \frac{m_0}{\sqrt{[p]}} = \frac{\pm \sqrt{\frac{[p \mathcal{J} \mathcal{J}]}{n-1}}}{\sqrt{[p]}} = \pm \sqrt{\frac{[p \mathcal{J} \mathcal{J}]}{p(n-1)}}$$

#### 4. Măsurători indirecte.

Sînt cazuri cînd o mărime nu poate fi măsurată direct, cum ar fi de exemplu cazul unei bare metalice a cărei lungime la temperatura de zero grade este greu a fi măsurată, dar poate fi determinată în mod indirect cu ajutorul formulei  $l_t = l_0 (1 + \alpha t + \beta t^2)$ , adică lungimea barei la temperatura  $t_0$  este egală cu lungimea ei la zero grade, înmulțită cu un trinom de dilatație.

Coefficienții  $\alpha$  și  $\beta$  pot fi găsiți în tabele, dar pot fi și determinați printr-o serie de măsurători la diferite temperaturi, obținînd în acest fel un sistem format dintr-o serie de ecuație, prin rezolvarea căruia se obțin  $\alpha$  și  $\beta$ .

Un alt exemplu identic de măsurători indirecte îl constituie pana de măsurat lungimi, care ne dă distanța de măsurat prin formula  $y = ax + b$ .

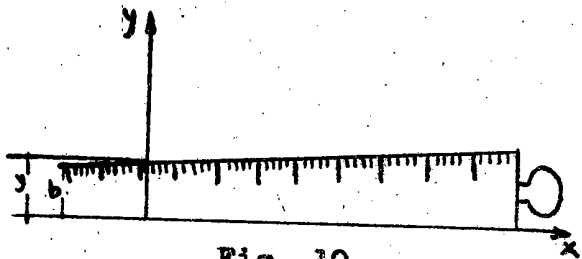


Fig. 10.

Relație care nu este altceva decât ecuația unei drepte cu constanta  $b$  și coeficient unghiular  $a$ .

Valorile coeficienților  $a, b$ , sînt în prealabil determinate prin mai multe încercări, adică prin mai multe observații.

Să luăm cazul unei bare metalice ale cărei lungimi la diferite temperaturi le măsurăm, adică se măsoară  $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ ,  $t_1, t_2, \dots, t_n$  și se cere să determinăm și  $\beta$ , atunci sistemul de ecuație ce se obține este:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad l_1 &= l_0(1 + \alpha t_1 + \beta t_1^2) = l_0 + l_0 \alpha t_1 + l_0 \beta t_1^2 \\
 l_2 &= l_0(1 + \alpha t_2 + \beta t_2^2) = l_0 + l_0 \alpha t_2 + l_0 \beta t_2^2 \\
 &\vdots \\
 l_n &= l_0(1 + \alpha t_n + \beta t_n^2) = l_0 + l_0 \alpha t_n + l_0 \beta t_n^2
 \end{aligned}$$

Să notăm:

$$l_0 = x; \quad l_0 \alpha = y; \quad l_0 \beta = z.$$

Sistemul nostru devine:

$$\begin{aligned}
 (2) \quad l_1 &= x + yt_1 + zt_1^2 \\
 l_2 &= x + yt_2 + zt_2^2 \\
 &\vdots \\
 l_n &= x + yt_n + zt_n^2
 \end{aligned}$$

Atunci însă cînd am măsurat pe  $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ , au fost comise erorile  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$  așa că relațiile vor fi:

$$\begin{aligned}
 (3) \quad v_1 &= x + yt_1 + zt_1^2 - l_1 \\
 v_2 &= x + yt_2 + zt_2^2 - l_2 \\
 &\vdots \\
 v_n &= x + yt_n + zt_n^2 - l_n
 \end{aligned}$$

Sub o formă mai generală s-ar putea scrie:

$$\begin{aligned}
 (4) \quad v_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 z - 0_1 \\
 v_2 &= a_2 x + b_2 y + c_2 z - 0_2 \\
 &\vdots \\
 v_n &= a_n x + b_n y + c_n z - 0_n
 \end{aligned}$$

Rezolvând acest sistem se deduc valorile lui  $x, y, z$ , iar din notațiile de mai sus, cele ale necunoscutelor noastre,  $\alpha$  și  $\beta$ .

Având însă un sistem de "x" ecuații cu trei necunoscute, deci un sistem incompatibil, la rezolvarea lui o metodă ar fi de a lua grupe de trei ecuații și de a le rezolva, urmând ca apoi să luăm media rezultatelor, ceea ce ne-ar da:

$$x_m = \frac{[x_i]}{i}; \quad y_m = \frac{[y_i]}{i}; \quad z_m = \frac{[z_i]}{i}$$

Dar incompatibilitatea sistemului de mai sus, poate fi ridicată aplicându-se principiul micilor pătrate al lui Legendre adică:  $[vv] = \text{Minim}$ .

În sistemul (4) se vede că  $v$  este o funcțiune de  $x, y, z$ , deci și  $vv$  sau și  $[vv]$  este tot o funcțiune de  $x, y, z$ , adică:

$$[vv] = f(x, y, z).$$

Pentru ca această funcțiune să ne dea un minim, știm că trebuie ca derivatele parțiale ale ei, în raport cu  $x, y, z$ , să fie nule, adică:

$$\frac{\partial [vv]}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial [vv]}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial [vv]}{\partial z} = 0 \text{ ceea ce re}$$

vine ca:

$$\begin{aligned} 2v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + 2v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} + 2v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x} + \dots + 2v_n \frac{\partial v_n}{\partial x} &= 0 \\ (5) \quad 2v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} + 2v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + 2v_3 \frac{\partial v_3}{\partial y} + \dots + 2v_n \frac{\partial v_n}{\partial y} &= 0 \\ 2v_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} + 2v_2 \frac{\partial v_2}{\partial z} + 2v_3 \frac{\partial v_3}{\partial z} + \dots + 2v_n \frac{\partial v_n}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

Din relațiile (4) reiese că:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x} = a_1; \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} = a_2; \quad \dots \quad \frac{\partial v_n}{\partial x} = a_n \\ \frac{\partial v_1}{\partial y} = b_1; \quad \frac{\partial v_2}{\partial y} = b_2; \quad \dots \quad \frac{\partial v_n}{\partial y} = b_n \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} = c_1; \quad \frac{\partial v_2}{\partial z} = c_2; \quad \dots \quad \frac{\partial v_n}{\partial z} = c_n. \end{aligned}$$

Înlocuind în sistemul (5) aceste date și simplificând cu 2, ajungem la următoarele relații:

$$(6) \quad \begin{aligned} a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \dots + a_n v_n &= 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + \dots + b_n v_n &= 0 \\ c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + \dots + c_n v_n &= 0 \end{aligned}$$

Aceste relații pot fi scrise simbolice sub forma:

$$[a \ v] = 0; \quad [b \ v] = 0; \quad [c \ v] = 0,$$

cece constituie controlul de calcul, cum vom vedea dintr'un exemplu.

Dacă introducem valorile lui  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ , din ecuațiile (4), în sistemul (6):

$$\begin{aligned} a_1(a_1 x + b_1 y + c_1 z - 0_1) + a_2(a_2 x + b_2 y + c_2 z - 0_2) + \dots + a_n(a_n x + b_n y + c_n z - 0_n) &= 0 \\ b_1(a_1 x + b_1 y + c_1 z - 0_1) + b_2(a_2 x + b_2 y + c_2 z - 0_2) + \dots + b_n(a_n x + b_n y + c_n z - 0_n) &= 0 \\ c_1(a_1 x + b_1 y + c_1 z - 0_1) + c_2(a_2 x + b_2 y + c_2 z - 0_2) + \dots + c_n(a_n x + b_n y + c_n z - 0_n) &= 0 \end{aligned}$$

Efectuind înmulțirile și făcînd suma rezultatelor se ajunge la expresiunile următoarele:

$$\begin{aligned} [a \ a]x + [a \ b]y + [a \ c]z - [a \ 0] &= 0 \\ [b \ a]x + [b \ b]y + [b \ c]z - [b \ 0] &= 0 \\ [c \ a]x + [c \ b]y + [c \ c]z - [c \ 0] &= 0 \end{aligned}$$

În acest fel am ajuns de la sistemul nostru incompatibil la un sistem compatibil de trei ecuații cu trei necunoscute, prin rezolvarea căruia se pot obține valorile medii ale lui  $x, y, z$ , cu ajutorul cărora se vor găsi necunoscutele  $\alpha$  și  $\beta$ .

Cele trei ecuații din sistemul (8) sunt ecuațiile normale ale lui Gauss, care sînt foarte ușor de memorat prin faptul că păstrează o anumită simetrie.

În ceea ce privește eroarea medie "m" care în cazul măsurărilor directe era dată de expresiunea:

$$m = \sqrt{\frac{[v \ v]}{n-1}}$$

unde asupra unei singure mărimi se execută o serie de măsurări, ceea ce revine că  $n-1$  este tocmai surplusul de măsurări făcut pentru aflarea valorii celei mai probabile.

În cazul nostru pentru a găsi cele trei necunoscute ( $x, y, z$ ), sînt necesare trei măsurări, am executat însă pentru a găsi valoarea cea mai probabilă a celor trei necunoscute, deci eroarea medie "m" în acest caz este dată de formula:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[v \ v]}{n-3}}$$

sau generalizind:

$$m = \pm \sqrt{\frac{v \cdot v}{n-k}}$$

In aceasta formulă  $n$  ar reprezenta numărul de observațiuni făcute,  $k$  este egal cu numărul necunoscutelor, iar  $n-k$  ar fi surplusul de măsurători efectuate pentru aflarea valorilor cele mai probabile ale necunoscutelor.

a) Aflarea erorilor medii  $m_x, m_y, m_z$ .

Deoarece in exemplul luat, al barei metalice supuse la temperaturi diferite, nu am comis erori numai asupra măsurării lungimei barei, adică asupra lui  $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ , respective asupra lui  $O_1, O_2, O_3, \dots, O_n$ , ci au fost comise erori și asupra necunoscutelor noastre:  $x, y, z$ , pentru care am aflat valorile cele mai probabile, se pune problema acum de a afla și erorile medii comise asupra acestor necunoscute, adică:

$$m_x, m_y, m_z.$$

In sistemul de ecuații (2) unde am avut:

$$\begin{aligned} l_1 &= x + y t_1 + z t_1^2 \\ l_2 &= x + y t_2 + z t_2^2 \\ &\vdots \\ l_n &= x + y t_n + z t_n^2 \end{aligned}$$

sau, cu notațiile făcute și generalizindu-se, aceasta a devenit:

$$\begin{aligned} O_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ O_2 &= a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ &\vdots \\ O_n &= a_n x + b_n y + c_n z \end{aligned}$$

In acest sistem  $O_1, O_2, O_3, \dots, O_n$ , sunt funcțiuni de  $x, y, z$ , dar invers  $x, y$  și  $z$  sînt la rîndul lor funcțiuni de  $O_1, O_2, O_3, \dots, O_n$ , ceea ce se poate pune sub formă:

$$\begin{aligned} x &= f_1(O_1, O_2, O_3, \dots, O_n) \\ y &= f_2(O_1, O_2, O_3, \dots, O_n) \\ z &= f_3(O_1, O_2, O_3, \dots, O_n) \end{aligned}$$

Cum in mod frecvent aceste funcțiuni sînt liniare, se pot scrie relațiile de mai sus și sub forma:

$$(9) \quad \begin{aligned} x &= A_1 O_1 + A_2 O_2 + A_3 O_3 + \dots + A_n O_n \\ y &= B_1 O_1 + B_2 O_2 + B_3 O_3 + \dots + B_n O_n \\ z &= \gamma_1 O_1 + \gamma_2 O_2 + \gamma_3 O_3 + \dots + \gamma_n O_n \end{aligned}$$

Avind in vedere că  $O_1, O_2, O_3, \dots, O_n$  sînt măsurători independente, putem scrie conform principalului



lui Legendre că eroarea medie este:

$$m_x^2 = \left(\frac{\partial F_1}{\partial O_1} \Delta O_1\right)^2 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial O_2} \Delta O_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial F_1}{\partial O_n} \Delta O_n\right)^2$$

$$m_y^2 = \left(\frac{\partial F_2}{\partial O_1} \Delta O_1\right)^2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial O_2} \Delta O_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial F_2}{\partial O_n} \Delta O_n\right)^2$$

$$m_z^2 = \left(\frac{\partial F_3}{\partial O_1} \Delta O_1\right)^2 + \left(\frac{\partial F_3}{\partial O_2} \Delta O_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial F_3}{\partial O_n} \Delta O_n\right)^2$$

Derivând funcțiunile  $F_1, F_2, F_3$  găsim relațiile:

$$m_x^2 = (\alpha_1 \Delta O_1)^2 + (\alpha_2 \Delta O_2)^2 + (\alpha_3 \Delta O_3)^2 + \dots + (\alpha_n \Delta O_n)^2$$

$$m_y^2 = (\beta_1 \Delta O_1)^2 + (\beta_2 \Delta O_2)^2 + (\beta_3 \Delta O_3)^2 + \dots + (\beta_n \Delta O_n)^2$$

$$m_z^2 = (\gamma_1 \Delta O_1)^2 + (\gamma_2 \Delta O_2)^2 + (\gamma_3 \Delta O_3)^2 + \dots + (\gamma_n \Delta O_n)^2$$

sau:

$$(10) \quad m_x^2 = \alpha_1^2 \Delta O_1^2 + \alpha_2^2 \Delta O_2^2 + \alpha_3^2 \Delta O_3^2 + \dots + \alpha_n^2 \Delta O_n^2$$

$$m_y^2 = \beta_1^2 \Delta O_1^2 + \beta_2^2 \Delta O_2^2 + \beta_3^2 \Delta O_3^2 + \dots + \beta_n^2 \Delta O_n^2$$

$$m_z^2 = \gamma_1^2 \Delta O_1^2 + \gamma_2^2 \Delta O_2^2 + \gamma_3^2 \Delta O_3^2 + \dots + \gamma_n^2 \Delta O_n^2$$

Dar  $\Delta O_1, \Delta O_2, \Delta O_3, \dots, \Delta O_n$ , sunt erorile medii ale măsurătorilor  $O_1, O_2, O_3, \dots, O_n$ , adică:

$$\Delta O_1 = m_1, \Delta O_2 = m_2, \Delta O_3 = m_3, \dots, \Delta O_n = m_n$$

Așa cum am stabilit în cazul măsurătorilor directe de precizie diferită:

$$p_1 = \frac{m}{m_1^2}, p_2 = \frac{m}{m_2^2}, p_3 = \frac{m}{m_3^2}, \dots, p_n = \frac{m}{m_n^2}$$

De unde se obțin valorile lui  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ , sau cu alte cuvinte, valorile lui  $\Delta O_1, \Delta O_2, \Delta O_3, \dots, \Delta O_n$ .

$$m_1^2 = \Delta O_1^2 = \frac{m^2}{p_1}$$

$$m_2^2 = \Delta O_2^2 = \frac{m^2}{p_2}$$

$$\vdots$$

$$m_n^2 = \Delta O_n^2 = \frac{m^2}{p_n}$$

Înlocuind aceste valori în relațiile de sub (10) se obține:

$$(11) \quad m_x^2 = \frac{\alpha_1^2}{p_1} m^2 + \frac{\alpha_2^2}{p_2} m^2 + \frac{\alpha_3^2}{p_3} m^2 + \dots + \frac{\alpha_n^2}{p_n} m^2$$

$$m_y^2 = \frac{\beta_1^2}{p_1} m^2 + \frac{\beta_2^2}{p_2} m^2 + \frac{\beta_3^2}{p_3} m^2 + \dots + \frac{\beta_n^2}{p_n} m^2$$

$$m_z^2 = \frac{\gamma_1^2}{p_1} m^2 + \frac{\gamma_2^2}{p_2} m^2 + \frac{\gamma_3^2}{p_3} m^2 + \dots + \frac{\gamma_n^2}{p_n} m^2$$

Aceste relații în mod simbolic pot fi scrise sub forma:

$$m_x = m \sqrt{\frac{\alpha\alpha}{n}}, \quad m_y = m \sqrt{\frac{\beta\beta}{n}}, \quad m_z = m \sqrt{\frac{\gamma\gamma}{n}}$$

b/. Calculul valorilor :  $\frac{\alpha\alpha}{n}$ ,  $\frac{\beta\beta}{n}$ ,  $\frac{\gamma\gamma}{n}$

In ecuațiile normale ale lui Gauss, cari pentru măsurătorili de precizie diferită sunt:

$$(12) \begin{cases} [p a a]x + [p a b]y + [p a c]z = [p a 0] \\ [p b a]x + [p b b]y + [p b c]z = [p b 0] \\ [p c a]x + [p c b]y + [p c c]z = [p c 0] \end{cases}$$

Să multiplicăm cu niște coeficienți nedeterminați și anume prima ecuație cu  $Q_1$ , cea de a doua cu  $Q_2$ , iar pe cea de a treia ecuație cu  $Q_3$  se va obține:

$$(13) \begin{cases} Q_1[p a a]x + Q_1[p a b]y + Q_1[p a c]z = Q_1[p a 0] \\ Q_2[p b a]x + Q_2[p b b]y + Q_2[p b c]z = Q_2[p b 0] \\ Q_3[p c a]x + Q_3[p c b]y + Q_3[p c c]z = Q_3[p c 0] \end{cases}$$

Impunem coeficienților nedeterminați următoarele condiții:

$$(14) \begin{cases} Q_1[p a a] + Q_2[p b a] + Q_3[p c a] = 1 \\ Q_1[p b a] + Q_2[p b b] + Q_3[p b c] = 0 \\ Q_1[p c a] + Q_2[p c b] + Q_3[p c c] = 0 \end{cases}$$

Dacă se adună ecuațiile din sistemul (13):

$$x(Q_1[p a a] + Q_2[p b a] + Q_3[p c a]) + y(Q_1[p a b] + Q_2[p b b] + Q_3[p c b]) + z(Q_1[p a c] + Q_2[p b c] + Q_3[p c c]) = Q_1[p a 0] + Q_2[p b 0] + Q_3[p c 0].$$

Ținând cont de condițiile impuse, coeficienților nedeterminați  $Q_1, Q_2, Q_3$ , se ajunge la relația:

$$x = Q_1[p a 0] + Q_2[p b 0] + Q_3[p c 0].$$

Desvoltind partea doua:

$$x = Q_1(p_1 a_1 0_1 + p_1 a_2 0_2 + p_1 a_3 0_3 + \dots + p_1 a_n 0_n) + Q_2(p_2 b_1 0_1 + p_2 b_2 0_2 + p_2 b_3 0_3 + \dots + p_2 b_n 0_n) + Q_3(p_3 c_1 0_1 + p_3 c_2 0_2 + \dots + p_3 c_n 0_n).$$

Regrupind termenii după  $0_1, 0_2, 0_3, \dots$

$$\dots \dots \dots Q_n: \\ x = Q_1(p_1 a_1 0_1 + p_1 b_1 0_1 + p_1 c_1 0_1) + \\ + Q_2(p_2 a_2 0_2 + p_2 b_2 0_2 + p_2 c_2 0_2) + \\ + Q_3(p_3 a_3 0_3 + p_3 b_3 0_3 + p_3 c_3 0_3) + \\ + \dots \dots \dots + \\ + Q_n(p_n a_n 0_n + p_n b_n 0_n + p_n c_n 0_n).$$

Dar coeficienții lui  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$  așa cum se vede in sistemul (9) sunt  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ , deci:

$$(15) \begin{cases} \alpha_1 = p_1 a_1 0_1 + p_1 b_1 0_1 + p_1 c_1 0_1 \\ \alpha_2 = p_2 a_2 0_2 + p_2 b_2 0_2 + p_2 c_2 0_2 \\ \alpha_3 = p_3 a_3 0_3 + p_3 b_3 0_3 + p_3 c_3 0_3 \\ \vdots \\ \alpha_n = p_n a_n 0_n + p_n b_n 0_n + p_n c_n 0_n \end{cases}$$

Dacă se înmulțesc aceste relații cu a și se adună, se va obține:

$$[a\alpha] = [p a a] Q_{11} + [p b a] Q_{12} + [p c a] Q_{13}$$

La fel înmulțind relațiile (15) cu b și apoi cu c, avem:

$$\begin{aligned} [b\alpha] &= [p a b] Q_{11} + [p b b] Q_{12} + [p b c] Q_{13} \\ [c\alpha] &= [p c a] Q_{11} + [p c b] Q_{12} + [p c c] Q_{13} \end{aligned}$$

Ținându-se cont de condițiile impuse:

$$[a\alpha] = 1, [b\alpha] = 0, [c\alpha] = 0$$

Dacă însă relațiile de mai sus se multiplică prima cu  $\alpha_1$ , a doua cu  $\alpha_2$  a treia cu  $\alpha_3$ , etc., atunci:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \alpha_1 &= p_1 a_1 Q_{11} + p_1 b_1 \alpha_1 Q_{12} + p_1 c_1 \alpha_1 Q_{13} \\ \alpha_2 \alpha_2 &= p_2 a_2 Q_{11} + p_2 b_2 \alpha_2 Q_{12} + p_2 c_2 \alpha_2 Q_{13} \\ \alpha_3 \alpha_3 &= p_3 a_3 \alpha_3 Q_{11} + p_3 b_3 \alpha_3 Q_{12} + p_3 c_3 \alpha_3 Q_{13} \end{aligned}$$

$$\dots$$

$$\alpha_n \alpha_n = p_n a_n \alpha_n Q_{11} + p_n b_n \alpha_n Q_{12} + p_n c_n \alpha_n Q_{13}$$

sau:

$$\frac{\alpha_1 \alpha_1}{p_1} = a_1 \alpha_1 Q_{11} + b_1 \alpha_1 Q_{12} + c_1 \alpha_1 Q_{13}$$

$$\frac{\alpha_2 \alpha_2}{p_2} = a_2 \alpha_2 Q_{11} + b_2 \alpha_2 Q_{12} + c_2 \alpha_2 Q_{13}$$

$\dots$

$$\frac{\alpha_n \alpha_n}{p_n} = a_n \alpha_n Q_{11} + b_n \alpha_n Q_{12} + c_n \alpha_n Q_{13}$$

Însumăm aceste relații și atunci:

$$\left[ \frac{\alpha\alpha}{p} \right] = [a\alpha] Q_{11} + [b\alpha] Q_{12} + [c\alpha] Q_{13}$$

Dar:  $[b\alpha] = 0$  și  $[c\alpha] = 0$  și  $[a\alpha] = 1$ , deci:

$$\left[ \frac{\alpha\alpha}{p} \right] = Q_{11}$$

Ca atare  $m_x = m \sqrt{Q_{11}}$

Unde  $Q_{11}$  se deduce din condițiile impuse sub (14).

În mod analog se deduce  $m_y = m \sqrt{Q_{22}}$  și  $m_z = m \sqrt{Q_{33}}$ .

Valorile lui  $Q_{ij}$  se obțin din condițiile următoare, impuse la fel ca pentru determinarea lui  $Q_{ij}$  și anume:

$$(16) \begin{cases} [p a a] Q_{11} + [p a b] Q_{12} + [p a c] Q_{13} = 0 \\ [p b a] Q_{11} + [p b b] Q_{12} + [p b c] Q_{13} = 1 \\ [p c a] Q_{11} + [p c b] Q_{12} + [p c c] Q_{13} = 0 \end{cases}$$

În cele ale lui  $Q_{22}$  din următoarele condiții:

$$(17) \begin{cases} [p a a] Q_{21} + [p a b] Q_{22} + [p a c] Q_{23} = 0 \\ [p b a] Q_{21} + [p b b] Q_{22} + [p b c] Q_{23} = 0 \\ [p c a] Q_{21} + [p c b] Q_{22} + [p c c] Q_{23} = 1 \end{cases}$$

Din cele trei sisteme, în cari au fost impuse condițiile pentru coeficienții nedeterminați se obțin: din

relațiile (14)  $Q_{11}, Q_{12}, Q_{13}$ , din relațiile (16) se obțin  $Q_{22}, Q_{21}, Q_{23}$ , iar din (17) se obțin  $Q_{33}, Q_{31}, Q_{32}$ .

Evident că drept control trebuie să avem:

$$Q_{12} = Q_{21}, Q_{13} = Q_{31}, Q_{23} = Q_{32}.$$

Observațiune:

In caz că in loc de un sistem de "n" ecuații cu trei necunoscute, așa cum am avut in sistemul de sub (4), am fi avut un sistem de "n" ecuații cu două necunoscute, atunci ecuațiile normale ale lui Gauss ar fi:

$$\begin{cases} [a \ a] x + [a \ b] y - [a \ 0] = 0 \\ [b \ a] x + [b \ b] y - [b \ 0] = 0 \end{cases}$$

Prin rezolvarea cărora se obțin x, y, iar cu aceasta valorile lui  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$  și apoi

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{v \ v}{n-k}}$$

Control:  $[a \ v] = 0, [b \ v] = 0.$

In ceace privește condițiile impuse pentru coeficienți nedeterminați sunt:

$$\begin{cases} [a \ a] Q_{11} + [a \ b] Q_{12} = 1 \\ [b \ a] Q_{11} + [b \ b] Q_{12} = 0 \end{cases} \text{ sistem care ne dă pe } Q_{11}, Q_{12}$$

$$\begin{cases} [a \ a] Q_{21} + [a \ b] Q_{22} = 0 \\ [b \ a] Q_{21} + [b \ b] Q_{22} = 1 \end{cases} \text{ sistem ce dă valorile lui } Q_{21}, Q_{22}.$$

Cu aceste valori apoi se află  $m_x = m \sqrt{Q_{11}}, m_y = m \sqrt{Q_{22}}$  și drept control  $Q_{12} = Q_{21}$ .

Exemple numerice:

1) Se dă sistemul:

$$\begin{cases} x + y = -1,9 \\ x + 2y = +1,2 \\ x + 3y = +4,3 \\ x + 4y = 6,4 \end{cases}$$

Se cere să se rezolve sistemul aflându-se valorile cele mai probabile ale lui x, y precum și erorile medii  $m, m_x, m_y$ .

Ecuațiile normale ale lui Gauss pentru sistemul de două ecuații cu două necunoscute este:

$$\begin{cases} [a \ a]x + [a \ b]y - [a \ 0] = 0 \\ [b \ a]x + [b \ b]y - [b \ 0] = 0 \end{cases}$$

Pentru găsirea coeficienților lui Gauss se formează tabloul de mai jos, in care se introduce un element nou "s" pentru a avea control:

$$(a + b + 0 + s = 0.)$$

Nr. obs.	a	b	0	$\Delta$	Proba	aa	ab	a 0	a $\Delta$	Proba	ba	bb	b 0	b $\Delta$	Proba
1	1	1	-1,9	-0,1	0	1	1	-1,9	-0,1	0	1	1	-1,9	-0,1	0
2	1	2	1,2	-4,2	0	1	2	1,2	-4,2	0	2	4	2,4	-8,4	0
3	1	3	4,3	-8,3	0	1	3	4,3	-8,3	0	3	9	12,9	-24,9	0
4	1	4	6,4	-11,4	0	1	4	6,4	-11,4	0	4	16	25,6	-45,6	0
[ ]	4	10	10	-24	0	4	10	10	-24	0	10	30	39	-79	0

0 a	0 b	00	0 $\Delta$	Proba	a b	a 0	aa	Proba	Observații
-1,9	-1,9	3,61	0,19	0	-0,1	-0,1	0,19	0,01	0
1,2	2,4	1,44	-5,04	0	-4,2	-8,4	-5,04	17,64	0
4,3	12,9	18,49	-35,69	0	-8,3	-24,9	-35,69	-68,89	0
6,4	25,6	40,96	-72,96	0	-11,4	-45,6	-72,96	-129,96	0
10	39	64,5	-113,5	0	-24	-79	-113,5	-216,5	0 [ ]

Introducând coeficienții găsiți în tablou, ecuațiile lui Gauss devin:

$$\begin{array}{rcl}
 4x + 10y - 10 = 0 & & 12x + 30y - 30 = 0 \\
 10x + 30y - 39 = 0 & & 10x + 30y - 39 = 0 \\
 \hline
 & & 2x + 9 = 0
 \end{array}$$

Stim că:

$$\begin{array}{l}
 v_1 = x + y + 1,9 \\
 v_2 = x + 2y - 1,2 \\
 v_3 = x + 3y - 4,3 \\
 v_4 = x + 4y - 6,4
 \end{array}$$

Din aceste relații cu valorile lui x, y obținute se află:

$$\begin{aligned} v_1 &= + 0,2 \\ v_2 &= - 0,1 \\ v_3 &= - 0,4 \\ v_4 &= + 0,3 \end{aligned}$$

Drept control trebuie ca  $[a v] = 0$  și  $[b v] = 0$ , adică:

$$(0,2 \times 1) + (-0,1 \times 2) + (-0,4 \times 3) + (0,3 \times 4) = 1,4 + 1,4 = 0$$

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-k}} = \pm \sqrt{\frac{0,3}{4-2}} = \pm \sqrt{0,15} \approx \pm 0,4$$

$$[vv] = 0,04 + 0,01 + 0,16 + 0,09 = 0,3$$

$$m_x = m_0 \sqrt{Q_{11}}; \quad m_y = m_0 \sqrt{Q_{22}}$$

$$\begin{aligned} [aa] Q_{11} + [a b] Q_{12} &= 1 & [aa] Q_{21} + [a b] Q_{22} &= 0 \\ [ba] Q_{11} + [b b] Q_{12} &= 0 & [ba] Q_{21} + [b b] Q_{22} &= 1 \end{aligned}$$

Luind coeficienții din tabloul de mai sus:

$$\begin{aligned} 4 Q_{11} + 10 Q_{12} &= 1 & 4 Q_{21} + 10 Q_{22} &= 0 \\ 10 Q_{11} + 30 Q_{12} &= 0 & 10 Q_{21} + 30 Q_{22} &= 1 \end{aligned}$$

sau:

$$\begin{aligned} 10 Q_{11} + 30 Q_{12} &= 3 \\ 10 Q_{11} + 30 Q_{12} &= 0 \\ \hline Q_{11} &= \frac{3}{2} \\ Q_{22} &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$m_x = \pm 0,4 \sqrt{\frac{3}{2}} = \pm 0,4 \times 1,224 = \pm 0,4496,$$

$$m_y = \pm 0,4 \sqrt{\frac{1}{5}} = \pm 0,4 \times 0,447 = \pm 0,1788.$$

Observații:

Ca remarcă observăm că, în exemplul rezolvat, valorile lui x sunt cuprinse între  $-4,5 + 0,4496$  și  $-4,5 - 0,4496$ , iar y este cuprins între  $2,8 + 0,1788$  și  $2,8 - 0,1788$  adică:

$$\begin{aligned} - 4,9496 &< x < - 4,1496 \\ + 2,7788 &< y < + 2,9788 \end{aligned}$$

Deci valorile lui x sunt cuprinse într-un spațiu mai mare ca cele ale lui y.

De aci se deduce că necunoscuta cu coeficienții mai mari este mai precisă, sau invers, la măsurătorile mai precise, coeficienții de pondere sînt mai mari ca cei ai măsurătorilor mai puțin precise.

Metoda introducerii valorilor aproximative.

O altă metodă, foarte frecvent utilizată la aflarea valorilor celor mai probale, în cazul măsurătorilor indirecte, este metoda valorilor aproximative, de care ne folosim mai ales atunci cînd observațiunile  $O_1, O_2, O_3, \dots, O_n$ , sînt valori mari.

Această metodă constă în a afla valori aproximative, pentru necunoscute, din primele ecuații și de a le introduce în calcul, cu scopul de a înlocui numerele mari prin altele mai mici.

De exemplu în sistemul nostru anterior:

$$(1) \quad \begin{aligned} v_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 z - O_1 \\ v_2 &= a_2 x + b_2 y + c_2 z - O_2 \\ &\vdots \\ v_n &= a_n x + b_n y + c_n z - O_n \end{aligned}$$

înlocuind pe  $x, y$  și  $z$  cu:

$x = x_0 + \Delta x, y = y_0 + \Delta y, z = z_0 + \Delta z,$   
 unde  $x_0, y_0,$  și  $z_0$  sînt niște valori aproximative ale lui  $x, y$  și  $z,$  deduse din ecuațiile:

$$(2) \quad \begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z - O_1 &= \Theta \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z - O_2 &= \Theta \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z - O_3 &= \Theta \end{aligned}$$

relațiile noastre vor deveni:

$$(2) \quad \begin{aligned} v_1 &= a_1 (x_0 + \Delta x) + b_1 (y_0 + \Delta y) + c_1 (z_0 + \Delta z) - O_1 \\ v_2 &= a_2 (x_0 + \Delta x) + b_2 (y_0 + \Delta y) + c_2 (z_0 + \Delta z) - O_2 \\ &\vdots \\ v_n &= a_n (x_0 + \Delta x) + b_n (y_0 + \Delta y) + c_n (z_0 + \Delta z) - O_n \end{aligned}$$

Dezvoltînd partea deasupra a acestor relații:

$$(3) \quad \begin{aligned} v_1 &= (a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 z_0 - O_1) + (a_1 \Delta x + b_1 \Delta y + c_1 \Delta z) \\ v_2 &= (a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2 z_0 - O_2) + (a_2 \Delta x + b_2 \Delta y + c_2 \Delta z) \\ &\vdots \\ v_n &= (a_n x_0 + b_n y_0 + c_n z_0 - O_n) + (a_n \Delta x + b_n \Delta y + c_n \Delta z) \end{aligned}$$

Dar prima paranteză a expresiunilor de mai sus, are o valoare numerică, obținută prin înlocuirea necunoscutelor  $x, y, z,$  prin valorile lor aproximative  $x_0, y_0, z_0$  și se pot nota:

$$(4) \quad \begin{aligned} O_1 - (a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 z_0) &= l_1 \\ O_2 - (a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2 z_0) &= l_2 \\ &\vdots \\ O_n - (a_n x_0 + b_n y_0 + c_n z_0) &= l_n \end{aligned}$$

Cu aceste notații relațiile de sub (4) vor deveni:

$$(5) \quad \begin{aligned} v_1 &= a_1 \Delta x + b_1 \Delta y + c_1 \Delta z - l_1 \\ v_2 &= a_2 \Delta x + b_2 \Delta y + c_2 \Delta z - l_2 \\ &\vdots \\ v_n &= a_n \Delta x + b_n \Delta y + c_n \Delta z - l_n \end{aligned}$$

$l_1, \dots, l_n$  sînt mai mici ca cele ale lui  $0_1, 0_2, 0_3, \dots, 0_n$ .

Aplicînd relațiilor (5) același raționament ca în cazul anterior, sistemul acesta incompatibil poate fi făcut compatibil și se va ajunge la ecuațiile normale ale lui Gauss, cari vor fi:

$$(6) \begin{cases} [aa] \Delta x + [ab] \Delta y + [ac] \Delta z - [a1] = 0 \\ [ba] \Delta x + [bb] \Delta y + [bc] \Delta z - [b1] = 0 \\ [ca] \Delta x + [cb] \Delta y + [cc] \Delta z - [c1] = 0 \end{cases}$$

Prin rezolvarea acestui sistem se găsesc valorile ale lui  $x, y, z$ , care știm că sînt:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \Delta x \\ y &= y_0 + \Delta y \\ z &= z_0 + \Delta z. \end{aligned}$$

Exemplu numeric:

1) Pentru a pune în evidență cele de mai sus să luăm exemplul:

$$\begin{aligned} x + y &= -1,9 \\ x + 2y &= +1,2 \\ x + 3y &= +4,3 \\ x + 4y &= 6,4 \end{aligned}$$

Din primele două ecuații găsim valori aproximative pentru  $x$  și  $y$ , adică:

$$x_0 = -5, \quad y_0 = 3.$$

Inlocuind aceste valori în ecuațiile de sub

(1), avem:

$$\begin{aligned} l_1 &= -1,9 - (-5+3) = 0,1 \\ l_2 &= 1,2 - (-5+6) = 0,2 \\ l_3 &= 4,3 - (-5+9) = 0,3 \\ l_4 &= 6,4 - (-5+12) = -0,6 \end{aligned}$$

Ecuațiile noastre în  $\Delta x, \Delta y$  vor fi:

$$\begin{aligned} \Delta x + \Delta y &= 0,1 \\ \Delta x + 2\Delta y &= 0,2 \\ \Delta x + 3\Delta y &= 0,3 \\ \Delta x + 4\Delta y &= -0,6, \end{aligned}$$

iar ecuațiile lui Gauss sînt:

$$\begin{cases} [aa] \Delta x + [ab] \Delta y - [a1] = 0 \\ [ba] \Delta x + [bb] \Delta y - [b1] = 0. \end{cases}$$



Se întocmește tabloul pentru determinarea coeficienților din aceste ecuații :

Nr. obs.	a	b	l	↻	Pro ba	aa	ab	al	a <sup>2</sup>	Pro ba	ba	bb	bl	b <sup>2</sup>	Pro- ba
1	1	1	0,1	-2,1	⊖	1	1	0,1	-2,1	⊖	1	1	0,1	-2,1	⊖
2	1	2	0,2	-3,2	⊖	1	2	0,2	-3,2	⊖	2	4	0,4	-6,4	⊖
3	1	3	0,3	-4,3	⊖	1	3	0,3	-4,3	⊖	3	9	0,9	-12,4	⊖
4	1	4	-0,6	-4,4	⊖	1	4	-0,6	-4,4	⊖	4	16	-2,4	-17,6	⊖
[ ]	4	10	⊖	-14	⊖	4	10	⊖	-14	⊖	10	30	-1	-39	⊖

Cu acești coeficienți ecuațiile normale ale lui Gauss vor fi:

$$4\Delta x + 10\Delta y = \ominus$$

$$10\Delta x + 30\Delta y + 1 = \ominus.$$

Rezolvând ecuațiile se determină:

$$\Delta x = + 0,5, \quad \Delta y = - 0,2.$$

Valorile adevărate ale lui x și y sînt:

$$x = x_0 + \Delta x = - 5 + 0,5 = - 4,5$$

$$y = y_0 + \Delta y = 3 - 0,2 = + 2,8.$$

Cu aceste date problema se va rezolva în continuare aflînd valorile lui  $v_1, v_2, v_3, v_4$ , apoi eroarea medie  $m$  și valorile lui  $m_x, m_y$ , după procedeul amintit.

2) În punctele de stație Q, făcîndu-se măsurarea unghiurilor prin metoda Schreiber, se cere să determinăm valoarea cea mai probabilă a unghiurilor măsurate.

Pentru acest scop vom nota adevărata valoare a unghiurilor:

$\widehat{102}$  cu x, cea a unghiului  $\widehat{103}$  cu y și a unghiului  $\widehat{104}$  cu z.

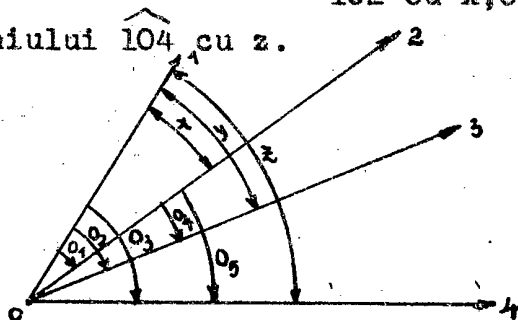


Fig. 11.

$$O_1 = 30^\circ 12' 18''$$

$$O_2 = 42^\circ 20' 36''$$

$$O_3 = 84^\circ 17' 14''$$

$$O_4 = 12^\circ 08' 10''$$

$$O_5 = 54^\circ 05' 06''$$

$$O_6 = 41^\circ 56' 34''$$

In acest caz sistemul nostru de șase  
ecuații cu trei necunoscute, este:

$$\begin{aligned}x &= 0_1 \\y &= 0_2 \\z &= 0_3 \\y - x &= 0_4 \\z - x &= 0_5 \\z - y &= 0_6\end{aligned}$$

Pentru a putea introduce valorile lui  
 $0_1, 0_2, 0_3, 0_4, 0_5, 0_6$ , în ecuațiile noastre, ar urma să fa-  
cem transformarea lor în secunde, ceea ce ne-ar da sume foarte  
mari, care ne îngreunează mult calculele.

Pentru acest motiv întrebuițăm metoda  
introducerii valdrilor aproximative, adică se vor lua:

$$x = x_0 + \Delta x, \quad y = y_0 + \Delta y, \quad z = z_0 + \Delta z.$$

Dacă luăm:

$$x_0 = 30^\circ 12'$$

$$y_0 = 42^\circ 20'$$

$$z_0 = 84^\circ 17'$$

Se va obține:

$$\begin{aligned}l_1 &= 30^\circ 12' 18'' - 30^\circ 12' &= 18'' \\l_2 &= 42^\circ 20' 36'' - 42^\circ 20' &= 36'' \\l_3 &= 84^\circ 17' 14'' - 84^\circ 17' &= 14'' \\l_4 &= 12^\circ 08' 10'' - 42^\circ 20' + 30^\circ 12' &= 10'' \\l_5 &= 54^\circ 05' 06'' - 84^\circ 17' + 30^\circ 12' &= 06'' \\l_6 &= 41^\circ 56' 34'' - 84^\circ 17' + 42^\circ 20' &= -26''\end{aligned}$$

Conform celor stabilite:

$$\begin{aligned}(1) \quad v_1 &= a_1 \Delta x + b_1 \Delta y + c_1 \Delta z - l_1 \\v_2 &= a_2 \Delta x + b_2 \Delta y + c_2 \Delta z - l_2 \\&\vdots \\v_n &= a_n \Delta x + b_n \Delta y + c_n \Delta z - l_n\end{aligned}$$

Iar ecuațiile lui Gauss devin:

$$\begin{aligned}(2) \quad [aa] \Delta x + [ab] \Delta y + [ac] \Delta z - [af] &= 0 \\[ba] \Delta x + [bb] \Delta y + [bc] \Delta z - [bf] &= 0 \\[ca] \Delta x + [cb] \Delta y + [cc] \Delta z - [cf] &= 0\end{aligned}$$

Formăm tabloul pentru aflarea coeficienților din aceste  
 ecuații:

Nr obs.	a	b	c	l	s	Pro ba	aa	ab	ac	al	as	Pro ba	ba	bb	bc	bl	bs	Pro ba	Obs
1	1	0	0	18	-19	0	1	0	0	18	-19	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	36	-37	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	36	-37	0	0
3	0	0	1	14	-15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	-1	1	0	10	-10	0	1	-1	0	-10	10	0	-1	1	0	10	-10	0	0
5	-1	0	1	6	-6	0	1	0	-1	-6	6	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	-1	1	-26	26	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	26	-26	0	0
[ ]	-1	1	3	58	-61	0	3	-1	-1	2	-3	0	-1	3	-1	72	-73	0	0

Continuare:

ca	cb	cc	cl	cs	Pro ba	la	lb	lc	ll	ls	Pro ba	sa	sb	sc	sl	ss	Pro ba	Obs
0	0	0	0	0	0	18	0	0	324	-342	0	-19	0	0	-342	361	0	0
0	0	0	0	0	0	0	36	0	1296	-1332	0	-37	0	0	-1332	1369	0	0
0	0	1	14	-15	0	0	0	14	196	-210	0	0	0	-15	-210	225	0	0
0	0	0	0	0	0	-10	10	0	100	-100	0	10	-10	0	-100	100	0	0
-1	0	1	6	-6	0	-6	0	6	36	-36	0	6	0	6	-36	36	0	0
0	-1	1	-26	26	0	0	26	-26	676	-676	0	0	-26	26	-676	676	0	0
-1	-1	3	-6	5	0	2	72	-62	628	-2696	0	-3	-73	5	-2696	2767	0	0

Introducând coeficienți din tablou în e-  
 cuațiile normale ale lui Gauss, acestea devin:

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & 3\Delta x - \Delta y - \Delta z - 2 = 0 \\
 & -\Delta x + 3\Delta y - \Delta z - 72 = 0 \\
 & -\Delta x - \Delta y + 3\Delta z + 6 = 0
 \end{aligned}$$

Rezolvând acest sistem se obține valorile  
 lui x, y, z, adică:

$$\Delta x = 17,5 \quad \Delta y = 35 \quad \Delta z = 15,5.$$

fi:

Deci adevăratele valori ale unghiurilor vor

$$\begin{aligned} x &= 30^\circ 12' 17,5'' \\ y &= 42^\circ 20' 35'' \\ z &= 84^\circ 17' 15,5'' \end{aligned}$$

Erorile care afectează observațiunile noastre sunt conform relațiilor (1):

$$\begin{aligned} v_1 &= \Delta x - 18'' = 17,5'' - 18'' = -0,5'' \\ v_2 &= \Delta y - 36'' = 35'' - 36'' = -1'' \\ v_3 &= \Delta z - 14'' = 15,5'' - 14'' = 1,5'' \\ v_4 &= \Delta x + \Delta y - 10'' = 17,5'' + 35'' - 10'' = 7,5'' \\ v_5 &= \Delta x + \Delta z - 6'' = 17,5'' + 15,5'' - 6'' = 8'' \\ v_6 &= \Delta y + \Delta z + 26'' = 35'' + 15,5'' + 26'' = 6,5'' \end{aligned}$$

Drept control trebuie ca:

$$[a v] = 0, [b v] = 0, [c v] = 0, \text{adică:}$$

$$\begin{aligned} [a v] &= -0,5'' - 7,5'' + 8'' = 0 \\ [b v] &= -1'' + 7,5'' - 6,5'' = 0 \\ [c v] &= 1,5'' - 8'' + 6,5'' = 0 \end{aligned}$$

Eroarea medie  $m$ , dată de relația  $m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{m-k}}$

este:

$$m = \pm \sqrt{\frac{166}{4}} = \pm 6,442$$

Erorile care afectează pe  $x, y, z$ , adică:

$m_x, m_y, m_z$ , sînt date de relațiile:

$$m_x = m \sqrt{Q_{11}}, \quad m_y = m \sqrt{Q_{22}}, \quad m_z = m \sqrt{Q_{33}}$$

Valorile lui  $Q_{11}, Q_{22}, Q_{33}$ , se găsesc

din următoarele sisteme:

$$\begin{aligned} [aa]Q_{11} + [ba]Q_{12} + [ca]Q_{13} &= 1 \text{ sau } 3Q_{11} - Q_{12} - Q_{13} = 1 \\ [ba]Q_{11} + [bb]Q_{12} + [bc]Q_{13} &= 0 \quad -Q_{11} + 3Q_{12} - Q_{13} = 0 \\ [ca]Q_{11} + [cb]Q_{12} + [cc]Q_{13} &= 0 \quad -Q_{11} - Q_{12} + 3Q_{13} = 0 \\ [aa]Q_{21} + [ab]Q_{22} + [ac]Q_{23} &= 0 \quad 3Q_{21} - Q_{22} - Q_{23} = 0 \\ [ba]Q_{21} + [bb]Q_{22} + [bc]Q_{23} &= 1 \quad -Q_{21} + 3Q_{22} - Q_{23} = 1 \\ [ca]Q_{21} + [cb]Q_{22} + [cc]Q_{23} &= 0 \quad -Q_{21} - Q_{22} + Q_{23} = 0 \\ [aa]Q_{31} + [ab]Q_{32} + [ac]Q_{33} &= 0 \quad 3Q_{31} - Q_{32} - Q_{33} = 0 \\ [ba]Q_{31} + [bb]Q_{32} + [bc]Q_{33} &= 0 \quad -Q_{31} + 3Q_{32} - Q_{33} = 0 \\ [ca]Q_{31} + [cb]Q_{32} + [cc]Q_{33} &= 1 \quad -Q_{31} - Q_{32} + 3Q_{33} = 1 \end{aligned}$$

Rezolvând aceste trei sisteme se determină:

$$Q_{11} = \frac{1}{2}, \quad Q_{22} = \frac{1}{2}, \quad Q_{33} = \frac{1}{2}$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \frac{1}{4}, \quad Q_{13} = Q_{31} = \frac{1}{4}, \quad Q_{23} = Q_{32} = \frac{1}{4}$$

Deci:

$$m_x = m \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad m_y = m \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad m_z = m \sqrt{\frac{1}{2}}$$

sau:

$$m_x = m_y = m_z = \pm 6,442 \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm 4,555.$$

Observațiune:

Valorile lui x, y, z, se pot determina fără ecuațiile lui Gauss și fără a mai face acel tablou, observând pe figură că, de exemplu x, este egal cu  $O_1$ , apoi cu  $O_2 - O_4$  și în fine  $O_3 - O_5$ .

Luând media acestor valori și dând pentru  $O_1$  un coeficient de greutate egal cu 2, deoarece este mai precis ca celelalte două măsurători prin faptul că se face o singură observație și nu două observații ca în celelalte cazuri, se află valoarea lui x. Aceasta se poate exprima sub forma:

$$x = \frac{2 O_1 + (O_2 - O_4) + (O_3 - O_5)}{4}$$

In mod analog:

$$y = \frac{2 O_2 + (O_1 + O_4) + (O_3 - O_6)}{4}$$

$$z = \frac{2 O_3 + (O_1 + O_5) + (O_2 + O_6)}{4}$$

Să rezolvăm numeric aceste relații pentru a vedea ce valori se obțin pentru x, y și z.

$$2 O_1 = 60^\circ 24' 36''$$

$$O_2 - O_4 = 30^\circ 12' 26''$$

$$O_3 - O_5 = 30^\circ 12' 8''$$

$$\underline{4 x = 120^\circ 49' 10''}$$

$$x = \frac{120^\circ 49' 10''}{4} = 30^\circ 12' 27,5''$$

$$2 O_2 = 84^\circ 41' 12''$$

$$O_1 + O_4 = 40^\circ 20' 28''$$

$$O_3 - O_6 = 42^\circ 20' 40''$$

$$\underline{4 y = 169^\circ 22' 20''}$$

$$y = \frac{169^\circ 22' 20''}{4} = 42^\circ 20' 35''$$

$$2 O_3 = 168^\circ 34' 28''$$

$$O_1 + O_5 = 84^\circ 17' 24''$$

$$O_2 + O_6 = 84^\circ 17' 10''$$

$$\underline{4 z = 337^\circ 09' 02''}$$

$$z = \frac{337^\circ 09' 02''}{4} = 84^\circ 17' 15,5''$$

Se poate observa că și prin această metodă au fost găsite pentru  $x, y$  și  $z$  aceleași valori ca în cazul de mai sus.

Metoda de eliminare a lui Gauss.

În cazul măsurătorilor indirecte, rezolvarea sistemului mai poate fi făcută și prin așa numită metodă de reducere a lui Gauss, care prezintă avantajul că într-un singur tablou sînt obținute toate datele problemei, adică valorile necunoscutele  $x, y$ , eroarea medie  $m$ , apoi  $Q_{xx}, Q_{yy}$  și  $m_x, m_y$ .

Avînd ecuațiile normale ale lui Gauss:

$$\begin{aligned} (1) \quad & [aa]x + [ab]y = [ae] \\ (2) \quad & [ba]x + [bb]y = [be] \end{aligned}$$

Înlocuind în ecuația doua valoarea lui  $x$ , dedusă din prima ecuație, se obține:

$$x = \frac{[ae]}{[aa]} - \frac{[ab]}{[aa]} y$$

sau:

$$\frac{[ba][ae]}{[aa]} - \frac{[ba][ab]}{[aa]} y + [bb]y = [be]$$

$$\left\{ [bb] - \frac{[ba][ab]}{[aa]} \right\} y = [be] - \frac{[ba][ae]}{[aa]}$$

de unde:

$$y = \frac{[be] - \frac{[ba][ae]}{[aa]}}{[bb] - \frac{[ba][ab]}{[aa]}}$$

În această expresiune se notează simbolic:

$$[be] - \frac{[ab][ae]}{[aa]} = [be \cdot 1]$$

$$[bb] - \frac{[ba][ab]}{[aa]} = [bb \cdot 1]$$

Ceeace are semnificația că  $[be]$ , respective  $[bb]$  au fost reduse odată.

Cu aceste notații:

$$y = \frac{[be \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}, \quad x = \frac{[ae \cdot 1]}{[aa \cdot 1]}$$

În mod analog  $[ee]$  redus odată, se notează  $[ee \cdot 1]$  și este:

$$[ee \cdot 1] = [ee] - \frac{[eb][be]}{[bb]}$$

și la fel pentru toate celelalte reduceri.

- 55 -

avea: Dacă s-ar mai reduce încă odată [cc] am

$$[cc. 2] = [cc. 1] - \frac{[bc. 1][cb. 1]}{[bb. 1]}$$

Dar:

$$[v v] = [bc. 2]$$

$$q_{11} = \frac{1}{[aa. 1]}$$

$$q_{22} = \frac{1}{[bb. 1]}$$

$$q_{12} = \frac{1}{[ab. 1]}$$

În tabloul de mai jos sint trecute toate aceste reduceri și se poate ușor observa felul în care se conduc.

Totodată pentru control, la fel ca și pînă acum se introduce o coloană și pentru a, spre a avea ca probă suma egală cu zero, luînd sumele în sensul indicat de săgeți.

Adică, va trebui să avem suma algebrică a sumelor din coloanele:

$$2.A + 3.A + 4.A + 5.A = 0$$

$$3.A + 3.B + 4.B + 5.B = 0$$

$$4.A + 4.B + 4.C + 5.C = 0$$

$$5.A + 5.B + 5.C + 6.D = 0$$

În același fel în tabloul  $T_2$  și  $T_3$ ,

adică:

$$3.A_1 + 4.A_1 + 5.A_1 = 0 \quad \text{și} \quad 4.A_2 + 5.A_2 = 0$$

$$4.A_1 + 4.B_1 + 5.B_1 = 0 \quad \text{și} \quad 5.A_2 + 5.B_2 = 0$$

$$5.A_1 + 5.B_1 + 5.C_1 = 0$$

Tabloul pentru x:  $T_1$

	1	2	3	4	5	Pro- 6
A	[b	[bb] →	[ba] →	[be] →	b <sub>s</sub> →	θ
B	[a		[aa] →	[ae] →	[as] →	θ
Reduceri		$\frac{[ab] [ba]}{[bb]}$	$\frac{[ab] [be]}{[bb]}$	$\frac{[ab] [bs]}{[bb]}$		
C	[l			[ll] →	[ls] →	θ
Reduceri			$\frac{[be] [bc]}{[bb]}$	$\frac{[be] [bs]}{[bb]}$		
D	[s				[ss] ↓	θ
Reduceri					$\frac{[bs] [bs]}{[bb]}$	
$T_2$						
			a.1]	l.1]	s.1]	
A <sub>1</sub>	[a		[aa.1] →	[ae.1] →	[as.1] →	θ
B <sub>1</sub>	[l			[ll.1] →	[ls.1] →	θ
Reduceri				$\frac{[al_1] [al_1]}{[aa.1]}$	$\frac{[al_1] [as.1]}{[aa.1]}$	
C <sub>1</sub>	[s				[ss.1] →	θ
Reduceri					$\frac{[as_1] [as_1]}{aa.1}$	
$T_3$						
				[l.2]	[s.2]	
A <sub>2</sub>	[l			[ll.2] →	[ls.2] →	θ
B <sub>2</sub>	[s				[ss.2] ↓	θ



Tabloul pentru  $T_1$

$T_1$

	a]	b]	c]	s]	Pro- ba
A	[a	[aa] →	[ab] →	[ac] →	[as] → 0
B	[b	[bb] →	[bc] →	[bs] → 0	
Reduceri		[ab] [ba] [aa]	[ab] [ac] [aa]	[ab] [as] [aa]	
C	[c		[cc] →	[cs] → 0	
Reduceri			[ac] [ac] [aa]	[ac] [as] [aa]	
D	[s			[ss] → 0	
Reduceri				[as] [as] [aa]	

$T_2$

		b.1]	c.1]	s.1]	Pro- ba
A <sub>1</sub>	[b	[bb.1] →	[bc.1] →	[bs.1] → 0	0
B <sub>1</sub>	[c		[cc.1] →	[cs.1] → 0	
Reduceri			[bc.1] [bc.1] [bb.1]	[bc.1] [bs.1] [bb.1]	0
C <sub>1</sub>	[s			[ss.1] → 0	
Reduceri				[bs.1] [bs.1] [bb.1]	

$T_3$

			c.2]	s.2]	Pro- ba
A <sub>2</sub>	[c		[cc.2] →	[cs.2] → 0	
B <sub>2</sub>	[s			[ss.2] → 0	

Sumele din tabloul 1 sînt trecute din tabloul întocmit pentru aflarea coeficienților din ecuațiile lui Gauss.

Pentru a pune în evidență avantajul acestei metode să rezolvăm același exemplu numeric pe care l-am rezolvat și prin celelalte metode.

Tablou pentru y.

T<sub>1</sub>

	1	a <sub>1</sub> 2	b <sub>1</sub> 3	c <sub>1</sub> 4	d <sub>1</sub> 5	Proba 6
A	[a	4	10	10	-24	0
B	[b		30	39	-79	0
			$\frac{10 \times 10}{4} = 25$	$\frac{10 \times 10}{4} = 25$	$\frac{10 \times (-24)}{4} = -60$	
C				64,50	-113,50	0
				$\frac{10 \times 10}{4} = 25$	$\frac{10 \times (-24)}{4} = -60$	
D					216,50	0
					$\frac{(-24) \times (-24)}{4} = 144$	

T<sub>2</sub>

		b <sub>1</sub>	c <sub>1</sub>	d <sub>1</sub>	Proba
A <sub>1</sub>	[b	30-25 = 5	39-25 = 14	-79+60 = -19	0
B <sub>1</sub>	[c Reduceri		64,5-25=39,5	-113,5+60 = -53,5	0
			$\frac{14 \times 14}{5} = 39,2$	$\frac{-19 \times 14}{5} = -53,2$	
C <sub>1</sub>	[d Reduceri			216,5-144 = 72,5	0
				$\frac{(-19) \times (-19)}{5} = 72,2$	

T<sub>3</sub>

		c <sub>2</sub>	d <sub>2</sub>	Proba
A <sub>2</sub>			39,5-39,2=0,3	-53,5+53,2 = 0,3
B <sub>2</sub>				72,5-72,2 = 0,3

Tablou pentru x.

$T_1$

	[b	a]	l]	s]	Pro- ba
1	2	3	4	5	6
A	[b 30	10	39	-79	<del>0</del>
B	[a Reduceri	4 $\frac{10 \times 10}{30} = 3,333$	10 $\frac{10 \times 39}{30} = 13$	-24 $\frac{10 \times (-79)}{30} = -26,333$	<del>0</del>
C			64,50 $\frac{39 \times 39}{30} = 50,7$	-113,50 $\frac{39 \times (-79)}{30} = -102,7$	<del>0</del>
D				216,50 $\frac{(-79) \times (-79)}{30} = 208,033$	<del>0</del>

a.1]  $T_2$

l.1]

s.1]

A <sub>1</sub>	[a	$4 - 3,333 = 0,667$	$10 - 13 = -3$	$-24 + 26,333 = 2,333$	<del>0</del>
B <sub>1</sub>	[l Reduceri		$64,5 - 50,7 = 13,8$ $\frac{(-3) \times (-3)}{0,667} = 13,493$	$-113,5 + 102 = -11,5$ $\frac{(-3) \times (2,333)}{0,667} = 10,493$	<del>0</del>
C <sub>1</sub>	[s Reduceri			$216,5 - 208,033 = 8,467$ $\frac{2,333 \times 2,333}{0,667} = 8,160$	<del>0</del>

$T_3$

A <sub>2</sub>	[l		$13,8 - 13,493 = 0,307$	$-108 + 10,493 = -97,507$ $= 0,307$	<del>0</del>
B <sub>2</sub>	[s			$8,467 - 8,160 = 0,307$	<del>0</del>

Cu datele din aceste tablouri avem:

$$x = \frac{[a\hat{a}.1] - 3}{[aa.1] - 0,667} = \frac{-9}{2} = -4,5$$

$$y = \frac{[b\hat{b}.1]}{[bb.1]} = \frac{14}{5} = 2,8$$

$$[vv] - [ee].2 = 0,3$$

$$Q_{11} = \frac{1}{[aa.1]} = \frac{1}{0,667} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$Q_{22} = \frac{1}{[bb.1]} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

Adică aceleași rezultate au fost găsite și prin această metodă, care își găsește aplicația cu deosebire în cazul că avem mai multe necunoscute.

Măsurători directe cu condițiuni inițiale.

In patrulaterul ABCD din Fig.12 se măsoară unghiurile  $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \dots, \hat{8}$ , deci măsurarea acestor unghiuri se face în mod direct.

Se știe însă că fiecare măsurătoare este însoțită de o eroare, prin urmare valoarea adevărată a acestor unghiuri notate cu (1), (2), (3), ..., (8), este egală cu valoarea rezultată din măsurătorile pe teren, la care se adaugă eroarea, deci:

$$\begin{aligned} (1) &= \hat{1} + \sqrt{1} \\ (2) &= \hat{2} + \sqrt{2} \\ (3) &= \hat{3} + \sqrt{3} \\ &\vdots \\ (8) &= \hat{8} + \sqrt{8} \end{aligned}$$

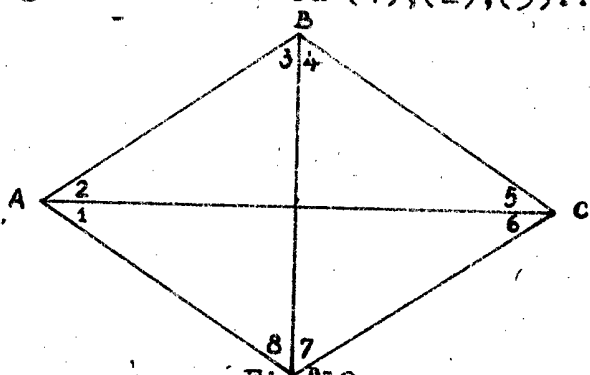


Fig.12.

Dar dintr-un triunghi suma unghiurilor trebuie să fie, după cum știm,  $180^\circ$ . Ca atare măsurătorile noastre directe, făcute pe teren, trebuie să îndeplinească anumite condițiuni inițiale, adică suma unghiurilor din fiecare triunghi să fie  $180^\circ$ .

Din cauza erorilor comise la măsurarea pe teren a unghiurilor, valorile lor măsurate nu vor îndeplini condițiunile impuse, cari sînt condițiunile inițiale și ca atare sîntem nevoiți a determina erorile pentru fiecare unghi sau mai bine zis să găsim adevărata valoare a acestor unghiuri, care apoi vor îndeplini condițiunile inițiale.

In cazul patrulaterului de mai sus va trebui ca valorile adevărate ale unghiurilor 1, 2, 3, ..... 8, adică: (1), (2), (3), ..... (8), să îndeplinească următoarele condițiuni:

- In triunghiul ABC să avem:  $(\hat{2}) + (\hat{3}) + (\hat{4}) + (\hat{5}) = 180^\circ$
- " " " ACD " " :  $(\hat{1}) + (\hat{6}) + (\hat{7}) + (\hat{8}) = 180^\circ$
- " " " ABD " " :  $(\hat{1}) + (\hat{2}) + (\hat{3}) + (\hat{8}) = 180^\circ$
- " " " BCD " " :  $(\hat{4}) + (\hat{5}) + (\hat{6}) + (\hat{7}) = 180^\circ$

Pentru generalizare să notăm măsurătorile noastre, adică valorile adevărate (1), (2), (3), ..... (8) cu  $O_1, O_2, O_3, \dots, O_n$ .

Condițiunile ce trebuiesc îndeplinite sînt funcțiuni de  $O_1, O_2, O_3, \dots, O_n$ , deci:

$$\begin{aligned} f_1(O_1, O_2, O_3, \dots, O_n) &= \theta \\ f_2(O_1, O_2, O_3, \dots, O_n) &= \theta \\ f_3(O_1, O_2, O_3, \dots, O_n) &= \theta. \end{aligned}$$

Aceste funcțiuni pot fi funcțiuni oarecare, dar în mod obișnuit funcțiunile de care ne servim și pe care le întîlnim în practică sînt cele liniare.

De altfel dacă funcțiunile acestea ar fi de ordin superior, prin dezvoltare în serie, ele pot fi transformate în funcțiuni liniare.

In concluzie, funcțiunile noastre vor fi de forma:

$$(1) \begin{aligned} a_1 O_1 + a_2 O_2 + a_3 O_3 + \dots + a_n O_n + a &= \theta \\ b_1 O_1 + b_2 O_2 + b_3 O_3 + \dots + b_n O_n + b &= \theta \\ c_1 O_1 + c_2 O_2 + c_3 O_3 + \dots + c_n O_n + c &= \theta \\ \vdots \\ r_1 O_1 + r_2 O_2 + r_3 O_3 + \dots + r_n O_n + r &= \theta \end{aligned}$$

Observațiunile făcute pe teren  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_x$  sînt afectate de erori, adică:

$$\begin{aligned} O_1 &= \sigma_1 + v_1 \\ O_2 &= \sigma_2 + v_2 \\ \vdots \\ O_n &= \sigma_n + v_n. \end{aligned}$$

Să introducem aceste valori, rezultate din măsurători, ale lui  $O_1, O_2, O_3, \dots, O_n$ , în ecuațiile (1) și vom avea:

$$\begin{aligned}
 a_1(\sigma_1 + \nu_1) + a_2(\sigma_2 + \nu_2) + a_3(\sigma_3 + \nu_3) + \dots + a_n(\sigma_n + \nu_n) + a &= \theta \\
 b_1(\sigma_1 + \nu_1) + b_2(\sigma_2 + \nu_2) + b_3(\sigma_3 + \nu_3) + \dots + b_n(\sigma_n + \nu_n) + b &= \theta \\
 c_1(\sigma_1 + \nu_1) + c_2(\sigma_2 + \nu_2) + c_3(\sigma_3 + \nu_3) + \dots + c_n(\sigma_n + \nu_n) + c &= \theta \\
 \vdots & \\
 r_1(\sigma_1 + \nu_1) + r_2(\sigma_2 + \nu_2) + r_3(\sigma_3 + \nu_3) + \dots + r_n(\sigma_n + \nu_n) + r &= \theta
 \end{aligned}$$

Sau prin dezvoltare:

$$\begin{aligned}
 (a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3 + \dots + a_n\sigma_n) + (a_1\nu_1 + a_2\nu_2 + a_3\nu_3 + \dots + a_n\nu_n) + a &= \theta \\
 (b_1\sigma_1 + b_2\sigma_2 + b_3\sigma_3 + \dots + b_n\sigma_n) + (b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3 + \dots + b_n\nu_n) + b &= \theta \\
 (c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + c_3\sigma_3 + \dots + c_n\sigma_n) + (c_1\nu_1 + c_2\nu_2 + c_3\nu_3 + \dots + c_n\nu_n) + c &= \theta
 \end{aligned}$$

(2)

$$(r_1\sigma_1 + r_2\sigma_2 + r_3\sigma_3 + \dots + r_n\sigma_n) + (r_1\nu_1 + r_2\nu_2 + r_3\nu_3 + \dots + r_n\nu_n) + r = \theta$$

Dar observațiunile obținute pe teren, adică:  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n$ , nesatisfăcând condițiunile inițiale, dau o eroare  $W$ , adică:

$$\begin{aligned}
 a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3 + \dots + a_n\sigma_n \neq \theta &= W_1 \\
 b_1\sigma_1 + b_2\sigma_2 + b_3\sigma_3 + \dots + b_n\sigma_n \neq \theta &= W_2 \\
 c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + c_3\sigma_3 + \dots + c_n\sigma_n \neq \theta &= W_3
 \end{aligned}$$

(3)

$$r_1\nu_1 + r_2\nu_2 + r_3\nu_3 + \dots + r_n\nu_n \neq \theta = W_x$$

Ca atare relațiile(2) devin:

$$\begin{aligned}
 a_1\nu_1 + a_2\nu_2 + a_3\nu_3 + \dots + a_n\nu_n + W_1 &= \theta \dots \dots \dots f_1 \\
 b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3 + \dots + b_n\nu_n + W_2 &= \theta \dots \dots \dots f_2 \\
 (4) \quad c_1\nu_1 + c_2\nu_2 + c_3\nu_3 + \dots + c_n\nu_n + W_3 &= \theta \dots \dots \dots f_3 \\
 \vdots & \\
 r_1\nu_1 + r_2\nu_2 + r_3\nu_3 + \dots + r_n\nu_n + W_x &= \theta \dots \dots \dots f_x
 \end{aligned}$$

Acestea sînt ecuațiile care ne dau valorile lui  $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots, \nu_x$  și cu ajutorul cărora și al observațiunilor de pe teren se obțin adevăratele valori ale observațiunilor noastre, care vor îndeplini condițiunile inițiale.

Insă de notat este că avem un sistem de "r" ecuații cu "n" necunoscute și cum în mod obișnuit "n" este mai mare ca "r", urmează că sistemul acesta nu poate fi rezolvat.

Pentru acest motiv se aplică principiul lui Legendre, cu ajutorul căruia sistemul va deveni rezolvabil.

Conform acestui principiu va trebui ca

$$F_0 = [v, v] = \text{minim},$$

ceea ce ar reveni ca derivatele parțiale ale acestei funcțiuni în raport cu  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ , să fie nule.

Dar această funcțiune are relația de legătură, adică nu toate variabilele sînt independente, așa că problema care se pune este de a găsi minimum pentru o funcțiune care are funcțiuni de legătură, adică așa cum știm din Analiza Matematică, să aflăm minimum pentru funcțiunea  $F$  care este:

$$F = F_0 - 2 k_1 f_1 - 2 k_2 f_2 - 2 k_3 f_3 - \dots - 2 k_n f_n = \text{minim}.$$

În această funcțiune  $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ , sînt coeficienții lui Lagrange.

Deci urmează ca derivatele parțiale ale funcțiunii  $F$  în raport cu  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$  să fie nule, sau:

$$\frac{\partial F}{\partial v_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial v_2} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial v_3} = 0, \dots, \dots, \dots, \frac{\partial F}{\partial v_n} = 0$$

Funcțiunea  $F$  este:

$$F = [vv] - 2 k_1 (a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \dots + a_n v_n + W_1) - \\ - 2 k_2 (b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + \dots + b_n v_n + W_2) - \\ - 2 k_3 (c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + \dots + c_n v_n + W_3) - \\ - 2 k_n (r_1 v_1 + r_2 v_2 + r_3 v_3 + \dots + r_n v_n + W_n) = \\ = \text{minim}.$$

Derivatele parțiale ale acestor funcțiuni, care trebuie să fie egale cu zero, sînt:

$$\frac{\partial F}{\partial v_1} = 2v_1 - 2 k_1 a_1 - 2 k_2 b_1 - 2 k_3 c_1 - \dots - 2 k_n r_1 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial v_2} = 2v_2 - 2 k_1 a_2 - 2 k_2 b_2 - 2 k_3 c_2 - \dots - 2 k_n r_2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial v_3} = 2v_3 - 2 k_1 a_3 - 2 k_2 b_3 - 2 k_3 c_3 - \dots - 2 k_n r_3 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial v_x} = 2v_x - 2 k_1 a_x - 2 k_2 b_x - 2 k_3 c_x - \dots - 2 k_n r_x = 0$$

De unde se deduce:

$$\begin{aligned}
 (5) \quad v_1 &= k_1 a_1 + k_2 b_1 + k_3 c_1 + \dots + k_n r_1 \\
 v_2 &= k_1 a_2 + k_2 b_2 + k_3 c_2 + \dots + k_n r_2 \\
 v_3 &= k_1 a_3 + k_2 b_3 + k_3 c_3 + \dots + k_n r_3 \\
 &\vdots \\
 v_n &= k_1 a_n + k_2 b_n + k_3 c_n + \dots + k_n r_n
 \end{aligned}$$

Inlocuind valorile lui  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$  in sistemul (4) se obtine:

$$\begin{aligned}
 &a_1(a_1 k_1 + c_1 k_2 + \dots + r_1 k_n) + \\
 &a_2(a_1 k_1 + a_2 k_2 + c_2 k_3 + \dots + r_2 k_n) + \\
 &a_3(a_3 k_1 + b_3 k_2 + c_3 k_3 + \dots + r_3 k_n) + \\
 &\vdots \\
 &a_n(a_n k_1 + b_n k_2 + c_n k_3 + \dots + r_n k_n) + W = 0
 \end{aligned}$$

Desfacind parantezele si insumind dupa coeficientii  $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ , se obtine:

$$(6) \quad [aa]k_1 + [ab]k_2 + [ac]k_3 + \dots + [ar]k_n + W = 0$$

In mod analog inlocuind in celelalte ecuatii din sistemul (4) valorile lui  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$  din (5), se obtine, impreuna cu relatia (6), urmatorul sistem

$$\begin{aligned}
 [aa]k_1 + [ab]k_2 + [ac]k_3 + \dots + [ar]k_n + W_1 &= 0 \\
 [ba]k_1 + [bb]k_2 + [bc]k_3 + \dots + [br]k_n + W_2 &= 0 \\
 [ca]k_1 + [cb]k_2 + [cc]k_3 + \dots + [cr]k_n + W_3 &= 0 \\
 &\vdots \\
 [ra]k_1 + [rb]k_2 + [rc]k_3 + \dots + [rr]k_n + W_n &= 0
 \end{aligned}$$

Acestea sînt ecuațiile lui Gauss in "k" și după cum vedem avem un sistem determinat ("r" ecuația și "n" necunoscute) prin rezolvarea căruia se obțin valorile lui  $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ , care apoi introduse în relațiile din (5) se determină erorile  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$  care afectează măsurătorile observațiunile noastre, ca atare se vor putea afla adevăratele erori ale măsurătorile știind că:

$$\begin{aligned}
 O_1 &= O_1 + v_1 \\
 O_2 &= O_2 + v_2 \\
 O_3 &= O_3 + v_3 \\
 &\vdots \\
 O_n &= O_n + v_n
 \end{aligned}$$



### Eroarea medie " m " .

În cazul măsurătorilor indirecte am avut, eroarea medie dată de formula:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[v \ v]}{n-k}}$$
 unde  $(n-k)$  reprezintă surplusul de măsurători.

În mod analog, pentru măsurătorile directe cu condiții inițiale, eroarea medie va fi dată de aceeași formulă, însă pusă sub forma:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[v \ v]}{r}}$$

"r" acum are aceeași semnificație ca  $n - 1$ , respectiv ca  $n - k$  din cele studiate anterior, adică este surplusul de măsurători efectuate.

### Stabilirea numărului de condițiuni.

Pentru a putea determina valoarea erorii medii în cazul măsurătorilor directe cu condițiuni inițiale, caz în care această eroare este dată de formula de mai sus,

$$m = \pm \sqrt{\frac{[v \ v]}{r}}$$

trebuie să cunoaștem în prealabil numărul condițiilor inițiale, fiindcă formula " r " reprezintă tocmai numărul de ecuații de condiții sau așa cum am mai amintit, el fiind surplusul de măsurători.

În afară de aceasta în Topografie utilizându-se, în largă măsură principiul de a face măsurători multiple, este necondiționat necesară stabilirea numărului de ecuații de condiții, spre a întrebuița în calcule numai atâtea ecuații de câte avem nevoie, simplificându-se astfel calculul prin eliminarea ecuațiilor care rezultă din combinațiile celorlalte.

Spre a putea stabili numărul de ecuații de condiții, să luăm ca exemplu un triunghi, care știm că este determinat atunci când îi cunoaștem o latură și două unghiuri.

Dar condiția inițială ce se impune este ca suma unghiurilor în acest triunghi să fie  $180^\circ$ , așa ca pentru îndeplinirea acestei condiții va trebui să măsurăm și cel de al treilea unghi.

Prin aceasta am executat o măsurătoare în plus, ea constituind deci surplusul de măsurători, dar în același timp a apărut și o ecuație de condiție.

De îndată ce mai apare un punct D, în afară de cele 3 puncte A, B, C, ale triunghiului nostru, spre a fi determinat și acest punct, este necesar a se mai cunoaște și valorile unghiurilor 4 și 5

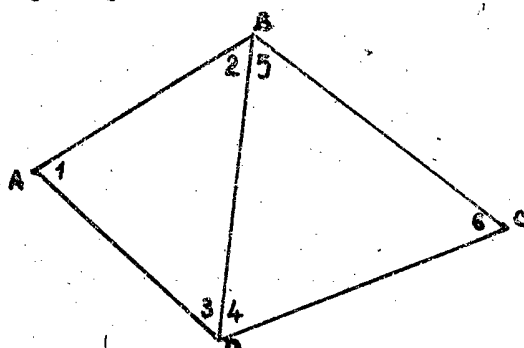


Fig. 13.

Cu alte cuvinte în cazul acesta având 4 puncte, două din ele sînt necesare pentru determinarea primei laturi ce trebuie să fie cunoscută pentru a putea rezolva primul triunghi, iar pentru aflarea celorlalte două puncte este necesar să cunoaștem cîte două unghiuri de fiecare punct.

Generalizînd urmează că avînd "p" puncte, două din ele sînt necesare pentru a avea prima latură, iar pentru celelalte (p - 2) puncte va trebui să mai cunoaștem cîte două unghiuri de fiecare punct, adică în total

$$2(p - 2) \text{ unghiuri.}$$

Cum s-a amintit surplusul de măsurători reprezintă tocmai numărul ecuațiilor de condiții, ori pentru determinarea punctelor noastre avem nevoie de 2(p - 2) unghiuri, în cazul arătat, ar fi necesar să cunoaștem 2(4 - 2) = 4 unghiuri, noi avem însă 6 unghiuri, diferența ar fi numărul ecuațiilor de condiții, adică 6 - 4 = 2 ecuații de condiții.

Pentru cazul general, în care avem  $\omega$  unghiuri, numărul ecuațiilor de condiții "r" ar fi:

$$r = \omega - 2(p - 2) = \omega - 2p + 4$$

Acesta este numărul total al ecuațiilor de condiții.

Din ecuațiile de condiții unele sînt condiții de unghiuri, adică suma unghiurilor într-un triunghi să fie  $180^\circ$  sau într-un poligon să fie  $\pi(l - 2)$ , iar altele ecuații sînt condițiile de laturi.

Ca atare va <sup>trebuie</sup> să stabilim relația care ne dă numărul condițiilor de unghiuri și cea a condițiilor de laturi, suma lor trebuind să dea numărul total al ecuațiilor de condiții.

Pentru stabilirea relației care ne dă numărul condițiilor de unghiuri, să luăm un poligon oarecare a - b - c - d - e - f.

Condiția matematică care ca suma unghiurilor interne să fie egală cu  $\pi(l - 2)$ .

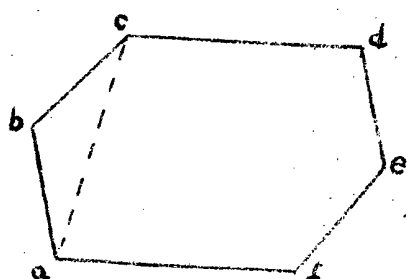


Fig. 14.

Dacă în acest poligon apare în afară de legăturile a-b-c-d-e-f, încă o latură în plus (de exemplu latura a c), apoi apare și o nouă condiție în plus, este condiția ca suma unghiurilor din triunghiul a b c, să fie egală cu  $180^\circ$

În poligonul de  $n$  laturi pînă ce nu apărea latura a c, suma laturilor a fost egală cu numărul punctelor, adică  $n = p$ .

De îndată ce a apărut o latură în plus, a apărut și o condiție în plus, deci numărul de condiții de unghiuri este egal cu surplusul de laturi ( $\ell_1 - p_1$ ), la care se mai adaugă și prima condiție de unghiuri, adică  $W_1 = \ell_1 - p_1 + 1$ , unde  $\ell_1$  este numărul laturilor,  $p$  este numărul de puncte.

Dacă un poligon închis cu un punct în poziția centrului, atunci în acest caz numărul ecuațiilor unghiulare se mărește cu încă o condiție, este aceea ca suma unghiurilor măsurate în jurul aceluși punct să fie  $360^\circ$ .

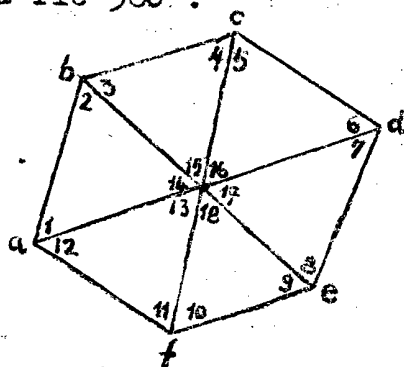


Fig. 15.

Adică avem un punct în care se face tur de orizont.

Ca atare numărul ecuațiilor:  $W = W_1 + W_2$ , unde  $W_1$  reprezintă numărul ecuațiilor de condiții unghiurilor, în care suma unghiurilor din triunghiuri este  $180^\circ$ , iar  $W_2$  ar reprezenta numărul punctelor în care se face tur de orizont sau care se află în poziția centrului.

Pentru stabilirea condițiilor de laturi, să reluăm exemplul din

Fig. 13, în care avînd măsurată o latură AB, putem construi un triunghi sau mai bine zis se determină încă un punct în plus.

Pentru un nou punct vor trebui alte 2 laturi. Generalizînd, urmează ca pentru " $p$ " puncte avem nevoie în primul rînd de o latură pentru determinarea primelor două puncte și de cîte 2 laturi pentru fiecare din restul de  $(p-2)$  puncte.

Dacă în acest sistem rigid apare o latură în plus, este evident că va trebui, așa cum s-a arătat și în cazul condițiilor de unghiuri, să apară și o condiție de laturi.

Ca atare avind  $l'$  laturi într-o în-  
 lanțuire de triunghiuri și "p" puncte, numărul condițiilor  
 de laturi va fi diferența între numărul nostru de laturi  
 și numărul de laturi necesare pentru determinarea celor  
 "p" puncte, sau:

$$s = l - l'$$

unde  $l$  este numărul total de laturi al rețelei de triun-  
 ghiuri și numărul de laturi necesar determinării puncte-  
 lor în număr de "p".

Dar din cele amintite mai sus:

$$l' = 1 + 2(p - 2)$$

Deci relația de mai sus devine:

$$s = l - [1 + 2(p - 2)] = l - 1 - 2p + 4 = l - 2p + 3$$

Ca atare pentru calcularea numărului  
 ecuațiilor de condiții se vor folosi relațiile:

$$W_1 = l_1 - p_1 + 1$$

$W$  = numărul punctelor în care se  
 face tur de orizont.

$$s = l - 2p + 3$$

$$r = a - 2p + 4$$

Drept verificare:  $r = W_1 + W_2 + s$ .

Observațiune:

In formulele de mai sus vedem că  
 apare  $l_1$ ,  $p_1$ ,  $l$  și  $p$ , unde  $l_1$  are semnificație de laturi cu  
 viză dublă,  $p_1$  numărul punctelor staționabile,  $l$  este numărul  
 de laturi și  $p$  numărul total de puncte.

Din exemplele ce se vor face mai  
 jos, se va putea observa mai clar diferența între  $l_1$  și  $l$   
 precum și cea dintre  $p_1$  și  $p$ .

Exemple numerice.

1) In patrulaterul ABCD au fost  
 măsurate unghiurile 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, se cere să se stabi-  
 lească numărul ecuațiilor de condiții, să se afle adevăra-  
 tele valori ale acestor unghiuri, precum și eroarea medie.

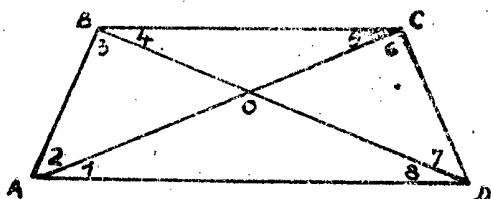


Fig.16.

- $\hat{1} = 37^\circ 26' 41''$
- $\hat{2} = 34^\circ 35' 25''$
- $\hat{3} = 41^\circ 47' 34''$
- $\hat{4} = 55^\circ 58' 02''$
- $\hat{5} = 48^\circ 09' 02''$
- $\hat{6} = 29^\circ 51' 27''$
- $\hat{7} = 46^\circ 01' 26''$
- $\hat{8} = 66^\circ 40' 24''$

Numărul ecuațiilor de condiție este dat de formulele:

$$r = 4l - 2p + 4$$

$$W \begin{cases} W_1 = l_1 - p_1 + 1 \\ W_2 = \text{tur de orizont} \\ s = l - 2p + 3 \end{cases}$$

$$r = 8 - (2 \times 4) + 4 = 4$$

$$W \begin{cases} W_1 = 6 - 4 + 1 = 3 \\ W_2 = 0 \\ s = 6 - (2 \times 4) + 3 = 1 \end{cases}$$

Verificare:  $W_1 + W_2 + s = r$ .

Deci avem 4 ecuații de condiții și anume: trei ecuații de unghiuri și o ecuație de laturi.

Ecuațiile de unghiuri sînt:

In triunghiul ABD:  $(\hat{1}) + (\hat{2}) + (\hat{3}) + (\hat{8}) - 180^\circ = 0$   
 (1) " " BCD:  $(\hat{4}) + (\hat{5}) + (\hat{6}) + (\hat{7}) - 180^\circ = 0$   
 " " ABC:  $(\hat{2}) + (\hat{3}) + (\hat{4}) + (\hat{5}) - 180^\circ = 0$

Am mai avea încă o ecuație, dar aceasta nu este necesară, ar fi cea din triunghiul ACD, care însă rezultă din combinația celorlalte trei ecuații.

Ecuația de laturi este:

$$\frac{\sin(\hat{1}) \cdot \sin(\hat{3}) \cdot \sin(\hat{5}) \cdot \sin(\hat{7})}{\sin(\hat{2}) \cdot \sin(\hat{4}) \cdot \sin(\hat{6}) \cdot \sin(\hat{8})} = 1.$$

Dacă se introduc în ecuațiile de condiții de sub (1) valorile unghiurilor măsurate, se va vedea că ecuațiile nu sînt satisfăcute și se vor obține erorile  $W_1, W_2$ , și  $W_3$ , cari sînt:

$\hat{1} = 37^\circ 26' 41''$	$\hat{4} = 55^\circ 58' 02''$	$\hat{2} = 34^\circ 35' 25''$
$\hat{2} = 34^\circ 35' 25''$	$\hat{5} = 48^\circ 09' 02''$	$\hat{3} = 41^\circ 17' 34''$
$\hat{3} = 41^\circ 17' 34''$	$\hat{6} = 29^\circ 51' 27''$	$\hat{4} = 55^\circ 58' 02''$
$\hat{8} = 66^\circ 40' 24''$	$\hat{7} = 46^\circ 01' 26''$	$\hat{5} = 48^\circ 09' 02''$
<hr/>	<hr/>	<hr/>
$180^\circ 00' 04''$	$179^\circ 59' 57''$	$180^\circ 00' 03''$

Deci  $W_1 = +4''$ ,  $W_2 = -3''$ ,  $W_3 = +3''$

Ecuațiile lui Gauss în  $k$  sînt:

$$(2) \begin{cases} [aa]k_1 + [ab]k_2 + [ac]k_3 + W_1 = 0 \\ [ba]k_1 + [bb]k_2 + [bc]k_3 + W_2 = 0 \\ [ca]k_1 + [cb]k_2 + [cc]k_3 + W_3 = 0 \end{cases}$$

Unde "a" sînt coeficienții din ecuația 1-a, "b" din ecuația 2-a și "c" coeficienții ecuației 3-a.

Să formăm tabloul pentru aflarea coeficienților ecuațiilor  
 lui Gauss în k.

	a	b	c	d	Pr.	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	a <sub>3</sub>	a <sub>4</sub>	Pr.	b <sub>1</sub>	b <sub>2</sub>	b <sub>3</sub>	b <sub>4</sub>	Pr.	c <sub>1</sub>	c <sub>2</sub>	c <sub>3</sub>	c <sub>4</sub>	Pr.
1	1	0	0	-1	⊖	1	0	0	-1	⊖	0	0	0	0	⊖	0	0	0	0	⊖
2	1	0	1	-2	⊖	1	0	1	-2	⊖	0	0	0	0	⊖	1	0	1	-2	⊖
3	1	0	1	-2	⊖	1	0	1	-2	⊖	0	0	0	0	⊖	1	0	1	-2	⊖
4	0	1	1	-2	⊖	0	0	0	0	⊖	0	1	1	-2	⊖	0	1	1	-2	⊖
5	0	1	1	-2	⊖	0	0	0	0	⊖	0	1	1	-2	⊖	0	1	1	-2	⊖
6	0	1	0	-1	⊖	0	0	0	0	⊖	0	1	0	-1	⊖	0	0	0	0	⊖
7	0	1	0	-1	⊖	0	0	0	0	⊖	0	1	0	-1	⊖	0	0	0	0	⊖
8	1	0	0	-1	⊖	1	0	0	-1	⊖	0	0	0	0	⊖	0	0	0	0	⊖
[ ]	4	4	4	-12	⊖	4	0	2	-6	⊖	0	4	2	-6	⊖	2	2	4	-8	⊖

Se introduc coeficienții aflați în ecuațiile lui Gauss și se obține:

$$\begin{aligned} 4 k_1 + 2 k_2 + W_1 &= \ominus \\ 4 k_2 + 2 k_3 + W_2 &= \ominus \\ 2 k_1 + 2 k_2 + 4 k_3 + W_3 &= \ominus \end{aligned}$$

Inlocuim  $W_1, W_2, W_3$  cu valorile lor:

$$\begin{aligned} 4 k_1 + 2 k_2 + 4'' &= \ominus \\ 4 k_2 + 2 k_3 - 3'' &= \ominus \\ 2 k_1 + 2 k_2 + 4 k_3 + 3'' &= \ominus \end{aligned}$$

Rezolvând acest sistem, găsim pentru  $k_1, k_2,$  și  $k_3$  valorile:

$$k_1 = -\frac{3''}{4}, \quad k_2 = +1'', \quad k_3 = -\frac{1''}{2}.$$

Având valorile lui  $k_1, k_2$  și  $k_3$ , se găsesc erorile lui  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_8$  din relațiile:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 \\ v_2 &= a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3 \\ (3) \quad v_3 &= a_3 k_1 + b_3 k_2 + c_3 k_3 \\ &\vdots \\ v_8 &= a_8 k_1 + b_8 k_2 + c_8 k_3 \end{aligned}$$

Dar:  $a_1, a_2, a_3$  sînt egale cu 1, pe cînd  $a_4, a_5, a_6, a_7$  sînt egali cu zero.

La fel  $b_4, b_5, b_6, b_7 = 1$  și  $b_1, b_2, b_3, b_8 = \ominus$ ,  $c_2, c_3, c_4, c_5 = 1$ , iar  $c_1, c_6, c_7, c_8 = \ominus$

De unde prin înlocuire în relațiile (3):

$$\begin{aligned} v_1 &= -\frac{3}{4}'' \\ v_2 &= -\frac{3}{4}'' - \frac{1}{2}'' = -1\frac{1}{4}'' \\ v_3 &= -\frac{3}{4}'' - \frac{1}{2}'' = -1\frac{1}{4}'' \\ v_4 &= 1'' - \frac{1}{2}'' = +\frac{1}{2}'' \\ v_5 &= 1'' - \frac{1}{2}'' = +\frac{1}{2}'' \\ v_6 &= 1'' \\ v_7 &= 1'' \\ v_8 &= -\frac{3}{4}'' \end{aligned}$$

Odată obținute valorile erorilor:  $v_i$ ,  
 $v_2, v_3, \dots, v_8$ , se vor găsi adevăratele valori ale unghiuri-  
 lor 1, 2, 3, ..., 8, adică:

$$\begin{aligned} \hat{(1)} &= \hat{1} + v_1 \\ \hat{(2)} &= \hat{2} + v_2 \\ \hat{(3)} &= \hat{3} + v_3 \\ &\vdots \\ \hat{(8)} &= \hat{8} + v_8 \end{aligned}$$

Apoi avînd  $[vv]$  se va afla eroarea medie:  $m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{r}}$ ,

unde "r" este numărul ecuațiilor de condiții, adică  $r = 4$ .

2) În triunghiul din figură au fost măsurate ungiu-  
 rile:

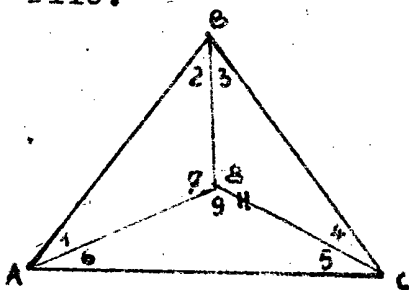


Fig. 17.

$$\begin{aligned} \hat{1} &= 30^\circ 18' 17'' & \hat{6} &= 18^\circ 32' 16'' \\ \hat{2} &= 34^\circ 16' 32'' & \hat{7} &= 115^\circ 25' 26'' \\ \hat{3} &= 28^\circ 22' 05'' & \hat{8} &= 114^\circ 24' 18'' \\ \hat{4} &= 37^\circ 13' 21'' & \hat{9} &= 130^\circ 10' 32'' \\ \hat{5} &= 31^\circ 17' 12'' \end{aligned}$$

Se cere să se stabilească numărul e-  
 cuațiilor de condiții și adevăratele valori ale unghiurilor.

Numărul ecuațiilor de condiții este:

$$\begin{aligned} r &= a - 2p + 4 = 9 - (2 \times 4) + 4 = 5 \\ W \begin{cases} W_1 = l - p + 1 = 6 - 4 + 1 = 3 \\ W_2 = \text{tur de orizont} = 1 \\ s = l - 2p + 3 = 6 - (2 \times 4) + 3 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Verificare:  $W_1 + W_2 + W_3 = r$ .

Deci numărul ecuațiilor de condiții este 5, din care o condiție de laturi și patru condiții de unghiuri.

Ecuațiile de condiții de unghiuri sînt:

$$(\hat{1}) + (\hat{2}) + (\hat{7}) - 180^\circ = 0$$

$$(\hat{3}) + (\hat{4}) + (\hat{8}) - 180^\circ = 0$$

$$(\hat{5}) + (\hat{6}) + (\hat{9}) - 180^\circ = 0$$

$$(\hat{7}) + (\hat{8}) + (\hat{9}) - 180^\circ = 0$$

Aflăm valorile lui  $W_1, W_2, W_3$  și  $W_4$

$30^\circ 18' 17''$	$28^\circ 22' 05''$	$31^\circ 17' 12''$	$115^\circ 25' 26''$
$34^\circ 16' 32''$	$37^\circ 13' 21''$	$18^\circ 32' 16''$	$114^\circ 24' 18''$
$115^\circ 25' 26''$	$114^\circ 24' 18''$	$130^\circ 10' 32''$	$130^\circ 10' 32''$
<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>
$180^\circ 00' 15''$	$179^\circ 59' 44''$	$180^\circ 00' 00''$	$360^\circ 00' 16''$

Deci:  $W_1 = +15''$ ,  $W_2 = -16''$ ,  $W_3 = 0$ ,  $W_4 = +16''$ .

Ecuațiile lui Gauss sînt:

$$(2) \begin{cases} [aa]k_1 + [ab]k_2 + [ac]k_3 + [ad]k_4 + W_1 = 0 \\ [ba]k_1 + [bb]k_2 + [bc]k_3 + [bd]k_4 + W_2 = 0 \\ [ca]k_1 + [cb]k_2 + [cc]k_3 + [cd]k_4 + W_3 = 0 \\ [da]k_1 + [db]k_2 + [dc]k_3 + [dd]k_4 + W_4 = 0 \end{cases}$$



Se formează tabloul pentru determinarea coeficienților din ecuațiile lui Gauss:

Nr. obs	a	b	c	d	Δ	Pr.	a	b	c	d	Δ	Pr.	a	b	c	d	Δ	Pr.	a	b	c	d	Δ	Pr.
1	1	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
4	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
6	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
7	1	0	0	1	-2	0	1	0	0	1	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	1	0	1	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	1	1	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	-2
[ ]	3	3	3	3	-4	0	3	0	0	1	-4	0	0	3	0	1	-4	0	0	0	3	1	-4	0

Inlocuind acești coeficienți, precum și valorile lui  $W_1, W_2, W_3, W_4$ , determinate anterior, ecuațiile lui Gauss devin:

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & 3 k_1 + k_4 + 15'' = 0 \\
 & 3 k_2 + k_4 - 16'' = 0 \\
 & 3 k_3 + k_4 = 0 \\
 & k_1 + k_2 + k_3 + 3 k_4 + 16'' = 0
 \end{aligned}$$

Rezolvând acest sistem se obțin valorile lui  $k_1, k_2, k_3, k_4$ :

$$k_1 = -\frac{41}{18}, \quad k_2 = \frac{145}{18}, \quad k_3 = \frac{49}{18}, \quad k_4 = -\frac{49}{18}$$

Având valorile lui  $k_1, k_2, k_3, k_4$  se pot calcula valorile lui  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_9$ , introducând valorile lui  $k_1, \dots, k_4$  în sistemul (3) din exemplul numeric anterior și atunci:

$$\begin{aligned}
 v_1 = k_1 &= -\frac{41}{18} = -2''277 \\
 v_2 = k_2 &= \frac{145}{18} = 8''055 \\
 v_3 = k_3 &= \frac{145}{18} = 8''055 \\
 v_4 = k_4 &= \frac{49}{18} = 2''722
 \end{aligned}$$

- 74 -

$$\begin{aligned}V_6 &= k_2 = \frac{49}{18} = 2''722 \\V_7 &= k_2 k_3 = \frac{188}{18} = 10''444 \\V_8 &= k_2 k_4 = \frac{2}{18} = 0''111 \\V_9 &= k_3 k_4 = \frac{98}{18} = 5''444.\end{aligned}$$

Ca verificare:

$$\begin{aligned}V_1 + V_2 + V_7 + W_1 &= 0 \\V_2 + V_7 + V_8 + W_2 &= 0 \\V_5 + V_6 + V_9 + W_3 &= 0 \\V_7 + V_8 + V_9 + W_4 &= 0\end{aligned}$$

Valorile adevărate ale unghiurilor vor fi:

$$\begin{aligned}(\hat{1}) &= \hat{1} + V_1 = 30^\circ 18' 14''723 \\(\hat{2}) &= \hat{2} + V_2 = 34^\circ 16' 29''723 \\(\hat{3}) &= \hat{3} + V_3 = 28^\circ 22' 13''055 \\(\hat{4}) &= \hat{4} + V_4 = 37^\circ 13' 29''055 \\(\hat{5}) &= \hat{5} + V_5 = 31^\circ 17' 14''722 \\(\hat{6}) &= \hat{6} + V_6 = 18^\circ 32' 18''722 \\(\hat{7}) &= \hat{7} + V_7 = 115^\circ 25' 15''556 \\(\hat{8}) &= \hat{8} + V_8 = 114^\circ 24' 17''889 \\(\hat{9}) &= \hat{9} + V_9 = 130^\circ 10' 26''556.\end{aligned}$$

3) Să se stabilească numărul ecuațiilor de condiții pentru cazul din Fig.15.

$$r = \omega - 2p + 4 = 18 - (2 \times 7) + 4 = 8$$

$$W_1 = \ell - p + 1 = 12 - 7 + 1 = 6$$

$$W_2 = \text{tur de orizont} = 1$$

$$\Delta = \ell - 2p + 3 = 12 - (2 \times 7) + 3 = 1$$

$$\text{Verificare: } r = W_1 + W_2 + \Delta = 6 + 1 + 1 = 8.$$

4) Să se afle numărul ecuațiilor de condiții pentru cazul când avem puncte nestaționabile, când nu se dau vize duble în toate direcțiunile sau pe toate iaturile, cum este cazul din figura de jos.

In figura este arătat sensul în care se dau vizele și după cum se observă, avem vize duble și vize simple.

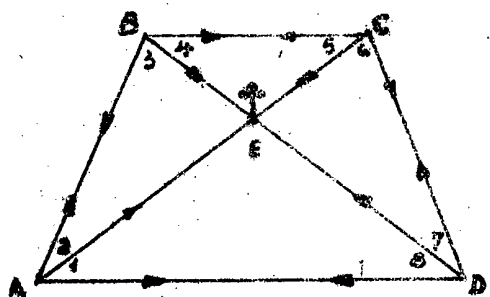


Fig. 18.

- $p_1$  = puncte staționabile = 4
- $p_2$  = puncte pierdute = 1
- $p$  = număr total de puncte = 5
- $l_1$  = laturi cu viză simplă = 4
- $l_2$  = laturi cu viză dublă = 4
- $l$  = numărul total laturi = 8
- $\omega$  = unghiuri măsurate = 8

Numărul ecuațiilor de condiții va fi:

$$r = l - 2p + 4 = 8 - (2 \times 5) + 4 = 2$$

$$W_1 = l_1 - p_1 + 1 = 4 - 4 + 1 = 1$$

$$W_2 = \text{tur de orizont} = 0$$

$$s = l - 2p + 3 = 8 - (2 \times 5) + 3 = 1$$

Verificare:

$$r = W_1 + W_2 + s = 1 + 1 = 2$$

5) Se cere ca numărul ecuațiilor de condiții pentru cazul din Fig. 19.

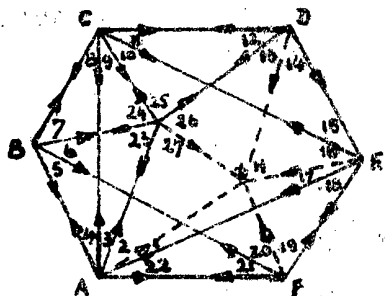


Fig. 19.

- $p_1$  = puncte staționabile = 7
- $p_2$  = puncte pierdute = 1
- $p$  = numărul total de puncte = 8
- $l_1$  = laturi de viză simplă = 5
- $l_2$  = laturi de viză dublă = 14
- $l$  = numărul total de laturi = 19
- $\omega$  = unghiuri măsurate = 27

$$r = l - 2p + 4 = 19 - (2 \times 8) + 4 = 15$$

$$W_1 = l_1 - p_1 + 1 = 5 - 7 + 1 = -1$$

$$W_2 = \text{tur de orizont} = 1$$

$$s = l - 2p + 3 = 19 - 16 + 3 = 6$$

$$\text{Verificare: } r = W_1 + W_2 + s = -1 + 1 + 6 = 6$$

6). Să se afle adevăratele valori ale diferențelor de nivel dintre punctele A, B, C, D și să se calculeze eroarea medie  $m$ .

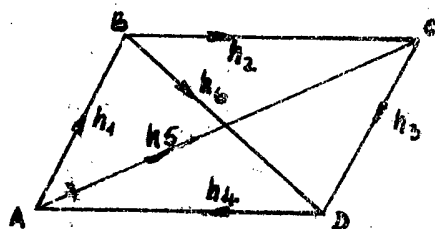


Fig. 20.

Diferențele de nivel măsurate sînt

- $h_1 = 20,547 \text{ m}$
- $h_2 = 8,379 \text{ m}$
- $h_3 = 0,466 \text{ m}$
- $h_4 = 12,655 \text{ m}$
- $h_5 = 12,175 \text{ m}$
- $h_6 = 7,903 \text{ m}$

este dat de relația:

Numărul ecuațiilor de condiții în acest caz

$$r = l - p + 1 = 6 - 4 + 1 = 3.$$

Aceste trei ecuații de condiții ținînd cont de sensul indicat pe figură sînt următoarele:

$$(h_1) + (h_2) + (h_3) + (h_4) = 0$$

$$(h_2) + (h_3) - (h_6) = 0$$

$$(h_3) + (h_4) + (h_5) = 0.$$

Ecuațiile lui Gauss în  $k$  sînt:

$$\begin{aligned} (1) \quad [aa] k_1 + [ab] k_2 + [ac] k_3 + W_1 &= 0 \\ [ba] k_1 + [bb] k_2 + [bc] k_3 + W_2 &= 0 \\ [ca] k_1 + [cb] k_2 + [cc] k_3 + W_3 &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad h_1 + h_2 + h_3 + h_4 &= W_1 \\ h_2 + h_3 - h_6 &= W_2 \\ h_3 + h_4 + h_5 &= W_3. \end{aligned}$$

Introducînd în relațiile (2) valorile observațiilor noastre se află  $W_1, W_2, W_3$ .

Pentru determinarea coeficienților ecuațiilor lui Gauss, se va forma tabloul, ca în cazul anterior, observînd că:  $a_1, a_2, a_3, a_4 = 1$ , iar  $a_5, a_6 = 0$ , la fel  $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = 0$  și în mod analog  $c_1 = c_2 = c_3 = 1, c_4 = c_5 = c_6 = 0$ .

După ce am aflat coeficienții ecuațiilor lui Gauss, se va rezolva sistemul de trei ecuații cu 3 necunoscute, obținînd pe  $k_1, k_2, k_3$ .

De aci încolo problema se va rezolva în mod identic ca în cazul exemplului numeric dela punctul 1 și 2.

N.B. Acest exemplu va fi reluat la Cap. Nivelment, intrucît problema, după cum se va vedea, este puțin mai complicată, intervenind și coeficienții de greutate, datorită faptului că lungimile laturilor rețelei de nivelment sînt diferite și ca atare măsurătorile sînt de precizie diferită.

6) Studiul triunghiului.

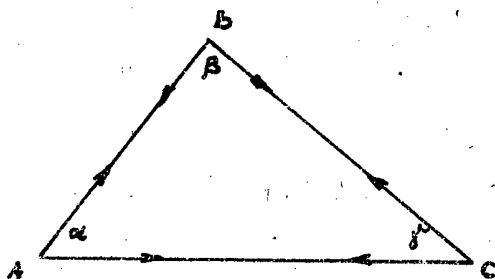


Fig. 21.

În triunghiul ABC au fost măsurate unghiurile  $\alpha, \beta, \gamma$ ; se cere să se afle adevăratele valori ale acestor unghiuri, cu alte cuvinte, să facem compensarea unghiurilor.

După cum se știe, condiția care se impune, este ca suma unghiurilor într-un triunghi să fie  $180^\circ$ .

În realitate cu unghiurile măsurate, această condiție nu este satisfăcută.

Adevăratele valori sau mai bine zis, valorile cele mai probabile ale unghiurilor  $\alpha, \beta, \gamma$ , notându-se cu  $V_1, V_2, V_3$ , erorile sînt:

$$\begin{aligned} (\alpha) &= \alpha + V_1 \text{ sau notînd: } (\alpha) = \hat{A} & \hat{A} &= \alpha + V_1 \\ (B) &= \beta + V_2 & \hat{B} &= \beta + V_2 \\ (\gamma) &= \gamma + V_3 & \hat{C} &= \gamma + V_3 \end{aligned}$$

Aceste valori adevărate  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ , ale unghiurilor satisfac condițiunea ca suma unghiurilor în triunghi să fie  $180^\circ$ , adică:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

deci:  $(\alpha + \beta + \gamma) + (V_1 + V_2 + V_3) - 180^\circ = 0$

dar:  $\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ = W$ ,

și atunci relația devine:  $V_1 + V_2 + V_3 + W = 0$

Calculul acestor erori  $V_1, V_2, V_3$ , care afectează unghiurile  $\alpha, \beta, \gamma$ , pot fi determinate prin trei metode (metoda măsurătorilor directe cu condiții inițiale, metoda măsurătorilor indirecte și cea a măsurătorilor directe de precizii diferite).

a) Metoda măsurătorilor directe cu condiții inițiale.

Măsurînd direct unghiurile  $\alpha, \beta, \gamma$  condițiunea inițială este ca suma lor să fie  $180^\circ$  sau ceea ce revine la:

$$(1) V_1 + V_2 + V_3 + W = 0$$

Dacă adăugăm principiul micilor pătrate ale lui Legendre, urmează ca:  $V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 = \text{minim}$  sau  $[VV] = \text{minim}$ .

Din cele stabilite în cazul măsurătorilor directe, cu condiții inițiale, avem:

$$F = \sqrt{V_1 V_2} - 2 k_1 (V_1 + V_2 + V_3 + W) = \text{Minim}$$

$$F = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2} - 2 k_1 (V_1 + V_2 + V_3 + W) = \text{Minim.}$$

Dar o funcțiune va avea un minim atunci când derivatele ei parțiale sînt nule, deci:

$$\frac{\partial F}{\partial V_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial V_2} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial V_3} = 0$$

Derivînd funcțiunea  $F$  în raport cu  $V_1, V_2, V_3$  se obține:

$$\begin{aligned} 2 V_1 - 2 k_1 &= 0 & V_1 - k_1 &= 0 & V_1 &= k_1 \\ 2 V_2 - 2 k_1 &= 0 & \text{sau } V_2 - k_1 &= 0 & \text{deci } V_2 &= k_1 \\ 2 V_3 - 2 k_1 &= 0 & V_3 - k_1 &= 0 & V_3 &= k_1 \end{aligned}$$

Adică:  $V_1 = V_2 = V_3 = k_1$

Ecuatiile lui Gauss în  $k$  sînt:

$$\begin{aligned} [aa] k_1 + [ab] k_2 + [ac] k_3 + \dots + [ar] k_r + W_1 &= 0 \\ [ba] k_1 + [bb] k_2 + [bc] k_3 + \dots + [br] k_r + W_2 &= 0 \\ [ca] k_1 + [cb] k_2 + [cc] k_3 + \dots + [cr] k_r + W_3 &= 0 \\ \vdots & \\ [fa] k_1 + [fb] k_2 + [fc] k_3 + \dots + [fr] k_r + W_r &= 0 \end{aligned}$$

Coeficienții acestor ecuații sînt:  $[aa] = 3$ , iar restul sînt egali cu zero și atunci sistemul va lua forma:

$$\begin{aligned} 3 k_1 + W_1 &= 0 & \text{dar: } W_1 &= W \\ 3 k_1 + W &= 0 & k_1 &= -\frac{W}{3} \end{aligned}$$

Prin urmare:

$$V_1 = V_2 = V_3 = k_1 = -\frac{W}{3}$$

$$[rr] = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 = \frac{W^2}{9} + \frac{W^2}{9} + \frac{W^2}{9} = \frac{W^2}{3}$$

Eroarea medie  $m = \pm \sqrt{\frac{[V V]}{r}} = \sqrt{\frac{W^2}{9}}$

"r" reprezintă numărul ecuațiilor de condiții și este:  $r = 1$ . Valoarea erorii medii va fi:

$$m = \pm \sqrt{\frac{W^2}{3}} = \pm \frac{W}{\sqrt{3}}$$

b) Metoda măsurătorilor indirecte:

relațiile: In cazul măsurătorilor indirecte am avut

$$\begin{aligned} V_1 &= a_1 x + b_1 y - O_1 \\ V_2 &= a_2 x + b_2 y - O_2 \\ V_3 &= a_3 x + b_3 y - O_3 \end{aligned}$$

Punindu-se condiția de minim au fost obținute ecuațiile normale ale lui Gauss:

$$\begin{aligned} [aa]x + [ab]y &= [a 0] \\ [ba]x + [bb]y &= [b 0] \end{aligned}$$

Se dăm acum o interpretare cazului nostru pentru reducerea lui la cazul măsurătorilor indirecte.

Ecuația de condiție a fost:

$$V_1 + V_2 + V_3 + W = 0$$

de unde:

$$V_1 = -V_2 - V_3 - W$$

iar:

$$V_2 = V_2 \text{ și } V_3 = V_3$$

Dacă notăm  $V_2 = x$  și  $V_3 = y$ , ecuațiile noastre complete devin:

$$\begin{aligned} (1) \quad V_1 &= -x - y - W \\ V_2 &= x \\ V_3 &= y. \end{aligned}$$

Formăm tabloul pentru aflarea coeficienților ecuațiilor lui Gauss:

Nr. obs.	a	b	0	aa	ab	a 0	ba	bb	b 0	Observațiuni
1	-1	-1	W	1	1	-W	1	1	-W	
2	1	0	0	1	0	0	0	0	0	
3	0	1	0	0	0	0	0	1	0	
[ ]	0	0	W	2	1	-W	1	2	-W	

Având determinate coeficienții, ecuațiile lui Gauss vor fi:

$$\begin{aligned} 2x + y &= -W \\ x + 2y &= -W \end{aligned}$$

Prin rezolvarea sistemului se deduc valorile lui  $x, y$ :

$$x = -\frac{W}{3}, \quad y = -\frac{W}{3}$$

Valorile lui  $V_1, V_2, V_3$ , conform relațiilor (1) sînt:

$$V_1 = \frac{W}{3} + \frac{W}{3} - W = -\frac{W}{3}$$

$$V_2 = -\frac{W}{3}$$

$$V_3 = -\frac{W}{3}$$

Deci:  $V_1 = V_2 = V_3 = \frac{W}{3}$ , adică același rezultat ca în cazul  
 când s-a tratat problema prin metoda măsurătorilor directe cu  
 condiții inițiale.

$$m = \pm \sqrt{\frac{[V V]}{n - k}} = \pm \sqrt{\frac{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2}{3 - 2}} + \sqrt{\frac{W^2}{3}} = \pm \frac{W}{\sqrt{3}}$$

Erorile  $m_x$ ,  $m_y$ , date de relațiile:  $m_x = m\sqrt{Q_{11}}$ ,  $m_y = m\sqrt{Q_{22}}$   
 vor fi:

$$\begin{aligned} 2Q_{11} + Q_{22} &= 1 \\ Q_{11} + 2Q_{22} &= 0 \end{aligned}$$

De unde se obține:

$$Q_{11} = \frac{2}{3}, \quad Q_{22} = -\frac{1}{3}$$

Și în mod analog se vor determina  $Q_{12}$  și  $Q_{21}$  din sistemul:

$$2Q_{12} + Q_{22} = 0$$

$$Q_{11} + 2Q_{21} = 1$$

$$Q_{22} = \frac{2}{3}, \quad Q_{21} = -\frac{1}{3}$$

$$m_x = \pm \frac{W}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{2}{3}} = \pm \frac{W\sqrt{2}}{3}, \quad m_y = \pm \frac{W\sqrt{2}}{3}$$

c) Metoda măsurătorilor directe de precizie diferită.

Să presupunem că măsurînd direct unghiul  $\alpha$   
 am găsit valoarea  $\alpha$ . Facem acum a II-a măsurătoare pentru  $\alpha$   
 măsurînd unghiurile  $\beta$  și  $\gamma$ , a căror sumă scăzută din  $180^\circ$  ne dă  
 pentru  $\alpha$  valoarea  $\alpha''$ .

Pentru aflarea valorii celei mai probabi-  
 le a unghiului  $\alpha$ , am fi conduși la aflarea mediei aritmetice a  
 celor 2 măsurători, adică  $\frac{\alpha' + \alpha''}{2}$ .

Însă este eronat să se facă o simplă me-  
 die aritmetică a celor 2 măsurători, pentru faptul că aceste  
 măsurători au precizie diferită, căci într-adevăr la măsură-  
 toarea primă am comis o eroare la măsurarea unghiului  $\alpha$  pe cînd  
 la măsurătoarea cea de a II-a o eroare pentru unghiul  $\beta$  și o  
 altă eroare pentru unghiul  $\gamma$ .

Ca stare cele 2 măsurători au coeficienți  
 de pondere diferiți și anume: prima măsurătoare va avea coefi-  
 cientul de pondere  $p' = 1$ , iar a II-a măsurătoare are coeficien-  
 tul de pondere  $p'' = \frac{1}{2}$ .

În lumina celor stabilite mai sus, așa cum  
 s-a mai arătat, valoarea adevărată, sau mai bine zis, cea mai  
 probabilă a unghiului este dată de relația:

$$(\alpha) = \frac{p'\alpha' + p''\alpha''}{p' + p''}$$



Pentru cazul nostru:

$$(\alpha) = \frac{1 \cdot \alpha + \frac{1}{2} [180^\circ - (B + \beta)]}{1 + \frac{1}{2}}$$

Dar:

$$180^\circ - B + \beta = \alpha - W$$

$$(\alpha) = \frac{\alpha + \frac{1}{2} (\alpha - W)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{3\alpha - W}{3} = \alpha - \frac{W}{3}$$

Insă:  $(\alpha) = \alpha + V_1$ , deci:  $V_1 = -\frac{W}{3}$

In mod identic se va putea spune și despre unghiurile  $B$  și  $\beta$ , ajungând la valorile erorilor  $V_1$  și  $V_2$ , adică:

$$V_1 = V_2 = V_3 = -\frac{W}{3}$$

Eroarea medie  $m$ , în cazul măsurătorilor directe de precizie diferită este dată de relația:

$$m\alpha = \pm \sqrt{\frac{p \cdot V}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{p' V'^2 + p'' V''^2}{n-1}}, \quad n = 2$$

$$V' = (\alpha) - \alpha' = -\frac{W}{3}, \quad V'' = (\alpha) - \alpha'' = (2) - (\alpha - W) = (2) - \alpha + W = -\frac{W}{3} + W = \frac{2}{3} W$$

$$m\alpha = \pm \sqrt{1 \cdot \frac{W^2}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4 W^2}{9}} = \pm \sqrt{\frac{3 W^2}{9}} = \frac{W}{\sqrt{3}}$$

Drept control va trebui să avem:  $[p v] = 0$ , adică:

$$p' v' + p'' v'' = 1 \times \left(-\frac{W}{3}\right) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{W}{3} = 0$$

Prin toate cele trei metode au fost obținute aceleași rezultate. Eroarea  $W$  a fost repartizată în mod egal celor trei unghiuri.

.....

## PARTEA II-a PLANIMETRIA

### Cap. I

#### Generalități.

##### Introducere: puncte topografice.

Planimetria este operațiunea care se face în scopul de a determina proiecțiunea, orizontală a porțiunii de teren ce vream să ridicăm.

În acest scop în Planimetrie sînt măsurate distanțele orizontale între punctele alese pe teren, precum și unghiurile orizontale dintre diferite aliniamente, urmînd ca după culegerea datelor de pe teren, să se reprezinte pe hîrtie prin figuri asemenea cu cele determinate de punctele alese, suprafața care a fost ridicată.

Pentru a putea reproduce pe hîrtie figuri cît mai apropiate de terenul ce vream să ridicăm, va trebui să alegem pe teren punctele care să ne servească în rezolvarea problemei.

Aceste puncte, de cari ne servim în ridicările topografice, se numesc puncte topografice sau puncte geodezice.

Pe teren punctele topografice vor trebui să fie astfel alese, încît operațiunile sprijinite pe aceste puncte să fie executabile.

Aceasta reclamă ca, în primul rînd, punctele să fie vizibile între ele.

De aceea înainte de a proceda la orice operațiune topografică, este absolut indispensabil de a face recunoașterea porțiunii de teren ce urmează a fi ridicată, pentru a ne alege punctele principale, pe cari vor fi sprijinite toate ridicările noastre, avîndu-se în vedere faptul că în ridicările topografice procedăm în mod obișnuit dela ansamblu la detaliu.

##### - a) Clasificarea punctelor topografice.

În ceea ce privește clasificarea punctelor topografice avem mai multe criterii de clasificare și anume:

Din punct de vedere al felului sau mai bine

zis al confecționării punctelor, avem puncte topografice naturale și puncte topografice artificiale.

Ca puncte topografice naturale ar fi virrurile de biserici, coșurile de fabrici cu paratrăsnetele lor, muchii de clădiri, săgețile sau paratrăsnetele dela clădirile diferitelor instituții, etc.

Puncte topografice artificiale sînt cele pe cari le creiem noi în vederea ridicărilor ce urmează a se executa și pe cari le marcăm, așa cum se va vedea mai jos

O altă clasificare este din punct de vedere al importanței pe care o au punctele topografice în ridicările geodezice sau topografice.

După acest criteriu punctele topografice pot fi puncte topografice principale și puncte topografice secundare.

Puncte topografice principale sînt acelea pe cari ne sprijinim, în mod permanent sau periodic, în operațiunile noastre.

Ele sînt în general, puncte de triangulație și după ordinul triangulației avem puncte principale de ordinal I, II, III, IV, și V.

Punctele principale de ordinal I au o distanță între ele de :  
.....30 - 40 km,  
ordinal II.....15 - 20 km,  
ordinal III..... 5 - 10 km,  
ordinal IV..... 1 - 3 km,  
ordinal V .....0,5- 1 km.

Punctele secundare nu au un caracter permanent, ele servesc doar în mod pasager și de obicei sînt puncte de detalii, de poligonații, etc.

Ca un criteriu vechiu de clasificare este cel care împarte punctele topografice în: puncte de stație, adică acelea în cari sînt așezate instrumentele de măsurat și puncte de viză, acelea asupra cărora sînt date vizele.

Această clasificare nu își găsește sens, deoarece în general, practic, punctele servesc și ca puncte de stație și ca puncte de viză.

Cu toate acestea în lucrările curente ne servim destul de frecvent de aceste notații.

- 84 -

- b) Marcarea punctelor topografice.

Punctele artificiale, alese de noi în vederea operațiunilor ce avem de executat, trebuie fixate, materializate pe teren prin anumite materiale.

Aceasta operațiune se numește marcarea punctelor.

Punctele topografice sînt marcate în diferite feluri, în funcție de importanța lor și de felul ridicărilor ce se bazează pe aceste puncte.

Atunci cînd punctele nu au o importanță prea mare și cînd ele servesc în mod temporar operațiunilor de ridicare, marcarea punctului este făcută simplu, printr-un țaruș de lemn în care este bătut un cui cu o creștătură, indicînd punctul topografic sau eventual prin țaruși de metal, cari după terminarea operațiunilor sînt scoși.

Dacă însă dorim ca punctele să primească un caracter de permanență, cum este cazul cînd avem puncte principale, atunci marcarea este făcută prin repere de piatră, repere de zidărie simplă sau combinată cu fier, ori prin borne de beton sau beton armat.

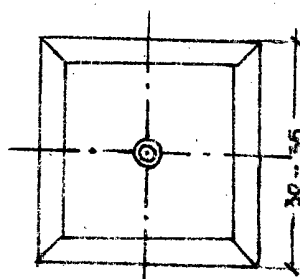
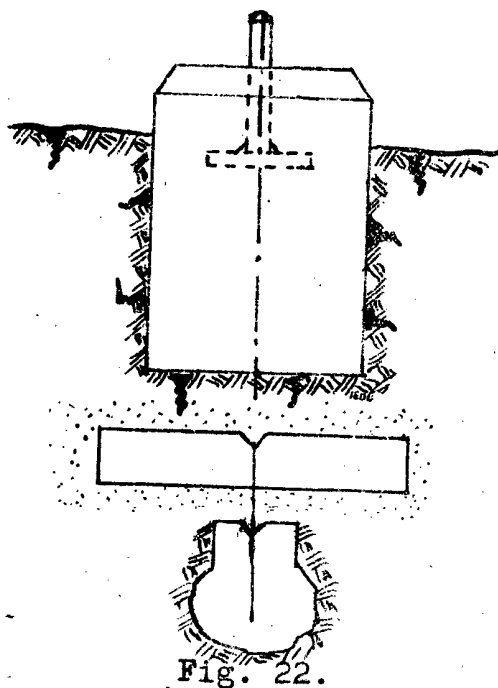
Punctele principale pentru triangulația de ord. I se marchează prin repere sau borne, din beton în formă prismatică, avînd la partea delă suprafață încastrat un mic tub de fontă sau fier, Fig. (a), în care în timpul operațiunilor este introdus jalonul.

În locul tubului pot avea o scobitură în care este turnat plumb, ori încastrat un simplu nit sau se face numai o creștătură, aceasta reprezentînd punctul topografic.

Dimensiunile reperului sînt cele date în Fig. 22.

Deoarece pierderea unui punct topografic, pe care au fost bazate operațiunile și ridicările noastre, ar prezenta o pierdere costisitoare, spre a feri distrugerea cu timpul a reperului de citre răufăcători, trebuie să permanentizăm sau să stabilim reperele conform următorului procedeu:

Sub reper se așează o placă (b) cu creștătura afalată pe proiecția punctului. Placa are o grosime de 30 cm și o suprafață de 40 x 40 cm sau 45 x 45 cm.



In locul acestei plăci se mai în-  
trebuințează un tub de fier, în-  
trodus cu centrare perfectă, iar  
deasupra lui se așează o placă  
subțire.

Sub placă se așează un  
bloc de piatră (C), avînd la fel  
proiectat punctul pe creștătura ei.  
Peste acest bloc de pia-  
tră se așează mangel pisat.

In acest fel avem mai mul-  
tă siguranță că punctul nostru nu  
va fi distrus.

Se mai întrebuițează  
borne ca cele din Fig. 23.

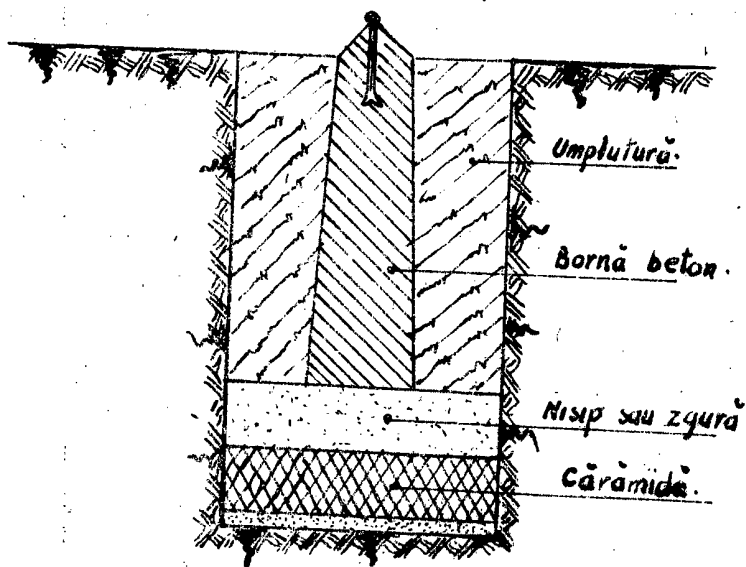


Fig. 23.

Pentru punctele de triangulație de ord. II și III se întrebuintează aceleași repere ca pentru cele de ord. I, doar că dimensiunile pot fi mai reduse.

Punctele de ord. IV se marchează prin repere din blocuri de piatră cu partea superioară fasonată în formă de prismă cu secțiunea pătrată, avînd laturile de 50-60 cm, iar pe față superioară au un semn oarecare care fixează în spațiu punctul ales de noi.

Se mai întrebuintează reperul din Fig. 25, care este turnat din beton, are formă prismatică, cu secțiune pătrată și cu o bază mai mare, iar fixarea punctului în spațiu este centrul unei țevi încastrate.

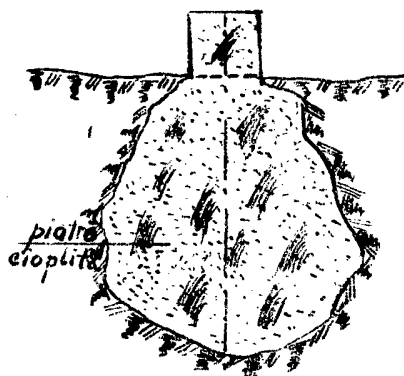


Fig. 24.

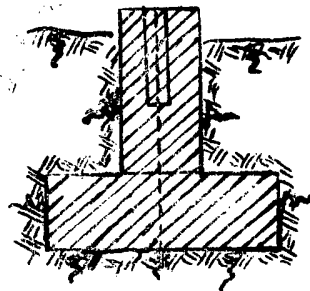
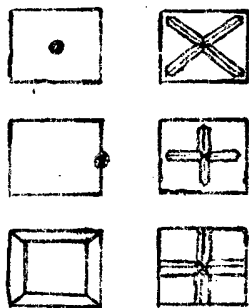


Fig. 25.

Reperele întrebuintate pentru punctele triangulației de ord. V sînt la fel ca cele de mai sus, se obișnuiește însă și următorul reper, Fig. 26.

Se face în teren o groapă în care se toarnă beton, iar în beton se încastratează o țevă metalică, al căreia centru va reprezenta punctul nostru.

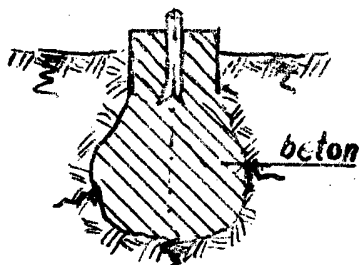


Fig. 26.

La marcarea punctelor cu caracter pasager, așa cum am mai amintit, ne servim de țaruși de lemn sau de tuburi de fier. Țaruși de lemn sau picheții sînt întrebuintați în cazuri că avem terenuri moi.

Ei se confecționează din lemn de esență tare, de secțiune obișnuit, rotundă sau pătrată, cu lungime va-

- 87 -

riabilă, după tăria solului.

Ca dimensiuni uzuale diametrul sau lungimea laturei când secțiunea este pătrată, de 4 cm, lungimea țarșului 40 - 60 cm.

Bateria lor se face cu maiul, recomandându-se ca să fie bătuți până la nivelul solului.

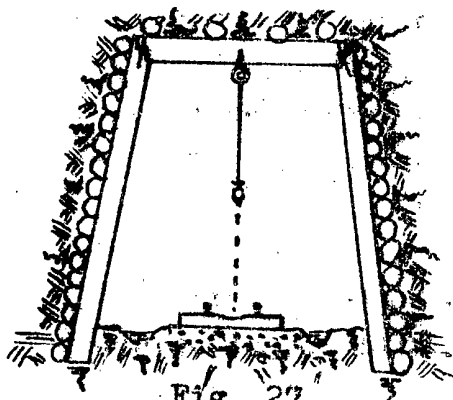
Punctul topografic este reprezentat, frecvent, printr-un cui cu floare, bătut în țarș.

Țarși metalici sau tuburile de fier sînt cu un capăt ascuțit, pentru a putea fi introduse în pământ cu ușurință. Acești țarși sînt utilizați în cazul terenurilor pietroase.

Lungimea țarșilor variază în general, între 0,3 - 0,8 m.

În orașe, unde este asfalt sau piatră, se întrebuintează țarși metalici sau țevi de beton, așezate astfel ca punctele să aibă vizibilitate, de obicei la intersecția străzilor și pe marginea șoselei.

În ridicările subterane (mine, tuneluri) marcarea punctelor se face, dacă este posibil, în fel ca la suprafață. Dar de cele mai multe ori în tuneluri și în galeriile de mină, din cauza circulației în terase spațiul este cerut de transporturi și nu ne mai stă la dispoziție, marcarea se va face fie în tavanul galeriei, fie în pereții laterali sau în talpa galeriei.



În tavanul galeriei marcarea poate fi făcută printr-un simplu cârlig înșurubat în grinda tavanului, Fig. 27, de care se agață un fir cu plumb pentru proiectarea punctului și eventual semnalizarea lui, sau se face ca în Fig. 28, adică se sapă în tavanul galeriei un gol în care se încastrează o bucată de lemn, un fel de dop, în care se bate o scoabă, un cui în formă de U.

Cuiul are zîmți ca în Fig. 29, pentru fi mai bine fixat.

Scoaba are la mijloc un mic orificiu (O) care reprezintă tocmai punctul topografic.



Fig. 28.

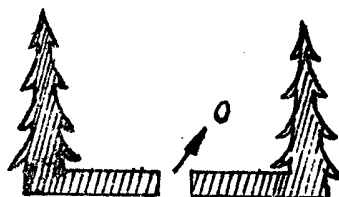


Fig. 29.

Cite odată semnalele se instalează în pereții laterali ai galeriilor.

În acest caz se aleg eşafodaje puternice în cari se introduc niște piulițe, cari la rândul lor, primesc prin înșurubare niște suportți, cari servesc pentru instalarea aparatelor topografice sau a celor de semnalizare.

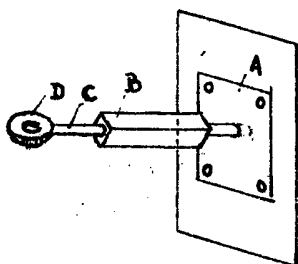


Fig. 30.

În Fig. 30, A este eşafodajul de lemn, B este piulița metalică fixată în piesa de lemn, C este suportul înșurubat în piulițe.

Suportul poartă discul D, pe care poate fi instalat aparatul.

Acest suport se instalează numai la nevoie.

În talpa galeriei marcarea se face ca în Fig. 31, unde A este un reper de piatră sau beton, în care este încastrat un cui sau este făcută o creștătură, care reprezintă punctul topografic: [A]

Pentru adăpostirea reperului, așezat la nivel inferior nivelului talpei galeriei, se întrebuintează o cutie C sau un capac.

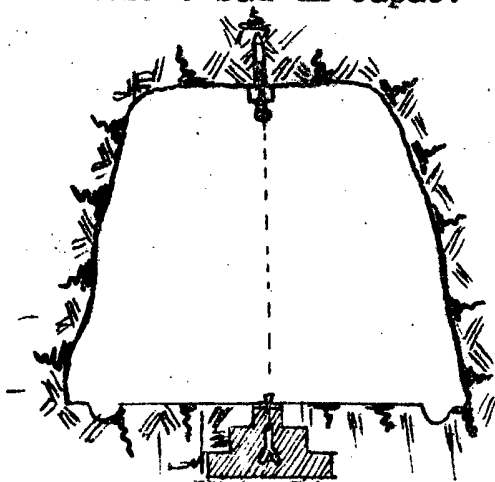
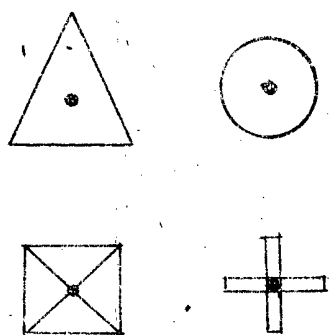


Fig. 31.

De obicei în galeriile de mină permanența semnalelor este mult periclitată, fie din cauza intensității transporturilor sau a modificărilor neîncetate, a apelor subterane ori a surpăturilor probabile, fapt care face ca în aceste cazuri să se întrebuinteze de predilecție, marcarea în tavanul galeriei, care este mai mult ferit decât talpa sau pereții laterali.

Pentru ridicările fotografice sau fotogrametrice, executate fie din avion, fie terestru, marcarea punctelor trebuie astfel făcută,





încît acestea să poată fi vizibile la distanțe mari.

Ca atare, marcarea punctelor este făcută prin figuri geometrice mari, vopsite cu benzi de var în jurul punctului.

Fig. 32.

c) Schimbarea unui țaruș printr-un reper de piatră.

Cînd se pune problema de a înlocui un țaruș printr-un reper de piatră, operațiunea poate fi făcută în modul următor:

Se înfig în cruce patru ~~șuruburi~~ fișe (Fig. 33 a) și apoi se întind două bucăți de sfoară în așa fel încît încrucișarea acestor bucăți de sfoară să cadă exact deasupra punctului de reper.

Se strîng siorile, țarușul se scoate și se înlocuiește cu reperul de piatră, a cărui poziție este în permanență controlată cu sforile legate de fișe.

Cadastrul român recomandă metodele scrișite în Fig. 33 b și 33 c. Metoda din 33 b constă în a înfișe pe teren, la oarecare distanță de reper, două fișe 1 și 2, se întinde sfoara de cele două fișe și pe această sfoară se

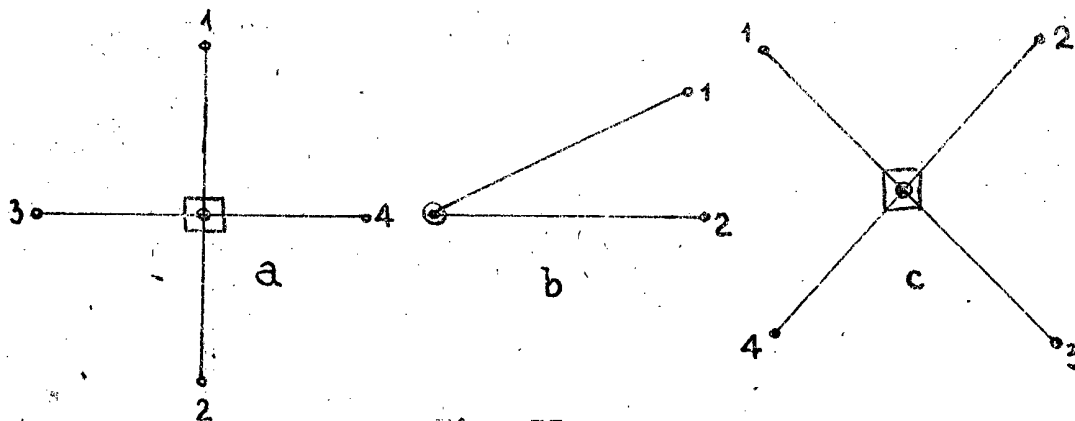


Fig. 33.

face un semn în locul unde ea este deasupra punctului.

În acest fel se poate ușor controla poziția punctului în timpul introducerii reperului nou.

Cea de a doua metodă este identică cu cealaltă, cu deosebirea că se mai introduce încă o pereche de fișe, pentru a putea face controlul asupra așezării noului reper, din două poziții.

- d) Nomenclatura punctelor.

Punctele de pe teren alese de noi și asupra cărora am executat lucrările, am dat vize, etc. trebuie notate în carnetul nostru de observație și pe crochiurile pe care le facem, cu nomenclatura unică.

Nomenclatura va trebui să fie clară, uniformă și precisă, pentru ca punctele de pe teren să poată fi găsite cu ușurință în orice moment.

O nomenclatură sistematică are o influență covârșitoare asupra rapidității executării lucrărilor, înlăturând chiar de la început posibilitatea de a face erori grosolane asupra interpretării punctelor cu cari avem de a face în ridicările noastre.

În afară de aceasta o nomenclatură sistematică ne dă posibilitatea de a avea oricând o verificare a punctelor, ceea ce va atrage după sine o execuție comodă și cu minimum de erori a ridicărilor topografice.

Se pot imagina diferite sisteme de notație a punctelor.

Dăm mai jos un sistem adoptat de noi mai frecvent și întrebuintat în ridicările topografice și anume:



puncte de triangulație de ordin superior  
primul de ordinul I și cel de al doilea  
de ordin II.

punct de triangulație de ord. III.

punct de triangulație de ordin inferior,  
IV sau V.

punct nod de poligonație,

punct de poligonație,

punct de segment,

punct de detaliu.

Punctele de triangulație au alăturată o literă mare a alfabetului latin ( A,B,etc.), spre a putea fi deosebite unele de altele.

Uneori triunghiul care indică punctul de triangulație este prevăzut cu o cruciuliță sau săgeată:

spre a arăta că este nestaționabil, ceea ce însă nu este strict necesar, deoarece aceasta reiese din schița care indică topografia punctului respectiv.

Punctele de poligonație, în mod analog, spre a fi deosebite, sînt numerotate prin numere arabe, la fel și cele de detaliu, cari pot rămîne însă și nenumerotate.

În locul literelor alfabetului latin, pentru punctele de triangulație din localitățile în care se găsește un singur punct geodezic, se întrebuintează notația cu triunghiul urmat de numele localității, adeseori chiar prescurtat.

## - 2) Semnalizarea punctelor în timpul operațiilor.

Deoarece punctele topografice alese pe teren, așa cum am văzut, pot fi la distanțe foarte mari, distanțe la cari reperii fixați, care marchează punctele respective, nu pot fi văzuți, de aceea poziția acestor repere va trebui semnalizată.

Evident că punctele cari sunt vizibile, cum ar fi de exemplu o cruce de biserică, un paratrăsnet dela un coș de fabrică, etc., nu mai este necesar a fi semnalizate, se semnalizează numai acele puncte, desigur artificiale, cari nu sînt vizibile.

Semnalizarea punctelor se face cu jalonul cu balizele sau piramidele.

Jaloanele sînt niște piese drepte confecționate din lemn.

Secțiunea lor în general este octogonală, dar sînt întrebuintate și jaloanele de secțiune hexagonală, circulară sau triunghiulară.

Au o grosime ce variază între 3,5 cm și 4 cm diametru, iar lungimea pentru jaloanele obișnuite este de 2 m, în mod excepțional pot fi de 3 - 4 m.

Jaloanele sînt vopsite, în benzi alternative de 20 cm sau cele mari de 50 cm, în culorile roșu și alb, spre a fi ușor deosebite de alte obiecte din mediul înconjurător.

capătul inferior se termină cu un sabot metalic, care permite implantarea jalonului cu mai multă ușurință în teren.

Capătul superior al jaloanelor este prevăzut cu o despicătură sau cu o găurice centrală longitudinală, în care poate fi fixat un fanion pentru a mări vizibilitatea jalonului.

In Fig. 34 pot fi văzute jaloanele, precum și modul lor de așezare.

#### Balizele.

In cazul când punctul topografic se găsește la distanța mai mare de operator, la 400 - 500 m, în acest caz semnalizarea punctului nu mai poate fi făcută cu jalonul și atunci se recurge la balize care sînt niște prăjini drepte, cu lungimea de 4 - 8 m și cu diametrul, la mijloc, de 5 - 10 cm.

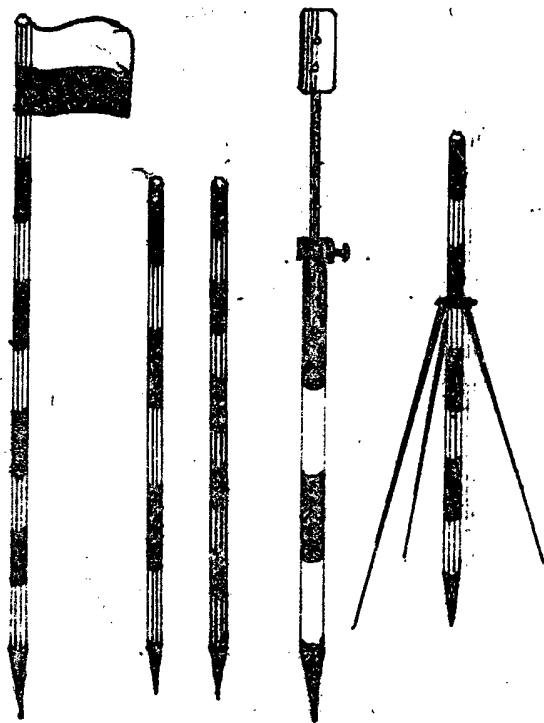


Fig. 34.

Pentru semnalizarea punctului, baliza este prevăzută la capătul ei superior cu un fanion.

Atunci, când punctul ce se semnalizează este de mică importanță, baliza se poate infișa vertical, lângă reper.

In cazul că avem de a face cu puncte importante, cu puncte de ordin superior, atunci baliza trebuie așezată cu exactitate pe verticala punctului.

Cînd este cerută fixarea pe verticala punctului, se folosesc balizele excentrice, de construcție simplă sau piramidele, cari au construcție specială.

In Fig. 35, 36 și 37, de mai jos, se pot vedea diferite tipuri de balize și piramidele, de la baliza simplă utilizată pentru punctele de mică importanță, pînă la piramidele cele mai complicate.

Piramida pentru care sînt date dimensiunile, este cea recomandată de către Cadastrul R.P.R.

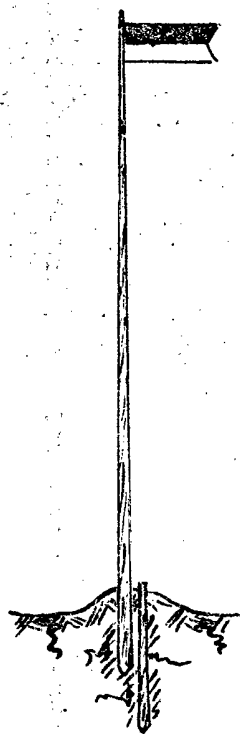


Fig. 35.

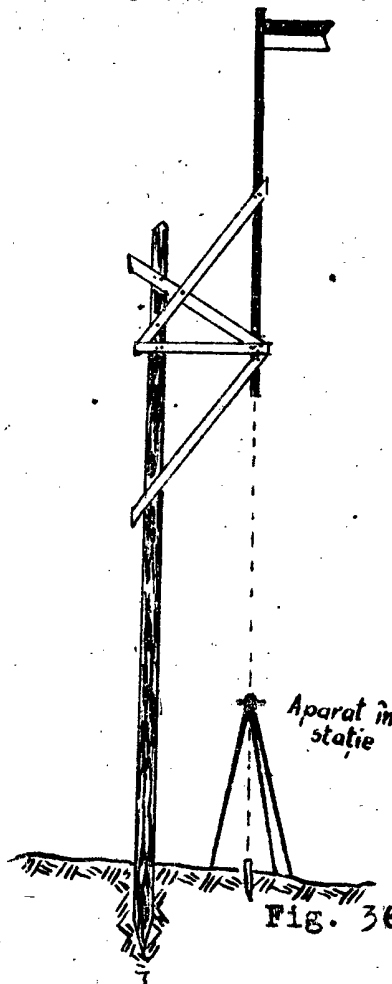


Fig. 36.

Piramidele de lemn, atunci cînd depășesc înălțimea de 30 m, prezintă o mulțime de dezavantaje destul de serioase, cum ar fi procurarea materialului lemnos, cerut în cantități relativ destul de mari, apoi transportul acestei cantități de lemn este anevoios.

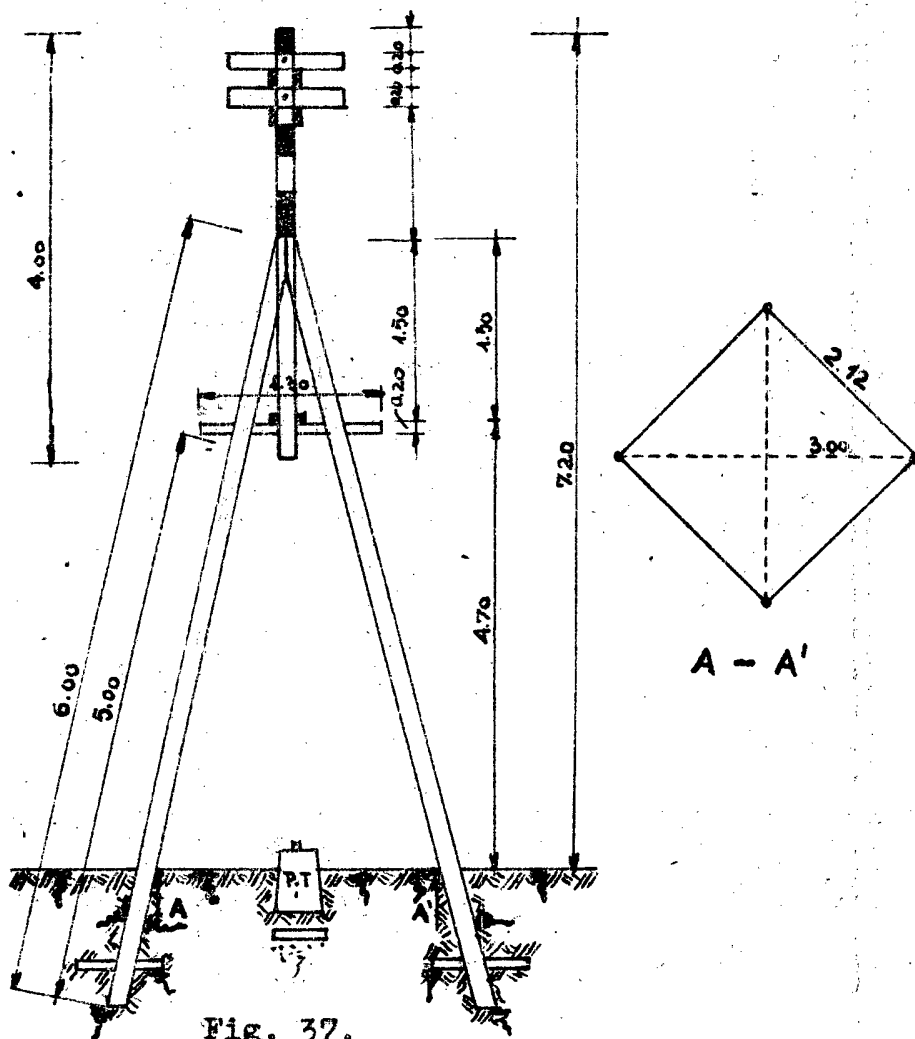


Fig. 37.

Urmează montarea piramidei, operațiune greoaie și care cere manoperă multă și costisitoare.

Dar cel mai serios inconvenient îl constituie faptul că materialul lemnos, odată introdus în operă, este pierdut, el rămânând în general pe loc în piramidă, pînă cînd putrezește.

Aceste inconveniente sînt înlăturate prin piramidele metalice demontabile, care prezintă avantajul că au un volum redus, greutate mică, deci ușor transportabile, montare rapidă, materialul se recuperează prin faptul că după terminarea operațiunii asupra unui punct, piramida este transportată și montată în altă parte.

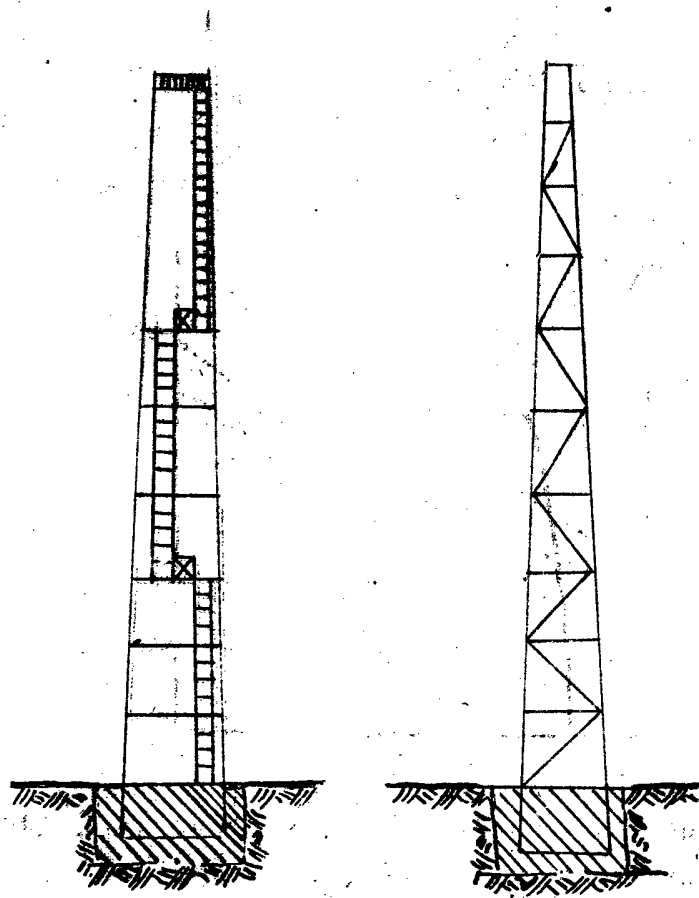


Fig. 38.

Piramidelor metalice li se aduce observația că din cauza căldurii solare, inegal luată de montanții lor, aceștia ar primi dilatațiuni ceea ce ar duce la deviere dela verticala punctului.

Acest lucru fiind exclus în cazul piramidelor de lemn.

Acest neajuns este realmente adevărat, însă el poate fi îndepărtat prin acoperirea montanților în timpul operațiunii.

În noua triangulație sau adoptat piramidele din beton armat, construcții cari să rămână în permanență pe teren.

Bineînțeles că aceste piramide, gigantice, costisitoare și care rămân definitiv în punctul unde au fost fixate, se întrebuintează numai în triangulațiile de ordin superior.

Pentru a recunoaște mai bine amintele balize, sînt întrebuintate diferite feluri de semnale pentru înregistrarea lor.

Va trebui să avem grijă ca în carnetul de operațiuni să se treacă balizele vizate nu numai cu numărul lor de ordin, dar chiar și desenul semnalului și culorile acestuia.

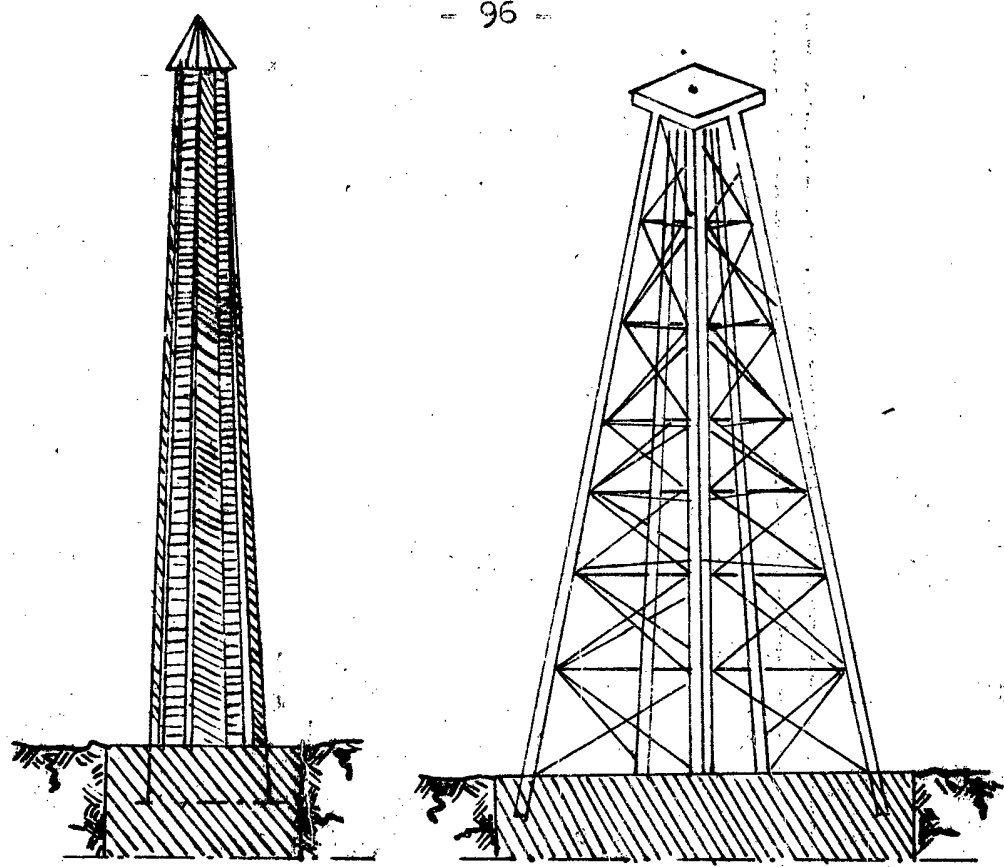


Fig. 39.

Semnalizarea se mai poate face prin discuri sau fanioane colorate cu două culori (albastru-roșu sau alb-galben, etc.), fie prin scinduri bătute cu cruce și vopsite în alb și negru (Fig.40.)

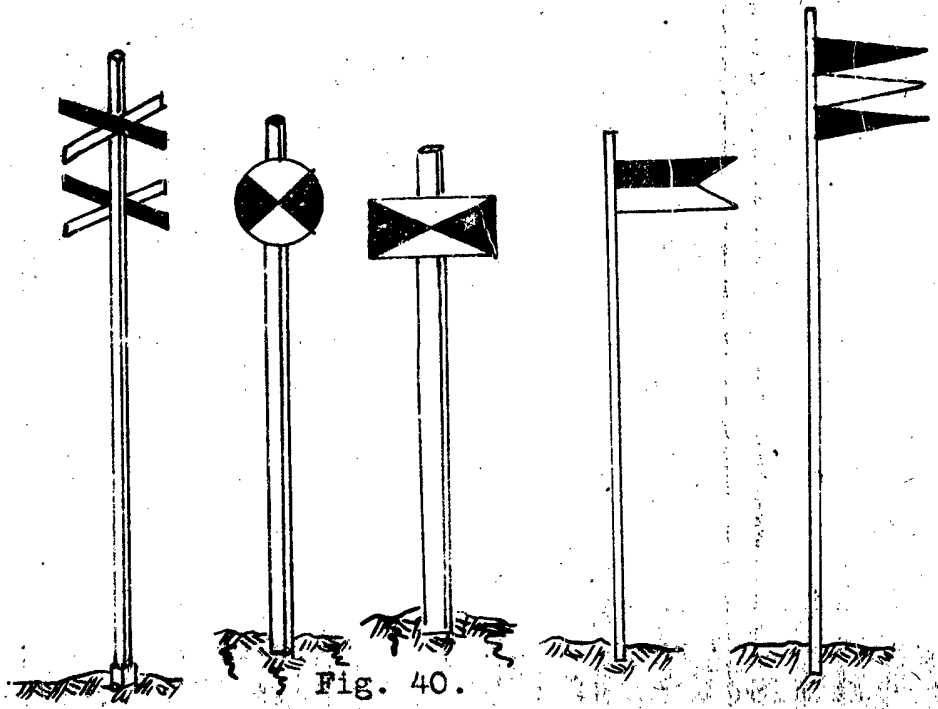


Fig. 40.



Se înțelege că combinația culorilor, precum și alegerea balizelor, piramidelor, în ceea ce privește mărimea și solidaritatea lor, este lăsată la alegerea, aprecierea și priceperea operatorului.

Important este deci ca punctele să fie bine semnalizate, să fie evitate confuziile și să aibă durabilitatea cerută de operațiune.

### - 3. Trasarea aliniamentelor.

Aliniamentul este rezultatul intersecției unui plan vertical cu suprafața pământului, este deci linia formată în urma acestei intersecții.

Ca orice dreaptă și aliniamentul este determinat de două puncte prin care trece planul vertical.

Aceste puncte așa cum s-a văzut, pot fi două repere așezate la capătul aliniamentului sau undeva în lungul lui.

Sînt însă cazuri, în ridicările topografice, cînd marcarea unui aliniament nu este suficientă numai prin două repere. Așa de exemplu ar fi la măsurarea directă a lungimei aliniamentului, cînd se cere o semnalizare prin mai mult de două semnale, jaloane, balize, etc., așezate pe aliniament în exteriorul celor două repere sau intermediare lor.

Dacă avem două aliniamente cari se intersectează într-un punct, marcarea este suficientă, dacă se marchează punctul de intersecție și cite un punct de plecare din cele două aliniamente.

Trasarea poate fi făcută cu ochiul liber sau cu ajutorul unor instrumente speciale.

În operația de trasare a aliniamentelor, semnalizarea punctelor este făcută cu ajutorul jaloanelor.

Din cauză că jalonul are o grosime anumită, el nu va da o linie exact matematică, așa că razele vizuale tangente la muchiile externe ale jalonului creiază în spațiile acestuia un spațiu, o zonă nevăzută de operator.

Spațiul acesta nevăzut este cu atît mai mare, cu cît ochiul operatorului se va găsi mai aproape de jalon.

În Fig. 41 se poate observa că, dacă ochiul operatorului se găsește în  $O'$  la distanță mică de jalonul așezat în punctul  $A$ , spațiul nevăzut este cel dintre razele

0'1" și 0'2", care este mai mare ca spațiul dintre 0'1" și 0'2" format cînd ochiul operatorului s-ar afla în punctul 0" mai depărtat de jalonul din A.

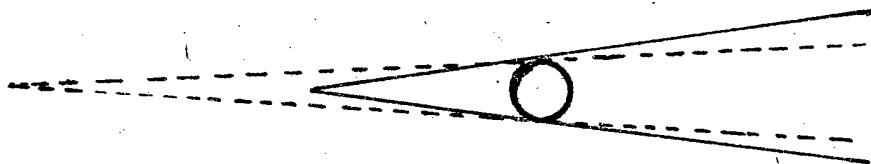


Fig.41.

Deci cu cît ochiul operatorului este mai depărtat de jalon, cu atît spațiul nevăzut este mai redus și ca atare, un plan intermediar, care poate fi așezat în orice poziție din acel spațiu, dîndu-ne iluzia că este pe aliniament, va fi mai precis așezat cînd spațiul va fi mai redus.

De aci se deduce ca regulă: cînd se marchează un aliniament cu ochiul liber, este necesar ca operatorul să facă vize dela distanțe, cît este posibil, mai mari de jalonul din A, în direcția opusă plantării jaloanelor intermediare.

Operațiunea de plantare pe teren a jaloanelor făcută în scopul de a subîmpărți un aliniament oarecare sau a-l mai întinde, poartă denumirea de jalonare.

#### Observațiuni.

a) Din practică se deduce că pentru reducerea spațiului nevăzut din spatele jalonului, denumit și spațiul mort, este bine întotdeauna ca jalonarea să fie făcută dela jalonul cel mai îndepărtat de operator, înspre cel mai apropiat de el, adică înspre cel în care se face stație.

Dacă s-ar proceda invers, atunci jaloanele mai apropiate de operator ar crea la rîndul lor, un spațiu mort, care ar ascunde jaloanele mai îndepărtate și drept consecință aliniamentul nu va fi drept.

b) Jalonarea nu poate fi făcută de un singur operator, decît în cazul că va avea în fața sa cel puțin două jaloane.

c) În terenurile de cîmpie distanțe între jaloane variază între 100 - 150 m, distanță care în cazul terenurilor accidentate este redusă la 30 - 60 m.

d) Este evident că acolo unde este cerută o precizie mai mare, cum ar fi galeriile de mină sau în tuneluri, trasarea aliniamentelor nu mai este făcută cu ajutorul jaloanelor, ci sînt folosite fire cu plumb prinse de tavanul galeriei.

De altfel în galerie trasarea nu se face cu ochiul liber, ea este făcută cu ajutorul instrumentelor.

### Cazuri particulare de trasări de aliniamente.

În practică avem frecvent cîteva cazuri particulare de trasări de aliniamente, cazuri în care se recurge la anumite artificii, pentru rezolvarea problemei.

a) Se cere să se facă marcarea unui aliniament ale cărui extremități A și B sînt accesibile, însă nu sînt vizibile, una din alta din cauza unei ridicături de pămînt între ele. (Fig. 42)

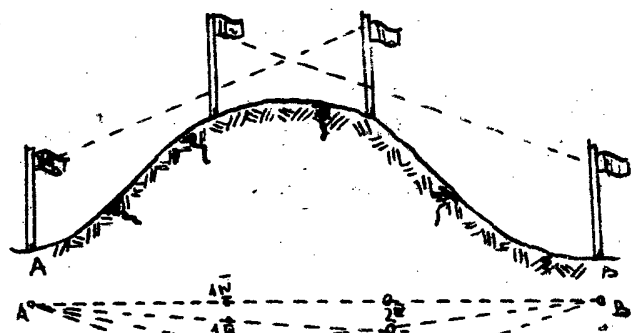


Fig. 42.

Pentru această operațiune ne folosim de 4 jaloane, din care două se plasează la extremitățile aliniamentului pe care vom să-l trasăm, adică în punctele A și B și celelalte două jaloane pe vârful ridicăturii, mișcate de către un ajutor dirijat de operatorii din A și B, pînă cînd cele 4 jaloane sînt pe un singur aliniament.

Jalonul 2 se așează în poziția 2' iar operatorul din A plimbă ajutorul pînă cînd jalonul ajunge în poziția 1' pe aliniamentul A 2'.

După aceea operatorul din B vizează și mișcă jalonul 2 din 2' în 2'' pentru a fi pe aliniamentul B 1'.

Urmează jalonul 1, care va fi mișcat din 1' în 1'' pînă cînd este pe aliniamentul A 2''.

Procedîndu-se din aproape în aproape, se va ajunge într-o poziție, cînd toate patru jaloane se vor găsi pe același aliniament AB.

b) Să se marcheze pe teren un aliniament A B, ale căruia extremități A și B sînt vizibile, însă terenul din spatele lor este inaccesibil.

Aceasta este cazul frecvent întălnit la încrucișarea străzilor din orașe.

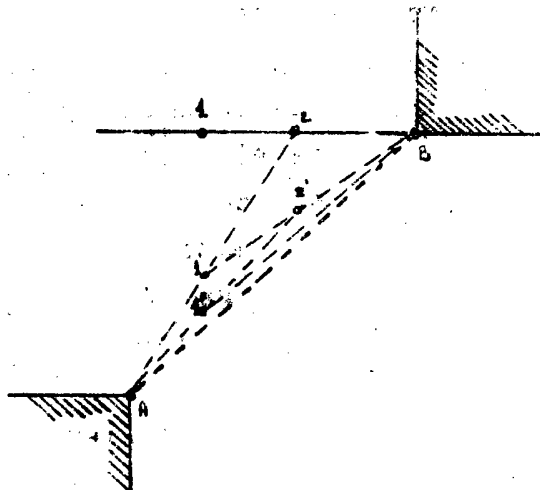


Fig. 43.

Se plantează un jalon în punctul 1 și alt jalon în punctul 2, astfel că jalonul din 2 să fie văzut de operatorul din 1 pe aliniamentul 1 B.

Se mută operatorul din 1 în 2 și ajutorul schimbă jalonul din 1 în 1' pe aliniamentul 2 A.

Urmează schimbarea jalonului din 2 în 2' pe aliniamentul 1' B, apoi jalonul din 1' în 1'' și așa mai departe pînă cînd jaloanele 1 și 2 se vor găsi pe aliniamentul A B, adică privind

din 1 se va vedea jalonul 2 pe aliniamentul jalonului 1 și punctul B, pentru că, apoi privind din 2 să se vadă jalonul 1 pe aliniamentul jalonului 2 și punctul A.

c) Jalonarea unui aliniament într-o vale îngustă.

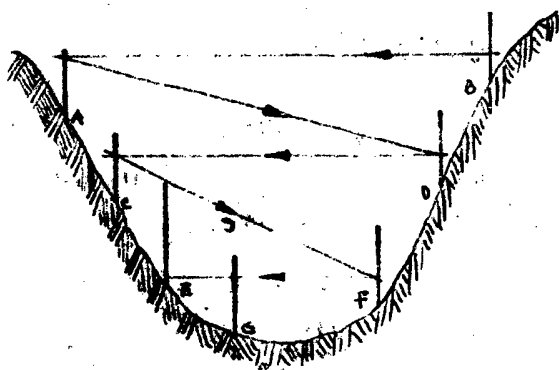


Fig. 44.

Dacă se cere să se ducă un aliniament între două puncte A și B printr-o vale îngustă, în acest caz se plantează în punctul A și B câte un jalon, apoi operatorul dă viză din A spre B și dirijează ajutorul ca să așeze un jalon în C pe aliniamentul B A și apropiat de punctul A.

Se mută operatorul în C și prin B și C fixează jalonul D, care va fi și el acum pe aliniamentul A B.

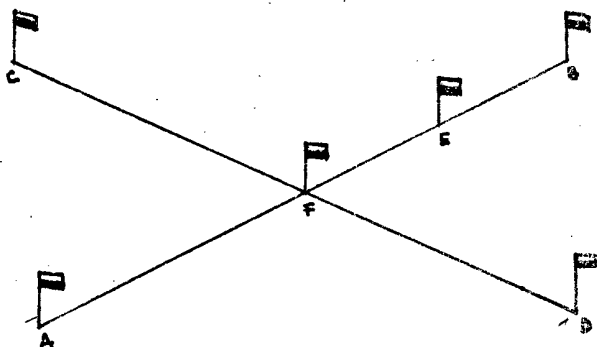
Urmează viză din D spre C și fixează jalonul E.

Operația continuă pînă cînd avem complet jalonat, prin vale, aliniamentul A B.

d) Se cere să se găsească pe teren punctul de intersecție a două aliniamente AB și CD.

Operațiunea necesită doi operatori, unul în punctul A și celalalt în punctul C, precum și un ajutor.

Capetele aliniamentelor sînt marcate prin jaloane.



Ajutorul are în mînă un jalon și se găsește pe aliniamentul A B, pe care se plimbă, menținut pe aliniament de către operatorul din A, pînă cînd operatorul din punctul C îl vede și pe aliniamentul C D. În acest moment se va găsi în punctul de intersecție al celor două aliniamente.

Fig.45.

e) Trasarea aliniamentelor perpendiculare.

Această problemă se rezolvă prin măsurarea lungimilor și se va trata, prin diferite metode, în capitolul următor, după măsurarea directă a lungimilor.

#### 4) Instrumente pentru determinarea și trasarea aliniamentelor.

Deoarece operațiunea descrisă de trasare a aliniamentelor nu este precisă, pentru cazurile cînd ne este cerută o precizie mai mare, se vor utiliza diferite instrumente în rezolvarea mai exactă a problemei.

Intre instrumentele mai frecvent utilizate se disting următoarele:

a) Echerul cu pinule simple.

Cele mai simple instrumente întrebuintate la trasarea aliniamentelor sînt pinulele sau echerul cu pinule, format dintr-o riglă metalică (din bronz), cu capetele în unghi drept.

Aceste capete sînt prevăzute cu câte două ferestruici, una îngustă este ferestruica ocular, iar cealaltă mai lată, este ferestruica obiectiv.

În cazul ferestruicii obiectiv este întins un fir vertical subțire.

Cele două ramuri au ferestruicile dispuse ca în Fig. 46, adică dacă la una ferestruica îngustă este sus, la cealaltă va fi ferestruica îngustă jos.

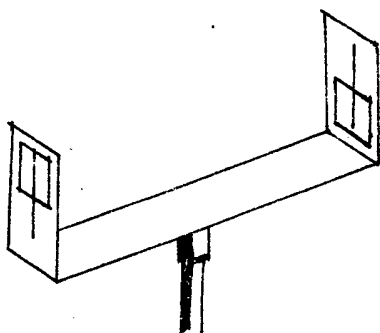


Fig. 46.

Vizindu-se de la ferestruica îngustă către ferestruica obiectiv de pe ramura a doua a pinulei, ferestruica îngustă și cu firul ferestruicii de pe ramura a doua determină un plan de viză, un plan vertical, care ne va determina aliniamentul în cauză.

Pinulele pot fi întrebuințate și singure pentru trasarea aliniamentului, însă în mod obișnuit ele sînt găsite adaptate la diferite aparate topografice.

#### b) Echerul cu puncte în cruce.

Dacă în loc de o singură riglă metalică am avea două rigle metalice sau două pinule simple, perpendiculare una pe alta la mijloc, avem un echer cu pinule în cruce.

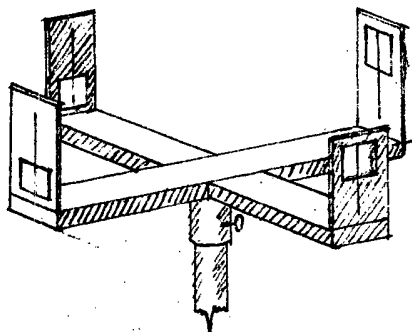


Fig. 47.

Cu acest echer, cu pinule în cruce, pot fi trasate aliniamente perpendiculare unul pe altul în punctul de stație P.

Însă pentru ca cele două aliniamente să fie într-adevăr perpendiculare trebuie ca cele două pinule să formeze între ele cu precizie un unghi de  $90^\circ$ .

Pentru acest motiv atunci, cînd se trasează aliniamente perpendiculare, folosindu-ne de echerul cu pinule în cruce, va trebui în prealabil să se facă verificarea acestuia.

Verificarea echerului în cruce se face astfel: cu ajutorul unui pinul, de exemplu cu pinulul 22' se vizează un punct oarecare A, în care a fost fixat un jaon.

- 103 -

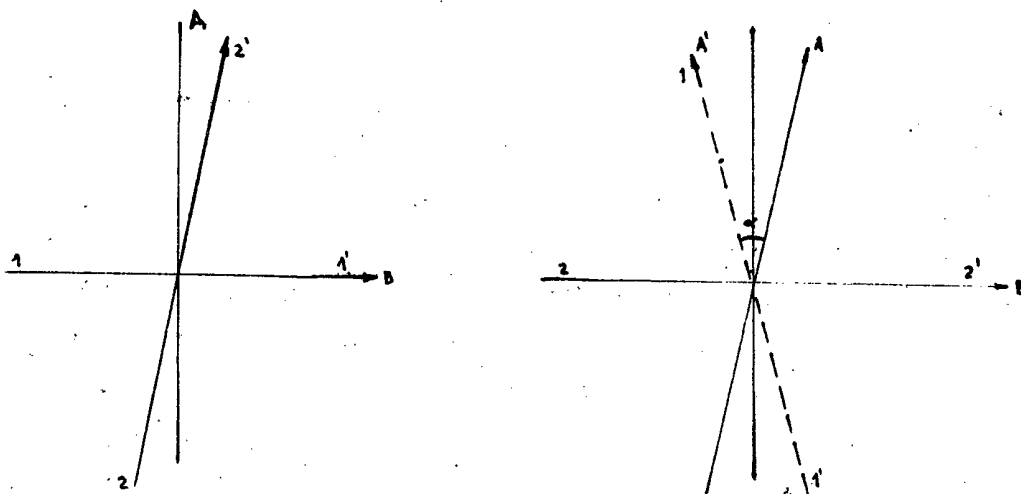


Fig. 48.

In acelaș timp prin cealaltă pereche de pinule 11' se vizează punctul B.

Se rotește aparatul și vizăm cu pinulul 22' punctul B.

Dacă între cele două perechi de pinule avem  $90^\circ$ , în acest caz va trebui să găsim cu pinulul 11' tot punctul A.

În caz contrar, cele două pinule nu formează între ele un unghi drept, iar unghiul  $\alpha$  dintre cele două direcții luate de pinula 22' când s-a vizat punctul A și pinula și pinula 11', când cu pinula 22' am vizat pe B, reprezintă dublul erorii de construcție.

Eroarea poate fi eliminată numai prin aprecierea valorii ei de către operator, fără însă a putea efectua rectificarea instrumentului.

### c) Echerul de arpentor.

În practică, în locul echerului în cruce, se întrebuintează echerul de arpentor, care este o cutie metalică, de obicei prismatică, în pereții căreia sînt ferestruici identice cu cele ale echerului cu pinule, cu deosebire că la echerul de arpentor numărul perechilor de pinule nu e numai de două, ci are patru perechi, adică în total opt ferestruici obiectiv și opt ferestruici ocular.

Cu ajutorul lui pot fi date alinamente nu numai la  $90^\circ$ , ci în patru direcții cari se intersectează în punctul de stație sub un unghi de  $45^\circ$ , cît este valoarea unghiului dintre două perechi de ferestruici.

Întrebuintarea echerelor de arpentor este identică cu cea a echerului cu pinule, adică oricui operatorului va sta în dreptul unei ferestruici înguste și vi-

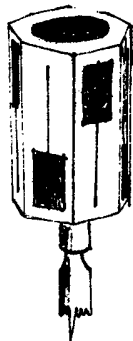


Fig. 49.

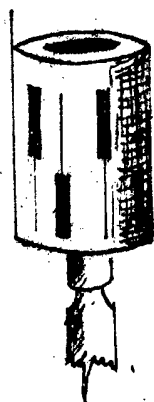


Fig. 50.

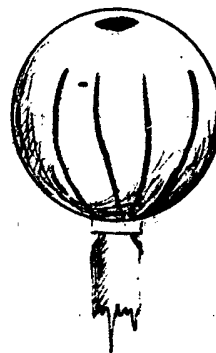


Fig. 51.

zează prin aceasta și prin firul aflat în mijlocul ferestruiciei largi așezată vis-avis.

Evident că înainte de a se da vizele, echerul de arpentor se pune în stație, cu ajutorul unui baston în care vom să avem intersecția aliniamentului.

Cum se vede în figura (50 - 52) de mai sus, mai multe feluri de echeri de arpentor, deosebite numai prin forma lor de construcție, care poate fi prismatică, cilindrică, sferică sau tronconică.

Verificarea echerelor arpentor se face în mod identic ca în cazul echerului cu pinule, cu deosebirea că rotirea aparatului nu se face cu  $90^{\circ}$ , ci numai cu  $45^{\circ}$ .

Poate fi făcută și pentru  $90^{\circ}$ , dacă vom să stabilim justetea instrumentului și pentru direcțiunile perpendiculare.

#### d) Echerul cu oglinzi.

În afară de instrumentele, arătate mai sus, întrebuințate pentru trasarea a două aliniamente perpendiculare sau cari să facă între ele un unghi de  $45^{\circ}$ , mai sînt întrebuințate și alte instrumente practice a căror construcție este bazată pe reflexiunea luminii.

Cu aceste instrumente pot fi trasate aliniamente perpendiculare sau aliniamente de alte unghiuri.

Așa cum am amintit, aceste instrumente sînt bazate pe legile reflexiunii luminii, adică, dacă am avea două oglinzi plane  $O$  și  $O'$  (Fig. 52), care fac între ele un unghi



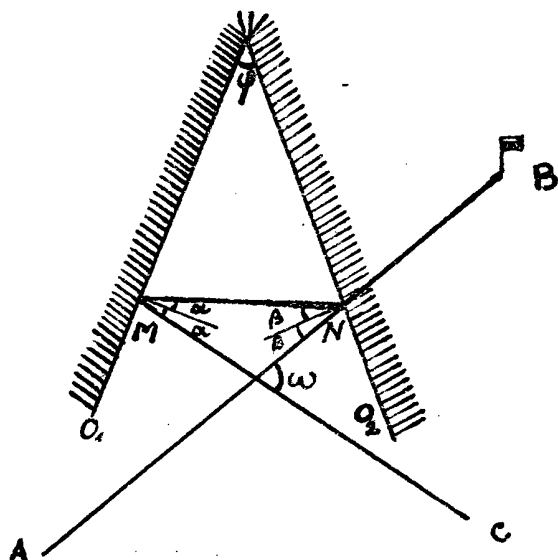


Fig. 52.

oarecare , în acest dispozitiv o rază de lumină, pornind dintr-un punct oarecare C, căzând pe oglindă  $O_1$  în punctul M, se reflectă și ajunge pe oglinda  $O_2$  în N, de unde reflectându-se din nou, va lua o direcție care formează cu direcția ce a pornit din punctul C un unghi egal cu dublul unghiului format de cele două oglinzi.

Intrădeavăr cu notațiile din figură în triunghiul OMN scriind că suma unghiurilor este  $180^\circ$  avem:

$$\gamma + (90^\circ - \alpha) + (90^\circ - \beta) = 180^\circ$$

$$\text{sau } \gamma - (\alpha + \beta) = 0$$

adică:

$$\gamma = \alpha + \beta.$$

Dar unghiul  $\omega$  fiind un unghi exterior:

$$\omega = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta)$$

De unde reiese cele afirmate mai sus, adică  $\omega = 2\gamma$  sau unghiul între cele două raze MC și NA este dublul unghiului format de oglinzile  $O_1$  și  $O_2$  ceea ce revine că unghiul între aliniamentul AB și MC este egal cu  $2\gamma$ .

Cum în general unghiul între cele două oglinzi este de  $45^\circ$ , urmează că  $\omega$  sau unghiul dintre cele două aliniamente este de  $90^\circ$ , cu alte cuvinte aceste aliniamente sînt perpendiculare.

Pe acest principiu al dublei reflexii, se bazează echeretele cu oglinzi, cu ajutorul cărora se trasează aliniamentele perpendiculare conform următorului procedeu: echerul este ținut în mînă, avînd legat de minerul său un fir cu plumb cu ajutorul căruia putem staționa într-un punct al aliniamentului CM, în punctul în care vom să trasăm un aliniament perpendicular pe CM.

În punctul C se plasează un jalon, se învîrtește echerul cu oglinzi pînă în momentul cînd apare pe oglindă imaginea jalonului din C.

În acel moment se va dirija ajutorul operatorului pentru a planta în teren un alt jalon (în punctul B) în așa fel, încît capătul superior al acestui jalon, văzut prin ferestruica echerului sau pe deasupra lui, să fie în prelungirea imaginii jalonului din C.

Se fixează în punctul de stație un al treilea jalon și în acest moment operațiunea este terminată.

Sînt construite echere cu oglinzi care au ferestruică plasată la mijlocul oglinzii, ceea ce permite a se face cu mai multă precizie compararea suprapunerii imaginii reflectate a jalonului din C, cu jalonul din A.

Verificarea echerelor cu oglinzi se face analog ca cea a echerului de arpentor, iar unele pot fi chiar rectificat, datorită faptului că una din oglinzi poate avea o mișcare de rotație realizată printr-un mic șurub.

#### f) Echerele cu prisme.

Sînt bazate pe principiul reflexiunii totale.

Din fizică știm, că emergența razelor luminoase, care pătrund printr-o prismă de cristal, nu are loc întotdeauna și razele, în anumite pozițiuni ale lor se reflectează totalmente.

Dacă luăm de exemplu cristalul de varietate crown-glass, unghiul limită al lui și a aerului fiind  $40^{\circ} 41'$ , orice rază luminoasă va cădea pe suprafața unei astfel de prisme, sub un unghi mai mare de  $40^{\circ} 41'$  va suferi o reflexiune totală în interiorul cristalului.

În mod obișnuit, prismele întrebuintate în echere sînt prisme triangulare -rectangulare isoscele.

În Fig. 53, ABC, este o prismă de cristal iar  $P_1, P_2, P_3, P_4$ , ar fi drumul parcurs de o rază luminoasă în interiorul prisme.

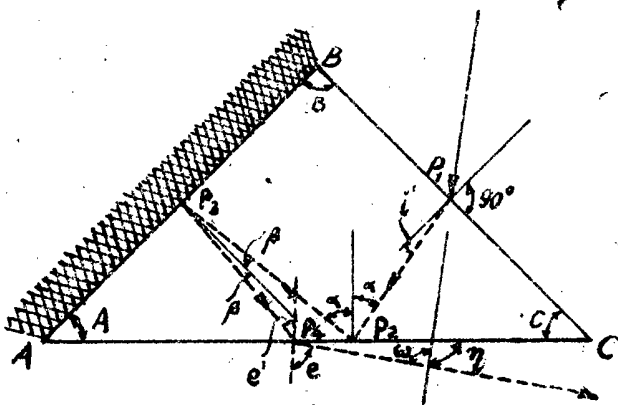


Fig. 53.

Dacă  $\alpha$  este mai mare de  $40^{\circ} 41'$ , atunci avem o reflexiune totală.

ca unghi exterior: -

$$\varphi = \hat{c} + 90^{\circ} - i$$

$$\varphi = \omega + 90^{\circ} - e$$

De unde rezultă unghiul  $\omega$  care este unghiul dintre raza care pătrunde și cea care iese din prismă.

$$\omega + 90^{\circ} - e = \hat{c} + 90^{\circ} - i$$

$$(1) \omega = \hat{c} + (e - i)$$

Dar din triunghiul  $C P_1 P_2$  avem:

$$\hat{C} + (90^\circ - i') + (90^\circ - \alpha) = 180^\circ$$

Deci:

$$(2) \hat{C} - \alpha - i' = 0$$

In triunghiul  $A P_1 P_2$ :

$$\hat{A} + (90^\circ + B) + (90^\circ - \alpha) = 180^\circ$$

Sau:

$$(3) \hat{A} + B - \alpha = \theta$$

Din triunghiul  $A P_2 P_3$  avem:

$$\hat{A} + (90^\circ - B) + (90^\circ - e') = 180^\circ$$

$$(4) \hat{A} - B - e' = \theta$$

Cu datele de mai sus se obține:

$$\begin{aligned} 2\hat{A} &= \alpha + e' \\ 2\hat{A} - \hat{C} &= e' - i' \quad e' = \alpha + i' \end{aligned}$$

In cazul cînd  $e = i$  avem  $\hat{C} = \omega$ , dar în baza relației:

$$\frac{\sin i}{\sin i'} = \frac{\sin e}{\sin e'}, \text{ urmează că } i = e'$$

$$\text{Deci: } 2\hat{A} - \hat{C} = \theta \quad \hat{A} = \frac{\hat{C} + \theta}{2}$$

Așa că cele trei unghiuri  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$  vor fi:

$$\begin{aligned} \hat{C} &= \omega \\ \hat{A} &= \frac{\omega + \theta}{2} \\ \hat{B} &= 180^\circ - \frac{3\omega}{2} \end{aligned}$$

Dacă vom ca unghiul  $\omega$ , unghiul dintre direcția razei intrate și a razei ieșite, să fie de  $90^\circ$ , va trebui ca prisma să aibă unghiurile  $\hat{C} = 90^\circ$ ,  $\hat{A} = 45^\circ$ ,  $\hat{B} = 45^\circ$ .

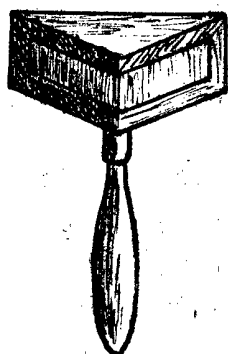


Fig. 54.

In figura 56 este reprezentat un echer cu prisme.

Cristalul este prins într-o montură metalică, la care în partea de jos se află un minier.

Operatorul ține echerul cu muchia de  $90^\circ$  îndreptată către el, așa cum este poziția din Fig. 54.

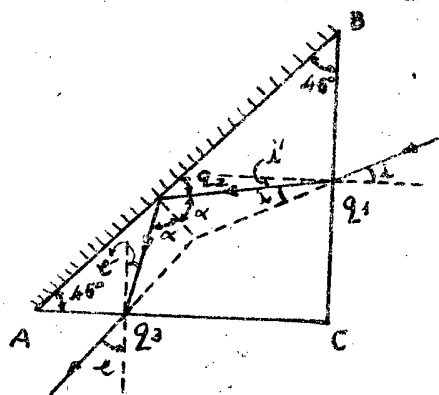
O muchie de  $45^\circ$  a prismei este îndreptată către jalonul care se găsește pe un aliniament.

Pe cealaltă muchie de  $45^\circ$  se va vedea imaginea dublu reflectată a acestui jalon și dacă privim pe deasupra echerului, poate și fixat pe teren un alt jalon pe o direcție perpendiculară pe prima, dacă se caută ca imaginea dublu reflectată a primului jalon să fie în prelungirea jalo-

nului de pe acel de al doilea aliniament, jalon care să fie văzut pe deasupra echerului.

La echerule cu prisme pot fi deosebite următoarele două cazuri:

-1. Raza luminoasă suferă o reflexiune și 2 refracțiuni, cazul din Fig. 55.



Din triunghiul  $Q_1 Q_2 Q_3$  se găsește  
 $45^\circ + (90^\circ + \alpha') + (90^\circ - \alpha'') = 180^\circ$   
 sau:  $\alpha' = \alpha'' - 45^\circ$

Din triunghiul  $A Q_1 Q_2$   
 $45^\circ + (90^\circ - \alpha) + (90^\circ + \alpha') = 180^\circ$

Deci:  $\alpha' = \alpha - 45^\circ$

Cu alte cuvinte:  $\alpha' = \alpha - 45^\circ$

$\alpha' = \alpha - 45^\circ$

adică:  $\alpha' = \alpha - 45^\circ$

Fig. 55.

Dar conform următoarei relații:

$$\frac{\sin i}{\sin i'} = \frac{\sin e}{\sin e'}$$

rezultă că și:  $i = e$

Din patrulaterul  $C Q_1 Q_2 Q_3$  rezultă:  $90^\circ + (90^\circ - \alpha') + \omega + (90^\circ - \alpha'') = 360^\circ$   
 de unde  $\omega = 90^\circ + \alpha' + \alpha''$  și fiindcă  $e = i$  conform celor stabilite mai sus, urmează că:  $\omega = 90^\circ + \alpha'$

Cu alte cuvinte, unghiul dintre raza incidentă și cea refractată depinde de unghiul de incidență, ceea ce se traduce în fapt prin nestabilitatea imaginilor (adică imaginile sînt mișcătoare) lângă muchia cu unghiul de  $90^\circ$ , chiar atunci cînd instrumentul ar avea o cît de neînsemnată deplasare în mina operatorului.

-2. Un al doilea caz este cel din Fig. 56, cînd raza luminoasă suferă două reflexiuni și două refracțiuni.

Din triunghiul  $A Q_1 Q_2$   
 $45^\circ + (90^\circ + \beta) + (90^\circ - \alpha) = 180^\circ$   
 $\beta = \alpha - 45^\circ$

Din triunghiul  $C Q_1 Q_2$   
 $90^\circ + (90^\circ - \alpha') + (90^\circ - \alpha) = 180^\circ$   
 $\alpha' = 90^\circ - \alpha$

Din triunghiul  $Q_1 Q_2 Q_3$  rezultă:

$2\beta + (90^\circ + \alpha') + (90^\circ - \alpha) = 180^\circ$   
 sau:

$2(\alpha - 45^\circ) + (90^\circ + \alpha') + (90^\circ - \alpha) = 180^\circ$

de unde:  $\alpha' = 90^\circ - \alpha$

decide:  $\alpha' = \alpha$

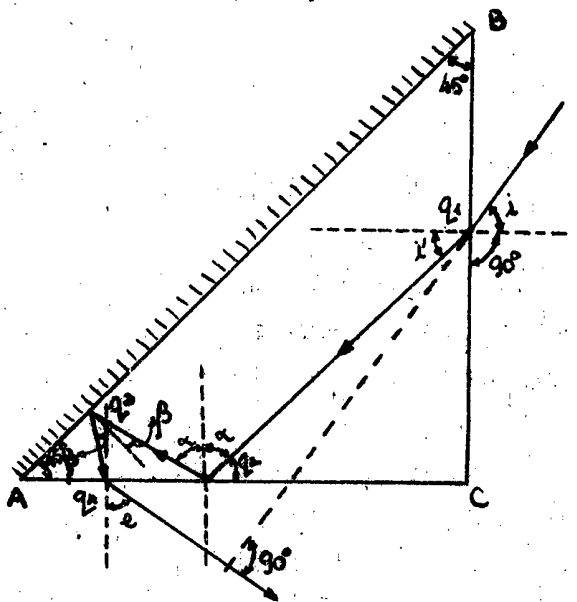


Fig. 56.

Dar din relația:  $\frac{\sin e}{\sin i} = \frac{\sin e}{\sin e}$ , urmează că și  $e = i$

Ca unghiul exterior:

$$\omega = (90^\circ - e) + i = 90^\circ + (i - e)$$

$$\text{Însă: } = i - e$$

$$\text{Deci: } \omega = 90^\circ$$

În acest caz unghiul dintre cele două raze este un unghi de  $90^\circ$  și el nu mai depinde de unghiul de incidență.

În afară de echerul cu prisme descris mai sus, se mai întrebuintează și echerul cu prisme perpendiculare asemenea și suprapuse (Fig. 57).

Cu ajutorul acestui echer cu prisme perpendiculare, se poate lucra cu fiecare prismă independent, trăsfînd alinente perpendiculare, dar se poate lucra cu ambele prisme pentru a găsi pe același alinament puncte intermediare.

Imaginea unui jalon, de exemplu a celui din dreapta, formată pe prisma de jos, se va căuta a fi suprapusă imaginii jalonului sau reperului din stînga, găsită pe prisma de sus.

Dacă se proiectează acum punctul cu un fir cu plumb, legat de mineralul instrumentului, s-a determinat un punct intermediar pe aliniamentul celor două repere.

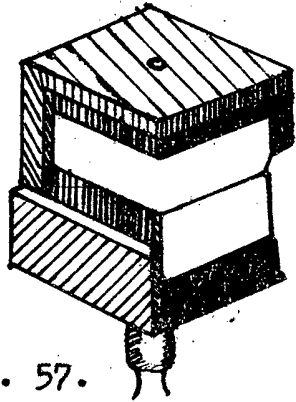


Fig. 57.

Preciziunea trasărilor de unghiuri cu ajutorul echerilor.

$\omega = \alpha + \varepsilon$

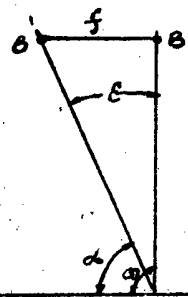


Fig. 58.

In Fig. 58, dacă  $\varepsilon$  este eroarea comisă, avem:

$t q. \varepsilon = \frac{f}{D}$  D = distanța  
 $f = D t q. \varepsilon = \frac{D \varepsilon}{3438}$

După Lorber erorile sistematice sînt:

- Pentru echere de arpentor:  $\varepsilon_1 = 4'$
- " " cu oglinzi:  $\varepsilon_1 = 2'$        $f = \frac{D}{0,26}$
- " " cu prisme:  $\varepsilon_1 = 2'$        $f = \frac{D}{1,92}$

iar f în mm.

La erorile sistematice se mai adaugă eroarea accidentală și atunci eroarea totală este, notînd eroarea accidentală cu  $f_2$  :

$f = f_1 + f_2$   
 $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$  care la prisma pentagonală este  
 $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2.$

După Lorber erorile totale sînt:

- Pentru echerul cu arpentor  $f = 2,3 D$
- 1,35 D. " " cu oglinzi la vizare liberă:  $f = 24,5 +$
  - " " " " " " " " " "  $fixă f = 8,4 + 0,97 D.$
  - " " cu prisme  $f = 9,5 + 1,17 D.$

In aceste formule, la fel ca mai sus,  $D$  este dat în metri, iar  $f$  în mm.

Distanțele la cari se pot da vize cu instrumentele descrise mai sus, pentru a fi în limita admisibilă a erorilor, sînt:

- Pentru echere de arpentor:  $D \leq 20$  m,
- " " cu oglinzi de vizare liberă  $D \leq 20$  m,
- " " " " " fixă  $D \leq 40$  m,
- " " cu prisme  $D \leq 40$  m.

Aceste distanțe se pot calcula din formulele de mai sus, pentru cazul cînd reprezentarea lungimilor ar fi făcută la scara 1 : 2500, cînd lungimea apreciabilă, pe desen este de 0,03 mm, căreia îi corespunde o eroare pe teren de 50 mm.

### Utilizarea echerelor.

In afară de trasarea aliniamentelor, cu ajutorul echerelor, așa cum se va vedea la ridicarea detaliilor, pot fi fixate pe teren diferite puncte cari ne interesează, prin coordonatele lor rectangulare față de un aliniament oarecare, luat ca axă a absciselor.

Aceasta operațiune se execută astfel:

Să propunem ca vom să fixăm pe un plan, mai multe puncte de pe teren, cum ar fi de exemplu colțurile unor parcele.

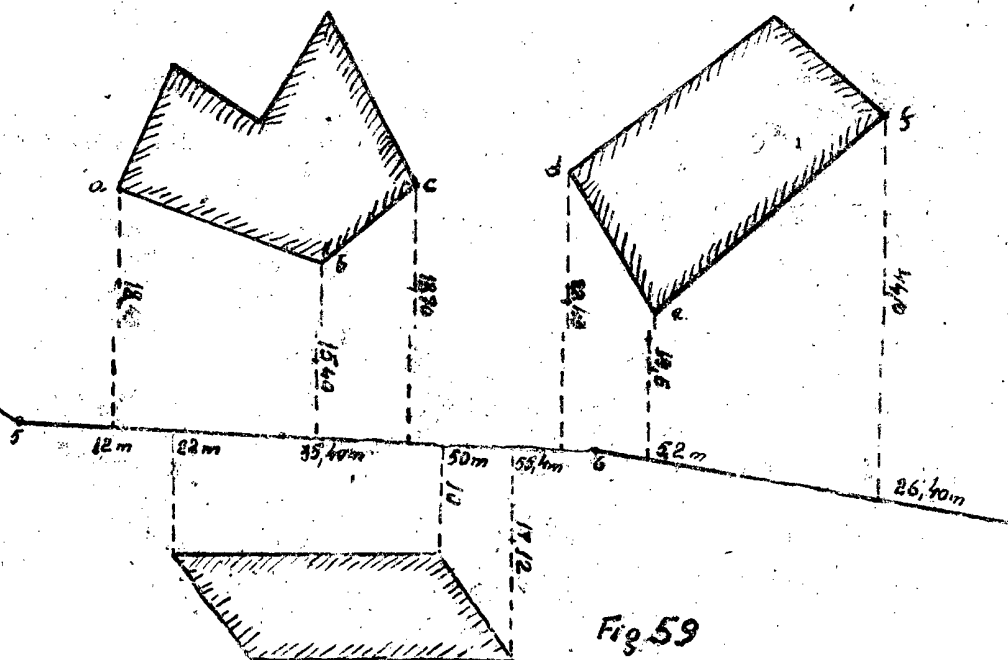


Fig. 59

În acest caz punctele acestea (a b c d) ne vor semnaliza prin jaloane.

Pe o linie de poligonatie, de exemplu 56, se va deplasa operatorul cu echerul în mină, după ce în prealabil în punctul din capătul aliniamentului, în punctul 6 a fost fixat un jalon.

Această linie de poligonatie va juca rolul axei absciselor.

Operatorul se va deplasa pînă cînd imaginea jalonului, de exemplu din punctul "a" este văzută în prelungirea jalonului din punctul 6, văzut pe partea deasupra a echerului.

În acel punct, care se va determina pe teren prin firul agițat de mînerul echerului, va fi tocmai piciorul perpendicularei coborîte din punctul "a" pe aliniamentul 5-6.

Dacă se măsoară distanța dela acest punct pînă la punctul 5 (punctul de început al aliniamentului și pînă la punctul de detaliu "a", atunci punctul de detaliu este determinat de coordonatelor lui față de aliniamentul 56.

Distanța dela 5 la piciorul perpendicularei, în figura egală cu 12 m, ar reprezenta obsecisa punctului a, iar distanța dela a la piciorul perpendicularei ar reprezenta ordonata acelui punct, în Fig. ar avea 18,45 m.

Metoda aceasta poartă denumirea de ridicare prin obsecise și ordonate.

## CAP. II.

### Măsurarea directă a lungimilor.

Măsurarea distanțelor poate fi făcută în două feluri: în mod direct, atunci cînd distanța de măsurat este un aliniament ale cărui puncte sînt accesibile și cînd distanța se parcurge dela un capăt la celălalt spre a se vedea de cîte ori se cuprinde în ea etalonul adoptat și mai poate fi măsurată o distanță în mod indirect: cînd lungimea este dedusă din calcule, fără ca ea să mai fie parcursă.

Această metodă, de măsurarea indirectă a distanțelor, este aplicată atunci, cînd punctele aliniamentului sînt inaccesibile, cînd aliniamentul este pe un teren accidentat sau cînd nu ne este cerută o precizie prea mare.



In acest capitol ne vom ocupa numai de măsurarea directă a lungimilor.

Ca unitate de măsură în măsurarea lungimilor se întrebuintează metrul, cu multiplii și submultiplii.

După cum s-a amintit, metrul definit din sfertul meridianului pământesc nu ca fiind  $\frac{1}{10,000,000}$  corespunde adevărului, deoarece la stabilirea etalonului pământesc a fost greșit evaluat, astăzi fiind bine stabilit că lungimea sfertului de meridian este de 10,002.008 m și atunci prin metru se înțelege lungimea etalonului care se găsește la Paris și anume la Sevres în pavilionul Breteuit.

Multiplii și submultiplii metrului, cu notațiile lor, sînt:

1000 m	= un kilometru, se notează cu km,
100 m	= un hectometru, se notează cu hm,
10 m	= un decamtru " " cu dam,
1 m	= un metru, " " cu m,
0,1	m= un decimetru " " cu dm,
0,01	m= un centimetru " " cu cm,
0,001	m= un milimetru " " cu mm,
0,000 00 1	m= un micron " " cu $\mu$ ,
0,000 000 001	m= un milicron " " cu $m\mu$ .

După scopul pentru care se execută măsurarea unei lungimi, distingem: măsurători precise, măsurători obișnuite și măsurători puțin precise.

Evident că și instrumentele întrebuintate la măsurarea lungimilor, sînt adecuate felului de măsurare sau preciziei cerute.

## I. Instrumentele de măsurat lungimi.

Pentru măsurarea directă a lungimilor se întrebuintează următoarele instrumente:

Pentru măsurători precise : 1) Firul de invar sau de oțel  
2) Late de măsurat  
3) Pana de măsurat.

Pentru măsurători obișnuite:

4) Panglica de măsurat  
5) Ruleta de oțel sau pînză  
6) Firul de măsurat (de cîne-pă)  
7) Compasul de măsurat  
8) Lata cu picior.

Pentru măsurători mai puțin precise:

- 9) Lanțul
- 10) Roata de măsurat
- 11) Pedometrul.

1. Firul de invar sau de oțel:

În cazul măsurătorilor de foarte mare precizie, cum ar fi de exemplu măsurarea bazelor de triangulație, se întrebuintează firul de invar, care este un cablu subțire, confecționat dintr-un aliaj de nichel și fier, aliaj cu un coeficient de dilatație foarte mic, ceea ce face ca lungimea acestui fir să rămână constantă, nefiind influențată decât foarte puțin de variațiile de temperatură.

De aceea aceste fire de invar nu mai au nevoie de a le aduce corecțiunea pentru variația temperaturii.

Firul de invar are o lungime utilizabilă de 24 m, iar în U.R.S.S. sînt utilizate fire de invar și de 50 m care este întins pe două tripiede cu scripete, avînd la cele două capete o greutate prin care se realizează o întindere uniformă a firului.

*tripiede*  
Între cele două tripiede, pe cari se întinde firul, se așează alte două tripiede, cari sînt prevăzute cu verniere cu gradațiune milimetrică.

Tripiedele cu verniere sînt așezate în dreptul porțiunii de fir marcată printr-un reper.

Aceste repere arată lungimea utilizabilă a firului, adică lungimea firului între aceste repere este de 24 m.

Măsurarea distanțelor cu ajutorul firului de invar se execută astfel:

În primul rînd distanța este jalonată precis cu ajutorul unei lunete, plîntîndu-se jaloane sau țărugi la distanțe egale cu lungimea firului, adică la distanță de 24 m.

Se scot primele două jaloane și în dreptul lor sînt așezate tripiede cu verniere cari ne dau pe verniere diviziunii pozitive, sau negative, pe cari le adunăm la lungimea firului.

Se așează apoi în locul jalonului următor un tripied cu verniere și se măsoară la fel, avînd

grijă ca la distanțe să adăugăm cifrele de pe vernier, ținând cont și de sensul pozitiv sau negativ al acestei citiri.

Procedând în același fel se măsoară întregă lungime a aliniamentului.

În mod schematic, în Fig. 60 și 61 este arătat un fir de invar.

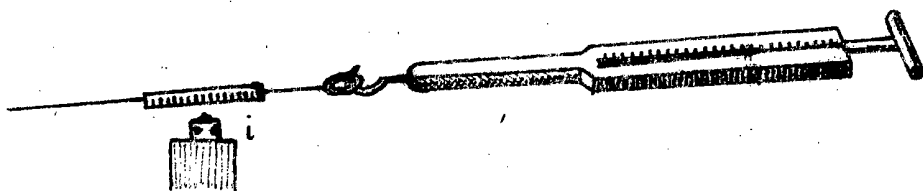


Fig. 60.

Precizia obișnuită prin întrebuințarea firului de invar este foarte mare.

Ca un exemplu, la măsurarea lungimii tunelului Simplon, de 20 km, diferența între cele două măsurători a fost de 2 cm, adică  $\frac{2}{1,000,000}$  din lungime.

În măsurătorile de precizie mai pot fi întrebuințate și fire de oțel, așezate pe trepiede speciale, cu cari se realizează întinderea firelor, așa cum se vede în figura 61, unde se arată firul lui Jaderin, care se compune din trei trepiede, două care servesc pentru întinderea firului și un trepied de reper prevăzut cu vernier.

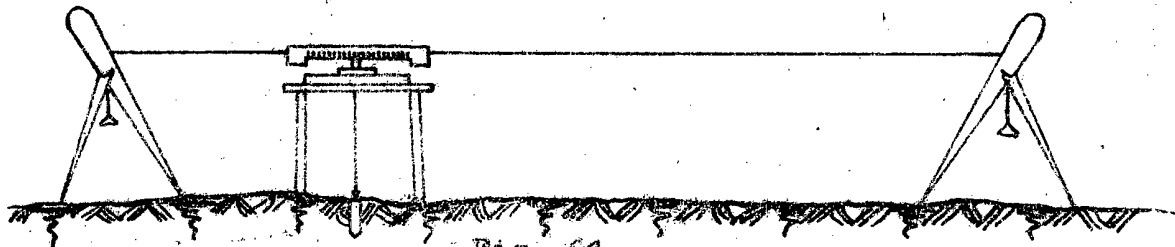


Fig. 61.

Diametrul firului de oțel este de 1,5 - 2 mm.

Întinderea lui pe cele două trepiede se realizează prin intermediul a două greutateți.

În mine, la adâncimi, se întrebuintează fire din oțel identice cu cel din care sînt fabricate coar-  
dele pianelor.

Cu scopul de a reduce oboseală, pre-  
cum și timpul de lucru, Ing. D. I. Ciurileanu, a preconizat fi-  
rul de oțel care îi poartă numele.

Acest fir de oțel este propriu zis  
un cablu de 100 metri lungime, format prin răsucirea unor fi-  
re de oțel de diametru de jumătate milimetru.

Cablu prezintă din 10 în 10 centi-  
metri o îndoitură, iar în dreptul diviziunilor de 50 ca cîte  
două îndoituri.

Gradațiunile pentru metri sînt mar-  
cate prin plăci de aramă numerotate, iar cele pentru 5 metri  
sînt formate din plăci lipite de fir.

Forța de întindere a firului Ciurilee  
nu este foarte mică, 5 - 10 kg.

Măsurarea distanțelor cu acest fir  
se face în mod identic ca la panglica de oțel.

## 2. Lata de măsurat.

Se întrebuintează în măsurători pre-  
cise, mai ales cînd aliniamentul ce voim să măsurăm, se află  
pe un teren ondulat.

Latele de măsurat sînt confecționate  
din lemn sticlă sau metal.

Au lungimea de 3 pînă la 6 metri și  
secțiuni diferite, rectangulare, rotunde, ovale, etc., la fel ca  
în Fig. 62.

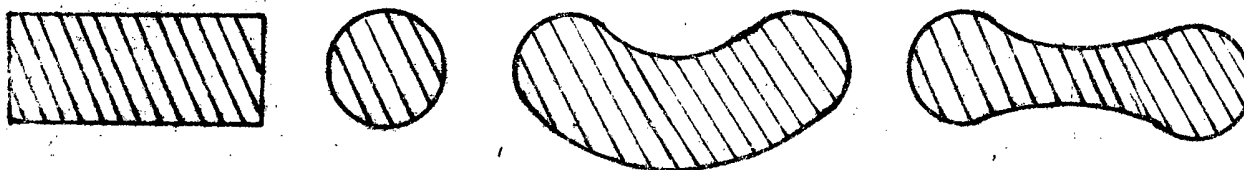


Fig. 62.

Cînd lata este confecționată din  
lemn, pentru a o feri de umiditate corpul ei, este impregnat  
cu ulei de in fiert și apoi este lăcuită.

După modul cum sînt marcate diviziu-

nile pe late, avem late la cari zero este la un capăt al ei și avem late la cari zero este marcat între capetele ei.

Operațiunea de măsurarea distanțelor cu lata, ne conduce la rezultate de precizie foarte mare, în schimb reprezintă dezavantajul că este foarte grea, delicată, cere timp mult, ca atare este și costisitoare, motiv pentru care latele sînt indicate numai la măsurarea bazelor pentru triangulație.

În timpul operațiunii, care se execută cu cel puțin două late, acestea se dirijează după aliniatul ce se măsoară și sînt așezate cap la cap.

Pentru a evita contactul direct dintre late, capetele lor sînt puțin distanțate, lăsîndu-se un mic spațiu liber, pe care îl măsurăm cu ajutorul unei riglete care este purtată pe lată.

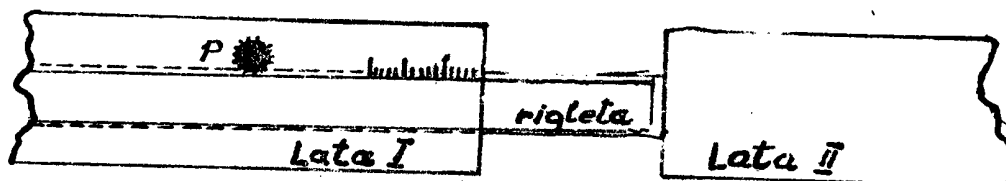


Fig. 63.

Cu ajutorul unui șurub de presiune (p) rigleta poate fi strînsă sau slobozită în niște jgheaburi, care îi permit acesteia ca să *culiseze* între capetele celor două late.

Rigleta poartă pe ea diviziuni în milimetri, așa că lungimea spațiului dintre două late este dată de rigletă în milimetri și cu ajutorul unui vernier pot fi găsite și fracțiunile de milimetri.

Ca atare, la măsurarea lungimelor cu latele se ia în considerare lungimea repetată a etalonului, la care se va adăuga spațiile date de rigletă și vernier.

În executarea măsurătorilor cu lata, se deosebesc trei metode, care depind de forma terenului și anume: măsurători pe teren pian, măsurători pe teren uniform înclinat și măsurători pe teren accidentat.

Vom trata pe rînd toate aceste trei cazuri.

a) Măsurătorile pe teren plan.

Înainte de începerea operațiunii la măsurarea unui aliniat de pe un teren plan, va trebui ca în prealabil să fie efectuate următoarele operațiuni:

- aliniamentul de măsurat să fie jalonat,
- pichetarea aliniamentului prin țărugi,
- folosindu-se picheții plantați de-a lungul aliniamentului, se va întinde un fir.

În cazul că aliniamentul de măsurat are o lungime mai mică decât 150 m, jalonarea aliniamentului se va face din 40 în 40 pași, iar în cazul când este mai mare, se vor lua puncte intermediare, a căror aliniere va fi făcută cu ajutorul instrumentelor și după aceea se va proceda la alinierea din 40 în 40 de pași.

Luăm ca exemplu cazul când măsurătoarea se execută cu trei late, caz în care două late rămân pe teren, iar cea a treia se plimbă.

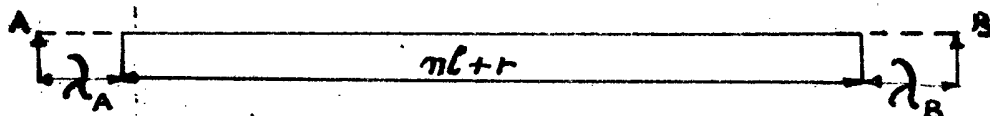


Fig. 64.

$l$  este lungimea etalonului,  $n$  - numărul de câte ori a fost cuprins etalonul,  $\lambda_A$  și  $\lambda_B$  - partea rămasă la cele două capete, care este mai mică decât lungimea " $l$ " a etalonului și  $r$  este restul.

Datele măsurătorilor se trec într-un protocol de măsurători, la fel ca cel de mai jos:

Lata			Partea rămasă
1	2	3	
////	////	////	$\lambda_A = 0,5282$
////	////	////	$\lambda_B = 0,8426$
////	////	////	$r = 2,5683$
17	16	16	

Distanța "D", adică lungimea aliniamentelor va fi:

$$D = n \cdot l + r + \lambda_A + \lambda_B$$

unde:

$$n = 15 + 15 + 15 = 45,$$

luând cazul că lata are lungimea:  $l = 4$  m.

Deci:

$$D = 45 \times 4 + 2,5683 + 0,5282 + 0,8426$$

$$D = 189,9391 \text{ m.}$$

Operațiunea de măsurare cu latele în cazul măsurătorii unei baze de triangulație, se repetă de mai multe ori, minimum de trei ori, iar pentru alte măsurători în mod obișnuit se face de două ori, odată dus și odată întors.

Luăm exemplul cazul când măsurătoarea este repetată de 5 ori, datele măsurătorilor fiind trecute în tabelul de mai jos.

Nr. obs.	Distanța	Eroarea	VV	Obs.
1	280.642	0	0	
2	646	-4	16	
3	640	+2	4	
4	641	+1	1	
5	641	+1	1	
	10	0	22	

Media aritmetică a măsurătorilor este:

$$M = 280,642 \text{ m.}$$

Eroarea medie este dată după cum știm din calculul erorilor de formula:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[v v]}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{22}{4}}$$

$$m = \pm 2,35 \text{ mm.}$$

Eroarea mediei aritmetice este:

$$\mu = \frac{m}{\sqrt{n}} = \pm \frac{2,35}{\sqrt{5}} \approx \pm 1 \text{ mm.}$$

b) Măsurători în teren uniform înclinat.

În cazul terenurilor uniform înclinate măsurarea aliniamentelor se face după panta terenului, urmând ca, după determinarea unghiului de înclinare al terenului, să se procedeze la reducerea lungimilor la orizontală.

Să presupunem că avem teren de configurația din Fig.65.

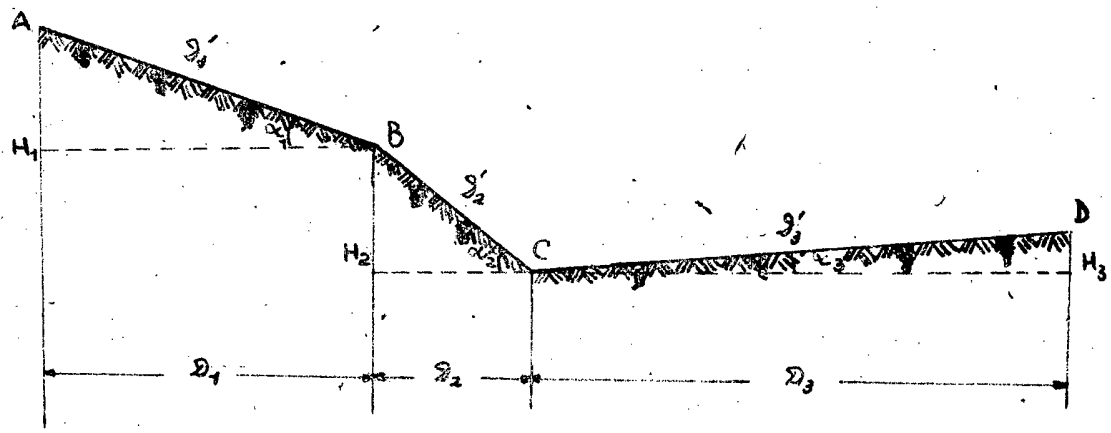


Fig. 65.

In acest caz se vor măsura pe panta terenului lungimele:  
 $\overline{AB} = D'_1$ ,  $\overline{BC} = D'_2$ ,  $\overline{CD} = D'_3$ , precum și unghiurile de pantă  
 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_x$ , urmînd reducerea acestor lungimi,  $D'_1, D'_2,$   
 $D'_3, \dots, D'_x$ , la orizontal, pe noi interesîndu-ne lung-  
 gimile  $D_1, D_2, D_3, \dots, D_x$ , cari sînt proiecțiunile  
 pe orizontalele lui  $D'_1, \dots, D'_x$ . Ca atare se pot calcu-  
 la  $D_1, D_2, D_3, \dots, D_x$ , astfel:

$$D_1 = D'_1 \cos \alpha_1 \quad \text{unde așa cum s-a amintit } D'_1, D'_2, D'_3 \text{ sînt}$$

$$D_2 = D'_2 \cos \alpha_2 \quad \text{lungimile măsurate, iar unghiurile } \alpha_1,$$

$$D_3 = D'_3 \cos \alpha_3 \quad \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_x \text{ reprezintă unghiurile de}$$

$$\vdots$$

$$D_x = D'_x \cos \alpha_x \quad \text{pantă.}$$

Cu ajutorul tabelelor de logaritmi se pot calcula lungimile în proiecțiuni orizontale.

Pentru ușurință au fost întocmite tabele care dau proiecțiunile pe orizontală la diferite lungimi pentru unghiul de pantă respectiv.

Dacă în locul unghiului de pantă  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_x$ , am avea diferențele de nivel, determinate prin nivelment, adică am avea pe  $H_1, H_2, \dots, H_x$ , în acest caz proiecțiunile pe orizontală sînt găsite cu ajutorul relațiilor:

$$D_1 = \sqrt{D_1'^2 - H_1^2} = D_1' - \frac{H_1^2}{2 D_1'}$$

$$D_2 = \sqrt{D_2'^2 - H_2^2} = D_2' - \frac{H_2^2}{2 D_2'}$$

$$\vdots$$

$$D_x = \sqrt{D_x'^2 - H_x^2} = D_x' - \frac{H_x^2}{2 D_x'}$$



- 121 -

După ce au fost calculate proiecțiile pe orizontală, se pot afla lungimea totală a aliniamentului proiectat pe orizontală, ca fiind:

$$D = D_1 + D_2 + \dots + D_x = [D] \text{ sau:}$$

$$D = [D' \cos \alpha] = [D'] - \frac{H^2}{2B'}$$

Pentru determinarea unghiului de pantă  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_x$  ne folosim de instrumentele denumite clinometre, cari sînt de construcție foarte simplă și cu ajutorul cărora se poate cu ușurință găsi aceste unghiuri.

În figura 66 poate fi văzut schematic un clinometru.

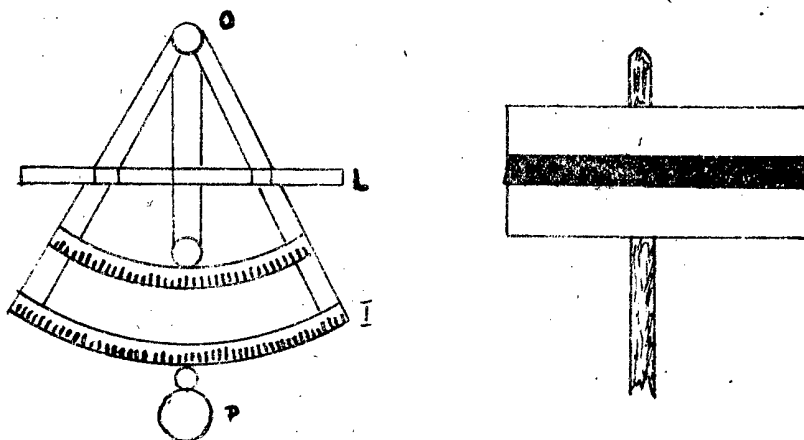


Fig. 66.

În punctul O sînt articulate un index culisant I și pendul P.

Pe indexul culisant este montată o lunetă L.

Arcul indexului are marcate diviziuni în grade și jumătăți de grade.

Întregul dispozitiv este fixat pe o bară, care se instalează la capătul aliniamentului.

O altă bară de lemn, pe care este fixat un panou sau un disc, vopsit în alb și negru astfel construită ca atunci, cînd sînt pe un aliniament orizontal dispozitivul cu index, luneta și cerc gradat și cu acest disc, dunga orizontală vopsită negru să fie la înălțimea lunetei.

Această bară cu panou se așează la celălalt capăt al aliniamentului sau în punctul intermediar unde se schimbă panta.

Cu lunetă se vizează dunga discului și unghiul de pantă se citește acum pe cercul divizat în grade și jumătăți de grade.

Măsurarea lungimilor cu lata  
pe teren accidentat.

Un aliniament aflat pe teren accidentat se măsoară cu cel puțin două late, o nivelă cu bulă de aer și unul sau mai multe fire de plumb.

Evident că măsurătoarea se va executa mult mai repede cu trei late prevăzute cu nivelă și fir de plumb.

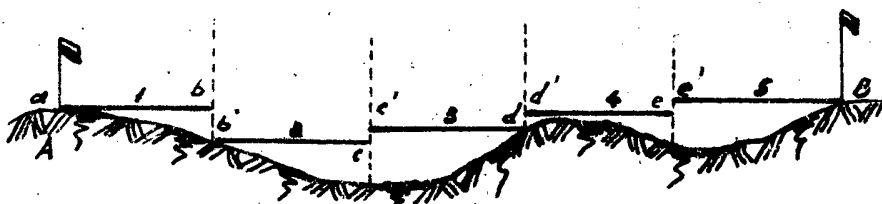


Fig. 67.

Latele sînt întrebuintate fie pe tripiede, fie fără tripiede.

În cazul că latele sînt întrebuintate fără tripiede, atunci un capăt al primei late este așezat deasupra punctului de pornire A cu toată precizia posibilă.

Bine înțeles că în prealabil aliniamentul AB se jalonează din loc în loc și se pichetează din 40 în 40 m sau pași.

După așezarea cu precizie a capătului primei late deasupra punctului A, se procedează la orizontalizarea acestei late cu ajutorul unei libele cu bulă de aer.

Se proiectează apoi, cu ajutorul firului cu plumb, cel de al doilea capăt al latei.

Se așează lata a doua astfel cu un capăt al ei să fie lipit de firul cu plumb, care proiectează capătul al primei late, adică așa cum se vede în Fig. 67, se axează capătul latei a doua în punctul b.

Se orizontalizează și aceasta lată, se procedează cu firul cu plumb capătul ei și urmează să așezăm în mod identic, lata a treia sau în caz că avem numai două late, se va ridica de pe teren prima lată și se va fixa după procedeu indicat, astfel ca un capăt al ei să fie în punctul c din Fig. 67.

În acelaș mod proiectându-se capătul al doilea al latei, după ce a fost făcută orizontalizarea ei, se va ajunge pînă la capătul aliniamentului, pînă în punctul B.

Lungimea aliniamentului va fi:  
 $D = n + r$ , unde  $n$  este numărul de cîte ori a fost prinsă lata în lungimea aliniamentului, este lungimea latei și  $r$  porțiunea sau restul în care nu a intrat o lungime întreaga de lată.

Pentru măsurătorile de precizie, latele sînt așezate pe tripede, cînd distingem următoarele două cazuri: în primul caz, cînd lucrăm cu grinzi port rigle și al doilea caz cînd se lucrează fără aceste grinzi.

Cînd ni se cere precizie mare, atunci tripedele sînt prevăzute cu vizoare, cu ajutorul cărora poate fi realizată o aliniere perfectă a latelor.

În acest caz latele sînt prevăzute fiecare cu nivelă cu bulă cu aer.

Terenul în care pot fi executate astfel de măsurători cu rezultat apreciable, este terenul orizontal.

Executarea măsurătorilor și în acest caz se face în mod identic, cu procedeul descris mai sus.

Pentru fiecare panou în parte, acum se va nota în carnetul de cîmp numărul riglei cu care s-a lucrat (a căreia lungime evident este a priori cunoscută), apoi se notează spațiul dat de rigleta culisă, înclinarea orizontală a riglei, temperatura aerului sau a latei (riglei) în caz că aceasta este metalică.

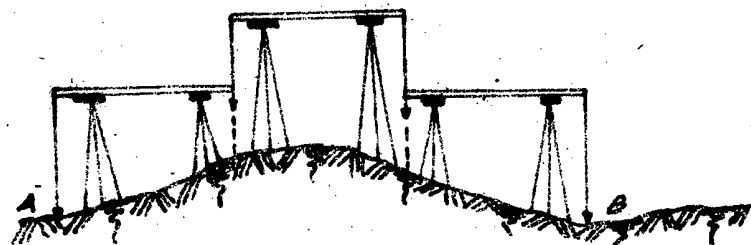


Fig.68.

La fel se va nota dacă s-au făcut abateri de la regulă de stație pentru rigle, adică neorizantalizarea forțată, eșire din aliniament.

Toate aceste observațiuni vor trebui apoi evaluate și se vor aduce corecțiunile necesare.

În mod frecvent, o echipă de lucru, în acest caz, avîndu-se în vedere precizia cerută, se compune dintr-un inginer, șef de grupă, 2 ajutoari, un secretar și un număr de lucrători care este în funcție de numărul lătelor.

### 3) Pana de măsurat.

Pana de măsurat este un instrument, cu ajutorul căruia sînt măsurate distanțe mici, cum ar fi de exemplu spațiul dintre două lăte, atunci cînd acestea nu sînt prevăzute cu riglete.

Acest spațiu dintre capetele lătelor este voit lăsat pentru a feri lătele de deteriorare.

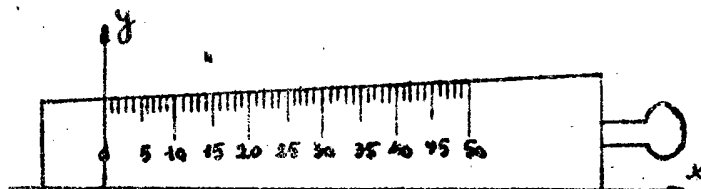


Fig. 69.

Pana de măsurat se confecționează din metal sau sticlă și are fața înclinată, cu gradațiuni executate pe baza ecuației:

$$y = a x + b, \text{ unde} \\ a = t g \alpha$$

fiind unghiul dintre cele două fețe ale instrumentului.

Valorile lui  $a$  și  $b$  sînt determinate prin încercări, introducînd pana în spațiul ce vom să măsurăm, gradațiunea ne va da chiar, adică valoarea acelei distanțe.

### 4) Panglica de oțel.

Panglicele de oțel, întrebuintate cu predilecție în operațiunile de măsurarea directă a lungimilor, atunci cînd avem de executat măsurători obișnuite, sînt confecționate din oțel călit, de lungimi, grosimi și lățimi diferite, după nevoie și fabrici constructoare.

Lungimile pe care le pot avea sînt de 2 m, de 5 m, de 10 m, 20 m și 50 m, iar variază între 0,2 și 0,4 mm.

Panglicele mai mici de 2 și 5 metri lungime, de grosimi și lățimi mici (sînt descrise mai jos) Cele lungi de 20 sau 50 m au la ambele capete cîte un inel sau mîner de fier ori de bronz.

- 125 -

Lungimea panglicei este socotită fie de la extremitățile ei, fie din mijlocul inelului sau de la muchia acestuia.

Punctul de unde începe și unde se sfârșește lungimea panglicei este marcat.

Se obișnuiește a se spune că lungimea panglicei poate fi socotită după felul marcării a bout și a trait.

În primul caz punctele finale ale lungimei sânt în centrele inelurilor, pe cînd în cazul din urmă marcarea panglicei începe la extremitățile ei.

Această din urmă marcarea este mai perfectă pentru faptul că așa cum se va vedea, prezintă o mai comodă mînuire.

Marcarea panglicei se face prin cifre gravate pe ea sau prin plăci de bronz cu cifre și bătute pe panglică, ori prin nituri mici sau prin găuri făcute în ele.

Lungimea panglicilor este etalonată la temperatură de  $15^{\circ}$ , cînd panglicele se suspendă, ridicîndu-se de la pămînt și aplicîndu-le la capete eforturi de tensiune, realizate aceste eforturi prin greutatea de 6-7 kg

La fel și verificarea panglicilor se face tot la temperatură de  $15^{\circ}$ , la care s-a făcut și marcarea lor, procedîndu-se astfel

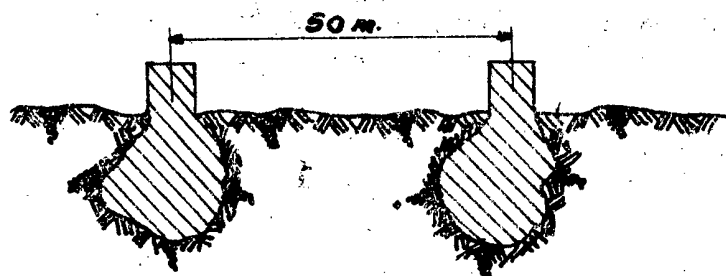


Fig. 70.

În locuri ferite în pămînt sau în zidărie, se fixează două repere, între care este măsurată cu exactitate lungimea de 50 m, cît este lungimea panglicei, constă în a se întinde panglica deasupra acestor repere,

aplicînd la capetele ei greutatea de 6 - 7 kg, la fel ca atunci cînd s-a făcut măsurarea și de a stabili dacă are lungimea de construcție a ei, adică cea pe care o are distanța dintre cele două repere,

Pentru a se evita lăsarea panglicilor în timpul lucrului, acestea sînt întinse cu ajutorul a două jaloane, așa cum se vede în Fig. 71.

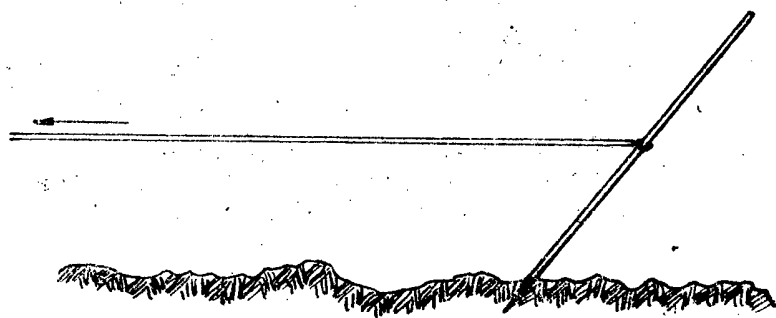


Fig. 71.

Jaloanele sînt introduse în inelele de la capetele panglicei, se fixează în teren și trase în sensul săgeții (Fig. 71), realizîndu-se astfel o bună întindere a panglicei.

Jaloanele sînt prevăzute cu opritori cari mențin inelele panglicei ca să nu cadă în jos.

În timpul cînd nu sînt întrebuintate panglicele, se păstrează în cutii construite în acest scop sau sînt înfășurate pe axe furci din metal, prevăzute cu înșiere.

La numărarea panourilor sau a numărului de cîte ori a intrat lungimea panglicei în aliniamentul măsurat, ne servim de un joc de 11 fișe, care însoțesc orice panglică.

Aceste fișe sînt simple bucăți de sîrmă, prevăzute la unul din capăt cu un ochiu sau inel și ascuțit la celălalt capăt.

Fișele se înfig vertical în pămînt în dreptul mărcii dela panglică.

Uneori, în special în cazul terenurilor accidentate, fișele trebuiesc proiectate pe pămînt, la capătul panglicei, dela o înălțime oarecare, pentru a avea proiecțiunea orizontală a capătului panglicei.

Fișele întrebuintate în acest scop au o construcție specială, fiind prevăzute la capătul ascuțit cu o greutate.

Acestea sînt fișele care poartă denumirea de fișe de plumb.

În general, o panglică este însoțită de o legătură de 11 fișe simple și două fire de plumb.

Inelul cu fișe este purtat de lîntarul dinainte care la începutul aliniamentului de măsurat, adică la capătul acestuia, înfige o fișă, după aceea întinde panglica și în dreptul mărcii înfige o a doua fișă, care va servi lîntarului din urmă drept indicație pînă la ce punct a fost întinsă panglica.

De aci în colo, după ce panglica a fost întinsă, lîntarul dinainte înfige cîte o fișă în dreptul mărcii panglicei, iar lîntarul din urmă ridică

de pe teren fișă,

Jocul de fișe este prevăzut cu 11 fișe, pentru a avea în orice moment un control, fiindcă în mâinile celor doi lăntari trebuie să existe întotdeauna un număr de 10 fișe.

Citeodată întinderea panglicelor, pentru a fi uniformă, se face cu niște resoarte calibrate la 7 kg, ținute în mână de cei doi operatori.

#### 5. Ruleta de oțel sau de pînă.

În operațiunile mici, curente, sînt întrebuintate rulete de oțel sau de pînă, care au o lungime de 10 - 20 m.

Gradațiunile sînt în cm, iar pe primul decimetru sînt diviziuni în mm.

În cazul ruletelor de oțel, numerele indicatoare de metri și decimetri sînt gravate pe panglică, iar în cazul ruletelor de pînă, care este ceruită, subdiviziunile metruului sînt scrise cu negru, pe cînd diviziunile metrice sînt scrise cu roșu.

Diviziunile panglicelor pe una din față merg într-un sens, iar pe cealaltă diviziunile merg în sens invers.

Ruletele sînt adăpostite în cutie, care în cazul ruletelor metalice, sînt și ele metalice, iar cele pentru ruletele de pînă se fabrică din piele.

Verificarea ruletelor se face identic cu verificarea panglicelor, între repere fixate în mod obișnuit în zid.

#### 6. Firul de măsurat din frînghie, cîneșă.

Acestea se întrebuintează mai ales în măsurătorile hidrografice, de exemplu: adîncimea cursurilor de apă.

Măsurători, în care, în locul frînghiilor, pot fi întrebuintate și cabluri de oțel.

Firul de cînepă este prevăzut la un capăt cu o greutate de cca. 5 - 7 kg, pentru ca sfoara să fie întinsă.

Cablurile întrebuintate pentru adîncimi mai mari, de un diametru între 5 - 8 mm marcate prin inele de alamă, fixate pe ele, vor avea la capăt pe lîngă o greutate mai mare ca în cazul firului de cînepă și un dispozitiv cu ajutorul căruia sîntem avizați că ele au ajuns la fundul apei.

### 7. Compasul de măsurat.

Sau lata compas este lată de lemn prevăzută la capete cu niște arcuiri, cu ajutorul cărora putem trasa, prin apăsare, lungimea latei pe aliniamentul de măsurat.

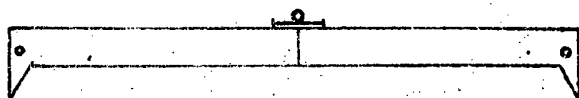


Fig. 72.

Măsurarea se poate face și după pantă, avînd grijă la măsură și unghiul de pantă, urmînd ca reducerea la orizontală să se facă conform relației:

$$D = l \cos \alpha_1 + l \cos \alpha_2 + \dots + l \cos \alpha_n + \lambda$$

unde  $l$  este lungimea latei compas, iar  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  unghiurile de pantă și  $\lambda$  citimea rămasă.

Formula de mai sus se poate scrie:

$$D = l \sum \cos \alpha + \lambda = l [\cos \alpha] + \lambda.$$

### 8. Lata cu picior.

întrebuintată la măsurarea lungimei unui aliniament pe terenuri foarte accidentate.

Ea se compune dintr-o lată gradată și un picior gradat, pentru ca, la nevoie, să poate fi măsurate și diferențele de nivel.



Apoi mai are o nivelă cu bulă de aer, care se așează pe lată, pentru a i se asigura orizontabilitatea acesteia și mai este prevăzută cu o culisă, care permite deplasarea latei și a piciorului una de alta.

Cu ajutorul acestei late se poate obține direct lungimea aliniamentului redusă la orizont.

### 9. Lanțul de măsurat.

Este format din vergele de oțel cu diametrul de 3 mm și lungimea de 0,10 - 0,50 m legate între ele cu câte un inel rotund.

La capetele lanțului sînt niște minere cu creștătură, care indică extremitatea lanțului.

Lungimea lanțului poate fi de 20-50 m.

Marcarea diviziunilor este făcută prin lame, pe care sînt gravate diviziunile corespunzătoare sau la alte lanțuri la fiecare 5 m vergeaua este din bronz.

Lanțul nu este un instrument de precizie, pentru motivul că este ușor deformabil, fapt care ar aduce prejudicii în măsurătorile de precizie, fiindcă din cauza deformațiilor lanțul nu va mai avea lungimea sa constructivă.

Pentru acest motiv el este întrebuințat aproape cu exclusivitate în exploatările agricole.

Un alt neajuns prezintă lanțul și prin faptul că foarte adeseori segmentele lui, vergelele, se încălcesc între ele, ceea ce duce la rezultate nesatisfăcătoare.

Deoarece așa, cum s-a văzut, lanțul poate suferi deformațiuni, va trebui ca să se facă din timp în timp verificarea lui, operațiune identică cu cea dela verificarea panglicei.

La executarea măsurătorilor pe teren, lanțul va fi însoțit de jocul de 11 fise.

Intr-un teren înclinat, întrebuințarea lanțului și a panglicei, se va face astfel:

Dacă terenul prezintă mai multe pante diferite, se va avea grijă ca, înainte de începerea măsurătorii propriu zisă a unui aliniament, să fie marcate toate punctele de schimbare de pantă în așa fel, încât pe o porțiune dintre două semnale, toate punctele să aibă aceeași pantă.

Inclinarea pantei respective, unghiul de pantă, se va măsura cu ajutorul dinamometrului, determinându-se astfel unghiuri de pantă:  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_x$  măsurate în punctele de schimbare a pantei, adică în punctele 1, 2,  $\dots$ . Fig. 73



Fig. 73.

Incepând dela un punct inițial A, se măsoară toate distanțele A-1, 1-2, 2-3, etc, obținându-se valorile acestor distanțe pe panta respectivă, adică:  $D'_1, D'_2, \dots, D'_x$ .

Distanțele reduse la orizont sînt deduse așa cum s-a văzut din relațiile.

$$D_1 = D'_1 \cos \alpha_1,$$

$$D_2 = D'_2 \cos \alpha_2,$$

⋮

$$D_x = D'_x \cos \alpha_x.$$

Iar distanța, lungimea totală a aliniamentului cuprinsă între punctele A și N, va fi:

$$D_0 = [D].$$

Așa cum s-a mai amintit, corecțiile pentru pante pot fi găsite și în tabele.

Dăm mai jos, pe pagina următoare, un tablou de corecții pentru pante utilizate de Cadastrul nostru.

T a b l o u  
 de corecțiune pentru pante.

Inclinația 0	Corecția pt. 10 m	Inclinația 0	Corecția pt. 10 m	Inclinația 0	Corecția pt. 10 m	Inclinația 0	Corecția pt. 10 m
1	0,002	7,5	0,086	14	0,297	20,5	0,633
1,5	0,003	8	0,097	14,5	0,318	21	0,664
2	0,006	8,5	0,110	15	0,341	21,5	0,696
2,5	0,010	9	0,123	15,5	0,364	22	0,728
3	0,014	9,5	0,137	16	0,387	22,5	0,761
3,5	0,019	10	0,152	16,5	0,412	23	0,795
4	0,024	10,5	0,167	17	0,437	23,5	0,829
4,5	0,031	11	0,184	17,5	0,463	24	0,865
5	0,036	11,5	0,201	18	0,489	24,5	0,900
5,5	0,046	12	0,219	18,5	0,517	25	0,937
6	0,055	12,5	0,237	19	0,545	25,5	0,974
6,5	0,064	13	0,256	19,5	0,574	26	1,002
7	0,075	13,5	0,276	20	0,603		

De exemplu 10 m măsurați în pantă de 25° va reprezenta în reducere orizontală:  $10 - 0,937 = 9,063$  m

Dacă executăm măsurători cu panglică sau cu lanțul în teren onduiat, lanțul și panglica în acest caz vor trebui să fie ridicate pe firele de întins, pentru a se putea obține o poziție cât mai aproape de cea orizontală

Dar întotdeauna atît lanțul, cît și panglica se vor lăsa în jos, formînd o săgeată, ceea ce evident ne va da o anumită eroare, adică  $\Delta l = l - D$ , formula unde  $l$  reprezintă lungimea etalonului nostru, iar  $D$  este lungimea adevărată.

$$\text{Dar: } \Delta l = \frac{8 \cdot S^2}{l}$$

Deci la panglica de  $l = 20$  m, dacă săgeata ar fi de exemplu 10 cm, eroarea ce se comite

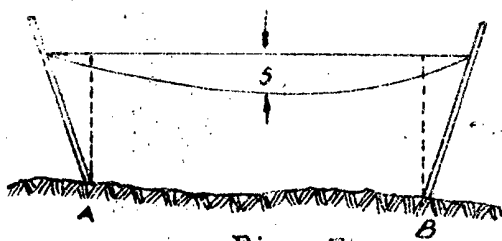


Fig. 74.

$$\text{este: } \Delta l = \frac{8 \cdot 10^2}{3 \times 2000} = 0,133 \text{ cm.}$$

#### 10. Roata de măsurat.

Pentru măsurători de precizie redusă, când sînt mai multe evaluări, pot fi întrebuintate roate de măsurat, încă utilizate și astăzi, mai ales în întreprinderile agricole din regiunile de cîmpie.

Măsurătoarea cu roată se face cu circonferință acesteia, care are o lungime de 1 m sau 2 m.

Roata este prevăzută cu un miner cu ajutorul căruia o putem plimba pe aliniamentului ce se măsoară și este prevăzută cu un dispozitiv, fixat pe osia roții, care servește la înregistrarea numărului de ture făcute.

Acest număr de ture multiplicat cu lungimea circonferinței, va da lungimea aliniamentului.

Dacă roata este întrebuintată la măsurarea lungimei unei linii ferate, în acest caz este prevăzută cu un gît, pentru ca în mersul ei să poată fi menținută pe șină.

#### 11. Pedometrele.

Întrebuintate la fel în măsurătorile de precizie redusă, mai ales la măsurătorile de recunoaștere sînt instrumente care înregistrează numărul de pași.

Ele se atașează la piciorul operatorului și printr-un dispozitiv, de altfel foarte simplu ca principiu, ne înregistrează numărul pașilor printr-un pendul care saltă la fiecare smucitură a piciorului de pământ și acționează roțile de înregistrare.

Operatorul cunoscîndu-și lungimea medie a pasului și pometrul arătînd numărul de pași făcuți, prin multiplicare se determină lungimea aproximativă a aliniamentului respectiv.

#### Rapiditatea măsurării lungimilor.

Din practica, prin cronometrări a fost dedusă pentru instrumentele arătate mai jos, rapiditatea cu care se execută măsurătorii de lungime.

- Cu trei rigle (late) de lemn, așezate direct pe teren, se măsoară ..... 16 - 20 m/minut,
- Cu panglica de oțel ..... 20 m/minut,
- Cu lanțul ..... 18 m/minut.

Aceste norme sînt pentru echipă formată dintr-un operator și două ajutoare.

### Prescripțiuni pentru etaloanele de măsurat.

Pentru ca un etalon, cu care se fac măsurători, să fie bun, nu trebuie să aibă diferențe față de etalonul tip, mai mari ca cele de mai jos, unde "d" reprezintă diferența maximă admisibilă.

- 1 metru de alamă (unitate comercială) ..... d = 0,1 mm,
- 1 " " (unitate de precizie) .... d = 0,04 mm,
- 1 " de lemn ..... d = 0,3 mm,
- 1 " de oțel ..... d = 0,3 mm,
- 20 metri ruletă la 20 kg tensiune ..... d = 1,6 mm,
- 5 metri lată de lemn ..... d = 1,6 mm,
- 3 metri lată de lemn ..... d = 1,3 mm,
- 2 metri lată de lemn ..... d = 1,1 mm,
- 20 metri panglică de oțel ..... d = 3,5 mm,
- 10 metri panglică de oțel ..... d = 2,4 mm.

## II. Greșeli și erori în măsurătorile directe.

### 1. Greșeli.

Cauza greșelilor este atențiunea și controlul slăbit, ca atare, ele pot fi evitate prin atențiune și control repetat.

Ca greșeli în măsurarea lungimelor cităm:

a) Lanțul din urmă a uitat să rădice de pe teren o fișă pe care lanțul dinainte a înfipt-o la capătul panglicii.

Urmează deci că în numărarea panourilor lipsește unul, atunci cînd etalonul nu a fost cuprins în aliniament de mai-mult de zece ori sau ne lipsesc mai multe panouri în

- 134 -

cazul că am avea mai mult de zece panouri.

Rezultatul măsurătorilor nu va fi exact și el nu poate fi luat în considerare.

b) Am uitat să notăm în carnet unul sau mai multe panouri sau eventual a fost trecut unul în plus.

c) Se face citirea diviziunilor de pe panglică în mod invers sau la citirea diviziunilor se face greșala de decimetri sau chiar de metri.

d) Panglica sau lanțul fac o buclă, ceea ce ne va conduce iarăși la un rezultat greșit, obținându-se o lungime mai mare ca cea reală.

Ca regula generală, aliniamentele principale vor fi măsurate de două ori, odată la ducere și altă dată la întoarcere, comparându-se apoi imediat rezultatele și în cazul că diferența este admisibilă, se va face media aritmetică a celor două măsurători, iar în caz că diferența ar fi inadmisibilă, operațiunea va fi repetată imediat.

Diferențele admisibile, date de Cadastru român pentru 100 m sînt:

$d = 0,05$  m pentru intravilară,

$d = 0,10$  m pentru măsurători de câmp.

Se calculează diferențele și prin formula:

$$d = 0,0006 D + 0,02 \sqrt{D}$$

formula în care D este lungimea măsurată.

## 2. Erori.

Erorile sînt în general, greșeli mai acceptabile, care nu pot fi evitate, ele nedepinzînd de voința noastră, pot fi însă micșorate atunci cînd cunoaștem cauza care le produce.

Ele pot fi erori ce se repetă în mod sistematic, numite erori sistematice, datorită în majoritatea cazurilor imperfecțiunii aparatelor.

Acestea sînt foarte periculoase, deoarece avînd acelaș sens, atunci cînd sînt repetate de mai multe ori ne conduc la rezultate inadmisibile.

Alte erori sînt datorate unor cauze accidentale, sînt așa numite erori accidentale, cari nu sînt periculoase, deoarece majoritatea cazurilor prin repetarea

operațiunilor ele se compensează, adică se reduc la zero.

a) Erorile sistematice sau permanente.

Aceste pot fi datorite unor cauze diferite, cum sînt:

Δ) Erori de etalon, pe care le avem în cazul că instrumentul, etalonul cu care executăm măsurători, nu a fost verificat și el poate avea o lungime în plus sau în minus față de lungimea sa constructivă.

Eroarea aceasta de etalon, în tot timpul operațiunii, avînd acelaș sens, înseamnă că se comulează, atunci cînd etalonul este cuprins de mai multe ori în aliniamentului pe care îl măsurăm.

Să presupunem că la verificarea unei panglici de 20 m am găsit că are cu 3 cm mai mult.

În acest caz, dacă am măsura lungimea A B, rezultatul va fi mai mic decît lungimea reală și în acest caz va trebui să aducem corecțiunea necesară.

Să admitem că, măsurînd cu aceasta panglică, am găsit că lungimea A B ar fi  $D = 142,20$  m.

Valoarea adevărată a lungimii A B, adică (D) este  $(D) = D + \Delta D$ , dar  $\Delta D = c D$ , unde c este eroarea pe unitatea de lungime (pe metru linear), sau ceea ce ar reveni ca:

$$c = \frac{3}{20} = 0,15$$

Cu aceste date adevărată valoare a aliniamentului este:

$$(D) = 142,20 + 0,0015 \times 142,20 = 142,413.$$

Dacă nu am fi adus corecțiunea necesară, urma că am fi comis o eroare destul de apreciată.

b. Erori datorite temperaturii.

Lungimea etaloanelor, îndeosebi a celor metalice, variază cu temperatura, ceea ce ne conduce la erori.

Aceste erori sînt neglijate în cazul măsurătorilor curente, ele rînd mici.

Dar atunci, cînd operațiunile ne cer o precizie mare, va trebui necondiționat ca în timpul executării lor, să se noteze în carnet: temperatura aerului sau a in-

strumentelor cu care executăm măsurătoarea, urmînd ca în bi-  
 rou să fie adușe corecțiunile necesare.

Pentru panglica de 20 m se dau următoarele corecțiuni:

-	la temperatura de + 40°	corecțiunea este	-	15 mm
-	" " " 35°	" "	-	12 mm
-	" " " 30°	" "	-	9 mm
-	" " " 25°	" "	-	6 mm
-	" " " 20°	" "	-	3 mm
-	" " " 15°	" "	0	
-	" " " 10°	" "	+	3 mm
-	" " " 5°	" "	+	6 mm
-	" " " 0°	" "	+	9 mm

Ca atare pentru fiecare 5° corecțiunea ce se aduce, așa cum se observă mai sus, este de + 3 mm, ținînd cont de faptul că marcarea panglicii făcută la 15° C, deci la această temperatură corecțiunea este zero, iar pentru temperaturi peste 15° C corecțiunea are sens negativ, pe cînd la temperaturi sub 15° corecțiunea va fi pozitivă.

Cu alte cuvinte, la temperaturi mari, panglica lungindu-se, corecțiunea este negativă, iar la temperaturi mici, ea contractîndu-se, corecțiunile sînt pozitive.

γ. Erori de abatere de pe aliniament.

Si aceste erori se manifestă într-un singur sens, iar influența lor crește cu numărul așezării etalonului de măsurat. Ele provin din cauză că aliniamentul în loc să fie urmărit drept, este urmărit în zig-zag, Fig. 75.

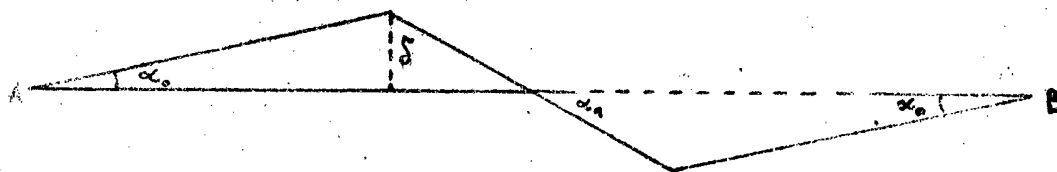


Fig. 75.

Presupunînd că  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha$

In acest caz lungimea aliniamentului A B este:  $D_0 = 2l \cos \alpha_0 + (n - 2)l \cos \alpha$ , sau

$D_0 = 2l \left(1 - \frac{\alpha_0}{2}\right) + (n - 2)l \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ , unde  $l$  este lungimea etalonului.



Din ultima relație avem:

$$D_0 = r \cdot l - l \left( \alpha_0^2 + \frac{r-2}{2} \alpha^2 \right).$$

Unghiul  $\alpha$  fiind mic, se poate scrie:

$$\alpha_0 = \frac{S}{l}, \text{ iar } \alpha = \frac{2S}{l}.$$

Cu aceste date relația noastră devine:

$$D_0 = r \cdot l - l \left[ \frac{S^2}{l^2} + \frac{r-2}{2} \cdot \frac{4S^2}{l^2} \right] = r \cdot l - \frac{S^2}{l^2} (1+2r-4) = r \cdot l - \frac{S^2}{l^2} \cdot (2r-3) \quad (2.2 - 3)$$

Dar lungimea reală  $D_0$  a aliniamentului este egală cu lungimea  $D$  găsită în urma măsurătorilor, micșorată cu eroarea comisă, adică:

$$D_0 = D - \Delta l \text{ dar } D = r \cdot l \text{ și atunci:}$$

$$\Delta l = (2r - 3) \frac{S^2}{l}$$

Dacă am considera ca eroare admisibilă  $\varepsilon = \frac{D}{M}$ , aceasta condiție ar urma să satisfacă egalitatea:

$$\Delta l \leq \varepsilon \text{ deci } \Delta l \leq \frac{D}{M} \text{ sau } (2r-3) \frac{S^2}{l} \leq \frac{D}{M}$$

unde  $D = r \cdot l$ , iar  $M$  ar fi de exemplu egal cu 10.000.

Pentru acest caz am avea:

$$(2r-3) \frac{S^2}{l} = \frac{r \cdot l}{M} \text{ sau } S = l \sqrt{\frac{r}{M(2r-3)}}$$

Pentru cazul când  $D = 500$  m,  $l = 50$  m,  $r = \frac{500}{50} = 10$ , am avea:

$$S = 50 \sqrt{\frac{10}{10.000(20-3)}} = 50 \sqrt{\frac{1}{17.000}} = \frac{50}{130,4} = 0,383 \text{ m.}$$

Dacă am avea ca etalon, în loc de panglică de 50 m, o lată de  $l = 4$  m, în acest caz, la aceeași distanță de 500 m, "r" va fi egal cu 125. În acest caz:

$$S = 4 \sqrt{\frac{125}{10.000(250-3)}} = 4 \sqrt{\frac{125}{2.470.000}} = \frac{4 \times 11,180}{1571,623} = 0,028 \text{ m.}$$

Aceste erori manifestându-se în același sens, urmează că:

$$D_0 = l + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n$$

și dacă am considera:  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \dots = \varepsilon_n$

În acest caz:  $D_0 = r \cdot l + r \cdot \varepsilon$  sau

$$D_0 - l = \Delta D = r \cdot \varepsilon, \text{ dar } r = \frac{D}{l} \text{ așa că:}$$

$$\Delta D = \frac{D}{l} \cdot \varepsilon = \frac{\varepsilon}{l} \cdot D.$$

În această formulă  $\frac{\varepsilon}{l}$  este eroarea permanentă pe unitatea de lungime pe care să o notăm cu:

$$M_0 = \frac{\varepsilon}{l} \text{ atunci:}$$

$$\Delta D = M_0 \cdot D, \text{ deci } D_0 = r \cdot l + M_0 \cdot D = D + M_0 \cdot D.$$

Profesorul Lorbert, făcînd cca. 6000 măsura-  
surători, a găsit că:

- Pentru două late a 4 m dealungul unui fir	$M_0 = +0,00000$
- " " " a 4 m fără fir.....	$M_0 = -0,00001$
- " panglica de oțel.....	$M_0 = -0,00003$
- " lanț.....	$M_0 = +0,00005$
- " lata compas.....	$M_0 = -0,00008$

b) Erori accidentale.

Erorile accidentale se manifestă cînd într-un sens, cînd în altul.

Din aceasta cauză la un număr mare de măsurători ele se compensează, adică se reduc.

Totuși, influența lor asupra rezultatului final este apreciabilă, îndeosebi atunci cînd numărul măsurătorilor nu este prea mare.

Dacă notăm  $D_0$  adevărata valoare a unei lungimi oarecare, pe care am măsurat-o, cu  $l$  lungimea etalonului întrebuintat și cu  $\pm \epsilon_1, \pm \epsilon_2, \dots, \pm \epsilon_n$ , erorile accidentale avem:

$$D_0 = (l \pm \epsilon_1) + (l \pm \epsilon_2) + \dots + (l \pm \epsilon_n)$$

sau 
$$D_0 = n \cdot l \pm \epsilon_1 \pm \epsilon_2 \pm \dots \pm \epsilon_n.$$

Eroarea totală datorită acestor erori accidentale va fi:

$$\Delta D_0 = D_0 - n \cdot l = \pm \epsilon_1 \pm \epsilon_2 \pm \dots \pm \epsilon_n.$$

Pentru a scăpa de sume să ridicăm la pătrat și ținînd cont că aceste erori sînt mici și în mod obișnuit își alternează sensul, se poate scrie:

$$\Delta D_0^2 = [\epsilon \epsilon] \quad \text{de unde}$$

$$\Delta D_0 = \pm \sqrt{[\epsilon \epsilon]}$$

Dacă:  $\epsilon_1 = \epsilon_2 \dots = \epsilon_n$  avem

$$\Delta D_0 = \pm \epsilon \sqrt{n} \quad \text{unde } n = \frac{D_0}{l} \text{ deci:}$$

$$\Delta D_0 = \pm \epsilon \frac{\sqrt{D_0}}{\sqrt{l}} = \pm \frac{\epsilon}{\sqrt{l}} \sqrt{D_0}.$$

De unde: 
$$M = \frac{\Delta D_0}{\sqrt{D_0}} \cdot \frac{\epsilon}{\sqrt{l}}$$

Din calculul erorilor știm că:

$$\Delta D_0 = m = \sqrt{\frac{[v v]}{n-1}}$$

Relație pe care o putem rezolva așa cum am văzut și având pe  $\Delta D_0$ , putem determina și valoarea lui M adică:

$$M = \sqrt{\frac{[v v]}{D(n-1)}}$$

Iordan dă valorile lui M în cazul erorilor accidentale pentru diferite instrumente, astfel:

- pentru late dealungul unui fir întins..... M = 0,001
- " " fără fir..... M = 0,003
- " panglică de oțel de 20 m..... M = 0,005
- " lata compas..... M = 0,007
- " lanț..... M = 0,010.

Pentru învederarea celor de mai sus, să luăm un exemplu:

Aliniamentul A B măsurat cu panglică de oțel de 20 m a fost găsită lungimea lui A B = 100 m.

Eroarea medie:  $m = \Delta D = M\sqrt{D}$ .

Introducând valorile lui M și D, adică M = 0,005, D = 100, se obține:

$$\Delta D = 0,005\sqrt{100} = 0,05 \text{ m.}$$

De foarte multe ori ni se pune problema de a stabili cu ce etalon trebuie să executăm măsurarea unei lungimi sau a unei porțiuni date dintr-un aliniament, pentru a avea o anumită precizie.

Deci problema este de a determina valoarea lui M atunci când D este cunoscut, iar m ne este dat.

Determinând valoarea lui M din tabloul lui Lorbert și Iordan, ne alegem etalonul corespunzător.

În eventualitatea că în tablou nu avem etalon corespunzător pentru calculele noastre, se va efectua măsurătoarea cu etalonul care ne stă la dispoziție, însă în acest caz numărul măsurătorilor va fi mai mare, așa fel, încât să avem certitudinea că eroarea fatală a fost eliminată.

### d. Erori totale.

În realitate, când se execută o măsurătoare, rezultatul este inevitabil afectat nu numai de un singur fel de eroare, ci el este influențat atât de erori accidentale, cât și de erori sistematice sau permanente.

Cu alte cuvinte, adevărata valoare a lungimei măsurate este:

$$D_0 = D + \Delta D,$$

unde  $\Delta D$  cuprinde atât erori accidentale, cât și erori sistematice, adică:

$$\Delta D = M_0 D \pm M D.$$

Din tablourile de mai jos se poate deduce eroarea  $\Delta D$  pentru diferite etaloane:

- La măsurători cu late, dealungul unui fir întins:

$$\Delta D = - 0,0000010 \pm 0,001\sqrt{D}$$

- " " cu lata fără fir  $\Delta D = 0,00001 D \pm 0,003\sqrt{D}$

- " " cu panglica de oțel  $\Delta D = - 0,00003 \pm 0,005\sqrt{D}$

- " " cu lata compas  $\Delta D = - 0,00008 \pm 0,007\sqrt{D}$

- " " cu lanțul  $\Delta D = + 0,00005 \pm 0,010\sqrt{D}$ .

Erorile admisibile, pentru măsurători duble, prevăzute de către Cadastrul austriac, german și român, sînt:

In cadastrul austriac, formula pentru teren mijlociu, este:

$$\Delta D = 0,00015 D + 0,005\sqrt{D} + 0,015$$

Aceasta formulă în cazul terenurilor bune se micșorează cu 25 %, iar în cazul terenurilor accidentate se majorează cu 25 %.

In cadastrul nostru,

- pentru teren de cat. I  $\Delta D = 0,01\sqrt{4 D} + 0,005 D$

- " " " II  $\Delta D = 0,01\sqrt{6 D} + 0,0075 D$

- " " " III  $\Delta D = 0,001\sqrt{8 D} + 0,010 D$

In cadastrul român se prevede în tablou de mai jos următoarele date:

Dis- tan- ța m	Te- ren I	Te- ren II	Te- ren III	Te- ren mun- tos	Dis- tan- ța m	Te- ren I	Te- ren II	Te- ren III	Teren muntos
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
50	0,03	0,03	0,03	0,06	550	0,17	0,22	0,29	0,32
100	0,05	0,05	0,06	0,09	600	0,18	0,24	0,32	0,41
150	0,07	0,07	0,09	0,12	650	0,20	0,26	0,34	0,45
200	0,08	0,09	0,11	0,15	700	0,21	0,27	0,37	0,48
250	0,10	0,11	0,14	0,18	750	0,22	0,29	0,39	0,51
300	0,11	0,13	0,16	0,22	800	0,23	0,31	0,42	0,54
350	0,12	0,15	0,19	0,25	850	0,24	0,33	0,44	0,57
400	0,14	0,17	0,22	0,29	900	0,25	0,34	0,47	0,60
450	0,15	0,19	0,24	0,32	950	0,26	0,36	0,49	0,65
500	0,16	0,20	0,27	0,35	1000	0,27	0,38	0,52	0,68

Valorile din acest tablou sînt pentru măsurători intravilane (în interiorul orașelor) pentru măsurătorile extravilane aceste toleranțe se vor dubla.

### III) . Aplicațiuni.

Foarte adesea avem probleme a căror rezolvare poate fi făcută prin măsurători de lungime.

Pentru acest motiv dăm mai jos unele probleme mai frecvent întîlnite.

1) Dacă pe un aliniament A B, trebuie să trasăm un alt aliniament B C perpendicular pe primul aliniament, în acest caz metoda cea mai simplă, ce poate fi întrebuințată, este cu ajutorul panglicei sau ruletei, cu cari se formează un triunghi dreptunghi, ale cărui catete sînt de 3 m și 4 m, iar ipotenuza de 5 m.

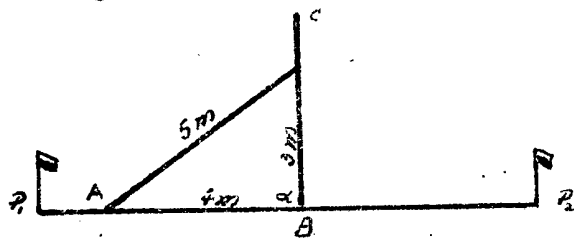


Fig.76.

Formarea triunghiului dreptunghi se realizează unind zerc al panglicei cu diviziunea de 12 m, se așează panglica pe aliniamente, astfel ca diviziunea de 4 m să cadă în dreptul punctului B, unde vom să avem piciorul perpendicularei, se

se întinde panglica, ținând de diviziunea de 7 m, unghiul format de laturi de 4 m și 3 m, unghiul  $\alpha$  este de  $90^\circ$ . Așa ca direcțiunea aliniamentului B C, perpendicular în punctul B la aliniamentul A B, va fi direcțiunea laturii de 3 m.

2) Pe un aliniament  $P, P_2$ , vom să trasăm un alt aliniament  $M, M_2$ , perpendicular pe primul în punctul A.

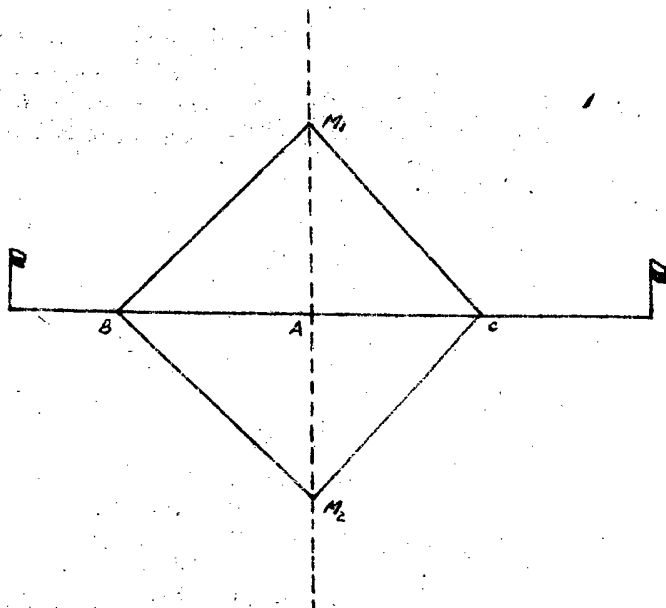


Fig. 77.

tul  $P, P_2$  în punctul A.

Ca verificare trebuie ca punctul A să fie pe aliniamentul determinat  $M, M_2$ .

3). Aceiași problemă mai poate fi rezolvată și în felul următor, tot cu ajutorul unei bucăți de sfoară.

Se ia pe aliniamentul  $P, P_2$  două puncte, C și B, egal depărtate de punctul A.

Fixăm un capăt al sfoarei în punctul B, iar cealalt capăt se trasează, de o parte și de cealaltă parte a aliniamentului  $P, P_2$  un arc de cerc.

Pentru rezolvarea problemei ne putem folosi de o sfoară sau o frînghie, ale cărei capete se fixează în punctul B și C de pe aliniamentul  $P, P_2$ , în așa fel, încât aceste puncte B, C, să fie egal depărtate de punctul A.

Se ia mijlocul sfoarei, care a fost în prealabil stabilit și se întinde sfoara bine.

Astfel a fost găsit un punct  $M_1$  al aliniatului căutat.

Se procedează la fel în cealaltă parte a aliniamentului  $P, P_2$ , aflînd punctul  $M_2$  al aliniamentului  $M, M_2$ , care este perpendicular pe aliniamen-

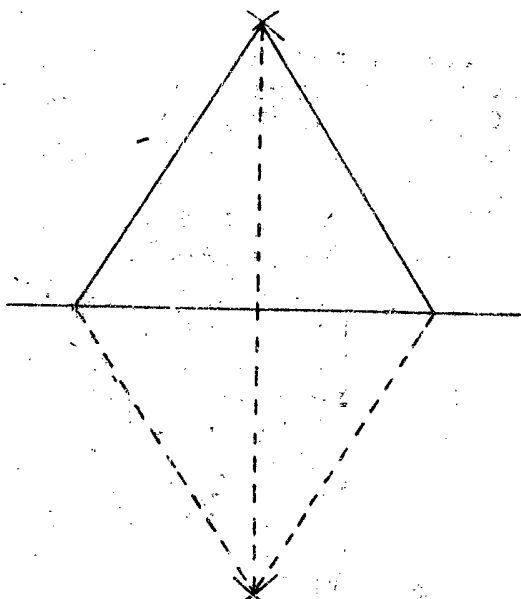


Fig. 78.

Apoi se fixează un capăt al sfoarei în C și cu celalt capăt descriem, la fel ca mai sus, arcuri de cerc. Intersecția arcurilor va da punctele  $M_1, M_2$  ale aliniamentului căutat. Drept verificare, la fel ca în cazul precedent, punctul A va trebui să se găsească și pe aliniamentul  $M_1, M_2$ .

4) O altă rezolvare a problemei.

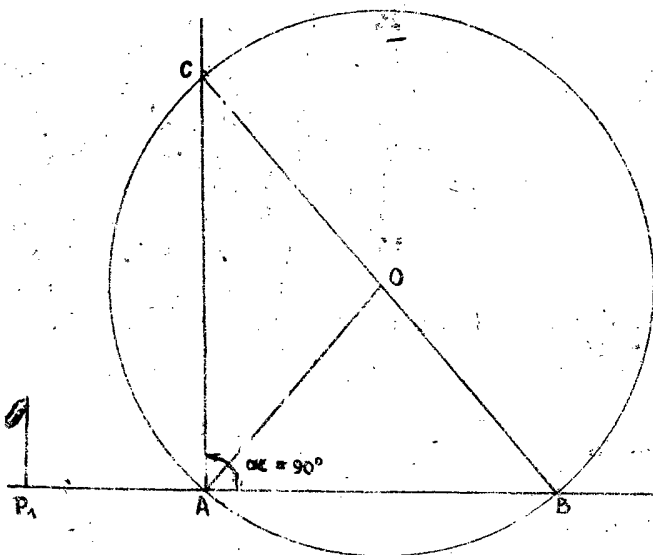


Fig. 79.

Se ia o direcție arbitrară O, cu ajutorul sfoarei, din punctul O ca centru, cu lungimea OA se trasează un cerc. Acest cerc va tăia aliniamentul  $P_1, P_2$  în punctul B. Unind punctul O cu B și prelungind până taie cercul descris se găsește punctul C. Prin unirea lui C cu A se determină aliniamentul CA perpendicular pe aliniamentul  $P_1, P_2$ , fiind că unghiul  $\alpha$  din Fig. 79 este de  $90^\circ$ .

5) Dacă dintr-un punct A se cere să trasăm aliniamentul perpendicular pe aliniamentul  $P_1, P_2$ .

Se ia o frânghie de lungimea AB mai mare ca AD.

Din punctul A ca centru se trasează un arc de cerc care taie aliniamentul  $P_1, P_2$  în punctele C și B.

Mijlocul distanței B C va determina punctul D care împreună cu A ne determină aliniamentul perpendicular pe aliniamentul  $P_1 P_2$ .

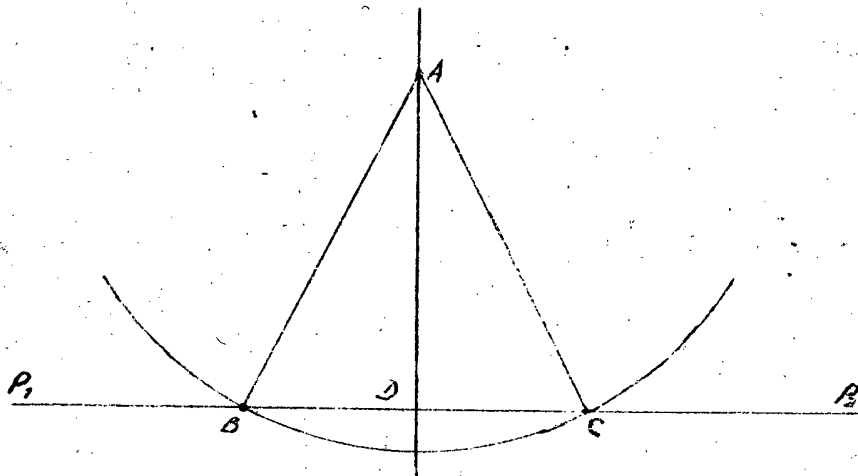


Fig. 80.

6) Dintr-un punct dat A să se ducă un aliniament A B paralel la un aliniament dat  $P_1 P_2$ .

Din punctul dat A, printr-una din metodele de mai sus, se duce o perpendiculară la aliniamentul  $P_1 P_2$ , pe

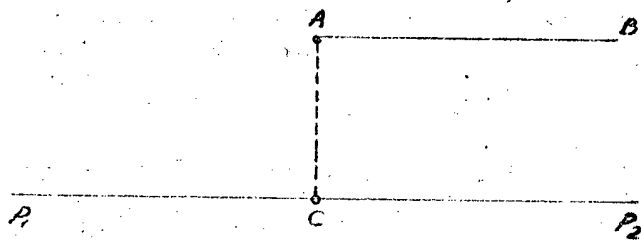


Fig. 81.

care se va determina punctul C. Acest punct C împreună cu A formează un aliniament A C, la care în punctul A, prin metode deja cunoscute, se duce un aliniament perpendicular, aliniamentul A C, care este paralel cu aliniamentul  $P_1 P_2$ .

7) Rezolvarea problemei 6, de mai sus, poate fi făcută și în modul următor:

Pe aliniamentul dat  $P_1 P_2$  se aleg două puncte C și B.

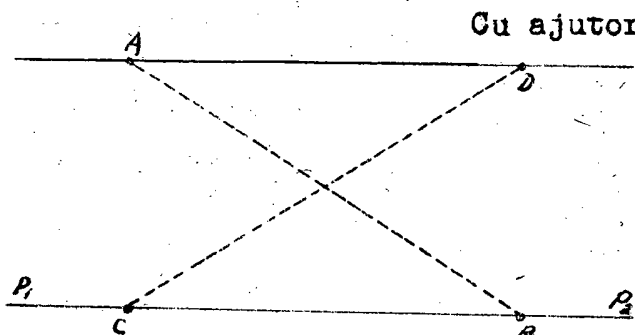


Fig. 82.

Cu ajutorul panglicei se măsoară aliniamentul A B și la jumătatea lui determinăm un punct M.

Unind punctele C cu M și prelungind aceste puncte cu o lungime egală cu C M, se va afla un punct D, care unit cu A va da aliniamentul A D paralel cu aliniamentul dat  $P_1 P_2$ .



8) Se cere a se prelungeți un aliniament printr-un obstacol.

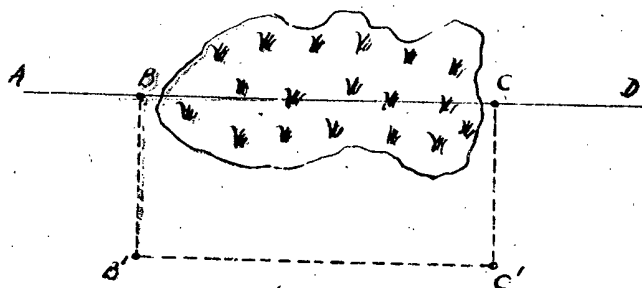


Fig. 83.

În figura 83, avînd aliniamentul A D, se cere să se prelungească acest aliniament peste obstacol.

Din punctul B prin mijloacele și metodele cunoscute se ridică perpendiculara B B', apoi pe aliniamentul B B' se va ridica o altă perpendiculară B' C' și în punctul C' pe aliniamentul B' C' ridicăm încă o perpendiculară, care este paralelă cu B B'.

Se măsoară lungimea aliniamentului B B' și din punctul C' se măsoară pe aliniamentul perpendicular la B' C' o lungime egală cu B B' și se va afla punctul C, care se găsește pe aliniamentul A B.

În punctul C, pe aliniamentul C' C se ridică o perpendiculară și se va găsi un punct D.

Punctele C și D se vor găsi pe prelungirea aliniamentului A B, adică vor forma un aliniament în prelungirea aliniamentului A B peste obstacol.

9). O altă rezolvare a acestei probleme este:

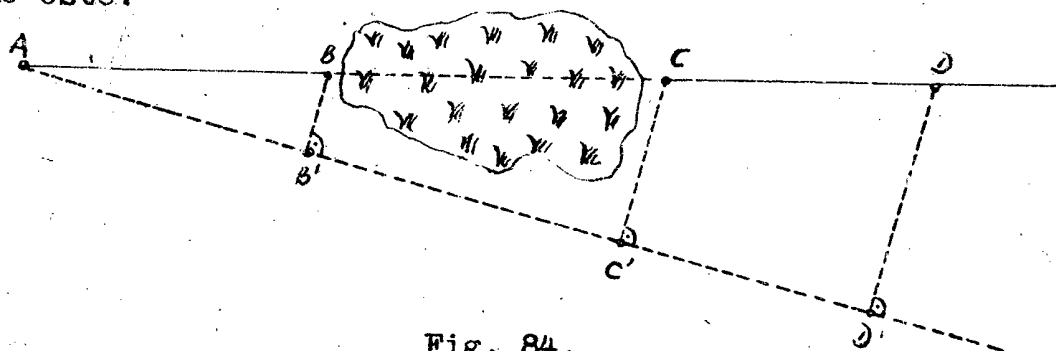


Fig. 84.

Din punctul A al aliniamentului dat, trasăm un aliniament carecarea A A'. Pe acest aliniament din punctul B se duce prin metodele anterioare, perpendiculara B B', apoi din punctul C' și D' ale aliniamentului A A' se ridică perpendiculara.

Măsurăm distanțele A B, A B', A' C' și A D și apoi pe aliniamentele perpendiculare în C' și D' măsurăm distanțele C' C și D' D cu valorile:

$$C C' = B B' \frac{A C'}{A B'} \text{ și } D D' = B B' \frac{A D'}{A B'}$$

Astfel determinate punctele C și D, se va obține aliniamentul CD care se va găsi în prelungirea aliniamentului AB.

10). Se cere să se determine lungimea unui aliniament a cărui extremitate este inaccesibilă, cum ar fi cazul unui curs de apă, a cărui lățime vom să o aflăm.

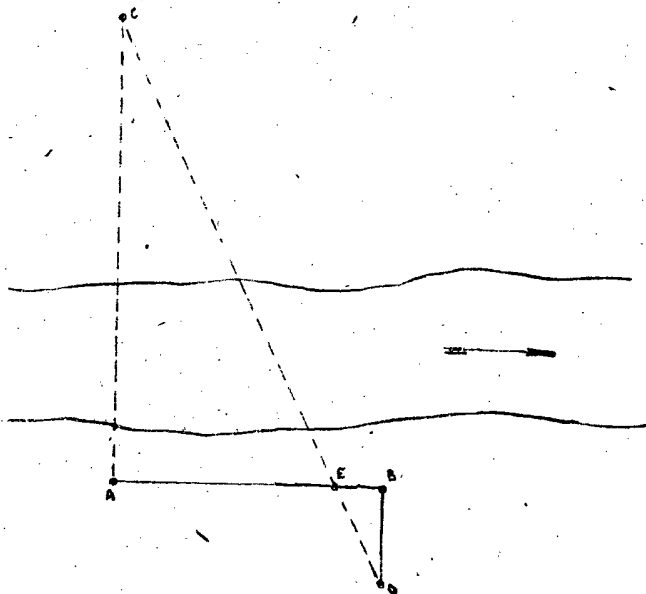


Fig. 85.

În acest caz, pe unul din maluri se trasează un aliniament arbitrar AB.

În punctul A pe aliniamentul, ales arbitrar, AB, ridicăm o perpendiculară care ne determină aliniamentul AC.

După aceea în punctul B al aliniamentului AB ridicăm perpendiculara BD și găsim intersecția aliniamentelor AB și CD, adică punctul E, problema este rezolvată, adică putem determina, prin calcul lungimea lui AC, dacă se măsoară distanțele AE, BE și BD.

Intrădevar, din asemănarea triunghiurilor se obține:

$$AC = AE \frac{BD}{EB}$$

Ceeace ne conduce la rezolvarea problemei.

.....

## Cap. III.

Măsurarea unghiurilor.*I Principii generale.*

Având două planuri verticale V și P (Fig.86), cari se intersectează după linia verticală  $v v$ , dacă avem și un plan orizontal H, care să intersecteze cele două

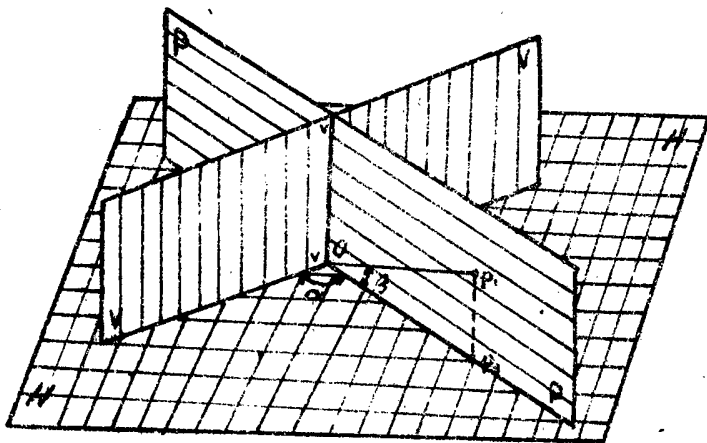


Fig.86.

planurilor verticale înțepă planul orizontal, va determina o dreaptă  $O p$ , care determină cu planul orizontal un unghi  $\beta$ : unghi numit unghiul vertical.

Aceste două feluri de unghiuri, adică orizontale și verticale, sînt unghiurile cari ne interesează în ridicările topografice.

Pentru măsurarea acestor unghiuri, au fost construite diferite aparate, diferite instrumente, cari ne servesc în acest scop, ele căutînd să realizeze practic verticala  $v v$  și planul orizontal H, pentru a-și îndeplini rostul.

Realizarea, sau mai bine zis materializarea verticalei  $v v$ , poate fi efectuată prin diferite aparate, dintre cari cel mai simplu este firul cu pluab, compus dintr-o greutate legată la capătul unui fir metalic sau din cîneșă și care, conform legii gravitației, luînd poziția verticală, va determina verticala geometrică a punctului în care se staționează.

plane verticale, în acest caz pe planul orizontal H vom vedea unghiul sub care se intersectează cele două plane, P și V. Acest unghi  $\alpha$  dintre planul P și V, văzut pe planul orizontal H se numește unghiul orizontal.

Un punct oarecare din planul vertical, unit cu punctul  $p$  care este punctul unde verticala formată de intersecția

Planul orizontal, materializat în natură prin suprafața unui lichid în repaos, se poate realiza prin nivela cu bulă de aer, care poate materializa, așa cum se va vedea, atât planul orizontal, cât și verticala  $v v$ .

Aceste aparate, firul cu plumb și nivela cu bula de aer, materializând elementele care ne interesează în aflarea unghiurilor orizontale și verticale, vor fi anexe ale aparatelor, instrumentelor cu care se măsoară aceste unghiuri.

Dintre instrumentele goniometrice (cu care măsurăm unghiurile) cel mai întrebuițat este teodolitul

Teodolitul este instrumentul universal care servește în diferite operațiuni topografice, după cum se va putea urmări în cadrul cursului, cum sînt:

- 1) Măsurarea unghiurilor verticale (în planul vertical  $VV$ ) și măsurarea unghiurilor orizontale în planul  $H$ .
- 2) Lucrările de nivelment.
- 3) Lucrările de Tacheometrie.

Reprezentat schematic un teodolit, se prezintă în felul următor:

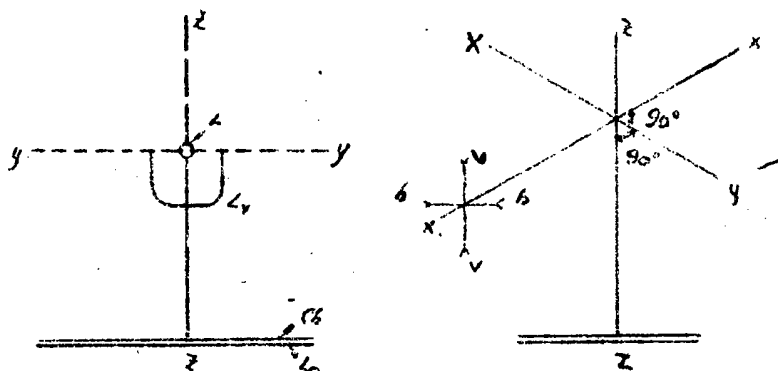


Fig. 87.

ca ax transversal al lunetei (  $L$  ).

Axul  $x x$  sau axul optic al lunetei, ax care în Fig. 87 se găsește proiectat în centrul lunetei, perpendicular pe planul hîrtiei, acest ax se rotește în jurul axului  $y y$ .

Axul  $y y$  este sprijinit pe o furcă ce face corp comun cu cercul orizontal ( $C$ ) denumit cerc alidă, cercul cu vernierele, care este concentric cu limbul gradat ( $L$ ).

Cercul alidă dela limbul orizontal, precum și cel dela limbul gradat vertical, servesc ca repere pentru citirea unghiurilor.

Un plan orizontal, numit limbul gradat orizontal ( $L$ ) care se rotește în jurul axului vertical  $z z$ , care este axul principal al instrumentului. Un plan vertical ( $L$ ) sau limbul gradat vertical, ce se rotește în jurul unui ax  $yy$  care servește

Prin construcție trebuie asigurată perpendicularitatea axului  $z z$  pe cercul gradat.

Când aceasta condiție nu este îndeplinită, în deosebi prin lovirea teodolitului, aparatul nu mai poate fi întrebuințat.

Verticalizarea axului  $z z$  se realizează cu ajutorul libelelor cu bulă de aer, de obicei în număr de două, afectate teodolitului, după cum se va vedea în cele ce urmează.

Considerând intersecția axului optic al lunetei cu axul vertical ( $z z$ ) al instrumentului, ca aflându-se în punctul  $O$  (Fig. 88), iar planul orizontal  $H$  ca reprezentând planul limbului gradat, care în realitate se găsește ceva mai jos, după cum se vede în Fig. 87, în acest caz vizând cu luneta un punct oarecare  $P$ , situat în planul vertical  $V$ ,

avem un unghi orizontal rezultat din intersecția planurilor  $V$  și  $V_0$ , unde  $V_0$  este planul de origine, iar  $V$  planul în care se vizează punctul  $P$ .

Raza vizuală sau axul  $x x$  al lunetei, face cu planul orizontal  $H$  un unghi  $\kappa$ , care este tocmai unghiul vertical.

Complimentul unghiului vertical  $\kappa$  este unghiul  $z$ , unghiul format de axa  $x x$  cu axul vertical  $z z$  al instrumentului, adică:

$$z = 90^\circ - \kappa$$

Acest unghi  $z$ , complimentul unghiului vertical  $\kappa$  se numește unghiul zenital.

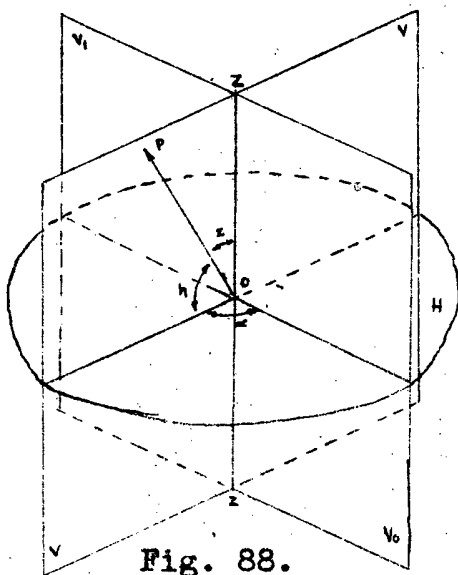


Fig. 88.

## II. Organele și anexele aparatelor de măsurat unghiuri.

La un teodolit (Fig. 89), se deosebesc următoarele părți constitutive și anexe:

- a) Cercul gradat orizontal sau limbul gradat ( $Lg$ ) cu următoarele accesorii:
- Suruburile de calaj ( $S$ ), în număr de trei,
  - Surubul de fixare ( $S_f$ ) și șurubul micrometric al

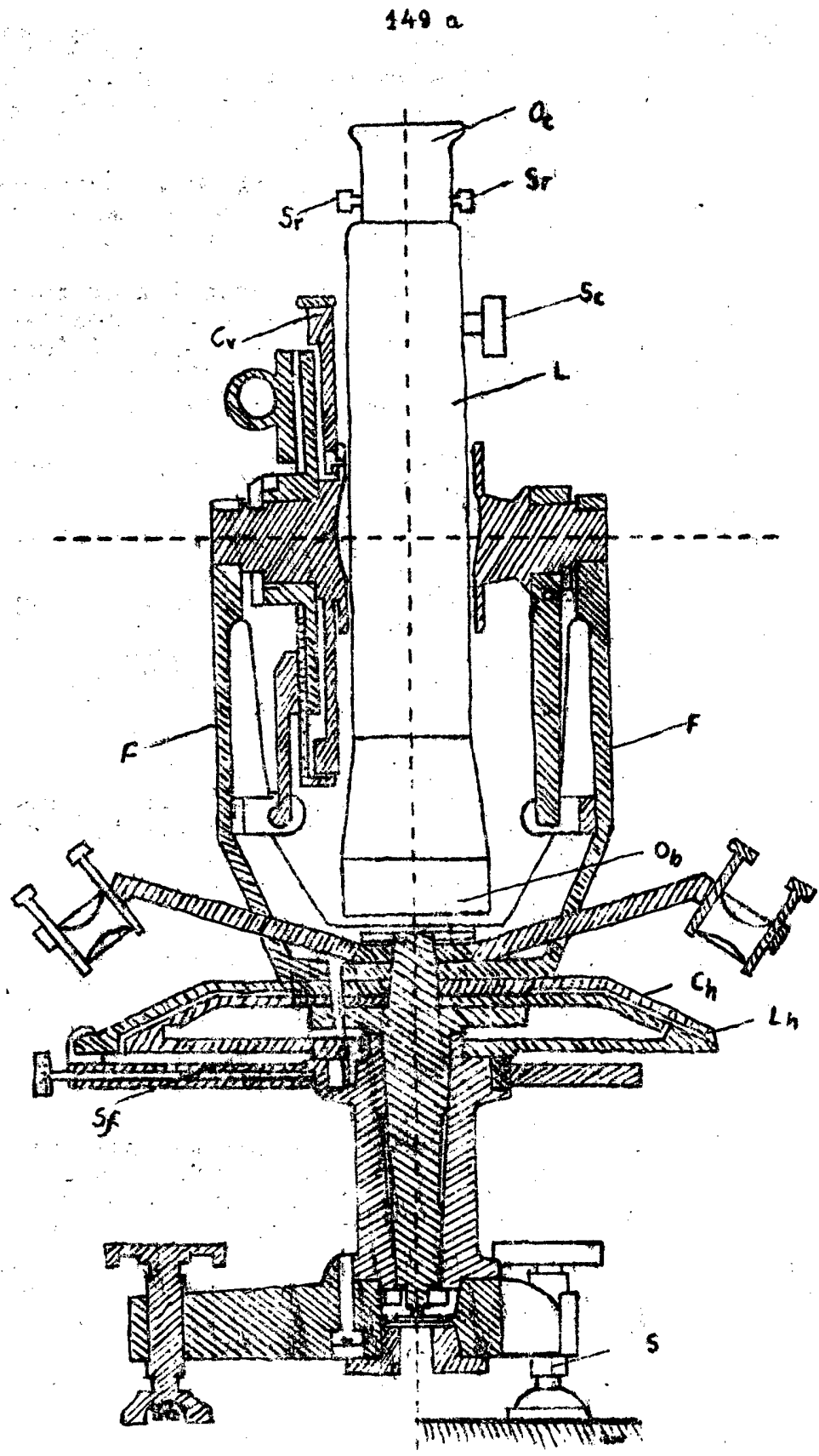


Fig. 89

- 150 -

limbului gradat; primul fixează solidar cercul alidat și cercul orizontal, iar cu șurubul micrometric se mai poate da o mișcare micrometrică celor două cercuri (gradat și cercul alidat) solidare.

b) Cercul alidat ( $C_A$ ) prevăzut cu verniere și cu microscopie pentru citirea diviziunilor unghiurilor precum și pentru estimarea subdiviziunilor gradațiilor de pe cercul orizontal.

Șurubul de fixare și șurubul micrometric al cercului alidat, primul fixând cercul alidat solidar de cercul orizontal, iar șurubul micrometric, după solidarizarea cercului alidat cu cercul orizontal, servește la deplasarea micrometrică rotativă a cercului alidat față de cel orizontal.

c) Libelele cu bulă de aer, servind la orizontalizarea limbului.

d) Furca F cu turioanele pe care se va găsi luneta.

e) Luneta acromatică (L), care face corp comun cu cercul vertical ( $C_V$ ).

Accesorile lunetei sînt:

- Obiectivul ( $O_b$ )
- Ocularul ( $O_c$ ) cu ghivinturi pentru punerea la punct a firelor reticulare, precum și un șurub cu cremalieră ( $S_c$ ) pentru punerea la punct a lunetei.
- Placa cu firele reticulare și șuruburile de rectificarea ( $S_r$ ).
- Șurubul de fixare al lunetei.
- Șurubul micrometric al lunetei.

f) Firul cu plumb necesar pentru asigurarea verticalei.

g) Stațiul pentru montarea și punerea în stație a teodolitului.

În afară de acestea teodolitul mai este înzestrat cu o libelă călăreață pentru rectificarea axului turioanelor (axul  $y y$ ) și o busolă declinator pentru orientarea instrumentului.

În cele ce urmează, se va descrie amănunțit părțile constitutive ale teodolitului, precum și accesoriile sale.

1) Firul cu plumb servește, așa cum s-a amintit deja, pentru realizarea verticalei și pentru așezarea instrumentului cu precizie deasupra punctului în care se face stație.

El se compune dintr-o greutate legată la capătul unui fir subțire. În mod obișnuit greutatea este fabricată din bronz, având forma unui con cu baza în sus. Vîrful conului trebuie să fie în continuarea firului, care la rîndul lui se află pe prelungirea axului ZZ, pentru verticalizarea căruia servește.

În operațiunile obișnuite, firul poate fi de bumbac, sau de cîneapă, pe cînd în operațiunile geodezice sau topografice, de precizie mai mare, se întrebuintează firul de mătăsă, iar lucrările de geodezie minieră drept fir avem o sîră de oțel sau se întrebuintează firul de plumb rigid, format dintr-o bară metalică, la căi căreia capăt de jos este prinsă o greutate.

Tot cu ajutorul firului cu plumb se verifică verticalitatea jaloanelor împlintate în teren.

Dacă firul este vopsit în alb poate fi utilizat la semnalizarea punctelor și ca atare servește pentru trasarea aliniamentelor cu ajutorul instrumentelor.

Deoarece, pe timp cu vînt, firul poate fi deviat, de presiunea vîntului, vor fi luate precauțiuni pentru aștopostirea lui de vînt.

Teodolitele moderne utilizează pentru determinarea verticalei, pentru punerea în stație a instrumentului, în locul firului cu plumb, un sistem optic cu prisme, prin care se obține cea mai perfectă centrare a instrumentului.

## 2). Stativul.

Pentru comoditatea și siguranța operațiilor pe teren, instrumentul topografic se fixează pe trepiede, ale căror picioare sînt confecționate din lemn de esență tare, cum ar fi stîrjarul sau lemnul de mahon, spre a asigura stabilitatea trepiedului.

În partea lor superioară, picioarele trepiedului sînt prinse de o placă de lemn, găurită la mijloc, care este mîsuța stativului, pe care se așează instrumentul topografic, iar prin gaura din mijlocul mîsuței se trece cîrligul pentru prinderea instrumentului, cîrlig de care este prins firul cu plumb.

Deoarece aparatul nu poate fi centrat, adică așezat deasupra punctului de stație, dintr-o singură dată, mîsuța este prevăzută cu un dispozitiv care permite ca aparatul să poată primi o mișcare de translație în diferite sensuri, atunci cînd este prins de mîsuță.



Există modele de construcții variate de trepiede, toate însă în majoritatea cazurilor se reduc la câteva forme fundamentale, cum sînt: trepiedul cu culise, trepiedul cu calotă sferică, etc.

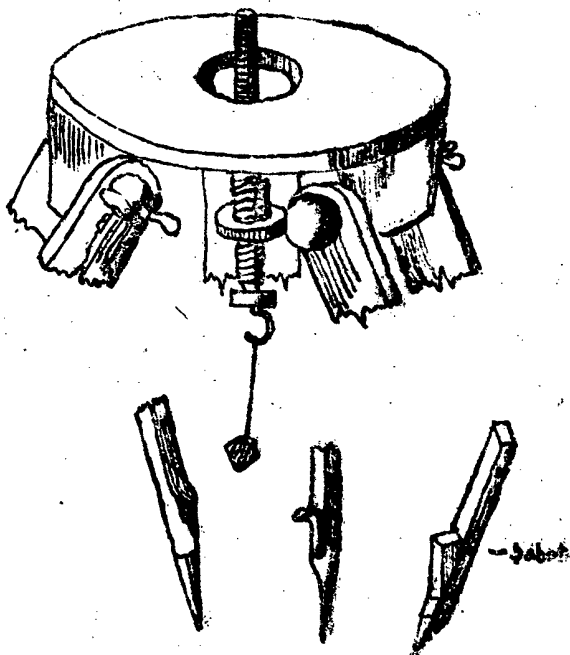


Fig. 90.

Tehnica așezării teodolitului pe trepied este următoarea: se așează în prealabil trepiedul cu picioarele stativului deasupra punctului de stație, căutîndu-se ca măsura să fie cît mai aproape de orizontală, picioarele să facă cu terenul un unghi în jurul lui  $60^\circ$  și apoi se fixează bine picioarele în teren, ceea ce se realizează în terenurile mai tari cu ajutorul unui sabot metalic ascuțit, cu care sînt prevăzute picioarele trepiedului la partea lor inferioară.

Se scoate teodolitul din cutie, îl așezăm pe măsura trepiedului, se înșurubează vergeaua trepiedului în mutelca dela baza teodolitului.

În acest fel instrumentul a fost fixat aproximativ deasupra punctului topografic, urmînd ca prin ușoară translație a lui pe măsura să se realizeze centrarea perfectă, după care se fixează definitiv aparatul prin șurubul de presiune, prin așa numitul șurub de pompă.

### 3). Cercurile gradate.

Cercul orizontal denumit și limbul gradat, nu este altceva decît un disc metalic sau la aparatele moderne de cristal, care este solidar legat de un fus tronconic, pe care este perfect perpendicular.

Acest limb gradat poartă, pe planul lui superior, sau la alte aparate pe partea lui cilindrică, gravate gradațiunile, fie în sistemul sexagesimal, fie în sistemul centesimal.

Deosebirea între gradațiunile din sistemul centesimal, se va vedea mai jos.

Diviziunile cercului gradat sînt executate din jumătate în jumătate de grad, sau din douăzeci în douăzeci de minute, ori din 10 în 10 minute.

Numărul diviziunilor depinde de mărimea diametrului limbului gradat, diametru care variază între 12 și 60 cm, dar mai ales acest număr al diviziunilor este legat de precizia, sau aproximația pe care se dorește a o da aparatului la citirea unghiurilor.

Diviziunile sînt executate cu cea mai mare exactitate, operațiune foarte delicată, care însumează cea mai mare parte din costul unui aparat.

Diferitele fabrici constructoare depun eforturi și sacrificii pentru a folosi cele mai perfecte mașini de divizat, avînd în vedere faptul că la măsurarea unghiurilor este cerută o perfectă egalitate a diviziunilor cercului gradat.

Sensul gradațiunilor, adoptat aproape universal, este cel al mersului acelor <sup>unui</sup> ceasornic.

În sistemul sexagesimal cercul este divizat în  $360^\circ$ , un grad sexagesimal are 60 minute și fiecare minut 60 de secunde.

Sistemul centezimal, care își are originea în sistemul metric, are cercul divizat în 400 centesimale, adică, în acest caz unghiul drept care în sistemul sexagesimal avea  $90^\circ$  acum are  $100^\circ$ . Un grad centesimal are 100 minute și un minut centesimal 100 secunde.

Deoarece aparatele topografice pot avea diviziuni în sistemul sexagesimal, sau în sistemul centesimal dăm mai jos transformarea gradelor centesimale în sexagesimale și invers.

#### Transformarea gradelor centesimale în sexagesimale.

$100^\circ$ Centezimale	=	$90^\circ$ sexagesimale	
$1^\circ$ Centezimal	=	$0,9^\circ$	" = $0,9 \times 60' = 54'$ sexagesimale;
$100'$ Centezimale	=	$54'$	"
$1'$ Centezimal	=	$0,54'$	" = $0,54 \times 60'' = 32''$
$100''$ Centezimale	=	$32,4''$	"
$1''$ Centezimală	=	$0,324''$	"

#### Exemplu:

52° 45 minute și 60 secunde centezimale, ceea ce se scrie:  $52^\circ$ , 4560 centezimale transformate în sistemul sexagesimal, avem:

52 x 54 x 60.....	168480°	sexagesimale,
45 x 32,4 .....	1458 "	"
60 x 0,324 .....	19,44 "	"
	<u>169957,44</u>	sexagesimale.

adică:

$$169.957,44 : 3600 = 47^{\circ} \quad 757,44 = 47^{\circ} \quad 12' 37,44''$$

Transformarea gradelor sexagesimale în centezimale.

90°	sexagesimale	=	100°	centesimale,
1°	"	=	$\frac{100}{90}$	= 1°,1111 centesimale,
54	"	=	100'	centesimale,
1	"	=	$\frac{100}{54}$	= 1,852 centesimale,
32,4	"	=	100"	centesimale,
1	"	=	$\frac{100}{32,4}$	= 3", 0864 centesimale.

Exemplu:

47° 12' 37,44" sexagesimale să le transformăm în sistemul centesimal.

47 x 3600.....=	169.200 "	sexagesimale,
12 x 60 .....	7,200 "	"
37 ,44 .....	37," 44	"
	<hr/>	
	176437",44	sexagesimale.

167.437,44 x 3,0864 = 54°, 45565.

Pentru trebuințele practice au fost întocmite tabele de transformări dintr-un sistem în altul, precum și tabele de logaritmi și de valori naturale ale liniilor trigonometrice atât în sistemul sexagesimal, cât și în sistemul centesimal, acesta din urmă fiind cel în care sînt gradate aparatele de construcție mai nouă, spre a permite calculul la mașina de calculat, care funcționează pe baza sistemului zecimal.

4). Cercul alidad.

Concentric cu limbul gradat, instrumentele au un cerc denumit cerc alidad, care la unele aparate este redus la un singur braț, fixat în lungul unuia din diametrele cercului gradat.

Acest cerc alidad servește pentru citirea unghiurilor.

- 155 -

În rotația sa vîrfurile alidadei defilează prin dreptul diviziunilor limbului, așa că, dacă pe cercul alidăd se instalează niște verniere sau microscopie, se poate face evaluarea unghiurilor în raport cu indicele zero al vernierului.

Această citire a unghiurilor este posibilă prin faptul că luneta cu care se vizează punctele, se mișcă solidar cu cercul alidăd față de cercul gradat.

Ca exemplu, să presupunem că, vizînd cu luneta un punct oarecare, se va citi pe cercul orizontal, față de zero vernierului de pe cercul alidadei, un număr oarecare de diviziuni  $n_1$ .

Vizînd un alt punct cu luneta, se va citi altă diviziune  $n_2$ .

Diferența dintre aceste două diviziuni ar reprezenta unghiul dintre cele două aliniamente formate de punctul de stație și punctele vizate.

Problema aceasta va mai fi tratată ulterior, cînd se vor arăta procedeele sau metodele întrebuintate în măsurarea unghiurilor.

#### a). Vernierele.

Cercul gradat, așa cum am văzut, ne dă o anumită precizie, adică arată numai numărul de grade și diviziunile din 20 în 20 sau din 10 în 10 minute, urmînd ca pentru fracțiuni în plus, să facem apreciere din ochi, ceea ce va da o citire, o valoare destul de relativă.

Pentru acest motiv cercul alidăd este prevăzut cu așa numitele verniere, cari constituie un mijloc de estimare mai precis, ele bazîndu-se pe următoarea observație: avînd două rigle AB și CD, (Fig. 91), și dacă atunci, cînd zero al riglei AB și zero al riglei CD, coincid, mai coincid în acelaș timp și diviziunea 9 a riglei AB cu diviziunea 10 a riglei CD, înseamnă că lungimea arătată de cele 10 diviziuni

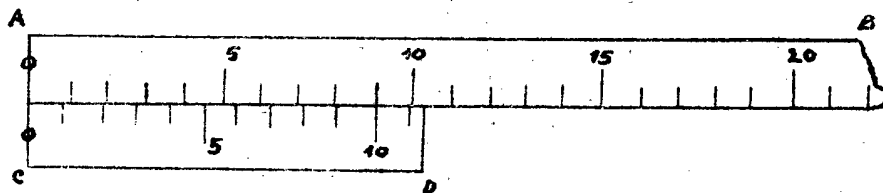


Fig. 91.

ale rigletei CD este egală cu lungimea arătată de 9 diviziuni ale riglei AB.

În acest caz diviziunea 1-a a rigletei CD este

în urmă față de diviziunea 1-a a riglei AB cu  $1/10$  de diviziune de pe AB, diviziunea 2-a a rigletei CD va fi în urmă față de diviziunea 2-a a riglei cu  $2/10$  de diviziune de pe AB s.a.m.d.

adică diviziunile rigletei CD sînt în urmă față de aceleași diviziuni ale riglei AB cu  $1/10, 2/10, 3/10, \dots, 8/10, 9/10$ .

Pentru cazul general, cînd rigleta CD ar avea în loc de zece diviziuni, un număr oarecare "n" de diviziuni, cari corespund unei lungimi egale de  $n-1$  diviziuni de pe rigla AB, în acest caz diviziunile rigletei se vor afla în urma corespunzătoarelor lor de pe riglă cu  $1/n, 2/n, 3/n, \dots, \frac{n-1}{n}$ .

urător: Citirea la vernier se face în mod

Să presupunem că rigleta CD a alunecat în lungul riglei mari AB cu un spațiu oarecare și zero al rigletei s-ar găsi într-o poziție oarecare (Fig.92).

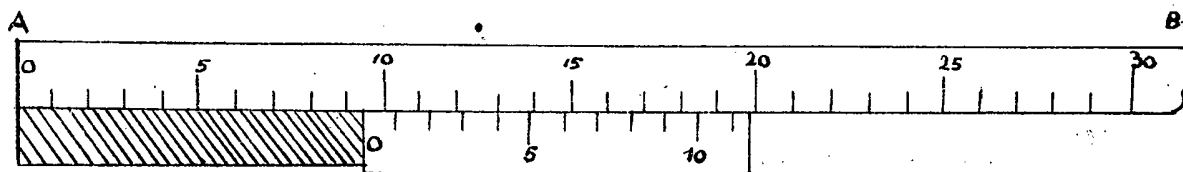


Fig.92.

Se observă că diviziunea 4 a rigletei CD coincide cu o diviziune a riglei AB, deci diviziunea 3 a rigletei este avansată față de diviziunea 12 a riglei cu  $1/10$ , diviziunea 2 a rigletei cu  $2/10$  față de diviziunea 11 a rigletei, apoi diviziunea 1 a rigletei avansată cu  $3/10$  față de 10 a riglei și în fine diviziunea zero a rigletei este avansată față de 9 a riglei cu  $4/10$ .

Spațiul cu care este deplasat zero al rigletei față de 9 al riglei, este deci de  $4/10$  dintr-o diviziune a riglei.

Observăm că numărătorul fracției care dă spațiul ce ne interesează, este tocmai numărul diviziunii rigletei care coincide cu o diviziune a riglei.

Ca atare, spațiul hașurat în figură, care ne interesează, pe care voim să-l estimăm, are 9 diviziuni întregi și  $4/10$  dintr-o diviziune întreagă.

Cu alte cuvinte, atunci cînd zero al vernierului se va găsi deplasat față de o diviziune a cercului gradat, diviziunile întregi se citesc pe cercul gradat și spațiul, sau fracțiunile de diviziuni vor fi date de diviziunea vernierului care este în coincidență cu o diviziune a cercului gradat.

Adică, în totdeauna va fi căutată diviziunea vernierului care este în prelungirea unei diviziuni a limbului gradat.

- 157 -

În cazul că rigleta, respectiv vernierul ar avea un număr oarecare de diviziuni, de exemplu "n", număr de diviziuni care dau o lungime egală cu n-1 diviziuni ale riglei sau cercului gradat, în acest caz citirea la vernier va da numărul de diviziuni întregi (N) de pe cercul gradat, plus spațiul care, dacă diviziunea m a vernierului coincide cu o diviziune a cercului gradat, este  $\frac{m}{n}$ , adică am face citirea:  $N + \frac{m}{n}$ .

Vernierul poate fi drept sau curb. Ultimul caz este cel utilizat la instrumentele de măsurat unghiuri.

Pentru acest caz cercul gradat are diviziuni în grade și subdiviziuni de grade, cari pot fi de 30, 20 sau 10 minute, iar cu vernierul se subdivid aceste subdiviziuni de grad, împărțindu-le la numărul de diviziuni ale vernierului.

Dacă am avea cercul gradat cu diviziuni de grade și subdiviziuni de 20 minute, iar vernierul ar avea 20 diviziuni, atunci aproximația sau precizia pe care o dă vernierul este 20/20, adică de 1 minut.

Putem avea verniere cari dau precizie mai mare, de exemplu dacă cercul gradat ar avea subdiviziuni de 10', iar vernierul ar avea 60 diviziuni, urmează că aproximația este de  $\frac{10}{60} = \frac{1}{6} = \frac{60}{6} = 10''$ .

Citirea la vernier este ajutată de lupete cu cari este prevăzut cercul alidat,

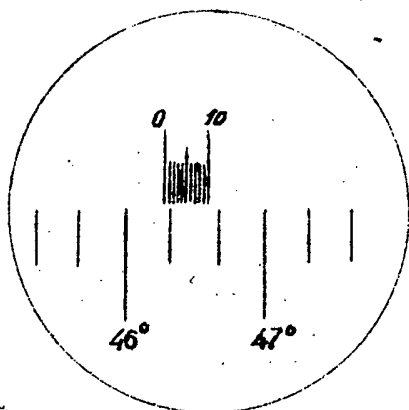
#### b). Microscopul cu scăriță.

La unele aparate pentru citirea unghiurilor, în locul vernierelor, se întrebunțează microscopul care sînt atașate acestor aparate.

Un microscop este o simplă lunetă, cu ocular obiectiv și plan reticul, identic cu luneta a cărei descriere este dată mai jos.

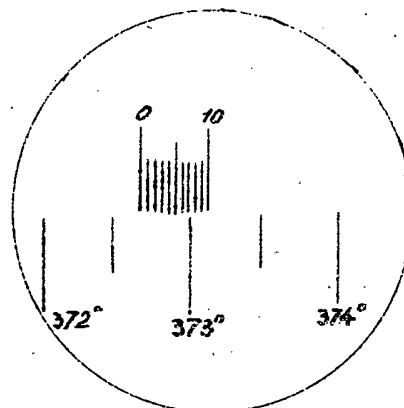
Spre a putea servi la citirea unghiurilor pe planul reticul al microscopului, sînt gravate diviziuni (scăriță) care permit evaluarea subdiviziunilor de pe cercul gradat.

Pentru exemplificare, în Fig. 93 și 94 sînt arătate gradațiunile de pe planul reticul al microscopului, servind la evaluarea subdiviziunilor cercurilor în sistemul sexagesimal și în sistemul centezimal.



Diviziuni sexagesimale.

Fig. 93.



Diviziuni centezimale.

Fig. 94.

În cazul din Fig.91 (citirea în sistemul sexagesimal) se vede că pe planul reticul al microscopului avem 10 diviziuni, care fac exact cât lungimea unei diviziuni de pe cercul gradat.

Dar o diviziune de pe cercul gradat reprezintă  $20'$ , așa că aproximația pe care o putem obține ar fi de  $\frac{20'}{10}$ , adică de 2 minute.

Însă cu ochiul mai poate fi evaluată, evident aproximativ și  $\frac{1}{4}$  dintr-o diviziune de pe reticulul microscopului.

În cazul din Fig.91 axul optic al microscopului O se găsește deplasat față de diviziunea cercului gradat  $46^\circ$  cu 8 diviziuni întregi și  $\frac{3}{4}$  de diviziune, ceea ce înseamnă că avem:

$$46^\circ \text{ la care se adaugă } \frac{20'}{10} \times 8 \text{ și } \frac{3}{4} \times \frac{20'}{10} \text{ sau:}$$

$$\begin{array}{r} 46^\circ \quad 00' \\ \quad \quad 16' \\ \quad \quad 1'30'' \\ \hline \text{Total: } 46^\circ \quad 17'30'' \end{array}$$

Pentru Fig.94 citirea în sistemul centesimal, se observă că pe cercul gradat avem subdiviziuni de grade de  $50^\circ$ , iar pe reticulul microscopului sînt 10 diviziuni corespunzătoare la 50 minute de pe cercul gradat.

Ca atare, aproximația ce se poate obține este de  $\frac{50'}{10}$  sau de  $5'$  și cu ochiul liber putem evalua,

bineînțeles aproximativ,  $\frac{1}{4}$  dintr-o diviziune a reticulului,

adică  $\frac{50}{4} = 1^{\circ} 25^{\text{cc}}$ .

In figura 94 am avea: 372 centesimale și  $50^{\circ}$  la cari se adaugă  $\frac{50}{10} \times 2$ ,  $2 \times 1^{\circ} 25^{\text{cc}}$ , ceea ce dă în total

$$\begin{array}{r} 372 \text{ } \& 50^{\circ} \\ & 40^{\circ} \\ & 2^{\circ} 50^{\text{cc}} \\ \hline 372 \text{ } \& 62^{\circ} 50^{\text{cc}} \end{array}$$

La aparatele moderne se face altfel citirea, precum se va arăta la descrierea lor.

### 5). Libelele sau nivelele cu bulă de aer.

Pentru a asigura orizontalizarea unui plan, sau pentru a determina înclinarea unui plan oarecare față de un plan orizontal, sau în fine pentru a verticaliza un ax, ne folosim de libele.

Având în vedere importanța pe care o au libelele în lucrările topografice și geodezice, este de la sine înțeles că ele sînt organe principale ale instrumentelor topografice.

Se pot deosebi două feluri de libele și anume: libele cilindrice și libele sferice.

Libelele cilindrice sînt compuse dintr-un tub de sticlă, sudat la ambele capete, după ce a fost umplut cu un lichid oarecare: apă, alcool, eter și în special o combinație de alcool și eter și introdus acest tub de sticlă într-o montură metalică.

Tubul de sticlă nu este complet umplut cu lichid, ci este lăsat un mic spațiu liber, care va determina o porțiune cu aer, o bulă de aer.

Suprafața liberă a lichidului, adică bula de aer, este aceea care ne va servi la determinarea planului orizontal, bazat pe proprietatea că lichidele în repaus au suprafața orizontală.

Tubul de sticlă în interior este perfect calibrat și șlefuit pentru ca lichidul să se poată mișca cu minimum de frecare, asigurându-se astfel precizia libelei.

In figura 95 este arătată secțiunea



longitudinală a libelei.

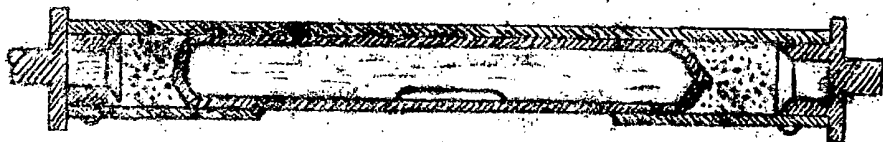


Fig. 95.

In figura 96 se arată în mod schematic o vedere a libelei.

Pentru a mări precizia libelei, tubul de sticlă este fabricat în așa fel, încît să facă parte dintr-un tor, în care mișcarea bulei de aer se face după o curbă de rezistență minimă, ceea ce revine la aceea că se mișcă după curba cu rază maximă. Aceasta ne conduce la următoarea deducție și anume că o nivelă este cu atît mai sensibilă cu cît raza de curbatură este mai mare.

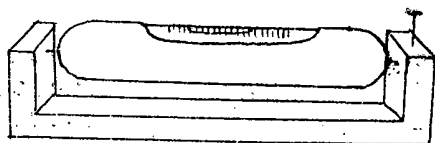


Fig. 96.

sensibilității ei prea mari.

Atunci cînd raza torului devine  $\infty$ , am avea o libelă pe care nu o putem întrebuița din cauza

In rezumat, se poate afirma, că precizia nivelei este în funcție de raza maximă a torului și de un coeficient de frecare ( $\mu$ ) între lichid și sticlă, ceea ce se poate scrie:

$$\text{Precizia nivelei} = \mu R$$

Pentru instrumentele topografice raza de curbatură a torului variază între 15 și 80 m. Pentru lucrări de precizie mare, cum ar fi în astronomie, pot fi întrebuițate libele cu rază de cca. 200 m.

După modul de întrebuițare, sau după rolul pe care îl au în operațiunile topografice, deosebim următoarele feluri de libele, reprezentate schematic în Fig. 97 și anume nivelă pentru planuri (Fig. 97, a), nivelă pentru axe numită nivelă călăreată (Fig. 97, b), apoi nivelă de suspensiune (Fig. 97, c) și în fine nivele fixe care sînt montate în așa fel, încît să facă corp comun cu instrumentul pe care îl deservesc.

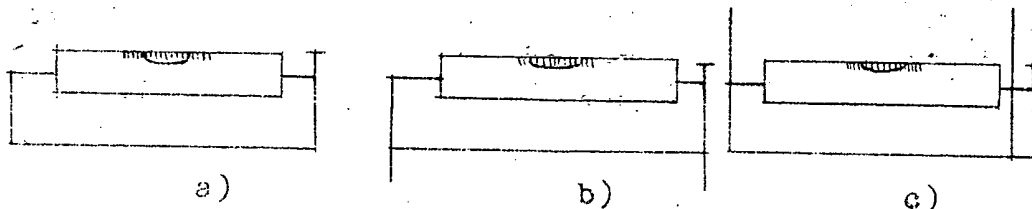


Fig. 97.

După forma recipientului în care este introdus lichidul, deosebim: nivele butoiaș sau nivelă reversibilă (Fig.98) și nivele sferice.

Nivelă butoiaș



Fig. 98.

Nivelele butoiaș permit a fi întrebuințate în orice poziție a axului lor. Nivele sferice se prezintă sub forma unor cutioare cilindrice cu capacul cutioarei în formă de calotă sferică. Mai sus s-a arătat că sensibilitatea libelelor este în funcție de rază de curbură a tubului de sticlă ( a fiolei ) și de coeficientul de frecare dintre lichid și sticlă și s-a mai amintit că la instrumentele topografice, raza poate fi de 15-80 m, trebuie să se mai facă următoarea remarcă și anume: bulele de aer din interiorul fiolelor nu este permis să fie prea mici, pentru faptul că aderența lichidului pe pereții interiori ai fiolelor, precum și capilaritatea reduc mobilitatea bulei de aer, dar nu este permis ca bulele să fie nici prea mari, deoarece în acest caz ele se mișcă cu greutate.

#### Reperarea bulei de aer.

Pentru a se putea reperă pe fiolă diferitele mișcări ale bulei de aer, cele mai multe fabrici constructoare au gravat pe fiolă, pe tubul de sticlă, sau pe o placă metalică, atașată tubului de sticlă, niște gradațiuni.

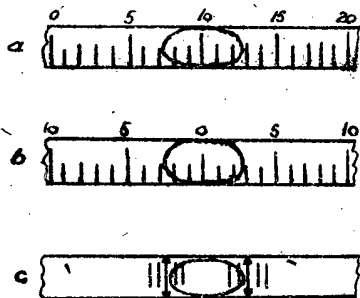


Fig. 100.

După felul cum sînt gravate aceste gradațiuni, distingem următoarele feluri de gradațiuni, arătate în Fig.100 și anume: gradațiuni continue (Fig.100) gradațiuni sistematice (Fig.97,b) și gradațiuni întrerupte (Fig.100,c).

Nivelele sistem modern pentru precizie mare nu mai au gravate diviziuni pe fiole, aceste gradațiuni lipsind cu desăvîrșire.

Reperarea bulei în acest caz se face printr-un sistem de două prisme speciale, cari sînt șezate deasupra corpului nivelei cu bulă de aer.

Fiola nivelei Zeiss, de exemplu, are forma de butoiuș, prinsă în două garnituri metalice, cari la rîndul lor au niște articulații pe cari se găsesc patru șuruburi cu ajutorul cărora se poate face rectificarea libelei ( Fig. 101 și 102 ).

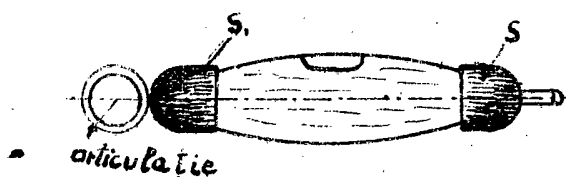


Fig. 101.

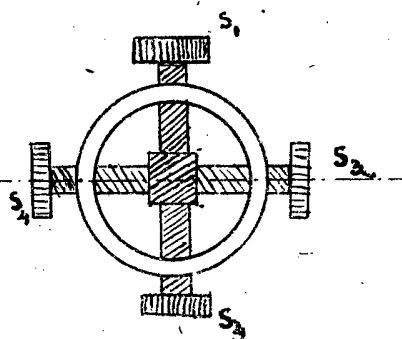


Fig. 102.

În figura 102 se poate observa că în interiorul unui inel metalic a fost introdusă o garnitură patrată, susținută de 4 șuruburi ( $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  și  $S_4$ ) cari, învârtite două câte două în acelaș sens, vor deplasa capătul fiolei articulat acestui sistem.

Deasupra nivelei arătată în Fig. 101 sînt așezate cele două prizme speciale, cari se vor dispune simetric față de mijlocul fiolei, ele avînd mai mult forma unor plăci (Fig. 100).

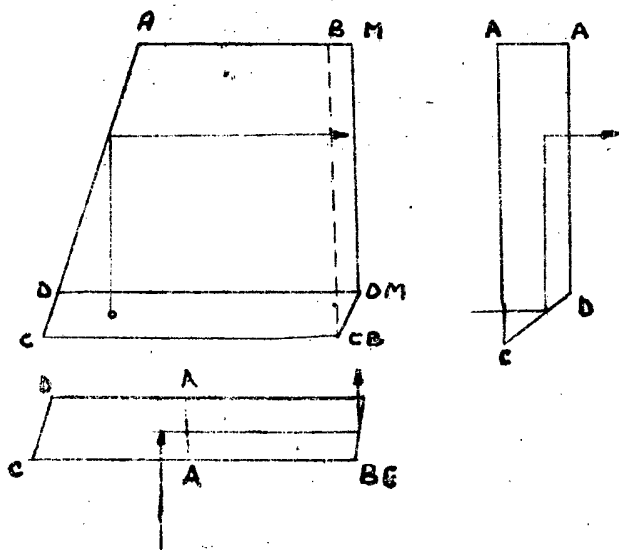


Fig. 103.

Muchiile externe AABM și AADC sînt verticale, însă AD face un unghi de  $45^\circ$  față de axul nivelei.

Muchia MMBB este șlefuită la  $45^\circ$  față de orizont și anume de jos în sus, iar muchia DDCC în sens invers.

Această construcție permite ca o rază să fie reflectată de 3 ori în corpul nivelei și, deoarece muchia se găsește exact deasupra axei nivelei, în planul DDCC se va reflecta numai un sfert din bula cu aer, sfertul acesta fiind rezultat ca și cum bula de aer ar fi fost secționată prin două plane, unul vertical

și unul orizontal.

Jumătatea simetrică, față de planul orizontal, a sfertului văzut în planul DDCC o dă prisma cea de a doua.

Atunci când bula este între repere, cele două sferturi vor fi văzute ca în Fig. 104 iar când nivelul nu se găsește între repere, cele două sferturi se vor vedea ca în Fig. 101 b.

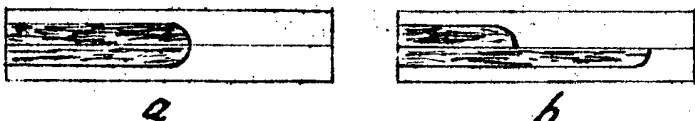


Fig. 104.

Atunci în cazul că bula este între repere, cele două jumătăți fac corp comun, iar în caz contrar ele se găsesc deplasate una față de cealaltă.

Sistemul acesta optic poate permite ca poziția bulei să fie perce-

pută exact numai la o singură vizare.

Determinarea poziției bulei.

În cazul libelelor cu gradațiuni se face prin citirea gradațiilor de la cele două capete ale bulei, adică citirea din stînga și cea din dreapta bulei.

Notînd cu  $l$  lungimea bulei, cu  $m$  mijlocul ei, cu  $s$  citirea din stînga și cu  $s'$  citirea din dreapta; lungimea bulei în cazul gradațiilor continue este:

$l = s' - s$ , iar mijlocul bulei este:

$$m = s + \frac{l}{2} = s + \frac{s' - s}{2} = \frac{s + s'}{2}$$

sau:  $m = s' - \frac{l}{2} = s' - \frac{s' - s}{2} = \frac{s + s'}{2}$

Admițînd cazul că libela s-ar găsi pe un plan orizontal, va trebui în acest caz ca mijlocul ei să coincidă cu marca M (gradațiune gravată pe fiolă).

În caz contrar mijlocul bulei va fi deplasat față de M cu o diferență oarecare, pe care să o notăm cu  $a$  :

$$a = m - M.$$

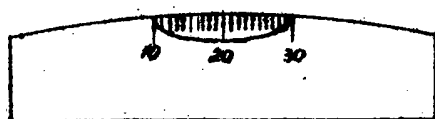


Fig. 105.

Să luăm un exemplu pentru relevarea celor de mai sus. Citirile la dreapta și la stînga bulei, așa cum se vede în Fig., pentru cazul că libela se găsește pe un plan

- 164 -

orizontal sînt:

$$\begin{aligned}
 f &= 29,5; & S &= 11,0 \\
 l = f - s &= 29,5 - 11,0 = 18,5 & f + s &= 29,5 + 11,0 = 40,5 \\
 m &= \frac{f + s}{2} = \frac{40,5}{2} = 20,25.
 \end{aligned}$$

Dar marca nivelei este  $M = 20$ . Deci între mijlocul bulei calculat și marca  $M$  avem o diferență:  
 $a = m - M = 0,25$ , această diferență va trebui înlăturată.

Valorile lui  $a$  pot fi:

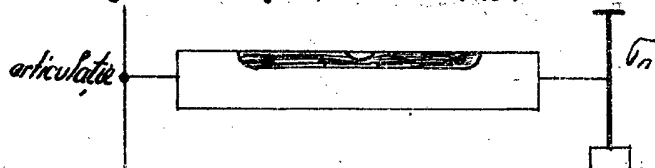
- $a > 0$  caz în care bula se găsește la dreapta lui  $M$ ,
- $a = 0$  caz în care se găsește chiar în  $M$ ,
- $a < 0$  caz în care se găsește la stînga lui  $M$ .

### Rectificarea libelei cu bulă de aer.

Înlăturarea diferenței constatate mai sus, poartă denumirea de rectificarea libelei.

În operațiunea de rectificarea a libelei se disting următoarele trei cazuri:

- a) Cînd rectificarea libelei se face pe un plan orizontal,
  - b) Cînd rectificarea se face pe un plan care poate fi orizontalizat,
  - c) Cînd rectificarea se face pe un plan fix.
- a) - În primul caz bula libelei este adusă între repere cu ajutorul șurubului ( $\phi_n$ ) de la montura libelei. (Fig.106)

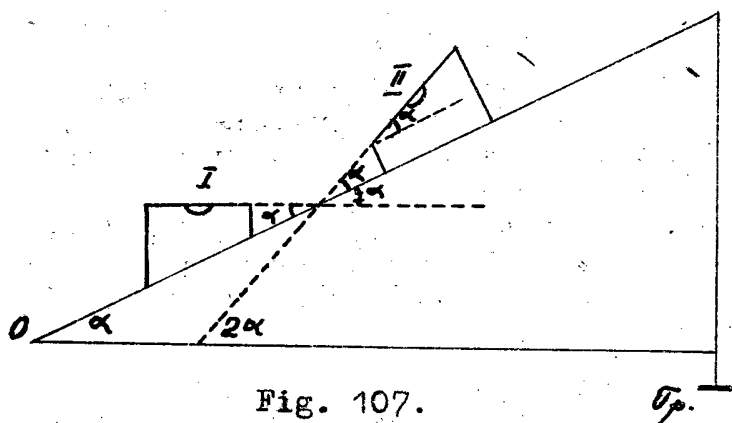


Pentru verificare libela este întoarsă cap la cap, adică se rotește cu  $180^\circ$  și va trebui să fie din nou între repere.

Fig. 106.

- b) - Cazul cînd libela este rectificată pe un plan orizontal este foarte rar.

Mult mai frecvent este întîlnit cel de al doilea caz, în care libela este rectificată pe un plan care poate fi orizontal. În acest caz libela se aduce între repere cu ajutorul șurubului ( $\phi_n$ ) al planului, adică în cazul teodolitului prin două șuruburi de calaj (poziția I din Fig.104).



Unghiul pe care îl face libela cu planul orizontal este unghiul  $\alpha$ , pe care îl face și planul nostru.

Se întoarce libela cap la cap, ceea ce la teodolit se realizează dând aparatului o rotație de  $180^\circ$ .

Libela va ajunge în poziția II din Fig. 104, în care caz ea negăsindu-se între repere, va face cu

planul orizontal un unghi egal cu  $2\alpha$ .

Atunci pentru rectificarea libelei și orizontalizarea planului, jumătate din abaterea bulei de aer se va corecta de la șurubul  $\mu$  al libelei și jumătate de la șurubul  $\mu'$  al planului.

Operațiunea se repetă de mai multe ori și atunci când libela este între repere și în poziția I și în poziția II, înseamnă că libela este verificată și planul este orizontal pe o direcțiune.

La teodolit, pentru a realiza planul orizontal, după verificarea libelei și aducerea planului în poziție orizontală pe direcția a două șuruburi de calaj, se așează libela în poziție perpendiculară pe poziția I (adică pe cea a celor două șuruburi de calaj) și se aduce bula între repere, manevrând cu cel de al treilea șurub de calaj.

c). - Rectificarea libelei pe un plan fix se face astfel:

Intr-o poziție a libelei se fac citirile și se găsesc întrebuintând notațiile anterioare,  $S_1$  și  $\delta_1$ , adică citirea la stînga și la dreapta.

Mijlocul libelei se va determina știind că:

$$m_1 = \frac{S_1 + \delta_1}{2} \quad \text{ținînd cont că lungimea bulei de aer este:}$$

$$l = \delta_1 -$$

$$\delta_2 \text{ și } S_2$$

Se întoarce libela cap la cap și se fac citirile

Acum mijlocul bulei este:

$$m_2 = \frac{S_2 + \delta_2}{2} \quad \text{iar } l = \delta_2 - S_2$$

$$\text{sau: } m = \frac{m_1 + m_2}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\delta_1 + S_1}{2} + \left( \frac{\delta_2 + S_2}{2} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \left[ (\delta_2 + \delta_1) + (S_2 + S_1) \right]$$

Eroarea este:  $a = m - M$ .

Dacă  $a = 0$ , atunci nivela este justă și nu mai trebuie făcută nici un fel de rectificare.

Dacă însă  $a$  (eroarea) este diferită de zero, folosindu-ne de valoarea lui  $m$ , putem verifica libela, știind că atunci, când  $a > 0$  este la dreapta lui  $M$ , iar când  $a < 0$  este la stînga lui  $M$ .

Pentru rectificarea libelei, adică pentru ca bula cu aer să fie între repere în planul orizontal, se va manevra șurubul  $\alpha$  al libelei astfel, încît abaterea  $m$  să fie anulată.

### Elementele caracteristice ale libelei.

Libelele au următoarele caracteristici, cari pot fi urmărite pe Fig. 108 și anume:

$R$  = este raza de curbură a fiolei,

$\rho$  =  $\frac{1}{R}$  este curbura

$e$  = lungimea unei gradațiuni care în general este de 2 mm,

$\delta$  = este unghiul la centru corespunzător unei diviziune de lungime  $e$ .

$\delta = \frac{e}{R}$ ,  $\delta = \rho'' e$ ,  $\rho =$

= 206265.

Pentru un unghi oarecare am avea lungimea  $K_e$  și unghiul respectiv ( $\alpha$ ), va fi

$$\alpha'' = \rho'' \frac{K_e}{R} = k \delta''$$

Fig. 108.

Să vedem cum se determină elementele caracteristice ale libelei.

#### a) Determinarea razei de curbură $R$ .

Din formula de mai sus, valoarea lui  $R$  este dată de relația:

$$R = \frac{\rho''}{\alpha''} K_e.$$

În această formulă  $e$ ,  $\rho''$  și  $K$  sînt cunoscute, urmează să se determine și valoarea unghiului  $\alpha$ , corespunzător.

punător celor  $K$  diviziuni, pentru a putea avea imediat raza de curbură ( $R$ ).

Determinarea lui se face cu ajutorul unui instrument arătat în schița din Fig. 109, iar schematic acest instrument arătat în schița din Fig. 110.

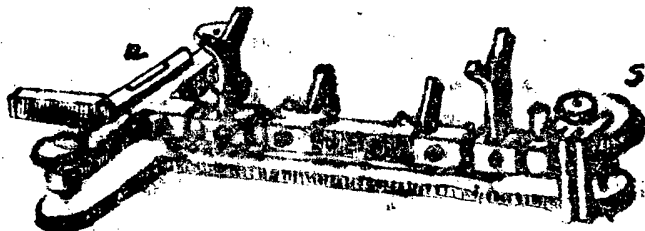


Fig. 109.

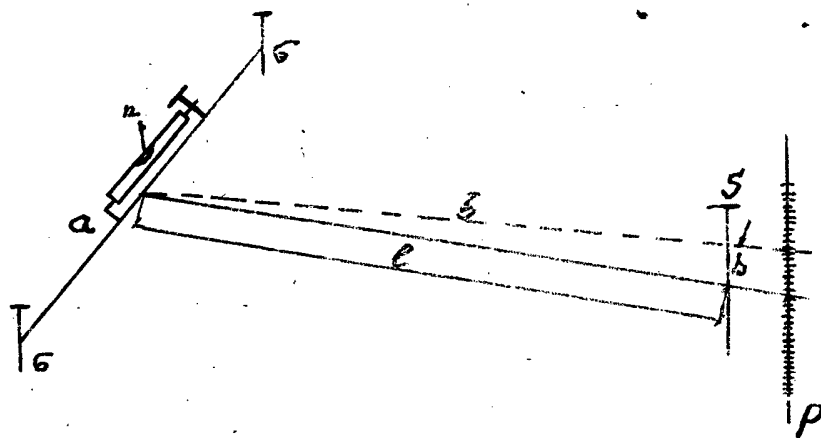


Fig. 110.

El se compune dintr-un stativ în forma de  $\tau$ , alcătuit din barele  $a$  și  $b$ .

Bara  $a$  la capete este prevăzută cu șuruburile de calaj ( $n$ ), iar  $b$  are la capătul ei un șurub micrometric  $S$ .

Numărul pasurilor cu cari s-a deplasat șurubul micrometric ( $S$ ) în sus sau în jos, poate fi citit ori pe plăcuța șurubului, ori pe placă atașată instrumentului ( $p$ ).

Pe bara  $a$  este prevăzută o nivelă  $n$ , în scopul de a asigura orizontalizarea acestei bare.

Pentru determinarea unghiului  $\alpha$ , corespunzător la  $K$  diviziuni de pe libelă, a cărei rază ( $R$ ) vom să determinăm, se așează aceasta libelă pe bara  $b$  în lungul acesteia și se rotește șurubul  $S$  pînă cînd bula libelei de încercat se deplasează cu  $K$  diviziuni.

Unghiul  $\alpha$  corespunzător celor  $K$  diviziuni este:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{s}{R}$$

unde  $s$  este înălțimea șurubului corespunzătoare pentru a face



- 168 -

ca bula să se deplaseze cu  $K$  diviziuni, iar  $l$  este lungimea barei  $b$ .

Dar:  $s = g S_n$ , unde  $g$  este înălțimea unui pas al șurubului  $S$ , iar  $S_n$  reprezintă numărul pasurilor șurubului  $S$  pentru a deplasa bula nivelei cu  $K$  diviziuni.

Pe  $S_n$ , așa cum am amintit, îl citim fie pe pălărioara șurubului  $S$ , fie pe placa  $p$ , iar lungimea unui pas se măsoară prin procedeul universal, adică șurubul este înegrit cu praf de cărbune și apoi pe o bucată de hîrtie se imprimă pasurile lui.

Măsurînd o lungime oarecare de șurub și împărțind cu numărul pasurilor, se află lungimea  $g$  a unui pas.

Deci:  $tg \alpha = \frac{g}{l} S_n$ , ori, fiindcă unghiul  $\alpha$  este foarte mic, se poate scrie:  $\alpha'' = \rho'' \frac{g}{l} S_n$ .

Notând:  $\rho'' \frac{g}{l} = \psi''$  adică unghiul corespunzător unui singur pas al șurubului  $S$ , avem:  $\alpha'' = \psi'' S_n$ .

Avînd valoarea lui  $\alpha$ , se poate calcula  $R$ .

#### b). Determinarea unghiului

Unghiul la centru corespunzător unei singure diviziuni, sau lungimei dintre două diviziuni se poate determina astfel:

Intr-o poziție oarecare a bulei se fac citirile la dreapta și la stînga, adică:  $S_1^T$  și  $S_1$ , mijlocul bulei va fi:

$m_1 = \frac{S_1^T + S_1}{2}$ , corespunzător poziției  $S_1^T$  a tamburului șurubului  $S$  dela aparatul descris mai sus.

Invărtim tamburul și se vor face la nivelă alte citiri:  $S_2^T$  și  $S_2$ , cînd mijlocul bulei va fi:

$m_2 = \frac{S_2^T + S_2}{2}$ , corespunzător poziției  $(S_2^T)$

Dar:  $(m_2 - m_1) \psi'' = \alpha'' = (S_2^T - S_1^T) \psi''$ .

Unde  $\psi''$  are semnificația arătată anterior.

Deci:  $\psi'' = \frac{S_2^T - S_1^T}{\frac{S_2^T - S_1^T}{2} + \frac{S_2 - S_1}{2}}$

Pentru diferitele nivele cu bulă de aer, valoarea unghiului  $\delta$  în secunde este:

- La libelele de precizie	$\delta = 5''$
- La teodolitele geodezice de precizie	$\delta = 10''$
- " " obișnuite de câmp	$\delta = 20''$
- " " și nivelele mici	$\delta = 30'' - 40''$
- " libele sferice	$\delta = 2''$
- " " atașate mirelor	$\delta = 5''$
- " " pentru planșete	$\delta = 50'' - 60''$

### Observații:

Nivelele cu bulă de aer, cari servesc pentru verificarea axului turcoanelor ( $yy$ ), denumite, cum s-a mai spus nivelele călărețe, sînt susceptibile de următoarea eroare: se poate întîmpla ca tangenta  $TT$  la marea libelei să nu fie paralelă cu axul  $yy$ , adică libela să fie nerectificată, ceea ce se poate foarte ușor constata, dacă libela așezată pe axul  $yy$  într-o poziție și în poziția cap la cap între repere.

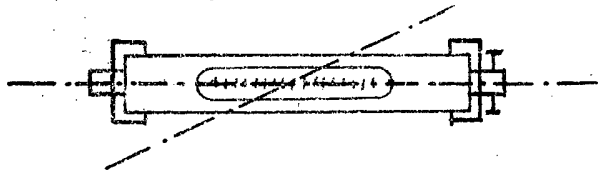


Fig. 111.

Dacă nu avem libela între repere și în cazul cînd se rotește cap la cap, atunci se va elimina eroarea cu ajutorul a două șuruburi  $S_1$  și  $S_2$ , așezate orizontal, la unul din capetele libelei.

Evident că eliminarea erorii se face după ce axul  $yy$  a fost orizontalizat.

Sau, după cum se arată la rectificarea axului  $yy$ , se poate ca libela călăreță să se rectifice în același timp cu axul  $yy$ .

### 6). Luneta.

Luneta se compune dintr'un tub ( $T_1$ ) care la unul din capete poartă o lentilă convergentă  $O$ , denumită obiectiv, iar la celălalt capăt are un alt tub ( $T_2$ ), concentric cu primul, dar de diametru mai mic și în acesta înșurubat înăuntru un tub ( $T_3$ ) care are două lentile convergente  $L_1$  și  $L_2$ .

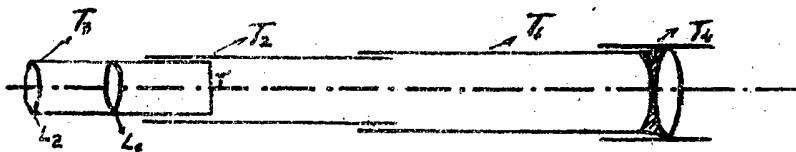


Fig. 112.

Tuburile  $T_2$  și  $T_3$  utilizează solidar în interiorul tubului  $T_1$ .

De tubul  $T_2$ , este fixată placa reticulară, reticulul  $r$ , fapt care face ca acest tub să poar

te denumirea de tub portretic, iar tubul  $T_3$  este ocularul.

Culisarea tuburilor  $T_2$  și  $T_3$  în tubul  $T_1$  este realizată printr-o rotiță dințată și o cremalieră iar înșurubarea sau mișcarea lui  $T_3$  în  $T_2$  se face cu mână.

Sînt lunete la cari tubul ocular lipsește, lentila ocular fiind înșurubată la tubul reticular, dacă avem doar două tuburi.

Pentru protecție și în special pentru a apăra de soare ocularul  $O$ , tubul  $T_1$ , la capătul unde are ocularul, mai este prevăzut cu un alt tub  $T_4$ .

Toate trei tuburile  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  în interior sînt vopsite în culoare neagră mată, pentru a evita reflexia razelor în interior.

Imaginea obiectivelor se formează în lunetă în modul arătat schematic în Fig. 113 și anume:

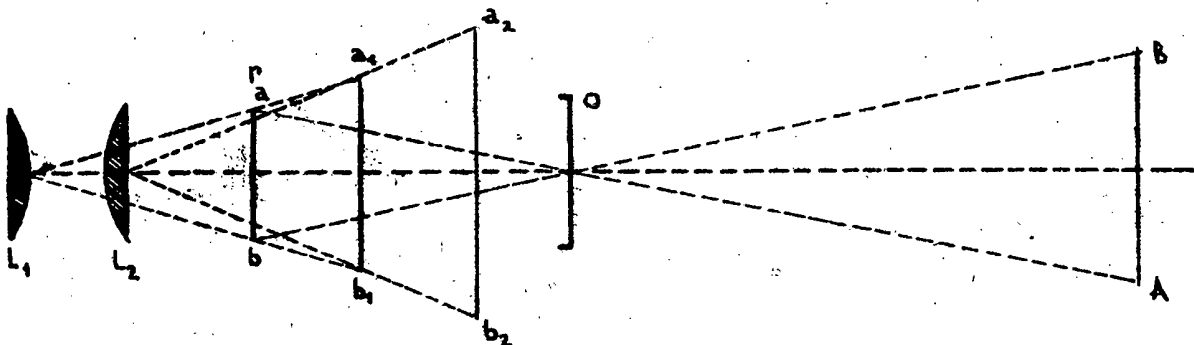


Fig. 113.

Razele de lumină pornite de la extremitățile  $A$ ,  $B$ , ale obiectivului vizat, trec prin centrul optic al obiectivului  $O$  și vor forma pe planul reticul  $r$ , imaginea răsturnată  $b$   $a$ .

La rîndul lui ocularul, format din cele două lentile convergente,  $L_3$  și  $L_4$ , avînd rolul de a măări imaginea, ne va forma în primul rînd o imagine virtuală  $a_1$ ,  $b_1$  și apoi imaginea virtuală  $a_2$   $b_2$ , așa cum este văzută de ochiul observatorului.

Dar pentru că distanța dela obiect la obiectivul  $O$ , este diferită, dela caz la caz, va fi necesar ca și distanța dela planul reticul  $r$  la obiectivul  $O$  să fie variabilă, fapt pentru care avem culisarea amintită a tubului ocular și portretic.

Așa cum am văzut obiectivul, care nu este altceva decît o lentilă convergentă, are rolul de a forma în interiorul lunetei imaginea obiectivelor, pe cînd ocularul format din două lentile convergente, îndeplineșe rolul de lupă, adică ne mărește imaginea formată pe planul reticul.

Deoarece în măsurătorile topografice este necesar ca imaginea să fie reperată, față de axul optic al lunetei, (axul  $xx$ ) sau față de o serie de linii geometrice atunci aceste linii sînt așezate direct în lunete, chiar în planul reticulului.

Liniiile acestea poartă denumirea de fire reticulare.

Ele sînt fixate pe un inel (Fig. 114), care la rîndul lui este susținut prin niște șuruburi, cu ajutorul cărora poate fi mișcat în plan vertical (în sus sau în jos) și în plan orizontal, adică la stînga sau la dreapta.

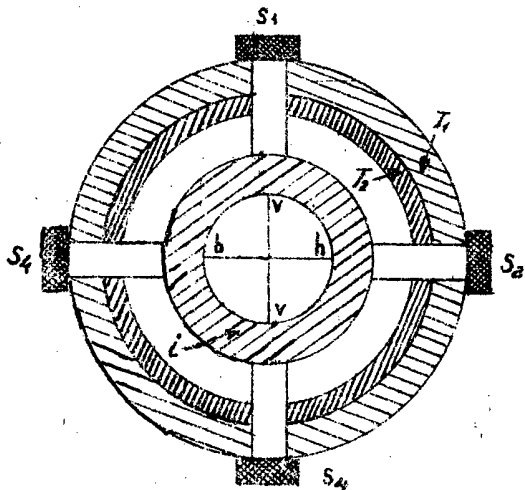


Fig. 114.

$i$  = inelul pe care sînt fixate firele reticulare,  
 $T_1$  și  $T_2$  sînt cele două tuburi arătate în schița din Fig. 112.

În mod obișnuit avem două fire reticulare perpendiculare, așa cum se arată în Fig. 112 a, a căror intersecție este pe axul optic al lunetei. La foarte multe aparate topografice, în afară de cele două fire reticulare perpendiculare, mai sînt încă două fire orizontale, echidistante față de firul reticular orizontal, aceste două fire (Fig. 115 b) ser-

vesc în măsurătorile stadimetrice, fapt pentru care se numesc fire stadimetrice sau tahimetrice.

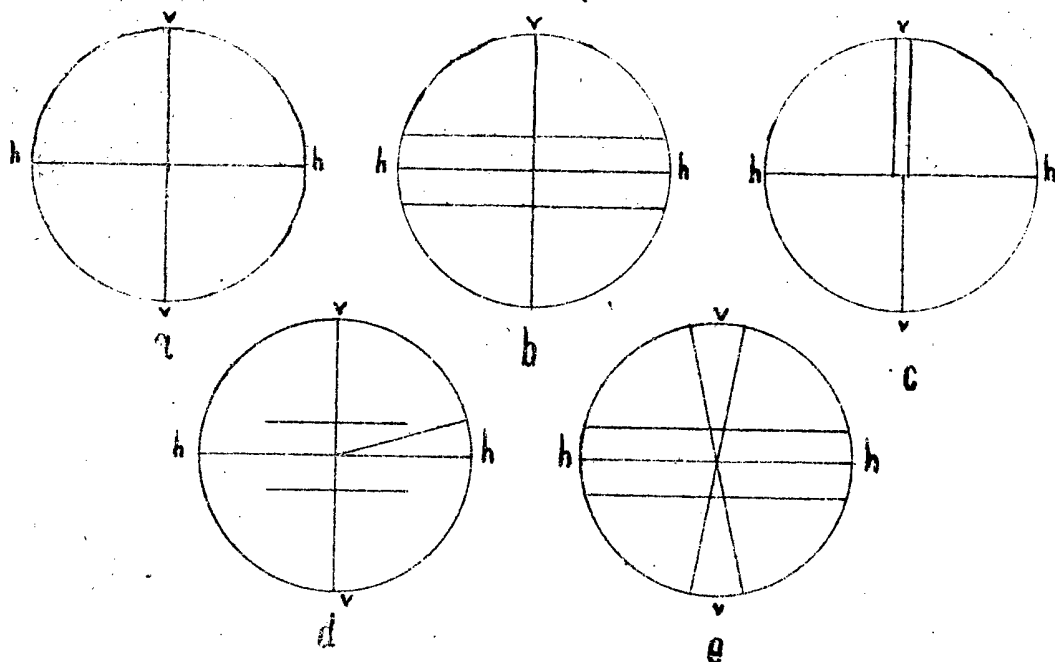


Fig. 115.

În alte teodolite, diferiții constructori au imaginat diferite feluri de fire reticulare (Fig. 115 c, d, e,) pentru reperarea cât mai precisă a imaginilor.

Firele reticulare sînt din fir de paianjen sau, în unele cazuri ele pot fi gravate cu diamant pe lame de sticlă.

Cu ajutorul lunetei se fac vizele necesare, fapt pentru care va trebui ca să prindem cu claritate obiectul dorit, aceasta realizîndu-se prin culisarea ocularului, așa fel ca firele reticulare să apară în toată claritatea lor.

- III. Verificarea și rectificarea aparatelor,  
eliminarea erorilor, punere în stație.

Înainte de a se trece la punerea în stație a instrumentelor, vor trebui cercetate toate erorile posibile și apoi înlăturate, pentru ca măsurătorile să poată fi executate în bune condițiuni.

Pentru aceasta să vedem cari erori pot apare și cum sînt ele înlăturate.

- 1. Verificarea și rectificarea libelei  
și orizontalizarea aparatului.

Atunci cînd am descris libelele, s-a arătat și modul cum se face verificarea și rectificarea lor, în cazul cînd sînt pe un plan care poate fi făcut orizontal, cazul teodolitelor, se aduce libela pe direcția a două șuruburi de calaj, din manevrăm pînă cînd bula este între repere, se rotește libela cap la cap prin rotirea cu  $180^\circ$  a aparatului și în cazul că bula de aer nu mai este între repere, jumătate din eroare se corectează din șuruburile de calaj ( $\mu$ ), iar jumătate din șurubul ( $\mu$ ) al libelei.

Operațiunea se repetă de mai multe ori pînă cînd libela este între repere și pe direcția celor două șuruburi de calaj și în poziția cap la cap.

Aceasta însemnează că s-a făcut rectificarea libelei.

Pentru orizontalizarea aparatului, sau pentru a face ca axul zz să fie vertical, se aduce libela în poziție perpendiculară pe direcția celor două șuruburi de

- 173 -

calaj și prin șurubul al treilea de calaj aducem bula între repere.

## - 2. Verificarea și rectificarea axului YY.

Pentru ca să putem lucra cu luneta în bune condițiuni, va trebui ca și axul YY sau axul turioanelor să fie perpendicular pe axul ZZ.

Controlul acestei condițiuni se face cu ajutorul libelei călărețe, după ce în prealabil această a fost rectificată.

Operațiunea de verificare a libelei călărețe se face analog cu procedeul descris la verificarea și rectificarea libelilor, adică libela călăreță este așezată pe axa turioanelor, se aduce bula de aer între repere cu ajutorul a două șuruburi de calaj și apoi este întoarsă în poziție cap la cap, ridicând libela de pe axă și rotindu-o cu  $180^\circ$ , apoi este din nou așezată pe axa turioanelor.

În această poziție jumătate din deplasarea bulei este corectată din șurubul libelei și aceasta este acum rectificată, iar jumătatea cealaltă din șuruburile de calaj pentru ca axul yy să fie orizontal.

Libela astfel rectificată, va avea tangenta la marca ei M, paralelă cu axul YY al turioanelor.

După ce am terminat rectificarea libelei călărețe, urmează verificarea și rectificarea axului yy, care a fost adus orizontal.

Pentru verificare rotim aparatul cu  $180^\circ$  și dacă bula de aer a libelei călărețe este între repere, înseamnă că axul yy este perpendicular pe zz, în caz contrar abaterea libelei reprezintă dublul unghiului de eroare  $\angle$  așa cum arată Fig. 116, în care axul zz este înclinat, pe câtă vreme axul yy înainte de rotirea aparatului cu  $180^\circ$  a fost orizontal.

Abaterea bulei reprezentând dublul unghiului de înclinație  $\angle$ , adesea dublul erorii de neperpendicularitate.

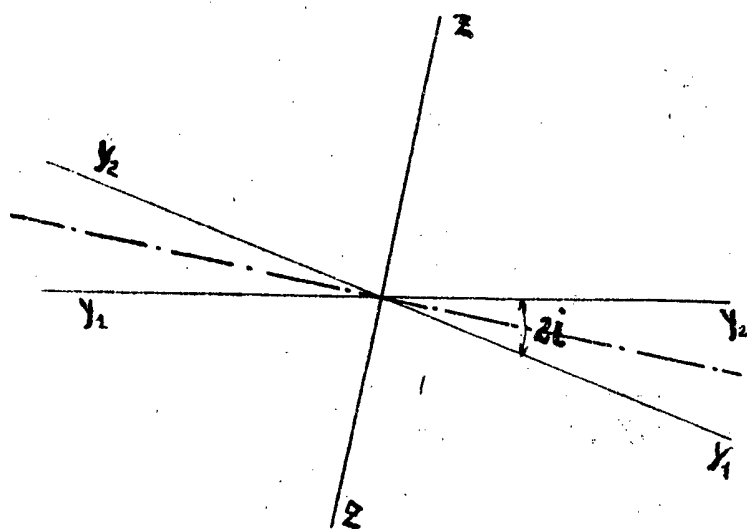


Fig. 116.

ritate a axului  $yy$  pe  $zz$ , pentru rectificare se manevrează șuruburile  $S_1$  și  $S_2$  dela furcă, arătate în Fig. 117, pînă cînd bula de aer ajunge la  $1/2$  din abatere.

Manevrînd din șuruburile de calaj pînă ajunge bula de aer a libelei călărețe între repere, înseamnă că axul  $yy$  a fost readus în poziție orizontală, deci  $zz$ , în cazul că rectificarea a fost complet efectuată, este verticală ca atare libelele de pe cercul alidăd vor avea bula de aer între repere.

În caz contrar operația trebuie repetată intrucît rectificările nu au fost terminate.

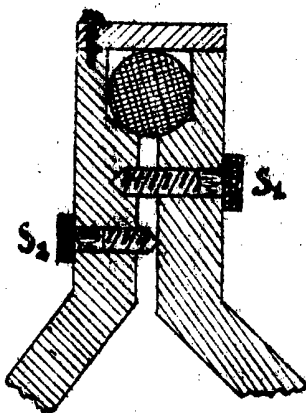


Fig. 117.

În cazul că am opera cu aparatele (cu teodolitul) fără a fi rectificat axul  $YY$ , eliminarea erorii poate fi făcută dînd viză odată cu luneta în poziție normală, adică cu cercul vertical la dreapta și după aceea făcînd media citirilor.

Ca atare, ca regulă generală, pentru a elimina cu siguranță eroarea de neperpendicularitate a axului  $YY$  pe axul  $ZZ$ , se vor face două citiri cu luneta și anume: în poziția cu cercul vertical la stînga și apoi cu cercul vertical la dreapta (cu luneta peste cap) și se ia media citirilor.

De altfel, după cum vom vedea, prin această operațiune se mai elimină și alte erori, ca exemplu eroarea de excentricitate a lunetei, pe care o vom vedea

în cadrul acestui capitol.

### 3.- Verificarea și rectificarea axului $XX$ .

Așa cum am mai amintit, axul  $XX$ , este axul optic al lunetei, ax cu care se dau vizele în măsurătorile noastre.

Acest ax trebuie să fie perpendicular pe axul  $YY$  al turioanelor.

Axul  $XX$ , adică axul optic al lunetei este determinat de centrul optic al obiectivului și de punctul de intersecție al firelor reticulare.

Prin urmare este axul care unește două puncte, dintre care unul fix, centrul obiectivului și al doilea punctul de intersecție al firelor reticulare care este mobil.

- 175 -

Ca atare, atunci când axul optic (axul  $XX$ , al lunetei nu este perpendicular pe axul  $YY$ , verificarea pe care o vom vedea mai jos cum este făcută, înseamnă că placa reticulară este deplasată, așa că, executând lucrări cu o astfel de lunetă, se va comite o eroare, care poartă numele de eroare de colimație.

Pentru verificarea și eliminarea erorii de colimație au fost imaginate următoarele metode:

a) Metoda cunoscută sub numele de metoda ingine-rească.

Vizînd un punct oarecare  $P_1$ , cu lunetă în poziție normală, adică avînd cercul vertical la stînga și dînd luneta peste cap și apoi rotîndu-o exact cu  $180^\circ$ , dacă nu am avea eroare de colimație, ar trebui să fie găsit din nou, la încrucișarea firelor reticulare, punctul  $P_1$ .

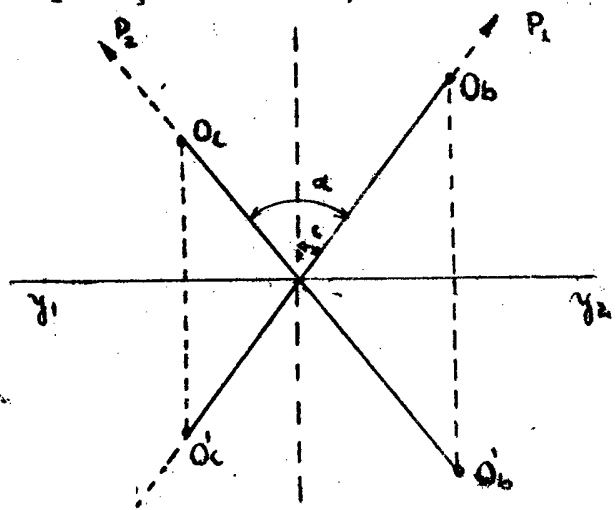


Fig. 118.

ocularul în locul lui  $O_2$ .

Din cauza erorii de colimație (unghiul  $\epsilon$ ), atunci când se dă luneta peste cap, ocularul ( $O_2$ ) ajunge în poziția  $O_c$  din Fig. 118, iar obiectivul în poziția  $O_s$ .

Rotînd instrumentul exact cu  $180^\circ$ , prin citire la vernier  $Y_2$  ajunge în poziția  $Y_1$ , iar  $Y_1$  în poziția  $Y_2$ , obiectivul va ajunge în cadranel în care a fost ocularul ( $O_c$ ), iar o-

Acum nu va mai fi găsit punctul  $P_1$  ci un alt punct  $P_2$ , cu alte cuvinte, punctul nostru  $P_1$  a rămas în dreapta și între cele două poziții ale lunetei se formează un unghi  $\alpha$ , care este dublul erorii de colimație.

Odată constatată eroarea, urmează eliminarea ei, cu ajutorul șuruburilor plăcii firelor reticulare, arătate în Fig. 111, cu ajutorul cărora se realizează deplasare plăcii reticulare, astfel ca să fie eliminat  $\frac{\alpha}{2}$ , adică atît cît este eroarea.

Pentru eliminarea erorii, în loc să fie vizat punctul  $P_1$ , poate fi vizată o diviziune oarecare de pe o miră gradată.

De exemplu diviziunea 20, (Fig. 119).

Dînd apoi luneta peste cap și rotîndu-o exact cu  $180^\circ$ , se va citi pe miră, în cazul că avem eroare de



colimație, diviziunea de exemplu 40 cm, unghiul  $\alpha$ , fiind dublul erorii de colimație C, urmează că, făcând diferența între cele două citiri de pe miră și rezultatul împărțit la 2, adică

$$\frac{40 - 20}{2} = 10 \text{ cm, ne arată că}$$

va trebui să mișcăm placa fi-relor reticulare, prin șuruburile ei, pînă cînd se va citi pe miră diviziunea 40 - 10, adică diviziunea 30 cm și eroarea este eliminată.

Această metodă are desavantajul că eroarea de colimație nu este complet eliminată, pe deoparte din cauză că putem avea cercul gradat cu diviziuni inegale și apoi cercul gradat mai poate prezenta eroare de excentricitate după cum vom vedea.

În plus o altă greutate, deci

désavantaj, trebuie să facem citiri la verniere, pentru că luneta, după ce este dată peste cap, să fie rotită cu exactitate 180°.

De aceea atunci, cînd se întrebuintează această metodă, pentru eliminarea completă a erorii de colimație, va trebui ca operațiunea să fie repetată de 2-3 ori.

b) Metoda geodezică sau metoda de mărire a erorii de colimație de 4 ori.

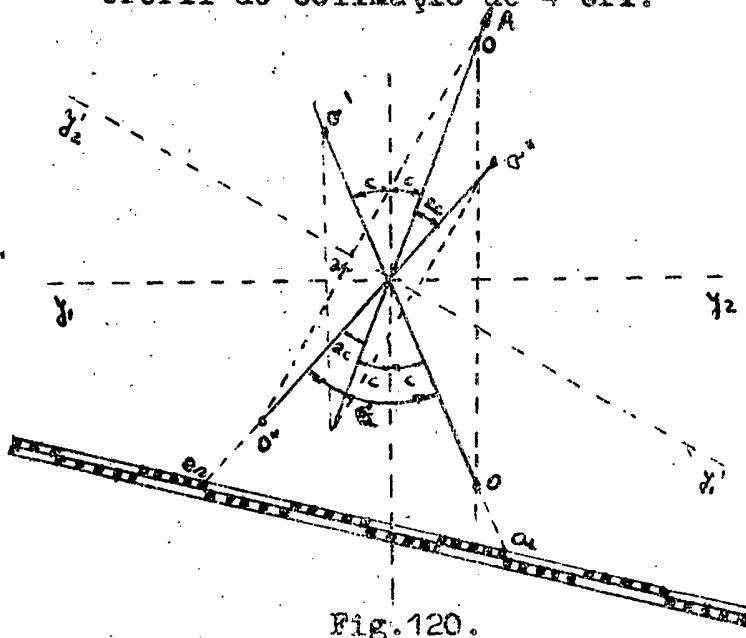


Fig. 120.

Se vizează un punct oarecare A, cu luneta în poziție normală (OO), se dă luneta peste cap și se face o citire ( $a_1$ ) pe o miră gradată (M), așezată pe teren în spatele aparatului adică luneta este în poziția (O'O') din Fig. 120.

Se rotește luneta pînă cînd este prins din nou la încrucișarea fi-relor reticulare, punctul A. Dacă s-ar roti luneta numai cu 180°, în acest caz,  $Y_2$  ar ajunge în poziția lui  $Y_1$  și invers  $Y_1$  în locul lui  $Y_2$ , iar

- 177 -

O' în o' și o' în O'.

Din cauză însă că luneta se rotește cu  $180^\circ + 2\epsilon$ ,  $Y_1, Y_2$  va ajunge în poziția  $Y'_1, Y'_2$  din figură, adică decalată față de  $Y_1, Y_2$  cu unghiul  $2\epsilon$ .

Dând acum luneta din nou peste cap, ea va ajunge în poziția ( $o''0''$ ).

Se citește pe miră ( $a_2$ ).

Deoarece citirea  $a_2$  se găsește pe un plan de viză deviat, față de planul de viză al citirii  $a_1$ , cu  $4\epsilon$ , urmează că diferența între aceste două citiri să ne dea eroarea mărită de patru ori.

Ca atare, împărțind această diferență cu 4, se va determina valoarea după care va fi făcută rectificarea plăcii reticulare.

Pentru a pune mai bine în evidență cele expuse, să presupunem că citirile:  $a_1 = 20$  cm, și  $a_2 = 60$  cm luând diferența lor împărțită la 4, avem:

$$\frac{60 - 20}{4} = 10 \text{ cm.}$$

Prin urmare, se va deplasa placa reticulară pînă în momentul în care se va face pe miră citirea  $60 - 10$ ; adică 50 cm, în acel moment eroarea de colimație este eliminată.

#### 4. Verificarea și rectificarea plăcii firelor reticulare.

Deoarece în operațiunile noastre va trebui ca firul reticular (vv) să fie riguros vertical sau ca firul (hh) să fie riguros orizontal, urmează ca, înainte de a se verifica și elimina eroarea de colimație, să facem controlarea și să rectificăm placa reticulară.

Pentru aceasta se va da viză către un fir vertical, de exemplu un fir cu plumb sau muchia unei clădiri și se observă dacă firul vertical coincide cu linia vizată.

În caz contrar se va rectifica placa reticulară cu ajutorul aceluiași șuruburi, amintite la eliminarea erorii de colimație și arătate în Fig. 114.

Verificarea firelor reticulare poate fi făcută și cu ajutorul unui punct și anume, pentru verificarea firului vertical, se strîng toate șuruburile cercului orizontal și apoi se rotește luneta în planul vertical, iar pentru firul orizontal se rotește luneta în planul orizontal.

Dacă punctul vizat rămîne pe firul

reticular în tot timpul cât este rotită luneta, în acest caz firele reticulare nu vor prezenta eroare.

Altfel se va face rectificarea ca mai sus

### 5. Eroarea de excentricitate a cercului alidat.

Deși la fabricarea instrumentelor topografice se aplică o precizie excesivă, cu toate acestea ele nu sînt și nici nu pot fi declarate ideale, pentru faptul că încă prezintă anumite imperfecțiuni.

Este adevărat că aceste imperfecțiuni sînt mici, însă ele există.

Astfel putem presupune că, cu toată scrupulozitatea depusă la fabricare, axul ZZ, adică axul vertical, al instrumentului, nu trece cu exactitate matematică prin centrul O al limbului gradat, ci are o mică abatere, într-o direcție oarecare, adică ar înțepa planul gradat în punctul O' Fig. 121 și nu în centrul O, aceasta ar însemna că cercul alidat nu este concentric cu cercul sau limbul gradat.

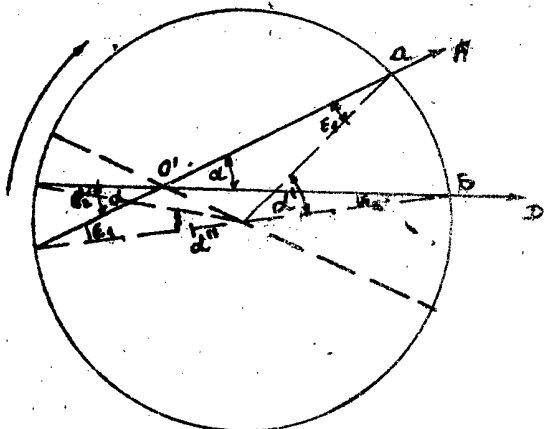


Fig. 121.

Eroarea de excentricitate ar fi:  $e = \infty$

Dacă cu un astfel de aparat se vizează două puncte A și B, se vor face citirile respective pe limbul gradat a și b, din a cărora diferență va rezulta valoarea unghiului  $\alpha$  și nu cea a unghiului  $\alpha'$  care ne interesează.

Cu alte cuvinte se comite o eroare la măsurarea unghiului  $\alpha$  și putem scrie această eroare este  $\Delta\alpha = \alpha - \alpha'$ .

Din figură observăm că:  $\alpha + \varepsilon_1 = \alpha' + \varepsilon_2$   
de unde  $\Delta\alpha = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$ .

Deci adevărata valoare a unghiului  $\alpha$ , ținând seama de sensul gradațiilor crescînde ale limbului gradat, arătat în figura de mai sus prin săgeată, va fi:

$$\alpha = (b - a) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1).$$

Citirile a și b sînt făcute la un vernier de exemplu la vernierul I. Dar la vernierul II, diametrul opus vernierului I, vor fi făcute citirile a' și b', la locul indicat pe figura 118.

Observăm însă că unghiurile:

$$\widehat{O'a b} = \widehat{O'a'b'} = \alpha$$

$$\widehat{O'a O} = \widehat{O'a'O} = \varepsilon_1$$

$$\widehat{O'b O} = \widehat{O'b'O} = \varepsilon_2$$

$$\widehat{a O b} = \alpha'$$

$$\widehat{a'O b'} = \alpha''$$

Dar în același timp avem:

$$\alpha + \varepsilon_1 = \alpha' + \varepsilon_2 \text{ de unde } \alpha = \alpha' + \varepsilon_2 - \varepsilon_1$$

$$\alpha + \varepsilon_2 = \alpha'' + \varepsilon_1 \text{ sau } \alpha = \alpha'' + \varepsilon_1 - \varepsilon_2.$$

Adunând relațiile care dau pe  $\alpha$ , se obține:

$$2\alpha = \alpha' + \alpha'' \text{ adică } \alpha = \frac{\alpha' + \alpha''}{2}$$

In aceasta relație:  $\alpha' = b - a,$   
 $\alpha'' = b' - a'.$

Prin urmare, citind la ambele verniere și luând media citirilor, se elimină eroarea de excentricitate și se obține adevărata valoare a unghiului  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{\alpha' + \alpha''}{2} = \frac{(b-a) + (b'-a')}{2} = \frac{b + b'}{2} - \frac{a + a'}{2}$$

De aici se desprinde următoarea concluzie, că: pentru eliminarea erorii de excentricitate a cercului alidat, la măsurarea unghiurilor se fac citiri la ambele verniere și se ia media citirilor.

a.- Determinarea minimului și maximului erorii.

Spre a ne putea da seama de valoarea pe care o poate lua eroarea de excentricitate în cazul că nu ar fi eliminată așa cum s-a văzut, adică dacă am face citiri la un singur vernier, să stabilim analitic expresiunea care ne dă această eroare.

Din Fig. 122, analoagă cu Fig. 121, se stabilește că eroarea de excentricitate  $\Delta\alpha$  este:

$$\Delta\alpha = \varepsilon_2 - \varepsilon_1.$$

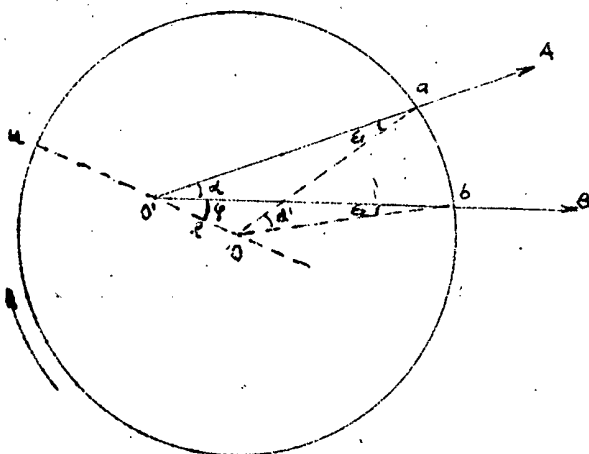


Fig.122.

Dar:

$$\frac{\sin \epsilon_1}{r} = \frac{\sin(a-u)}{r}$$

Unde r este raza limbului gradat.

$$\sin \epsilon_1 = \frac{e}{r} \sin(a-u)$$

In mod analog:

$$\sin \epsilon_2 = \frac{e}{r} \sin(b-u)$$

Deoarece unghiurile  $\epsilon_1$  și  $\epsilon_2$  sînt mici, prin aproximație putem scrie:

$$\sin \epsilon_1 = \epsilon_1 \text{ și } \sin \epsilon_2 = \epsilon_2, \text{ deci:}$$

$$\epsilon_1'' = \frac{\rho'' e}{r} \sin(a-u),$$

$$\epsilon_2'' = \frac{\rho'' e}{r} \sin(b-u).$$

Deci:

$$\Delta \alpha = \epsilon_2'' - \epsilon_1'' = \frac{\rho'' e}{r} [\sin(b-u) - \sin(a-u)] = 2 \frac{\rho'' e}{r} \sin \frac{b-a}{2}$$

$$\cos\left(\frac{b+a}{2} - u\right)$$

$$b - a = \alpha'$$

$$(1) \Delta \alpha'' = 2 \frac{\rho'' e}{r} \sin \frac{\alpha'}{2} \cos\left(\frac{b+a}{2} - u\right)$$

Din această ultima relație se vede că eroarea de excentricitate este nulă, atunci cînd am avea unul din următoarele cazuri:

$$e = 0, r = \infty; \quad \alpha' = 0,$$

$$\frac{b+a}{2} - u = 90^\circ; \quad ; \quad \frac{b+a}{2} - u = 270^\circ$$

Dacă  $e = 0$  nu am avea eroare de excentricitate, raza limbului gradat nu poate lua valoarea infinită, ea avînd o lungime finită, unghiul  $\alpha'$  nu poate fi nul, deoarece între două vize avem un unghi, de o mărime oarecare, rămîine ca singură, posibilitate de a avea eroarea de excentricitate să avem:

$$\frac{b+a}{2} - u = 90^\circ \text{ sau } 270^\circ, \text{ adică}$$

$$\frac{b+a}{2} - 90^\circ = u \text{ sau } \frac{b+a}{2} - 270^\circ = u.$$

Ceace este cazul atunci cînd raza pentru  $\frac{b+a}{2}$  este perpendiculară pe direcția u a excentricității e.

Tot din relația (1) de mai sus se deduce că, pentru ca eroarea  $\Delta \alpha$  să aibă valoare maximă trebuie să avem:

$$e = \infty; r = 0; \alpha' = 180^\circ; \frac{b+a}{2} - u = 0; \text{ sau: } \frac{b+a}{2} - u = 180^\circ$$

Dintre aceste posibilități, rămân ca variabile numai ultimele deoarece primele două, adică  $e = \infty$  și  $r = 0$ , cad prin faptul că  $e$  nu poate lua valoare exagerat de mare, iar  $r$  are o anumită valoare diferită de zero.

Ca atare valoarea maximă a erorii  $\Delta\alpha$  este atunci când avem:

$$\sin \frac{\alpha'}{2} = 1 \quad \text{și} \quad \cos \left( \frac{b+a}{2} - u \right) = 1.$$

Dar:  $\sin \frac{\alpha'}{2} = 1$ , atunci când  $\alpha' = 180^\circ$ , când  $b + a = \alpha = 180^\circ$ .

De aci se deduce că eroare de excentricitate are valoare maximă atunci când razele vizuale sînt perpendiculare pe linia care unește punctul de excentricitate cu centrul limbului gradat.

b. Determinarea excentricității cercului alidad.

În afară de faptul că eroarea de excentricitate a cercului alidad poate fi eliminată, așa cum am văzut, luînd media citirilor la cele două verniere, ea poate fi chiar determinată.

Dacă cercul alidad nu este concentric cu cercul gradat, vizînd două puncte A și B în scopul de a afla valoarea unghiului dintre ele, măsurat din punctul de stație, din cauza excentricității se va obține o altă valoare decît cea adevărată, așa cum s-a arătat mai sus.

Ca atare, să presupunem că, prin citire la un singur vernier, am executat o serie de măsurători:  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  Pe asupra unor valori cunoscute în prealabil, adică asupra unor valori cari au fost măsurate prin metodele cari au eliminat erorile posibile.

În acest caz fiecare din unghiurile măsurate este afectat de o eroare  $\Delta\alpha_1, \Delta\alpha_2, \Delta\alpha_3, \dots, \Delta\alpha_n$ .

Din cele relatate anterior am văzut că o eroare se poate prezenta sub forma:

$$\Delta\alpha'' = 2\rho'' \frac{e}{r} \cdot \sin \frac{\alpha'}{2} \left( \cos \frac{b+a}{2} - U \right); \text{ unde } \alpha' = b - a.$$

Referindu-ne la cazul nostru și dezvoltînd pe  $\cos \left( \frac{b+a}{2} - u \right)$  se obține: (1)  $= \Delta\alpha_1'' = 2\rho'' \frac{e}{r} \sin \frac{\alpha'}{2} \left( \cos \frac{b+a}{2} + \cos u + \sin \frac{b+a}{2} \sin u \right)$ .

$$\text{Sau: } \Delta\alpha_1'' = \frac{2\rho''}{r} \sin \frac{\alpha'}{2} \cdot \cos \frac{b+a}{2} \cdot 2 \cos u + \frac{2\rho''}{r} \sin \frac{\alpha'}{2} \cdot \sin \frac{b+a}{2} \cdot \sin u.$$

Și în mod analog pînă la celelalte erori:  $\Delta\alpha_2, \Delta\alpha_3, \dots, \Delta\alpha_n$ .

Pentru simplificarea formulelor să facem următoarele notații:

$$\frac{2\rho''}{r} \sin \frac{\alpha_1'}{2} \cos \frac{b+a}{2} = A_1, \quad \frac{2\rho''}{r} \sin \frac{\alpha_1'}{2} \sin \frac{b+a}{2} = B_1$$

$$e \cdot \cos u = x; \quad e \cdot \sin u = y.$$

Cu aceste notații se ajunge la următoarele formule simplificate, pentru erori.

$$\Delta \alpha_1'' = A_1 x + B_1 y$$

$$\Delta \alpha_2'' = B_2 x + B_2 y$$

$$\vdots$$

$$\Delta \alpha_n'' = A_n x + B_n y.$$

Acest sistem ne determină cele mai probabile valori ale lui x și y, iar din relațiile:

$$x = e \cdot \cos u; \quad y = e \cdot \sin u.$$

Aven:

$$\tan u = \frac{y}{x} \text{ și } e = \frac{x}{\cos u} = \frac{y}{\sin u} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Determinarea valorii de excentricitate poate fi făcută, și folosind ambele verniere, nu numai unul singur, ca în cazul precedent.

Facind citire la ambele verniere, dacă nu am avea eroare de excentricitate, ar trebui ca diferența dintre aceste citiri să fie egală cu  $180^\circ$ , ceea ce însă în general nu este realizat, din cauza acestei erori și atunci diferența între citirile la cele două verniere este:

$$a_1'' - a_1 = 180^\circ + 2\gamma + 2\gamma'$$

sau:  $\frac{a_1'' - a_1}{2} - 90^\circ = \gamma = \gamma'$       adică  $\frac{a_1'' - a_1}{2} - 90^\circ = e.$

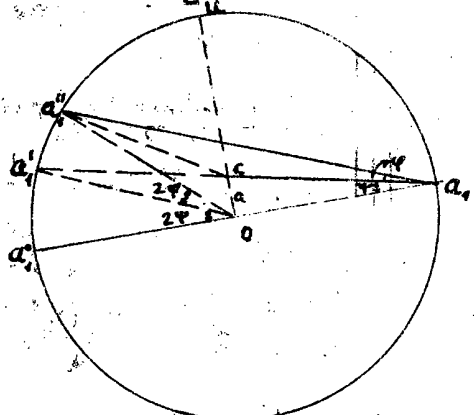


Fig. 123.

Notind:  $C \overline{a_1} \quad r = O \overline{a_1}$   
se poate scrie că unghiul datorit excentricității este:

$$\gamma'' = \rho'' \frac{e}{r} \sin (a_1 - u).$$

Desvoltind paranteza:

$$\gamma'' = \rho'' \frac{e}{r} \cos u \cdot \sin a_1 - \rho'' \frac{e}{r} \sin u \cdot \cos a_1.$$

Pentru simplificare facem notațiile:

$$\rho'' \frac{e}{r} \cos u = x \quad \rho'' \frac{e}{r} \sin u = y$$

și  $\gamma = z.$

Cu aceste notațiuni avem, pentru diferite poziții ale vernierelor:

$$\begin{aligned}
 & \sin a_1 \cdot x + \cos a_1 \cdot y + z = l_1 \\
 (1) \quad & \sin a_2 \cdot x + \cos a_2 \cdot y + z = l_2 \\
 & \vdots \\
 & \sin a_n \cdot x + \cos a_n \cdot y + z = l_n.
 \end{aligned}$$

Pentru a putea determina cu ușurință valorile lui x, y, z, se va pune, succesiv, gradațiunea zero a vernierului I în concordanță cu diviziunile:

$\theta$ ;  $\frac{360^\circ}{n}$ ;  $2 \frac{360^\circ}{n}$ ; .....  $(n-1) \frac{360^\circ}{n}$ ; iar la vernierul II se vor citi:  $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ .

În acest caz în sistemul de mai sus avem:

$$\begin{aligned}
 & x \cdot \sin \theta \frac{360^\circ}{n} + y \cos \theta \frac{360^\circ}{n} + z = l_0 \\
 (2) \quad & x \cdot \sin 1 \frac{360^\circ}{n} + y \cos 1 \frac{360^\circ}{n} + z = l_1 \\
 & \vdots \\
 & x \cdot \sin (n-1) \frac{360^\circ}{n} + y \cos [(n-1) \frac{360^\circ}{n}] + z = l_n.
 \end{aligned}$$

notat  $\theta$ .

Având un sistem de n ecuații cu 3 necunoscute, putem afla cele mai probabile valori ale acestor necunoscute prin ecuațiile normale ale lui Gauss, cari, așa cum am arătat la calculul erorilor, sînt:

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & [aa] x + [ab] y + [ac] z = [a\ell] \\
 & [ba] x + [bb] y + [bc] z = [b\ell] \\
 & [ca] x + [cb] y + [cc] z = [c\ell]
 \end{aligned}$$

Astfel sistemul nostru va deveni compatibil, avînd trei necunoscute, ale căror valori se pot găsi.

Ca atare, sistemul (2) va lua forma următoare:

$$\begin{aligned}
 & \left[ \sin^2 k \frac{360^\circ}{n} \right] x + \left[ \sin k \frac{360^\circ}{n} \cdot \cos k \frac{360^\circ}{n} \right] y + \left[ \sin k \frac{360^\circ}{n} \right] z = \\
 & = \left[ \sin k \frac{360^\circ}{n} \ell k \right]. \\
 (4) \quad & \left[ \cos k \frac{360^\circ}{n} \cdot \sin k \frac{360^\circ}{n} \right] x + \left[ \cos^2 k \frac{360^\circ}{n} \right] y + \left[ \cos k \frac{360^\circ}{n} \right] z = \\
 & z = \left[ \cos k \frac{360^\circ}{n} \ell k \right]. \\
 & \left[ \sin k \frac{360^\circ}{n} \right] x + \left[ \cos k \frac{360^\circ}{n} \right] y + n z = [\ell k].
 \end{aligned}$$



Pe de altă parte în acest nou sistem (4), va trebui să satisfacem următoarele condiții:

$$\left[ \sin k \frac{360^\circ}{n} \right] = \left[ \cos k \frac{360^\circ}{n} \right] = \left[ \sin k \frac{360^\circ}{n} \cdot \cos k \frac{360^\circ}{n} \right] = 0$$

$$\left[ \sin^2 k \frac{360^\circ}{n} \right] = \left[ \cos^2 k \frac{360^\circ}{n} \right] = \frac{n}{2}$$

$$\sin^2 k \frac{360^\circ}{n} + \cos^2 k \frac{360^\circ}{n} = 1.$$

Aceste condiții vor face ca sistemul nostru de 3 ecuații cu 3 necunoscute să se prezinte astfel:

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{n}{2} x &= \left[ l_k \sin k \frac{360^\circ}{n} \right] \\ \frac{n}{2} y &= \left[ l_k \cos k \frac{360^\circ}{n} \right] \\ n z &= \left[ l_k \right] \end{aligned}$$

Și astfel în sfârșit se obțin valorile lui x, y, z.

$$x = \frac{2}{n} \left[ l_k \cdot \sin k \frac{360^\circ}{n} \right]$$

$$y = \frac{2}{n} \left[ l_k \cdot \cos k \frac{360^\circ}{n} \right]$$

$$z = \frac{1}{n} \left[ l_k \right].$$

Dar din notațiile făcute la început:

$$\operatorname{tg} U = \frac{-y}{x}; \quad e = - \frac{r \cdot y}{\rho'' \sin u} - \frac{r \cdot x}{\rho'' \cos u} = \frac{r}{\rho''} \sqrt{x^2 + y^2} \cdot z = \rho'$$

Se află valorile lui u, e și  $\rho'$ .

## 6. Eroarea de inegalitate a diviziunilor limbului gradat.

Deși fabricile construiesc depun eforturi pentru ca divizarea limbului gradat să fie cât mai perfectă, totuși, putem întâlni instrumente care prezintă defectuosități de gradare, prezentând diviziuni inegale, ceea ce dă la măsurarea unghiurilor eroare de inegalitate a diviziunilor.

Această eroare nu poate fi eliminată, dar poate fi micșorată prin măsurarea unghiurilor pe diferite porțiuni ale limbului gradat și luând apoi media măsurărilor.

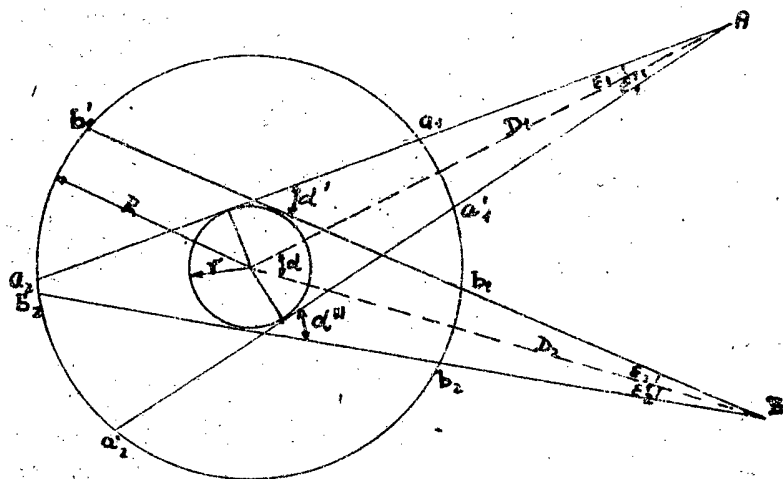
De exemplu am lua la prima măsurare ca origine a măsurării unghiului, diviziunea zero a limbului, apoi la măsurătoarea de a doua diviziunea  $30^\circ$ , la cea de a treia diviziunea  $60^\circ$  ș.a.m.d.

Atunci cînd se vor arăta metodele de măsurarea unghiurilor, se va putea vedea că metoda reiterației, caută să facă eliminarea sau mai bine zis reducerea erorii de inegalitate a diviziunilor.

7. Eroarea de excentricitate a lunetei.

În cazul cînd luneta, deși cu axul optic (xx) perpendicular pe axul YY al turcoanelor, totuși axul xx nu se mișcă într-un plan, planul de viză, care să treacă prin centrul cercului gradat, ci într-un plan paralel cu acesta sau chiar în afara centrului cercului gradat, avem o eroare de excentricitate care se numește eroarea de excentricitate a lunetei.

Dacă există această eroare de excentricitate, atunci luneta, prin retirea aparatului, va descrie, în jurul centrului cercului gradat, un cerc de rază egală cu excentricitatea  $e$  Fig. 124, în care  $R$  este raza cercului, iar



$r = e$ , ar fi raza cercului descris de lunetă.

Vizînd cu o astfel de lunetă punctele A și B, aflate la distanța  $D_1$ , respectiv  $D_2$ , delă centrul cercului gradat, valoarea unghiului AOB este

$\alpha = \alpha' + \Delta\alpha$   
 fiindcă:  
 $\alpha + \epsilon_2 = \alpha' + \epsilon_1$   
 sau:  
 $\alpha = \alpha' + (\epsilon_1 - \epsilon_2)$   
 Rezultă că eroarea de excentricitate este:  
 $\Delta\alpha = \epsilon_1 - \epsilon_2$

Dar:  $\sin \epsilon_1 = \frac{e}{D_1}$ ,  $\sin \epsilon_2 = \frac{e}{D_2}$  așa că putem scrie, ținînd cont de faptul că  $\epsilon_1, \epsilon_2$  sînt foarte mici și că putem prin aproximație lua:  $\sin \epsilon_1 = \epsilon_1$  și  $\sin \epsilon_2 = \epsilon_2$

$\Delta\alpha = \frac{e}{D_1} - \frac{e}{D_2} = e \left( \frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2} \right)$  sau:  $\Delta\alpha = \rho'' e \left( \frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2} \right)$ .

Pe noi însă ne interesează nu valoarea erorii de excentricitate stabilită mai sus, ci eliminarea ei.

Pentru aceasta, vizînd cele două puncte cu luneta în poziție normală, adică cu cercul vertical la stînga, am făcut la cele două verniere, așa cum am arătat în Fig. 121, citirile  $a_1$ ,  $a_2$  și  $b_1$ ,  $b_2$ , dacă se dă luneta peste cap și se vizează din nou aceleași puncte A și B, în acest caz luneta va lua o altă poziție și se vor face la verniere, avînd acum cercul vertical la dreapta, citirile  $a'_1$ ,  $a'_2$  și  $b'_1$ ,  $b'_2$  și deci:

$$\alpha + \varepsilon_1 = \alpha'' + \varepsilon_2 \text{ sau } \alpha = \alpha'' (\varepsilon'_2 - \varepsilon'_1).$$

Deoarece unghiurile  $\varepsilon_1$  cu  $\varepsilon'_1$ , precum și  $\varepsilon_2$  cu  $\varepsilon'_2$  sînt subîntinse de arce egale, urmează că:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon'_1; \quad \varepsilon_2 = \varepsilon'_2.$$

Ca atare, în urma celor două măsurători, cu luneta direct și cu luneta peste cap, avem:

$$\alpha = \alpha' + \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

$$\alpha = \alpha'' + \varepsilon_2 - \varepsilon_1.$$

Făcînd suma acestor două măsurători și luînd media lor, se află:

$$\alpha = \frac{\alpha' + \alpha''}{2}$$

Cu alte cuvinte, am eliminat eroarea de excentricitate, prin faptul că valorile lui  $\alpha'$  și  $\alpha''$ , după cum știm din cele tratate anterior, sînt:

$$\alpha' = \frac{b_1 + b_2}{2} - \frac{a_1 + a_2}{2}; \quad \alpha'' = \frac{b'_1 + b'_2}{2} - \frac{a'_1 + a'_2}{2};$$

În concluzie: se elimină eroarea de excentricitate a lunetei, măsurînd unghiurile cu luneta în poziție normală și cu luneta peste cap, iar apoi făcînd media lor.

### 8. Punerea în stație.

Rezumînd cele spuse pînă acum, punerea teodolitului în stație sau calarea teodolitului, adică aducerea cu precizie ca axul ZZ al aparatului să fie deasupra punctului topografic în care se face stație, adică pe verticala locului, compertă următoarele operațiuni, arătate în ordinea în care ele se fac pe teren.

- a. Trepiedul este plasat cu aproximație deasupra punctului de stație, după aceea se infig picioarele trepiedului în pămînt sub un unghi de cca.  $60^\circ$ .

- b. Este scos firul cu plumb și se leagă de cîrligul trepiedului.

- c. Se scoate aparatul din cutie, se așează pe

- 187 -

măsuța trepiedului și apoi se prinde de acesta prin intermediul șurubului de fixare al trepiedului, care lasă ca instrumentul să poată primi o mișcare de translație, prin care să poată fi adus, deasupra punctului.

După ce a fost făcută, prin această mișcare de translație, centrarea, așezarea aparatului deasupra punctului, aparatul este fixat definitiv prin șurubul de presiune, șurubul pompei dela trepied.

- d. Urmează verificarea și rectificarea libelelor și apoi verticalizarea axului principal(ZZ).

- e. Verificarea și rectificarea axului YY în cazul când a fost nevoie și deci s-a făcut rectificarea lui, se va face din nou verticalizarea axului ZZ, ajuns înclinat în urma rectificării axului YY, operațiune la care șuruburile de calaj au fost mișcate după ce deja a fost făcută verticalizarea lui ZZ.

- f. Se asigură verticalitatea, respectiv orizontalitatea firelor reticulare.

- g. Eliminăm eroarea de excentricitate.

După aceste operațiuni, se aduce firul cu plumb cu exactitatea deasupra punctului topografic, se strânge bine șurubul pompei dela trepied și aparatul este pus în stație și poate fi începută operațiunea de măsurarea unghiurilor.

Evident că nu la toate punctele de stație, pe cari le avem, este necesar a fi făcute toate operațiunile de mai sus, fiind suficient a se face toate aceste operațiuni, ca rectificare generală, doar la primul punct de stație, pentru o perioadă de timp mai lungă, perioadă de timp care depinde de marca, tipul instrumentului, precum și de intensitatea lucrului care are rol determinant în stabilirea acestei perioade.

La schimbarea punctului de stație se vor face doar primele operațiuni, inclusiv verticalizarea axului principal.

Verificarea și rectificarea libelelor nu se face la fiecare stație, este însă recomandabil și chiar se impune a fi făcută cel puțin de două ori pe zi.

Dar când se schimbă operaterul, ca regulă generală, este absolută nevoie de o revizie generală a instrumentului.

#### 9. Ererile datorite operaterului.

Ererile cari au fost arătate, sînt direct în legătură cu instrumentele și cu construcția lor,

sînt erorile instrumentale.

Mai sînt însă o serie de erori, cari pot fi făcute în măsurarea unghiurilor, dar cari, așa cum vom vedea mai jos, se datoresc unor cauze ce nu depind de instrumente.

Înainte de a trece la examinarea acestor erori, precum și a cauzelor cari le produc, ca și a metodelor de urmat pentru înlăturarea lor, ca o complectare la cele spuse despre erorile instrumentale, trebuie făcute unele observațiuni și anume:

Cînd am studiat eroarea de colimație, am stabilit această eroare avînd luneta în poziție orizontală.

Dacă însă luneta este înclinată, eroarea de colimație se va transmite asupra măsurării unghiurilor orizontale, după cum urmează:

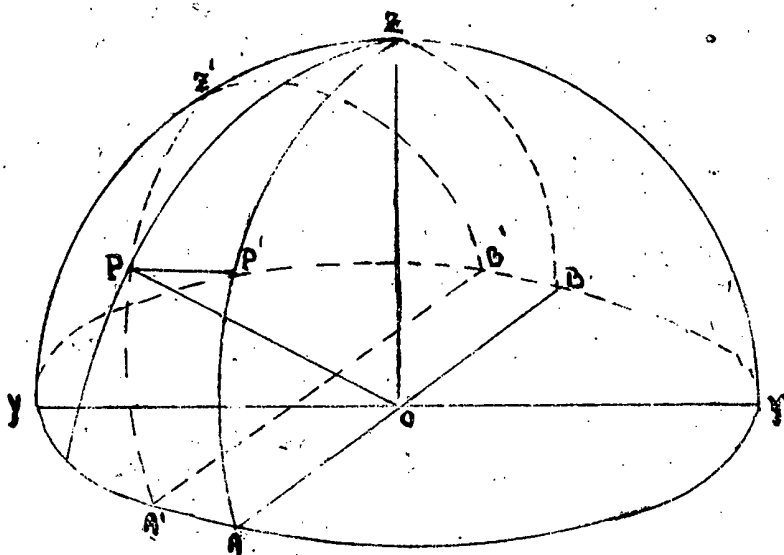


Fig. 125.

măsurătorile ce executăm, este planul  $A'Z'B'$ , decalat față de primul plan cu eroarea de colimație  $c = AA'$ .

Dacă luneta este în poziție înclinată, în cazul că măsurăm unghiul vertical, de exemplu  $AOP = h$ , atunci luneta va descrie planul  $DPZ$  și avem o altă eroare de colimație ( $c$ ) -  $AD$ , diferită de eroarea avută în cazul lunetei în poziție orizontală.

Pentru a determina expresiunea care ne dă eroarea de colimație, atunci cînd luneta este înclinată, să ducem din punctul  $P$  o paralelă la axul  $YY$  pînă la planul  $AZB$ , pînă în punctul  $P'$ . În Fig. 126 a fost luat numai triunghiul oarecare  $PZP'$ .

În acest triunghi, unghiul  $PZP'$  este

Din figura 125 vedem că atunci, cînd nu există eroare de colimație, planul descris de lunetă, de axul lunetei mai bine zis, este  $AZB$ , în comparație cu care se vor face măsurătorile noastre.

Dacă avem însă eroare de colimație, atunci luneta în poziție orizontală va descrie un alt și anume planul  $A'Z'B'$ , paralel cu planul  $AZB$  descris atunci cînd nu avem eroare de colimație.

În acest caz planul nostru de comparație în

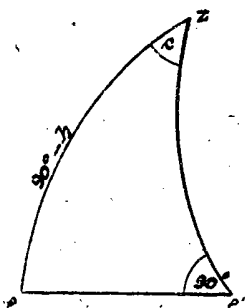


Fig. 126.

tocmai eroarea de colimație ce o avem în cazul lunetei înclinate,  $PP' = c$  (eroarea de colimație dată de luneta în poziție orizontală, deoarece  $PP' = AA'$ ), arcul  $D P Z$  ne dă unghiul de  $90^\circ$ , iar arcul  $P Z$  va fi  $90^\circ - h$ . Unghiul  $PP'Z = 90^\circ$ .

Având aceste elemente, se poate scrie, în triunghiul  $P Z P'$  relația:

$$\frac{\sin(c)}{\sin c} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin(90 - k)} \text{ sau: } \frac{(c)}{c} = \frac{1}{\cos k}$$

Deci:

$$(1) \quad (c) = \frac{c}{\cos k} = \frac{C}{\sin z}$$

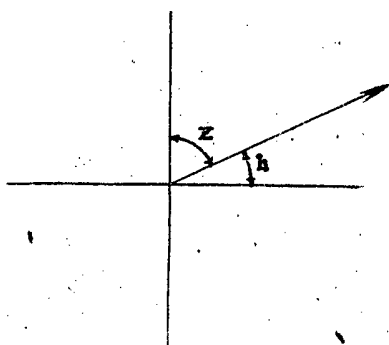


Fig. 127.

Unde  $Z$  este unghiul zenital (Fig. 127). Relația (1) care ne dă eroarea de colimație în cazul lunetei în poziție înclinată, arată că această eroare poate lua valori extrem de mari, atunci când  $\cos k$  tinde către zero, adică dacă unghiul  $h = 90^\circ$ .

O altă observațiune pe care o mai facem, este că eroarea de înclinație a axului  $YY$ , pe care am notat-o cu  $i$ , în cazul când luneta este orizontală, este și ea diferită dacă luneta va fi în poziție înclinată.

În Fig. 128 putem vedea că, dacă axul  $YY$  este orizontal și luneta este orizontală descrie planul  $A Z B$ , iar dacă avem eroare de înclinație, adică axul  $YY$  se găsește în poziția  $Y'Y'$ , luneta va descrie planul  $A' Z' B'$ , care formează cu planul  $A Z B$  un unghi egal cu  $i$ .

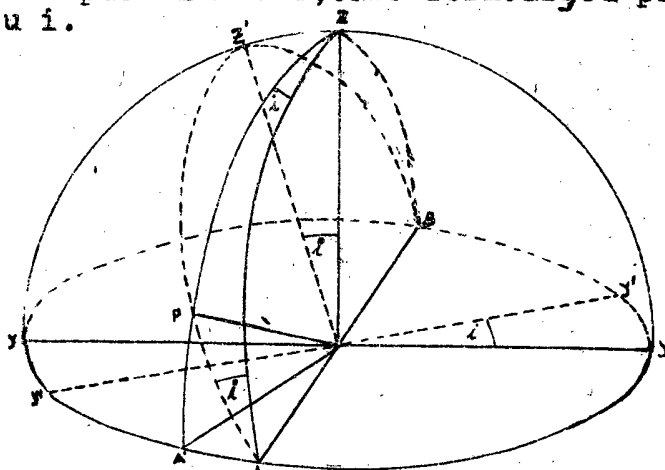


Fig. 128.

Dacă însă luneta este înclinată, cazul când se măsoară unghiuri verticale, ea va descrie un alt plan, de exemplu pentru unghiul  $AOP = h$  va descrie planul  $A' P Z O$ , care formează cu planul  $A Z B$  un unghi (1) diferit de unghiul  $i$ .

În triunghiul sferic, carecare  $APZ$ , luat separat în Fig. 129, avem:  
 $PAZ = i$        $PZA = (i)$

- 190 -

Se poate lua aproximativ  $AP = h$  și

$$PZ = 90^\circ - h$$

Deci putem scrie:

$$\frac{\sin(i)}{\sin h} = \frac{\sin i}{\sin(90^\circ - h)} \quad \text{sau:} \quad \frac{\sin(i)}{\sin i} = \frac{\sin h}{\sin(90^\circ - h)},$$

adică:

$$\frac{(i)}{h} = \frac{\sin h}{\cos h}; \quad \text{deci: } (i) = i \cdot \operatorname{tg} h.$$

Ori, conform celor arătate anterior:

$$(i) = i \cdot \operatorname{tg} h = i \cdot \operatorname{ctg} z.$$

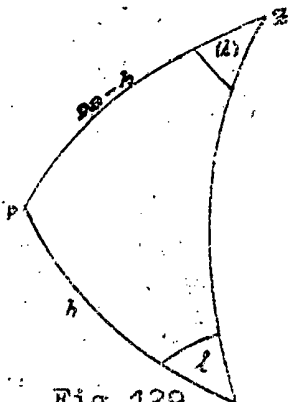


Fig. 129.

Si această eroare ia valori foarte mari atunci când  $h$  tinde către  $90^\circ$ .

Dar atât eroarea de colimație, cât și eroarea de înclinare a axului YY, pot fi anulate prin darea lunetei peste cap, deoarece în acest caz atât eroarea de colimație, cât și cea de înclinare, devin negative sau vor avea un alt sens ca în cazul că luneta este în poziție normală.

Deci în concluzie, măsurarea unghiurilor va fi făcută cu luneta în poziție normală (cercul vertical la stânga) și cu luneta peste cap, luând apoi media citirilor, eliminând eroarea de colimație și cea de înclinare a axului YY.

Dacă erorile datorite axului YY și axului XX pot fi eliminate, au tot așa stau lucrurile cu axul ZZ, a căruia înclinare, față de limbul gradat, nu mai poate fi eliminată.

Singură posibilitate de înlăturare a acestui neajuns este precizia la fabricare.

Dacă avem teodolitul cu axul ZZ înclinat, acest aparat nu se poate utiliza.

Să trecem acum să vedem care sînt erorile datorite operatorului, care sînt cauzele care le produc și cum pot fi eliminate.

#### a). Eroarea de punere în stație.

Aceste erori se datoresc faptului că aparatul în loc să fie instalat în stație cu exactitate deasupra punctului topografic, este deplasat față de acesta cu o cădere carecare, de vâlcare  $\epsilon$ .

Dînd vize înspre două puncte A și B, cu aparatul așezat în punctul P', deplasat de punctul nostru de stație P, cu citirea  $\epsilon$ , în loc să măsurăm unghiul  $\alpha$  se măsoară unghiul  $\alpha'$  (Fig. 130).

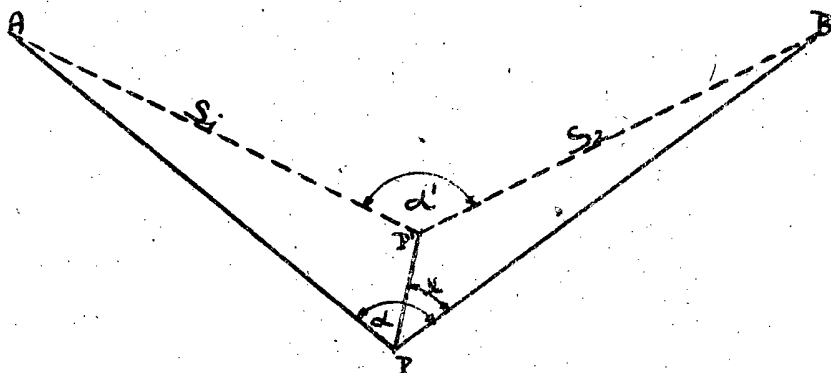


Fig.130.

Valoarea unghiului  $\alpha'$  cuprins între direc-  
 țiunile  $P'A$  și  $P'P$   
 este:  $\alpha' = \alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ .  
 De unde rezultă eroa-  
 rea unghiulară:  
 $\Delta\alpha = \alpha' - \alpha = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ .  
 Se pune problema de a  
 găsi cât de mare poate  
 fi această eroare și  
 atunci cu notațiile  
 din Fig.130, unde:

$P'A = s_1, P'B = S_2,$   
 $PP' = e,$  se poate  
 scrie:  
 $\frac{\sin \varepsilon_1}{e} = \frac{\sin(\alpha - x)}{S_1}$  sau

$\sin \varepsilon_1 = \frac{e}{S_1} \sin(\alpha - x).$

$\frac{\sin \varepsilon_2}{e} = \frac{\sin x}{S_2} \sin \varepsilon_2 = \frac{e}{S_2} \sin x.$

Deoarece  $\varepsilon_1$  și  $\varepsilon_2$  sînt foarte mici, fiindcă  
 distanța  $PP'$  este mică față de  $S_1$  și  $S_2$  se poate scrie:

$\sin \varepsilon_1 = \varepsilon_1$  și  $\sin \varepsilon_2 = \varepsilon_2$

Deci:  $\varepsilon_1'' = \rho'' \frac{e}{S_1} \sin(\alpha - x); \quad \varepsilon_2 = \rho'' \frac{e}{S_2} \sin x.$

Unde  $\rho''$  știm că este:  $\rho'' = 206.265.$

Avînd pe  $\varepsilon_1$  și  $\varepsilon_2$  eroarea unghiulară va fi:

$\Delta\alpha'' = \varepsilon_1'' + \varepsilon_2'' = \rho'' e \frac{\sin(\alpha - x)}{S_1} + \frac{\sin x}{S_2}$

Eroarea  $\Delta\alpha$  va avea valoarea maximă cînd derivata ei în ra-  
 port cu  $x$  este zero, adică:  $\frac{d(\Delta\alpha)}{dx} = 0$ , dar

$\frac{d(\Delta\alpha)}{dx} = \rho'' e \left[ \frac{-\cos(\alpha - x)}{S_1} + \frac{\cos x}{S_2} \right] = 0$

Deci:  $\frac{\cos x}{S_2} - \frac{\cos(\alpha - x)}{S_1} = 0$ , sau:  $\frac{\cos(\alpha - x)}{S_1} = \frac{\cos x}{S_2}$

Pentru cazul cînd  $S_1 = S_2 = S$ , avem:

$\cos(\alpha - x) = \cos x$ , deci:  $\alpha - x = x$

$x = \frac{\alpha}{2}$

Că atare, eroarea este maximă cînd:  
 $x = 90^\circ$  sau  $\alpha = 180^\circ$ , ceea ce ne arată că avem eroare maximă  
 cînd unghiul  $\alpha$  tinde cîtredre 180°, iar punctul  $P'$  se găsește pe  
 bisectoarea lui, caz în care valoarea lui  $\Delta\alpha$  este:

$\Delta\alpha'' = \rho'' e \frac{2}{S}$



Spre a vedea ce valori poate lua eroarea de punere în stație, să luăm un exemplu numeric:

$$e = 5 \text{ mm}, \quad S_1 = S_2 = S = 100 \text{ m.}$$

$$\Delta \alpha'' = \frac{2 \times 206.265}{100} \times 0,005 = 20''$$

Relația care dă valoarea erorii de punere în stație ne arată că, această eroare este invers proporțională cu distanțele  $S_1, S_2$ , adică dacă se iau lungimi scurte, eroarea este mai mare decât dacă lucrăm cu lungimi mari.

De aci tendința de a lua vize îndepărtate, adică lungimi mari, în scopul de a micșora eroarea de punere în stație.

Atunci, însă, când sîntem nevoiți de a lucra cu lungimi scurte, cum este cazul în ridicările miniere, va fi necesar ca instrumentele să fie cît mai perfecte centrate, adică să fie cît mai precis puse în stație.

Așa că aceste erori se înlătură prin deosebită grijă la punerea în stație.

#### - b, Eroare de viză.

În cazul cînd, vizînd un jalon, în loc să fie vizat cu exactitate axul său, adică verticala geometrică a punctului, se vizează alături, comitem o eroare, numită eroare de viză, care la rîndul ei va avea repercursiuni asupra valorii unghiurilor măsurate.

Fie eroarea  $e_1$  respective  $e_2$ , pe care o comitem vizînd punctele A și B (Fig. 131).

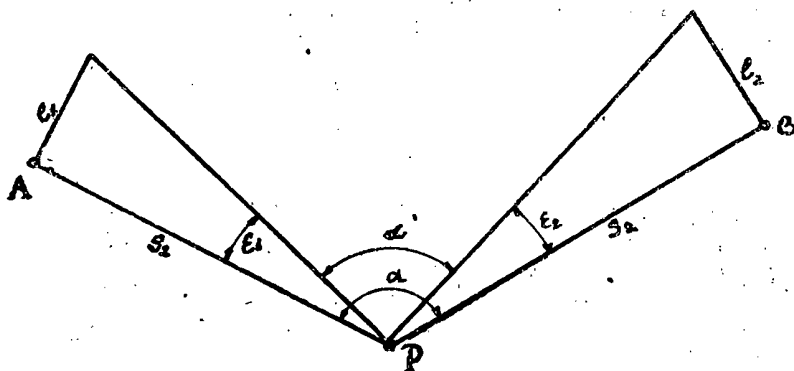


Fig. 131.

Atunci adevărata valoare a unghiului  $\alpha$  cuprins între cele două aliniamente PA și PB, este:

$$\alpha = \alpha' + (e_1 + e_2)$$

Unde  $\alpha$  este unghiul măsurat de noi.

Deci eroarea unghiulară ce se comite este:

$$\Delta \alpha = \alpha - \alpha' = e_1 + e_2$$

Dar:

$$\sin e_1 = \frac{e_1}{S_1}, \quad \sin e_2 = \frac{e_2}{S_2}$$

Ori, aceste unghiuri fiind mici, se poate

lua  $\sin e_1 = e_1$  și  $\sin e_2 = e_2$ .

Dacă prin aproximație considerăm:

$$S_1 = S_2 = S, \quad e_1 = e_2 = e.$$

- 193 -

$$\Delta \alpha'' = \rho'' e \left( \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} \right) = 2 \rho'' \frac{e}{S}$$

Adică s-a ajuns la o formulă analoagă cu cea din cazul erorilor de punere în stație.

De aceea, prin faptul că aceste erori de punere în stație și de viză, pot fi comise concomitent, cumularea lor ar duce la rezultate care pot compromite măsurătorile, putînd atinge, mai ales în cazul vizelor la distanțe scurte, valori de ordinul minutelor.

De aceea, cu deosebire în mină, în afară de faptul că punerea în stație se va căuta a fi cît mai exactă, ne vom servi în loc de jaloane, pentru vizare, de fire cu plumb.

Pentru eroarea cumulată de centrare și viză se utilizează formula:

$$\Delta \alpha'' = 4 \rho'' \frac{e}{S}$$

#### - 10. Ererile datorite atmosferei.

Aceste erori pot fi datorite următoarelor cauze:

a) Erori provenite în urma inegalei încălziri a aparatului, adică unele părți ale teodolitului pot fi expuse mai mult razelor solare, iar altele nu, ceea ce ar atrage după sine torsionarea aparatului în timpul observațiilor.

Pentru înlăturarea neajunsului, ce ar proveni din această cauză sînt întrebuintate umbrelele sau pînze pentru adăpostirea teodolitului.

b) Erori provenite în urma vibrațiilor atmosferice.

Atunci cînd între suprafața pămîntului și straturile de aer, nu este stabilit un echilibru termic, avem vibrațiuni atmosferice, cari pot fi așa de puternice, încît imaginile obiectelor, în afară de faptul că nu pot fi prinse, fixate, pe placă reticulară, din cauza mișcărilor lor, dar ele nu pot fi văzute clar.

De aceea, se recomandă, ca cel mai prielnic timp de lucru, de dimineață pînă la ora 10, iar d.m. dela ora 15 pînă seara.

c) Erori datorite umezelei.

Umezeala prezintă neajunsul că, înmuiind firele reticulare ale aparatului, face ca acestea să se deformeze. Pentru acest motiv se va evita pe cît posibil, timpul umed, iar în cazul că ar fi nevoiți a lucra, în tunele sau mine, unde există umezeală

vor fi întrebuințate, în locul firelor reticulare de paianjen, fire reticulare din platină iridială.

La încheierea acestui capitol, dăm mai jos un tabel al erorilor studiate, precum și indicațiunile ce trebuiesc urmate pentru eliminarea lor.

Ererile	Indicațiuni
<b>a. Ererile instrumentale.</b>	
1) Eroarea datorită excentricității limbului gradat.	Se elimină prin citire la ambele verniere.
2) Eroarea datorită axului XX	Eliminarea prin rectificarea și citire cu luneta direct și peste cap.
3) I d e m axului YY	
4) I d e m ZZ	Nu poate fi eliminată.
5) I d e m libelelor	Prin darea lunetei peste cap.
6) I d e m, firelor reticulare.	Prin aranjarea plăcii reticulare și citiri cu cercul vertical la stânga și apoi la dreapta.
7) Eroarea datorită inegalității diviziunilor de pe cercul gradat.	Măsurând unghiurile pe diferite porțiuni ale cercului, prin metoda reiterației.
8) Eroarea datorită citirilor.	Prin metoda repetației.
<b>b. Ereri de operație.</b>	
1) Eroare de centrare.	Eliminare prin vize lungi și punere exactă în stație.
2) Eroare de viză.	Prin vize asupra semnalelor de dimensiuni reduse.

#### IV. TEODOLITE UZUALE.

Se vor descrie câteva teodolite cu o curentă întrebuințare la noi în țară, arătând caracteristicile lor.

##### 1. TEODOLITUL ZEISS.

###### a) Descrierea teodolitului.

Teodolitul Zeiss face parte din seria instrumentelor moderne, de diferite modele, fabricate de către

firma Zeiss din Iena.

În cele ce urmează, vom face descrierea teodolitului Zeiss, Model I, care, deși în linii generale este asemănător celorlalte teodolite, dar din punct de vedere al construcției, ca și după modul cum se face citirea diviziunilor, atât pe cercul orizontal, cât și pe cel vertical, este fundamental deosebit de alte teodolite.

În Fig. 132 se arată un teodolit Zeiss Model I, așezat pe trepiedul său (descriș acest aparat fiind aparatul pe care îl posedă laboratorul și cu el lucrează studenții).

Șuruburile de calaj  $E_1$  nu sînt solidar legate de aparat, suportul instrumentului, în formă de cerc, este prevăzut cu aceste șuruburi de calaj, în număr de 3.

Cercul care poartă șuruburile de calaj poate fi fixat, prin intermediul șurubului de tracțiune  $C$ , de trepiedul instrumentului.



Fig. 132.

Pe cercul acesta este prevăzută o nivelă sferică  $G_1$ , cu ajutorul căreia se face orizontalizarea aparatului.

Apoi, cercul superior, este prevăzut cu un dispozitiv  $J_1$ , care nu este altceva decât un vizor, format dintr-un sistem de prisme, servind pentru iluminarea cercului gradat orizontal.

Atît cercul gradat orizontal, cât și cercul alidăd, sînt introduse în cercul suportului, fiind fixate de acesta prin intermediul unui șurub cu culisă  $E_2$ .

Cercul orizontal gradat și cercul alidăd se găsesc în partea tronconică, care formează baza aparatului.

Cu ajutorul șurubului repetitor  $L$  poate fi făcută retirea cercului gradat orizontal, fără ca instrumentul să fie deplasat din punctul de stație, iar cu un alt

șurub, care nu apare în Fig. 132, fiind de partea cealaltă, se realizează blocarea cercului alidăd, servind în același timp și pentru mișcarea micrometrică a cercului alidăd față de cel gradat.

Cu ajutorul vizorului cu prisme, se realizează punerea instrumentului în stație în mod optic, fapt de importanță deosebită, prin aceea că eroarea de centrare, de

punere în stație, este simțitor redusă, ceea ce prezintă avantaj de seamă mai ales pe timp cu vânt, când punerea în stație cu ajutorul firului cu plumb devine imposibilă.

Partea tronconică, servind de bază a instrumentului, cum am mai amintit, poartă o furcă, care la rândul ei posedă o nivelă ( $P_7$ ) pentru deservirea cercului vertical.

Această nivelă este construită după sistemul Zeiss, descris la capitolul nivelei cu bulă de aer, dintr-un sistem de prisme  $P_3$  și o oglindă  $P_2$ , cari permit vizarea capetelor bulei de aer, arătându-ne astfel poziția între repere.

Pentru calarea nivelei, avem două șuruburi  $P_4$ , cari au capetele perforate.

O altă nivelă de precizie, sau nivela de calare generală a aparatului, perpendiculară pe nivela  $P_7$ , invizibilă în Fig. 132, servește la calajul definitiv al aparatului pus în stație.

Pe traversa furcilor, alături de cercul vertical se află luneta, redusă ca mărire față de cele ale teodolitelor vechi, dar cu putere mult superioară, măriind de 18 ori.

Este o lunetă analitică, datorită căruia fapt simplifică operațiunile de tachimetrie, are constantă stadimetrică, egală cu 100 și în plus este perfect blindată, ca de altfel întreg instrumentul, fapt care exclude praful și umezeala din interiorul ei.

Este prevăzută cu două inele  $H_1$  și  $H_2$ , primul servind la deplasarea ocularului spre a-l potrivi ochiului operatorului, iar cel al doilea pentru punerea la punct a imaginii.

Atât luneta, cât și cercul vertical, pot fi blocate prin șurubul  $M_1$ , iar pentru mișcarea lor micrometrică ne servim de șurubul  $M_2$ .

În partea stângă a lunetei, în apropiere de ea, sau chiar alături, cum este cazul teodolitelor mai moderne, construite de Zeiss și Wild, este montat un microscop  $H_3$ , care dă posibilitate de a fi citite atât diviziunile cercului gradat orizontal, cât și cele ale cercului vertical.

Microscopul dă imediat, dela prima dată, minutele, fie pe cele sexagesimale, fie pe cele centesimale după cum sînt divizate cercurile aparatului, iar citirea secundelor se face așa cum se va vedea prin manevrarea șurubului care înlocuiește micrometrele aparatelor vechi.

Sistemul de prisme, care servește pentru iluminarea diviziunilor cercului vertical este  $K_2$   $J_2$ , iar pentru microscop este  $K_3$ .

b). Mersul razelor de lumină și  
facerea citirilor la microscop.

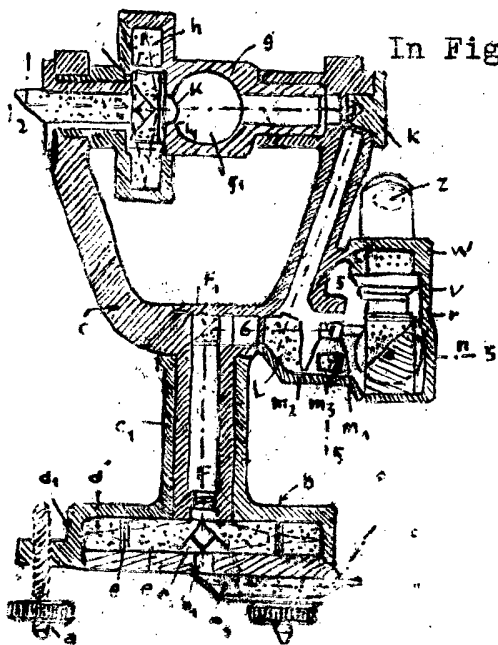


Fig. 133.

In Fig.133 este reprezentată o secțiune verticală a teodolitului Zeiss. Susținută pe cele 3 șuruburi de calaj a, aparatul are placă b, în interiorul căreia se găsește un inel de cristal d, pe a căruia față cilindrică exterioară sînt gravate, cu o finețe extremă, diviziunile, iavizibile cu ochiul liber.

Peste diviziunile inelului de cristal este așternut un strat de argint metalic (se argintează), cu rolul de a transforma acea față cilindrică în oglindă.

În jurul axului acestui inel cu gradațiuni se rotește întreaga parte superioară a instrumentului C, C, g, Z, precum și o cutie e<sub>2</sub>, în care se găsesc două prisme mari de cristal (e), iar pe ipotenuzele

acestor prisme e, bine ajustate, sînt alte două prisme mai mici e<sub>1</sub>.

După cum poate fi văzut din figură, axul părții superioară a aparatului este gol, avînd însă în f un obiectiv și în f<sub>1</sub> o prismă, iar înspre bază cutia (b), a șuruburilor de calaj, este prevăzută cu o gaură b<sub>1</sub>, prin care lumina pătrunde în interiorul aparatului și este reflectată de prisma e<sub>3</sub>.

În acest fel razele de lumină, cari vin din afară, pătrund prin prismele mici e<sub>1</sub>, apoi prin prismele mari e, prin limbul orizontal gradat d, și ajungînd la fața oglindată, pe care se găsesc diviziunile, sînt reflectate, din dreapta și din stînga, înspre ipotenuzele prismelor mari.

De aci, după ce mai sînt reflectate încă odată, trec prin obiectivul f, ajungînd la prisma f<sub>1</sub>, se îndreaptă și străbat printr-o altă prismă în formă de lamă (c) trec apoi prin prisma n și ne formează imaginile diviziunilor în planul reticul r al microscopului.

De pe acest plan reticul r, prin intermediul lentilei v, a prismei w și a lentilei Z, pot fi observate

la microscop diviziunile cercului orizontal.

În ceea ce privește imaginile de pe cercul vertical, acestea sînt obținute în același mod pe planul reticul r și anume: razele de lumină din afară sînt reflectate în interiorul aparatului de către prisma  $k_2$  apoi prin prismele mici  $k_1$ , prin prismele mari i și prin placa de cristal h, care poartă diviziunile cercului vertical.

De aci razele trec prin obiectivul K și imaginea mărită acum, a diviziunilor, înainte de a fi formate în planul reticul r, mai trec încă și prin prismele  $k_1$ ,  $k_2$  și n.

Ajunse acum în planul reticul r, ne vor forma imaginile diviziunilor cercului vertical alături de cele ale cercului orizontal.

- c. Citirea diviziunilor de pe cele două cercuri (orizontal și vertical).

Din cele arătate s-a văzut că, razele de lumină pătrunzînd în interiorul aparatului, aduc în planul reticul și de aci la microscop, imaginea diviziunilor cercului orizontal, alături de imaginea diviziunilor cercului vertical, formînd astfel câmpul de citire a gradajurilor.

Acest câmp este format din trei ferestruici, Fig. 134 și 135 și anume: ferestruica din dreapta marcată cu S, în care apar diviziunile cercului orizontal, apoi ferestruica din stînga marcată cu litera H, în care apar diviziunile cercului vertical și în fine o ferestruică lunguțată dedesubtul celor două ferestruici, care, așa cum se va vedea, îndeplinește rolul vernierului dela teodolitele vechi, servind pentru citirea minutelor și secundelor.

Dacă de exemplu, am vizat cu luneta un punct corectare, atunci în microscop apare câmpul de citire, așa ca în Fig. 134. a, pentru cazul că aparatul are gradajuni în sistemul centesimal și putem observa că diviziunile distanțate între ele cu  $200''$ , atît cele de pe cercul orizontal,

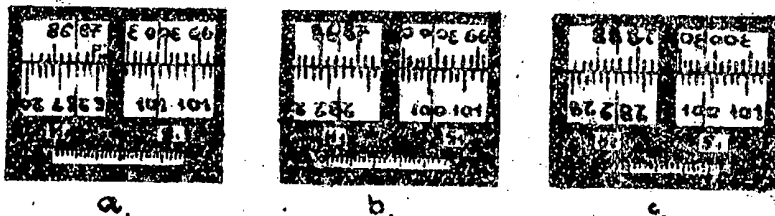


Fig. 134.

cît și cele ale cercului vertical, se suprapun în lungul unei aceleiași linii și vedem cifrele unor gradațiuni aparînd direct, iar cea a diviziunilor decalate cu  $200^\circ$  apar răsturnate.

Un index format din două linii verticale, una la partea superioară și alta la partea inferioară a ferestruicilor mari, ne servește pentru citirea gradelor și zecilor de minute.

Așa de exemplu în Fig. 134 a, se poate citi  $100^\circ 10'$  centezimale.

Pentru a putea aprecia unitățile de minut și secunde, se rotește butonul Q (Fig. 132), care are rolul de a înlocui șurubul micrometric al microscopelor și cu ajutorul cărui se reglează aparatul, dîndu-ne posibilitatea de a citi pe ferestruica lunguiată unități de minute și secunde.

Prin mișcarea tamburului Q se acționează cele 4 lame de cristal  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  și  $m_4$  (Fig. 133) prin intermediul unor excentrice și pînghii, aceste lame folosesc  $m_1$  și  $m_2$ , sînt pentru cercul orizontal, iar  $m_3$  și  $m_4$  pentru cercul vertical.

Mișcarea acestor lame este transmisă indexului, format dintr-o singură liniuță, al ferestruiceii lungi, care va arăta astfel spațiul de neconcordanță al cercurilor gradate.

Ca atare, avînd diagrama a Fig. 134 în care am citit gradele și zecile de minute, rotim tamburul pînă cînd diviziunea răsturnată corespunzătoare, decalată față de cea de jos cu  $200^\circ$ , vine în concordanță cu prima diviziune aflată după index; cazul din diagrama b, Fig. 134, unde diviziunea  $300^\circ$  decalată cu  $200^\circ$  față de diviziunea de  $100^\circ$  aflată jos, vine în concordanță cu diviziunea  $100^\circ 20'$ , în acest moment indexul ferestruiceii lungi va arăta jos unitățile de minut, iar sus secunde.

În cazul nostru arată  $5' 03''$ . Deci citirea pe care o facem, este  $100^\circ 15' 03''$  centesimale.

În mod analog, pentru citirea la cercul vertical, gradele și zecile de minut arătate în diagrama a unde avem  $86^\circ 60'$  și mișcînd tamburul pînă cînd diviziunea lui  $87^\circ$  vine în concordanță cu diviziunea  $287^\circ 80'$  de jos, ceea ce este arătat în diagrama c, Fig. 134, se vor citi la ferestruica lunguiată  $1' 82''$ , deci avem citirea  $86^\circ 61' 82''$ .

Diagramele din Fig. 135 ne arată citirile pentru cazul instrumentelor cu gradațiuni sexagesimale.



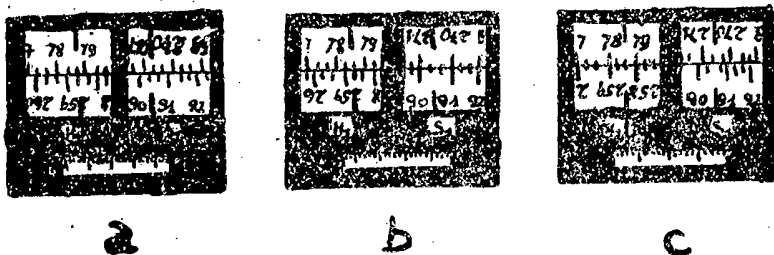


Fig. 135.

Pe diagrama a din această figură se citesc gradele și zecile de minute, la ferestruica  $S_1$  pentru citirile la cercul orizontal, iar din ferestruica  $H_1$  diviziunile cercului vertical.

În cazul nostru, pentru cercul orizontal citim  $90^\circ 30'$ , iar pentru cercul vertical  $78^\circ 40'$ .

Rotind tamburul  $Q$  pînă cînd diviziunea  $270^\circ$ , în poziție răsturnată, din ferestruica  $S_1$ , ajunge în coincidență cu diviziunea  $91^\circ$ , cîmpul de citire va lua forma diagramei  $b$  și citim la ferestruica lungă  $5' 03''$ , iar pentru cercul vertical, cu ajutorul tamburului  $Q$  aducem diviziunea răsturnată  $259^\circ$  în coincidență cu  $78^\circ 20'$  și ferestruica lungă ne va da  $1' 52''$ .

Deci pentru cercul orizontal, în exemplul luat, citim  $90^\circ 35' 03''$ , sau  $270^\circ 35' 03''$ , iar pentru cercul vertical  $78^\circ 41' 52''$ .

După cum vedem, precizia pe care o dau aceste aparate moderne, este de  $1''$  și chiar mai mult, se pot aprecia și jumătățile de secundă.

## 2. TEODOLITUL tachimetric T.T.2.Sovietic.

Acest instrument, arătat în Fig. 136, este foarte practic și ca atare mult întrebunțat în lucrările de ridicare de detalii.

Puterea de mărire a lunetei este de 11,7 ori, constantele stadimetrice  $K_1 = 100$ ,  $K_2 = 0$ , distanța focală  $180 \text{ mm}$ , precizia  $30''$ , vernierul avînd  $40 + 1$  diviziuni.

Teodolitul se poate scoate de pe arborele principal, ceea ce face posibil ca în locul teodolitului să poată

fi plasat un semnal.

Operația aceasta este de mare folos în măsurătorile în care avem distanțe (vize) scurte și puncte care nu au decât un caracter de provizorat.

Prin aceasta se înlătură erorile de punere în stație.

Pentru ca operația să fie posibilă este necesar să avem pentru teodolit trei trepiede cu suport identice.

### TACHIMETRU T.T. 2 (Sovietic)

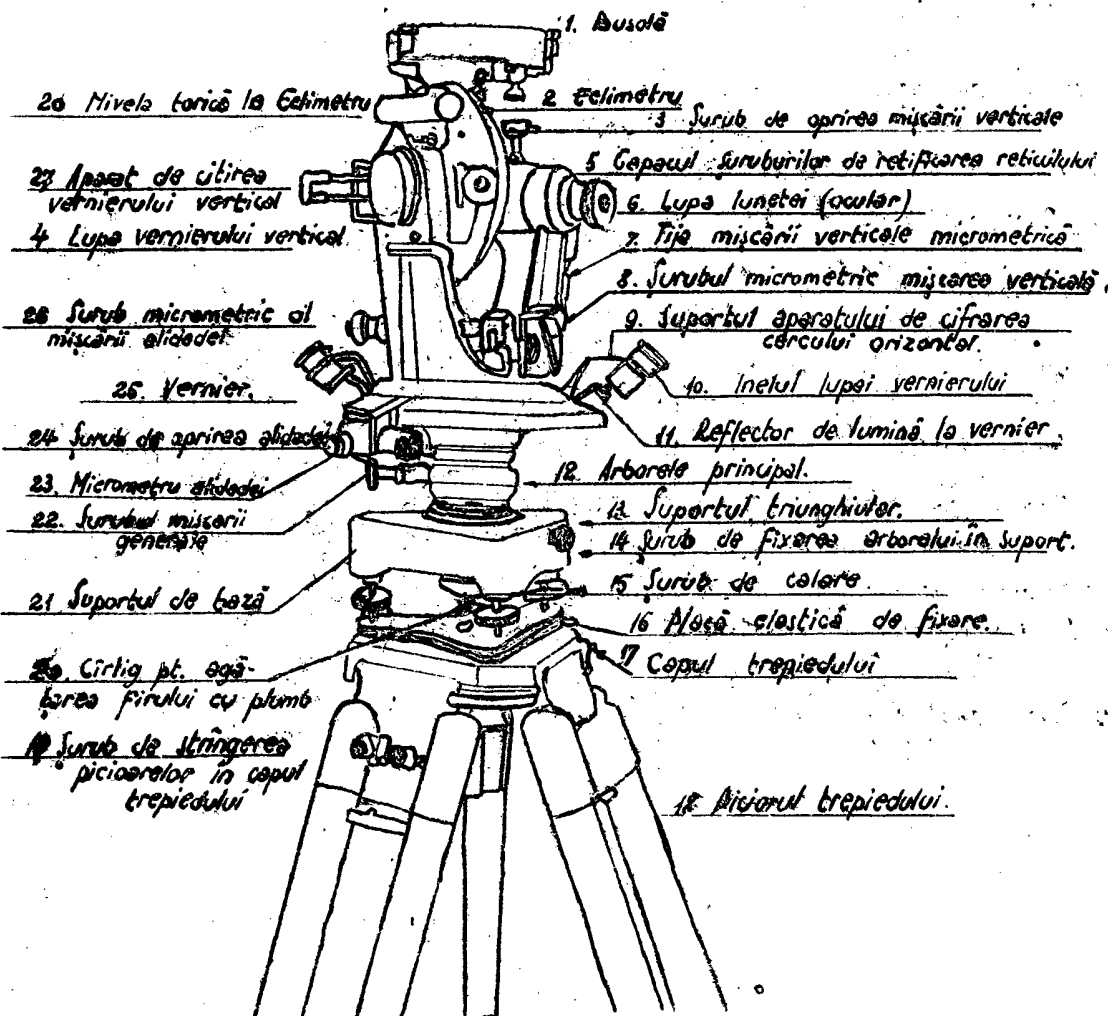


Fig - 138.

- 3. TEODOLITUL O.T.10 (sovietic).

Acest teodolit se întrebuintează în lucrările de precizie, pentru triangulație.

Are lunetă cu putere de mărire de 25,3 ori.

Poate fi gradat în sistemul centesimal sau în sistemul sexagesimal.

Atât cercul gradat orizontal, cât și cercul vertical, sînt complet acoperite, ea atare cercul alidăd nu mai are verniere pentru citire.

Toate citirile se fac cu ajutorul microscopului, indicat pe figură sub (1).

Deoarece cercurile sînt complet acoperite, se protejează instrumentul contra prafului.

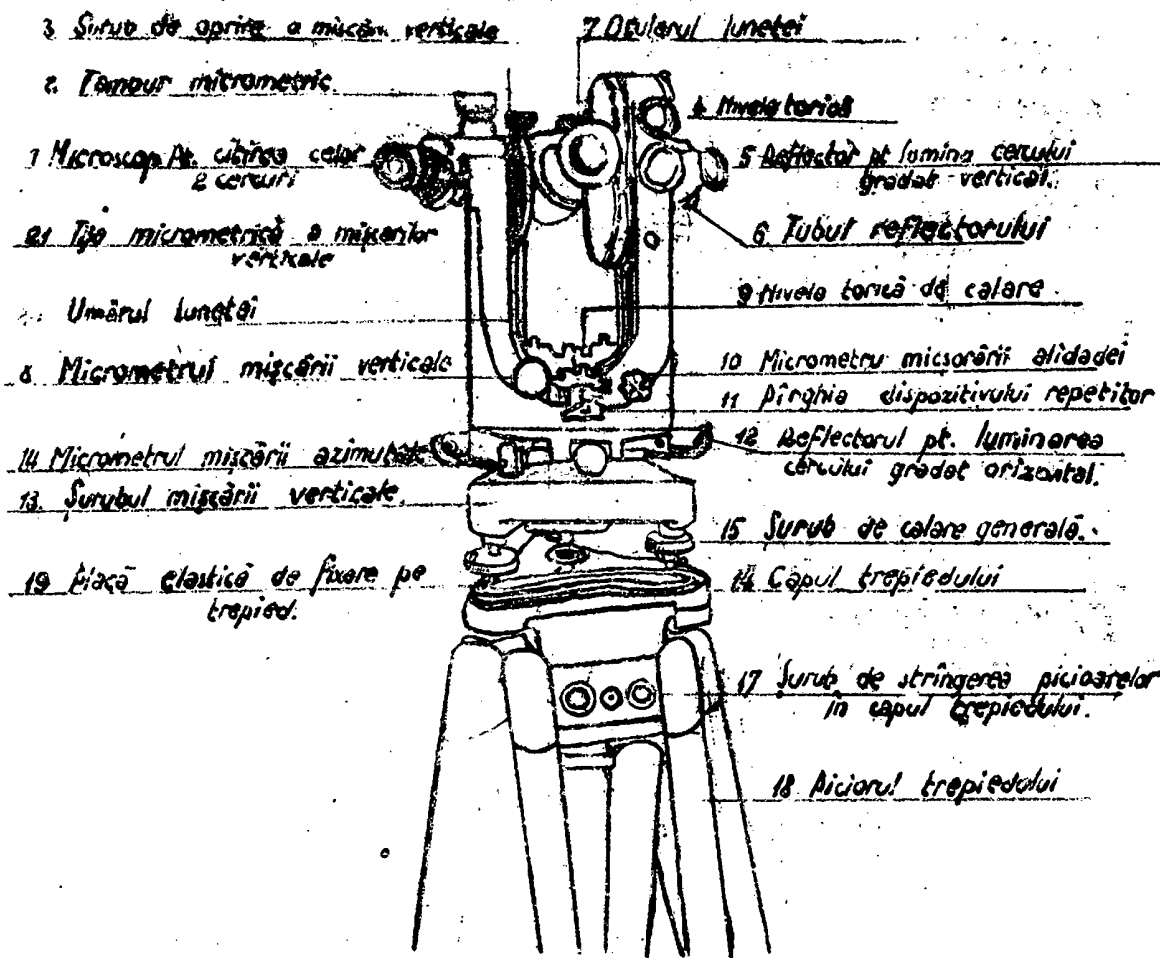


Fig. 137

Pentru a se putea face citirile, teodolitul este prevăzut cu două oglinzi, cari conduc lumina în instrument, printr-o potrivită înclinare a oglinzilor.

Dela acestea lumina este condusă pînă la cercurile gradate (orizontal și vertical), printr-un sistem de prisme.

Gradațiile luminate sînt conduse mai departe, tot printr-un sistem de prisme pînă la microscop, pe a cărui membrană apare imaginea gradațiilor.

Odată cu gradațiile de pe cercuri, pe ecran apare și indicatorul alidadei, arătat în Fig. 138 și 139 prin linie dublă, AH este firul alidat pentru cercul orizontal AV pentru cel vertical.

Aceste indicațoare ale alidadelor sînt reglabile.

Reglarea se face cu ajutorul unui tambur micrometric gradat, arătat în Fig. 139 și în Fig. 137, montat pe umărul stîng al instrumentului.

Totodată mai avem un indicator fix, care trebuie ca la început să fie în coincidență cu gradația de zero a tamburului.

Tamburul are două gradații și anume, una roșie și alta neagră, corespunzătoare celor două poziții ale lunetei.

Adică, pentru poziția normală a lunetei se va citi la gradațiile roșii, iar pentru luneta dată peste cap, se va face citirea la gradațiile negre.

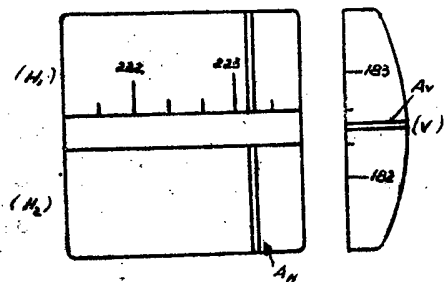
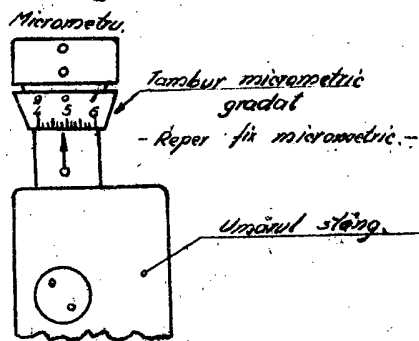


Fig. 138.



*Nota: reperul micrometric și diferitele 9, 5, 1, trebuie marcate cu roșu.*

Fig. 139.

Desigur că cele două feluri de gradații decalate între ele cu  $180^\circ$ , ca atare, dacă sînt 10 gradații (roșii și negre), gradația zero neagră coincide cu grada-

ția 5 roșu și invers.

Fiecare diviziune mare este împărțită în 6 subdiviziuni.

La o rotație completă a tamburului, firul alidat parcurge pe cercul respectiv o diviziune întreagă de a cercului.

La gradațiile în sistemul sexagesimal cea mai mică diviziune de pe cerc este de 20', deci la o rotație de a tamburului, firul alidat parcurge un spațiu de 20'.

Dăm un exemplu practic de citire.

Pentru Fig. 138, apreciem cu ochiul liber 223°.

Rotim tamburul, pînă firul indicator ajunge pe diviziunea citită (223°), să presupunem că am avea la indicatorul fix 4 diviziuni mari, plus 5 subdiviziuni și am mai aprecia 1/4 de diviziune mică.

În acest caz am citi:

$$223^{\circ} + \left( 4 \times \frac{20'}{10} \right) + \left( 5 \times \frac{20'}{6 \times 10} \right) + \left( \frac{1}{4} \times \frac{20'}{6 \times 10} \right) =$$

$$= 223^{\circ} + 8' + 1'40'' + 5'' = 223^{\circ} 9' 45''$$

Precizia instrumentului este de 5".

#### V. Metode de măsurarea unghiurilor.

Instrumentele de măsurat unghiuri pot da precizii diferite, așa cum s-a arătat, după felul cum au gradate cercurile.

Așa de exemplu unele dau precizie de 1' altele de 30", iar cele moderne de 1" sau 5".

În plus, se mai pot face și aprecieri de fracțiuni ale acestor precizii.

Însă pentru că cu toate străduințele depuse, independent de voința noastră, se comit erori de citire, atunci cînd se fac evaluări de fracțiuni de diviziuni, spre a se evita sau reduce pe cît posibil, aceste erori, au fost imaginate o serie de metode pentru măsurarea unghiurilor, metode prin care deci reușim să compensăm, în parte, erorile ce comitem.

Aceste metode vor servi nu numai pentru înlăturarea sau reducerea erorilor comise în aprecierea inexactă a fracțiilor, dar caută să înlătore și erorile datorite neegalității diviziunilor, provenite din cauza imperfecțiunii mașinei de divizat.

În cele ce urmează vor fi arătate diferitele metode de măsurarea unghiurilor, precum și trecerea datelor, citirilor făcute, în carnetele de câmp, într-un tablou, care poartă denumirea de protocol.

### - 1. Metode simple.

Aceste metode se utilizează foarte rar și numai atunci, când sîntem siguri de exactitatea lor și mai ales a instrumentelor cu cari executăm măsurătoarea.

Dar aceste metode stau la baza celorlalte metode de măsurare a unghiurilor.

Desprindem următoarele cazuri de metode simple:

a) Cînd se dau vize numai cu luneta în poziție directă, adică cu cercul vertical la stînga și

b) Cînd se dau vize atît cu luneta directă (cercul vertical la stînga), cît și cu luneta peste cap, adică cu cercul vertical la dreapta.

În ambele cazuri putem face citiri sau la un singur vernier sau la ambele verniere.

Mai frecvent se folosim de metoda simplă, în care dăm viza cu cercul vertical la stînga, făcînd citirea la ambele verniere și luînd media citirilor și apoi cu luneta peste cap și se citește iarăși la ambele verniere.

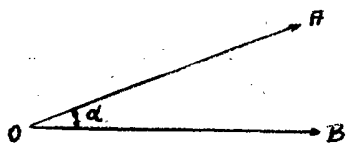


Fig. 140.

De exemplu, dacă am avea de măsurat unghiul ( $\alpha$ ) dintre liniile OA și OB (Fig. 140), atunci se așează aparatul în punctul O, numit punct de stație și se dă viză către punctul A, avînd cercul vertical la stînga, se citește la vernierul I, de exemplu  $30^{\circ} 14' 20''$ , apoi la vernierul II  $210^{\circ} 14' 30''$ .

După aceea se dă viză către punctul B, avînd limbul gradat fix, iar cercul alidat liber și să presupunem că la vernierul I am citit  $64^{\circ} 27' 40''$ , iar la vernierul II  $244^{\circ} 27' 50''$ .

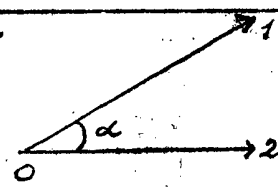
Dăm luneta peste cap și vom avea cercul vertical la dreapta.

Se vizează punctul B și citim la vernierul I, de exemplu,  $244^{\circ} 27' 30''$ , iar la vernierul II :  $64^{\circ} 27' 10''$ .

Se mișcă cercul alidad, cel gradat fiind fixat cu șurubul de mișcare generală, pînă cînd prindem cu luneta punctul A și facem citirile la cele două verniere.

Toate citirile făcute se trec în protocolul de vize, cum se arată mai jos.

Protocol de vize.

Vize		Citiri						Media vernier I-II.			C.V.S+C.V.D media			Valoarea unghiului			Observațiuni.
De la	La	Vernier I			Vernier II			0	I	II	0	I	II	0	I	II	
		0	I	II	0	I	II										
0	1	30	14	20	210	14	30	30	14	25	30	14	22,5	34	13	10	
	2	64	29	40	244	29	50	64	27	45	64	27	32,5				
	2	244	29	30	64	29	10	64	27	20							
	1	210	14	10	30	14	30	30	14	20							Zi liniștită, vizibilitate bună.-

În coloana în care se trece media citirilor la cele două verniere, nu se mai face și media la grade și minute, ci numai pentru secunde, unde avem diferențe.

Având media citirilor la cele două verniere, atât pentru cazul cînd am făcut vize cu cercul vertical la stînga, cît și pentru cercul vertical la dreapta, se ia media acestor citiri (evident numai pentru secunde) și se trece în coloana CVS + CVD.

Făcînd apoi diferența între media citirilor CVS + CVD, avute pentru punctul 2 și cele pentru punctul 1, se obține valoarea unghiului  $\alpha$ .

În coloana observații se obișnuiește a se face schița punctelor, precum și notații asupra stării timpului.

## 2. Metoda turului de orizont.

Deci s-ar prezenta situația ca în cazul arătat în Fig. 141, adică am avea un punct O, în situația

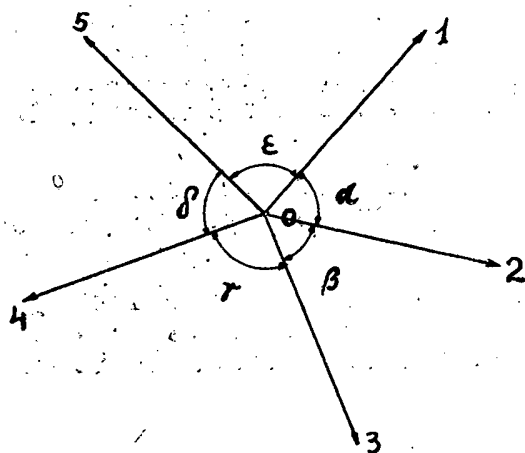


Fig. 141.

punctului la centru și în jurul acestui punct trebuie măsurate toate unghiurile ( $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ ), atunci se face stație în punctul O și se dau vize înspre punctele 1, 2, 3, 4, 5, atât cu luneta în poziție directă, cât și cu luneta peste cap, citind la ambele verniere și apoi se ia media. Avem în acest caz ceea ce se numește tur de orizont, fapt pentru care și metoda poartă denumirea de metoda turului de orizont.

Înscrierea datelor în protocolul de vize se face ca în cazul precedent, adică se fac citirile la vernierul I și II

consecutiv, pentru toate vizele, de la punctul 1 - 5, apoi se dă luneta peste cap și se fac citirile de la punctul 5 - 1.

Media citirilor la cele două verniere ca și media citirilor cu cercul vertical la stînga și cercul vertical la dreapta, în mod identic ca în cazul citirilor simple. Valorile unghiurilor se deduc apoi, la fel, prin diferențe.

Am arătat că la fiecare viză trebuie să se facă citiri la cele două verniere și că aceste citiri le notăm în carnetul de observații.

Dar trebuie amintit că ultima viză pe care o facem, este tot către punctul 1, adică, se vizează punctul către care am vizat prima dată.

Teoretic ar trebui ca citirile pe care le facem în acest caz, la a doua viză, să fie identice cu citirile pe care le-am obținut la prima viză.

Acest lucru nu este realizat întotdeauna, obținînd în majoritatea cazurilor o diferență, care este eroarea de închidere a turului.

Eroarea poate proveni din imprecizia zelor (prima și ultima) sau din faptul că instrumentul nu



- 208 -

mai este precis în stație.

În ultimul caz de regulă eroarea este mare și ca atare operația de măsurarea a unghiurilor se va repeta, după ce teodolitul a fost calat, pus în stație, precis.

Dacă eroarea este mică, urmează compensarea turului, adică repartizarea erorii pe vize.

Un exemplu, ne poate lămuri mai concludent acest fapt.

Să presupunem că diferența între prima citire medie obținută la vizarea punctului 1 și citirea medie (vernier I și II) de la viza de închidere, adică de la a doua citire punctul 1, ar fi, pentru exemplul din Fig. 141, de

În acest caz am diviza eroarea cu numărul de vize, adică:  $15'' : 5 = 3''$ , obținând  $3''$  pe care le-am repartiza, progresiv tuturor vizelor.

Adică, din viza spre 2 am scădea  $3''$ , din cea către punctul 3 am scădea  $2 \times 3''$ , ș.a.m.d. iar din ultima viză către punctul 1 am scădea tocmai eroarea de închidere  $15''$ .

### 3. Metoda repetiției.

Este o metodă frecvent întrebuințată în cazul unghiurilor singulare și constă în a măsura unghiurile, după așezarea instrumentului în stație, succesiv de mai multe ori, luând ca punct de plecare, de fiecare dată, punctul la care a fost oprită operația precedentă.

De exemplu, să presupunem că am avea de măsurat unghiul dintre aliniamentele OA și OB.

Așezăm teodolitul în punctul de stație O, fixăm cercul alidă de cercul gradat, după ce am făcut ca zero vernierului să fie în coincidență cu zero de pe limbul gradat, apoi în această poziție dăm viza asupra punctului A, șurubul de fixare al limbului gradat fiind desfăcut.

În această poziție se strânge șurubul limbului gradat și se deșurubează cel al cercului alidă și vizăm punctul B.

Am obținut astfel (Fig. 142) valoarea unghiului AOB, adică  $\alpha$ .

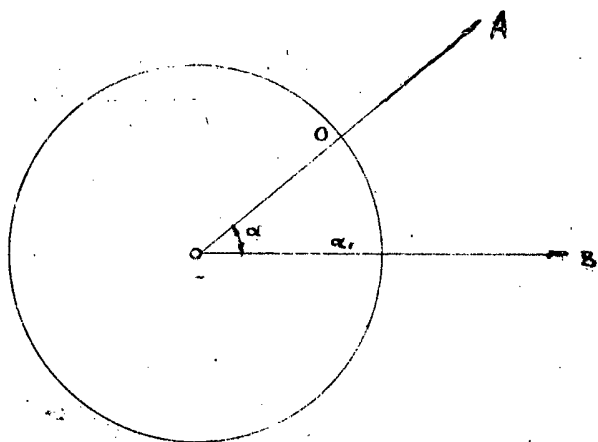


Fig. 142.

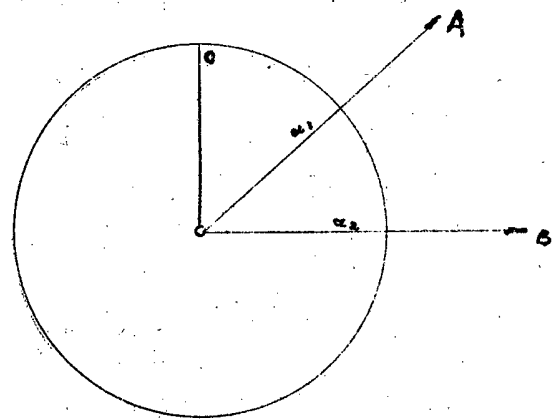


Fig. 143.

Fixăm din nou șurubul cercului alidă și desfacem șurubul cercului gradat. În această poziție se vizează punctul A (Fig. 143).

Acum zero al limbului gradat este deplasat față de zero al vernierului cu unghiul  $\alpha_1$ .

Se fixează limbul gradat și cu alidada liberă vizăm punctul B când pe limbul gradat se va citi  $\alpha_2$ ,  $\alpha_2 = \alpha_1 + AOB + \text{eroarea}$ .

Procedând la fel de mai multe ori, se va ajunge la  $\alpha_n = \alpha_n - 1 + AOB + \text{eroarea}$ .

După mai multe operații se ia media citirilor.

Metoda descrisă este citirea prin repetiție cu citiri intermediare.

Mai avem și metoda repetiției fără citiri intermediare, care dă rezultate de primă mână, deoarece nu se mai face decât prima citire și după un număr oarecare n de repetiții, se observă diviziunea finală pe care împărțindu-o la numărul de repetiții, se va afla valoarea adevărată a unghiului.

Prin această metodă se reduce eroarea de citire la vernier de n ori, adică de atâtea ori câte repetiții se fac.

Protocolul de vize.

Nr re- pe- ti- ții	Vize		Citiri						Media			Unghiul			Valoarea			Observații
	De la	La	Vernier I			Vernier II			vernier I - II			dedus			adevărată a unghiului			
			0	I	II	0	I	II	0	I	II	0	I	II	0	I	II	
4	O	A	5	25	30	185	25	40	5	25	35	79	16	20	16	20		
		B	82	41	50	262	42	00	82	41	55				19	19		05

Făcând diferența între mediile vernierelor I și II, se află unghiul dedus, care, împărțit prin numărul repetițiilor, ne va da valoarea adevărată a unghiului cuprins între aliniamentele respective.

#### - 4. Metoda reiterației.

În practică, de multe ori se confundă această metodă, cu metoda repetiției.

Ea constă la fel ca și metoda repetiției, în a măsura unghiul de mai multe ori, însă de fiecare dată este luată, ca origine, o altă diviziune de pe limbul gradat, ceea ce revine la a face măsurarea unghiului pe diferite porțiuni ale cercului gradat.

Așa dacă, de exemplu, am avea de măsurat unghiul cuprins între două aliniamente OA și OB (Fig. 144), după instalarea aparatului în punctul de stație O, se pune în

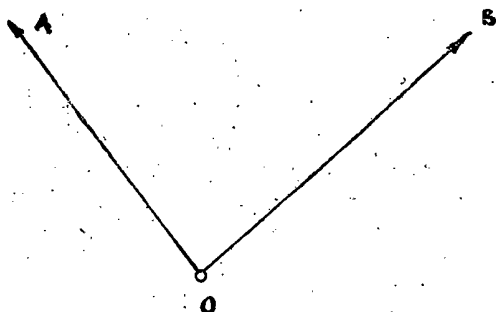


Fig. 144.

coincidență zero al vernierului cu zero cercului gradat și având cercul alidat solidar cu cercul gradat, se vizează punctul A. Strângând șurubul mișcării generale și slăbind pe cel al cercului alidat, se dă viză către punctul B.

Se fac citiri la ambele verniere și din media lor se va obține o primă valoare a unghiului.

După aceea operațiunea se repetă de mai multe ori, însă acum se pune zero al vernierului în coincidență cu o altă diviziune a limbului gradat, de exemplu diviziunea  $90^\circ$  și măsurând analog ca mai sus, se va

obține o altă valoare a unghiului.

Apoi se va lua diviziunea  $180^\circ$  ca origine, ș.a.m.d.

La sfârșitul operațiilor se face media secundelor și se obține valoarea unghiului.

În protocolul de vize nu se mai trec gradele și minutele, deoarece sînt aceleași ca în primul caz, cînd s-a luat ca origine zero al limbului, ci se vor trece numai secunde.

- 211 -

Protocol de vize.

Vize De la	Ver- nic- rul	C i t i r i				Media		Valoarea			Observatii		
		0	1	Secunde		secun- delor	vernier	unghiului					
la				1-a	2-a	3-a	4-a	I-II	0	I	II		
0	A	I	0	0	0	0	0	0	2,5	64	28	27,5	
		II	180	0	5	5	5	5					5
	B	I	64	28	25	35	20	30	27,5	30			
		II	244	28	30	40	25	35	32,5				

Din protocol se vede că, după ce au fost trecute citirile pentru cele 4 măsurători, bineînțeles trecând numai secunde, se face media secundelor la vernierul I și la vernierul II, apoi în altă coloană media secundelor, vernier I plus vernier II și prin scădere se obține valoarea unghiului.

Prin această metodă se elimină erorile provenite din inegalitatea diviziunilor limbului gradat.

- 5. Metoda combinată repetiție și reiterație.

In multe cazuri se combină cele două metode.

Adică măsurăm unghiurile prin repetiție punând zero al vernierului în coincidență cu zero limbului gradat.

După aceea se pune zero vernierului, ca în cazul reiterației în coincidență cu o altă diviziune a limbului, de exemplu diviziunea  $90^\circ$  și iarăși măsurăm prin repetiție, făcând mai multe repetiții.

Operațiunea se repetă luând altă diviziune a cercului gradat ca origine.

Prin această metodă se elimină atât eroarea de inegalitate a diviziunilor (eliminată prin reiterație), cât și eroarea de citire (eliminată prin repetiție).

- 6. Metoda Schreiber sau metoda combina-  
țiilor posibile.

Metoda Schreiber constă în a măsura unghiurile în toate combinațiile posibile, adică pe lângă faptul că fiecare unghi este măsurat separat, se mai măsoară unghiuri însumate, luând aceste sume într-o ordine bine stabilită.

Este metoda frecvent întâlnită în cazul măsurătorilor de precizie mare.

Dacă am avea cazul din Fig. 145, atunci se vor măsura unghiurile indicate de săgeți.

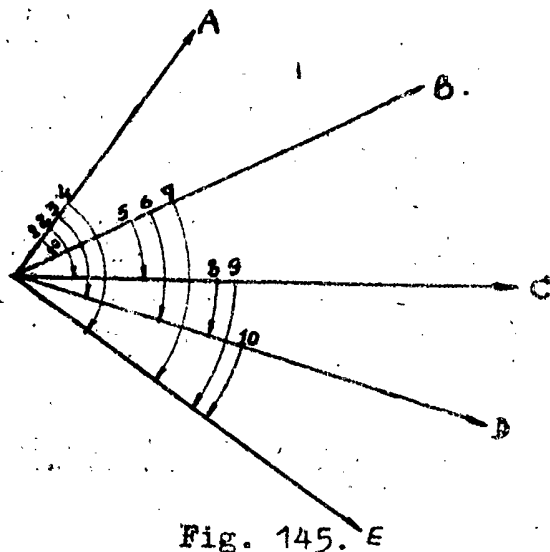


Fig. 145. E

Pentru o și mai mare precizie, se măsoară aceste unghiuri de mai multe ori, luând altă gradațiune, a cercului gradat, ca origine, în mod analog, cu metoda reiterației.

Dacă ne va fi cerută o și mai mare precizie, atunci unghiurile vor fi măsurate, luând ca origine și celelalte direcții, nu numai pe OA cum este cazul din Fig. 145, bineînțeles însă că unghiurile se măsoară fără a ne fiachide pe direcțiunea de origine, ci oprindu-ne la direcțiunea dinaintea ei.

În acest mod, dacă am face o singură dată măsurarea unghiurilor, am avea un număr total de unghiuri măsurate, egal cu numărul combinațiilor de  $n$  obiecte luate câte două.

Deci numărul total de unghiuri va fi

$$N = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \text{ unde } n \text{ este numărul direcțiilor}$$

Pentru cazul nostru avem:  $N = C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10.$

Însă pentru fiecare unghi, măsurătoarea este repetată, adică se fac un număr de repetiții egal cu  $r$ , și atunci numărul de unghiuri măsurate este:

$$N = r \frac{n(n-1)}{2}$$

Determinarea numărului de repetiții  $r$ , este în funcție de așa numită greutate a unei direcțiuni, greutate care pentru punctele de triangulație de ord.I, este 24, pentru cele de ord.II este 16, iar pentru punctele triangulației de ord.III, această greutate notată cu  $p$ , este 8.

Pentru celelalte triangulații de ordin inferior sau poligonatii, etc., măsurarea unghiurilor nu se face prin metoda Schreiber.

Numărul de repetiții  $r$  este dat de relația  $r = \frac{p}{n}$ .

Aceste repetiții se determină pentru fiecare punct de stație, în scopul ca precizia măsurătorilor pentru toate unghiurile, măsurate în rețeaua de triangulație, să fie aceiași.

Aceasta pentru motivul că în unele puncte numărul de direcțiuni poate fi altul, ca în cazul din Fig. 146, unde în punctul 1 și 5 avem numai două direcțiuni, pe când în punctele 2 și 4 avem 3 direcțiuni, iar în punctul 3 sînt 4 direcțiuni.

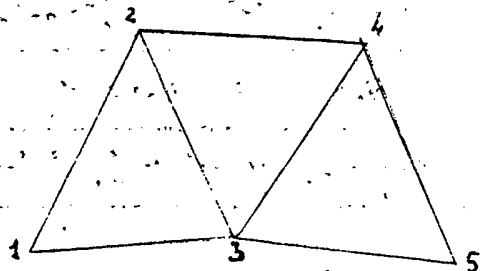


Fig. 146.

Ori pentru ca unghiurile acestei rețele să fie măsurate cu aceeași precizie, va trebui ca în fiecare stație să fie făcute atâtea repetiții cîte ne conduc la măsurarea cu aceeași precizie.

Dar cum, pentru măsurarea de mai multe ori a fiecărui unghi, se iau origini deosebite, dintre cari unele se numesc origini inițiale, iar celelalte sînt origini distanțate față de primele, cu un interval ( $i$ ) care este dat de relația:

$$i = \frac{400}{r}$$

Numărul originilor inițiale, notat  $n$ , este luat în funcție de numărul ( $n$ ) al direcțiunilor și anume: cînd numărul direcțiunilor este par, se ia  $n_0 = n$ , iar dacă numărul direcțiunilor va fi impar, atunci luăm:  $n_0 = n - 1$ .

Valoarea originilor ( $V$ ), este dată de raportul dintre intervalul  $i$  și numărul originilor inițiale  $n_0$ , adică

$$V = \frac{1}{n_0}$$

Calculînd toate aceste elemente pot fi întocmite tablourile pentru origini. Dăm mai jos un tabel cu calculul tuturor elementelor, precum și un tablou cu originile pentru cazul cînd avem 5 direcțiuni și  $p = 25$ .

Tabloul cu calculul elementelor pentru gradatiune centesimală.

Cazul a	2 Direcțiuni	3 Direcțiuni	4 Direcțiuni	5 Direcțiuni	6 Direcțiuni
Greutatea	$\mu = 24$	$\mu = 24$	$\mu = 24$	$\mu = 25$	$\mu = 26$
Nr. direcțiunilor	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
Nr. unghiurilor	$N = \frac{n(n-1)}{2} = 1$	$N = \frac{n(n-1)}{2} = 3$	$N = \frac{n(n-1)}{2} = 6$	$N = \frac{n(n-1)}{2} = 10$	$N = \frac{n(n-1)}{2} = 15$
Nr. repetițiilor	$r = \frac{\mu}{n} = 12$	$r = \frac{\mu}{n} = 8$	$r = \frac{\mu}{n} = 6$	$r = \frac{\mu}{n} = 5$	$r = \frac{\mu}{n} = 4$
Intervalul între origini	$i = \frac{400}{r} = 33^{\circ}33'$	$i = \frac{400}{8} = 50^{\circ}00'$	$i = \frac{400}{6} = 66^{\circ}67'$	$i = \frac{400}{5} = 80^{\circ}00'$	$i = \frac{400}{4} = 100^{\circ}00'$
Nr. originilor inițiale	$n_0 = n - 1 = 1$	$n_0 = n = 3$	$n_0 = n - 1 = 3$	$n_0 = n = 5$	$n_0 = n - 1 = 5$
Valoarea originii	$v = \frac{i}{n_0} = 33^{\circ}33'$	$v = \frac{i}{n_0} = 16^{\circ}67'$	$v = \frac{i}{n_0} = 22^{\circ}22'$	$v = \frac{i}{n_0} = 16^{\circ}00'$	$v = \frac{i}{n_0} = 20^{\circ}00'$

Tabloul cu originile pentru cazul 5 direcțiuni.

Unghiul	O r i g i n i l e				
	1	2	3	4	5
(1.2)	$0^{\circ}00'$	$80^{\circ}00'$	$160^{\circ}00'$	$240^{\circ}00'$	$320^{\circ}00'$
(1.3)	$16^{\circ}00'$	$96^{\circ}00'$	$176^{\circ}00'$	$256^{\circ}00'$	$336^{\circ}00'$
(1.4)	$32^{\circ}00'$	$112^{\circ}00'$	$192^{\circ}00'$	$272^{\circ}00'$	$352^{\circ}00'$
(1.5)	$48^{\circ}00'$	$128^{\circ}00'$	$208^{\circ}00'$	$288^{\circ}00'$	$368^{\circ}00'$
(2.3)	$32^{\circ}00'$	$112^{\circ}00'$	$192^{\circ}00'$	$272^{\circ}00'$	$352^{\circ}00'$
(2.4)	$48^{\circ}00'$	$128^{\circ}00'$	$208^{\circ}00'$	$288^{\circ}00'$	$368^{\circ}00'$
(2.5)	$64^{\circ}00'$	$144^{\circ}00'$	$224^{\circ}00'$	$304^{\circ}00'$	$384^{\circ}00'$
(3.4)	$64^{\circ}00'$	$144^{\circ}00'$	$224^{\circ}00'$	$304^{\circ}00'$	$384^{\circ}00'$
(3.5)	$0^{\circ}00'$	$80^{\circ}00'$	$160^{\circ}00'$	$240^{\circ}00'$	$320^{\circ}00'$
(4.5)	$16^{\circ}00'$	$96^{\circ}00'$	$176^{\circ}00'$	$256^{\circ}00'$	$336^{\circ}00'$

Pentru cazul stațiilor cu mai mult de 10 direcțiuni, Schreiber impune următoarea restricțiune și anume de a se împărți vizele în grupe, astfel ca fiecare grupă să cuprindă un număr de vize mai mic de 10, iar grupele să fie legate între ele cu cel puțin două vize.

Metoda Schreiber este azi unanim în-  
trebuințată în triangulațiile de ordinul I, II și III.

Protocolul de vize.

Vize		Citiri						Media vernier I + II			Unghiul calculat			Valoarea adevărată a unghiului	Observ.	
De la	La	Vernier I			Vernier II			o	I	II	o	I	II			
O	A	o	00	00	200	00	00	0	00	00						
		50	00	00	250	00	00	50	00	00						
		100	00	00	300	00	00	100	00	00						
		150	00	00	350	00	00	150	00	00						
	B	53	39	36,4	253	39	36,5	53	39	36,45	53	39	36 <sup>45</sup>	$\widehat{AOB}$ 53°39'36"		
			39	11,4	303	39	62,0	103	39	36,7	53	39	36 <sup>10</sup>			
		153	39	00,2	353	39	72,6	153	39	36,4	53	39	36 <sup>40</sup>			
		203	39	15,0	3	39	58,6	203	39	36,8	53	39	36 <sup>80</sup>			
	A		16	00	00	216	00	00	16	00	00				$\widehat{AOC}$ 111°36'67 <sup>50</sup> "	
			66	00	00	266	00	00	66	00	00					
			116	00	00	316	00	00	116	00	00					
			166	00	00	366	00	00	136	00	00					
		127	36	57,6	227	36	77,2	127	36	67 <sup>4</sup>	111	36	67 <sup>40</sup>			
		177	36	67 <sup>0</sup>	227	36	68,0	177	36	67 <sup>5</sup>	111	36	67 <sup>50</sup>			
		227	36	69,0	29	36	66,0	227	36	67 <sup>5</sup>	111	36	67 <sup>50</sup>			
		277	36	67,1	77	36	68,0	277	36	67 <sup>5</sup>	111	36	67 <sup>60</sup>			



După cum vedem, la măsurarea unghiului AOC, se dă prima viză înspre punctul A, având drept origine diviziunea  $16^{\circ} 00'$ , așa cum este arătat în tabloul originilor pentru cazul că avem 5 direcțiuni.

De aci încolo în tablou se trec toate citirile ce se fac, având grije ca originea să fie luată cea trecută în tabloul original.

### - 7. Metoda sectoarelor.

Este o metodă care la noi în țară nu este aplicată. În fond această metodă nu este altceva decât metoda Schreiber complicată în sensul că divizează turul de orizont în trei sau patru părți, cari sînt separate între ele prin niște direcțiuni principale.

Aceste părți poartă denumirea de sectoare, fapt pentru care metoda a luat denumirea de metoda sectoarelor.

Exemplul din Fig. 147, turul de orizont este împărțit în trei sectoare (I, II și III), delimitate prin direcțiunile 01, 04 și 08.

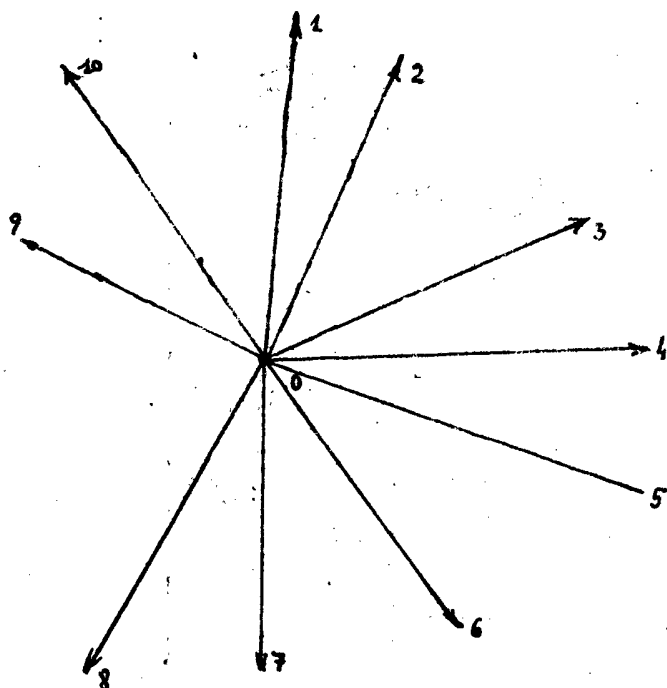


Fig. 147.

Împărțirea în sectoare este făcută în scopul de a se ține cont de condițiunile atmosferice, ca luminozitate, etc., fapt pentru care fiecărui sector îi este atribuit un anumit coeficient de greutate, de precizie.

Măsurarea unghiurilor este făcută pe sectoare, după metoda Schreiber, urmînd ca, la terminarea măsurătorilor, în sumînd toate unghiurile și neînchizîndu-ni-se turul de orizont, adică suma tuturor unghiurilor fiind diferită de  $360^{\circ}$  sexagesimale sau  $400^{\circ}$  centesimale, va trebui să se facă compensarea unghiurilor, la care se va ține cont de coeficientul de greutate al sectoarelor.

### - 8. Măsurarea excentrică a unghiurilor.

Este problema cunoscută și sub denumirea de centrarea vizelor.

Această operațiune ne este, practic, foarte adesea pusă de către situația existentă pe teren.

De exemplu ne este cerut a face măsurări de unghiuri dintr-un punct de stație în care nu ne putem așeza cu teodolitul, cum este cazul turnurilor de biserici, etc., sau trebuie să vizăm un punct și în drumul vizei noastre ne stă un obstacol oarecare, un copac, o clădire, etc.

În toate aceste cazuri va trebui ca stația de observație să fie răcută într-un alt punct decât cel în care ni se cerea să facem stație.

Se recomandă ca excentricitatea să nu depășească lungimea de 20 m, spre a înlătura erorile prea mari ce ar proveni din aceasta.

După măsurarea excentrică va trebui să se afle valorile adevărate, care ne interesează de fapt.

Operațiunea aceasta este centrarea unghiurilor.

Pentru a pune mai bine în evidență această problemă, să presupunem că ni se cere a măsura unghiul  $P_1OP_2$ , Fig. 148, dar nu putem face stație în punctul O, ci se face stație în  $O'$ , în apropierea lui O. Vizând din  $O'$  punctele  $P_1$ ,  $P_2$  și O, se măsoară unghiurile  $\alpha'$  și  $u$ .

Direcțiile  $OP_1$  și  $OP_2$  suferă o deplasare unghiulară  $\varepsilon_1$  și  $\varepsilon_2$ .

Notînd distanța  $OO' = e$ ,  $OP_1 = D_1$  și  $OP_2 = D_2$ , se poate scrie:

$$\sin \varepsilon_1 = \frac{e}{D_1} \sin (u - \alpha')$$

$$\sin \varepsilon_2 = \frac{e}{D_2} \sin u.$$

Deoarece unghiurile  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  sînt mici, ținînd cont de faptul că distanțele  $D_1$ ,  $D_2$  sînt mari în comparație cu  $e$ , se poate scrie:

$$\sin \varepsilon_1 = \varepsilon_1 \quad \sin \varepsilon_2 = \varepsilon_2.$$

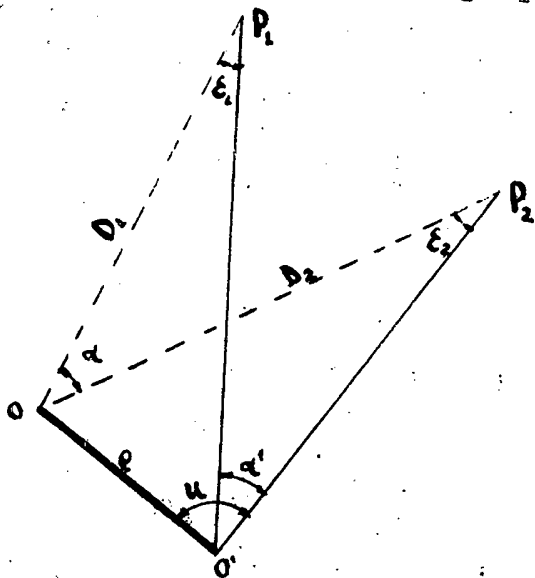


Fig. 148.

Deci:  $\varepsilon_1 = \rho'' \frac{e}{D_1} \sin(u - \alpha)$   $\rho'' = 206\,265$

$$\varepsilon_2 = \rho'' \frac{e}{D_2} \sin u$$

Pe noi interesându-ne unghiul  $\alpha$ , cu datele de mai sus valoarea acestuia este dată de relația:

$$\alpha + \varepsilon_1 = \alpha' + \varepsilon_2$$

$$\alpha = \alpha' + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1).$$

Deci corecția de centrare, ce va trebui adăugată unghiului măsurat, este:  $\Delta\alpha = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$ .

$$\Delta\alpha'' = \rho'' e \left[ \frac{\sin u}{D_2} - \frac{\sin(u - \alpha')}{D_1} \right]$$

Așa că valoarea unghiului centrat este:

$$\alpha = \alpha' + \rho'' e \left[ \frac{\sin U}{D_2} - \frac{\sin(U - \alpha')}{D_1} \right].$$

Distanțele  $D_1$  și  $D_2$  sînt cunoscute din coordonatele provizorii ale punctelor  $P_1$ ,  $P_2$  și  $O$  sau pot fi luate chiar de pe un plan existent, necerîndu-se pentru ele o precizie mai mare de 1 m.

Cantitățile  $e$  și  $u$  se numesc elementele de centrare fără de cari nu se poate face centrarea.

De multe ori aceste elemente nu pot fi măsurate și în acest caz se iau pe teren două puncte  $M$  și  $N$  (Fig. 149), ambele staționabile și distanța între ele posibilă de a fi măsurată.

Dînd vize din  $M$  și  $N$  către punctele  $O$  și  $O'$ , ambele vizibile din  $M$  și  $N$ , se măsoară unghiurile 1, 2, 3, 4.

Apoi făcînd stație în  $O'$ , se măsoară unghiul  $\alpha'$ .

Avînd aceste elemente, precum și lungimea  $MN$  din calcule se pot deduce elementele de centrare  $e$  și  $u$ .

Un alt caz de centrare prezintă următoarea situație: Fie de măsurat unghiul  $\alpha = AOB$ , (Fig. 150), cînd în punctul  $O$ , care ar reprezenta proiecția

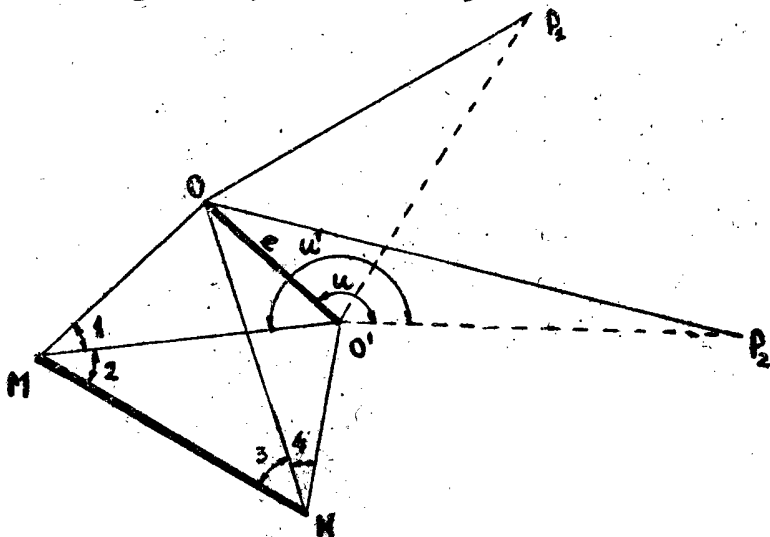


Fig. 149.

axelor unui turn, se poate face stație, însă din cauza pereților înconjurători, nu pot fi vizate punctele A și B, adică nu poate fi măsurat unghiul  $\alpha$  decât prin centrarea unghiurilor.

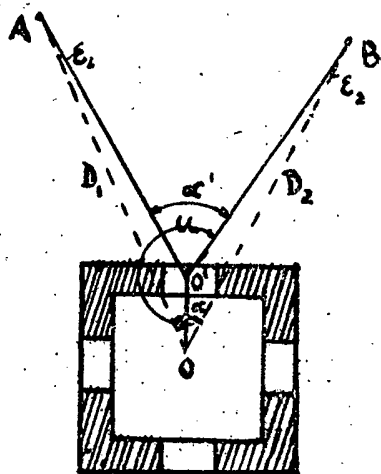


Fig. 150.

Din acest motiv sîntem nevoiți a alege un alt punct de stație, din care să putem arunca vize către A și B, urmînd apoi a face centrarea unghiurilor.

Punctul de stație pe care îl alegem ( $O''$ ) va fi pe una din ferestrele turnului, arătat în secțiunea orizontală în figura noastră.

Unghiul pe care îl măsurăm noi este unghiul  $\alpha'' = \angle A'O''B$ , iar elementele de centrare sînt  $O'O'' = e$  și  $\angle O'O''B = u$ .

Acum deplasarea  $e$  se găsește în interiorul unghiului  $\alpha$  și avem:

$$\alpha = \alpha'' - (\epsilon_1 + \epsilon_2) = \alpha'' - \Delta\alpha''$$

$$\epsilon_1'' = \rho'' e \frac{\sin(u - \alpha')}{D_1}; \quad \epsilon_2'' = \rho'' e \frac{\sin u}{D_2}$$

sau:

$$\Delta\alpha'' = \rho'' e \left[ \frac{\sin(u - \alpha')}{D_1} + \frac{\sin u}{D_2} \right]$$

Si în acest caz, dacă din punctul  $O'$  nu pot fi măsurate elementele de centrare  $e$  și  $u$ , adică nu putem viza pe  $O$ , se va lua pe teren, la o depărtare de cîteva sute de metri dela turn, o bază  $MN$ , din ale căreia puncte extreme ( $M$  și  $N$ ) pot fi vizate atît  $O$  cît și  $O'$ .

Se vor măsura unghiurile  $\psi_1, \psi_2, \psi_1', \psi_2'$  (Fig. 151), precum și lungimea bazei  $MN$ , apoi prin calcule trigonometrice vor fi determinate elementele  $e$  și unghiul  $u$ .

Măsurînd apoi, din punctul de stație  $O''$ , unghiul  $\rho''$ , se va obține al doilea element de centrare  $U$ , din relația:

$$U = \rho'' + \rho'''$$

Cu aceste elemente și cu unghiul  $\alpha''$  măsurat, vom putea afla valoarea  $\alpha$ , care ne interesează.

Dacă în stația excentrică  $O''$  nu se măsoară unghiuri, ci direcții (problemă ce urmează a fi tratată în cadrul acestui cap. la punctul 9), problema poartă denumirea de centrarea direcțiilor și va trebui să se facă centrarea fiecărei direcții separat.

Fig. 151.

Fie O punctul unde ar trebui să se facă stație și O' punctul de stație excentrică, având elementele de centrare e și u (Fig. 152), problema care se pune este de a afla orientarea dreptelor OP<sub>1</sub> și OP<sub>2</sub>, adică  $\nu_1, \nu_2$  considerând ca zero direcția dreptei OO'.

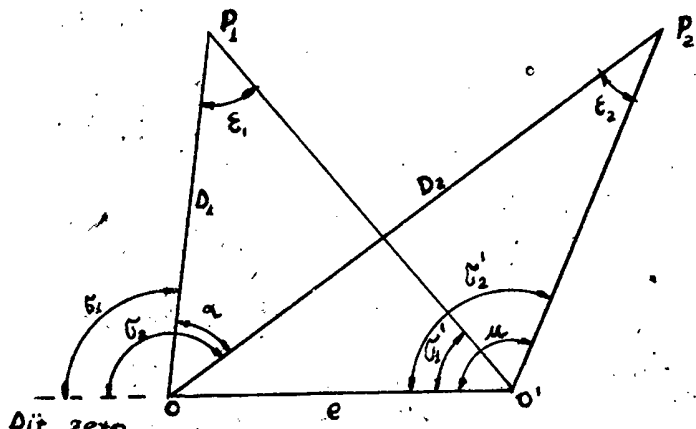


Fig. 152.

Noi măsurăm însă orientările =  $\nu_1', \nu_2'$

Se poate scrie:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \nu_1' + \Delta \nu_1 \\ \nu_2 &= \nu_2' + \Delta \nu_2 \\ \Delta \nu_1 &= \epsilon_1 = \rho'' e \frac{\sin \nu_1'}{D_1} \\ \Delta \nu_2 &= \epsilon_2 = \rho'' e \frac{\sin \nu_2'}{D_2} \\ \nu_1 &= \nu_1' + \rho'' e \frac{\sin \nu_1'}{D_1} \\ \nu_2 &= \nu_2' + \rho'' e \frac{\sin \nu_2'}{D_2} \end{aligned}$$

și în mod analog pentru mai multe direcții.

Dacă am voi să determinăm valoarea unghiului ( $\alpha$ ) dintre cele două direcții OP<sub>1</sub>, OP<sub>2</sub>, atunci :  $\alpha = \nu_2' - \nu_1'$ .

Observațiuni.

O stație excentrică trebuie să îndeplinească următoarele condițiuni:

- a) Stația excentrică nu trebuie să fie departe de punctul matematic pentru a nu avea erori mari. Pentru triangulația de ord. I este recomandată excentricitate maximă 20m.
- b) Stația excentrică să fie comodă pentru ca observațiunile să poată fi făcute cu ușurință, astfel ca precizia la măsurarea unghiurilor vîrfurilor triangulației să fie sensibil aceeași.

Protocol de vize și calcule.

$e = 5,81 \text{ m}, \quad D = 200 \text{ m}, \quad D = 200 \text{ m}.$

Vize	Citiri						Media			Unghiul	$\frac{\sin(u-d)}{D_1}$	$\frac{\sin u}{D_2}$	$\rho'' = e$	$\Delta\alpha$			$d = d' + d''$		
	Vernier I		Vernier II		I + II			0	I					II	0	I	II		
	0	I	II	0	I	II	0											I	II
0'	0			180	00	00	00	00	00										
P <sub>1</sub>	38	45	20	218	45	30	38	45	25	$u = 99^\circ 32' 35''$	0,0028	0,0049	3698760,8	7	57	90	68	51	50
P <sub>2</sub>	99	32	40	279	32	30	99	32	35	$u' = 60^\circ 59' 10''$									

In acest protocol, dat ca exemplu, valoarea unghiului  $u$  și  $\alpha$  a fost găsită prin metoda simplă cu citire la ambele verniere.

Evident că în cazul triangulației valoarea acestor unghiuri va fi găsită prin măsurarea lor după una din metodele arătate, pentru a da precizia convenită, adică prin metoda repetiției, reiterației sau Schreiber.

Ca atare, protocolul utilizat în aceste metode va fi completat cu rubricile necesare pentru determinarea lui  $\Delta\alpha$  și  $\alpha$ .

9. Metoda citirii direcțiilor sau orientarea vizelor.

După cum se va vedea, în foarte multe cazuri, în calculele cari intervin în rezolvarea diferitelor probleme de planimetrie, avem nevoie de așa numită orientare a unei direcții oarecare, adică de a afla unghiul format de această direcție cu direcția axei  $x$  a sistemului de coordonate ales.

Cu alte cuvinte, avind sistemul de axe de coordonate arătat mai jos și punctul de stație  $O$  (Fig. 153), se cere să măsurăm orientările dreptelor  $OP_1, OP_2, OP_3, OP_4$ .

Orientările acestor drepte sînt unghiurile măsurate de la paralela la  $x$ , dusă în punctul  $O$ , pînă la direcția respectivă.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

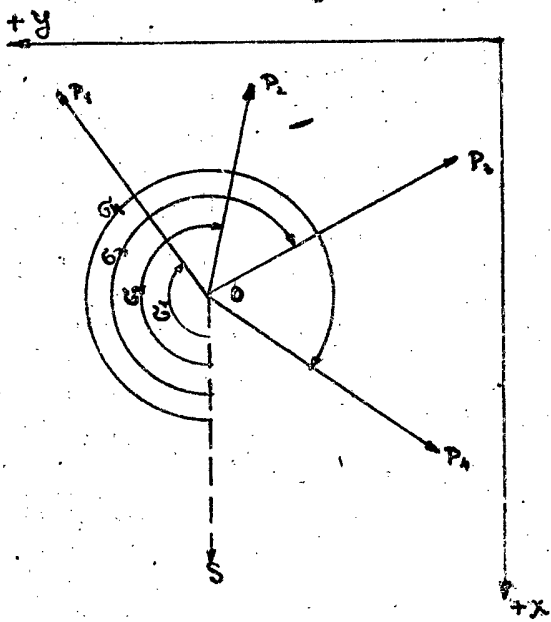


Fig. 153.

Prin urmare, pe teren, așezind instrumentul în stație, ar urma să măsurăm toate unghiurile  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  după ce am determinat paralela meridianului geografic (OS) în punctul respectiv, de la care să măsurăm unghiurile.

Practic însă orientările se măsoară astfel:.

Cu zero limbului gradat aflat într-o direcție oarecare, de exemplu OA (Fig. 154), se fac citirile  $C_1, C_2, C_3, C_4$ , fără a ne preocupa de direcția OA.

Dar diferențele între orientările  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  pe care vom alege să le determinăm și citirile  $C_1, C_2, C_3, C_4$ , respective, au o valoare constantă egală cu unghiul  $\theta$ , care este numit unghi de orientare.

Având una sau mai multe direcții de orientare cunoscute, scăzând din această orientare citirile făcute, pentru acele direcții, se determină unghiul de orientare  $\theta$ , cu ajutorul căruia apoi pot fi găsite orientările direcțiilor noastre.

De exemplu, presupunând că am avea de făcut stație într-un punct O și se cere să măsurăm orientările dreptelor  $OP_1, OP_2, OP_3, \dots, OP_n$ .

Se așază teodolitul în stație (în punctul O) și se fac citirile, pentru toate direcțiile, trecând toate aceste citiri în protocolul de vize, făcând apoi media citirilor la cele două verniere (I și II) și pentru ambele poziții ale lunetei, adică cu cercul vertical la stînga și cercul vertical la dreapta.

Apoi cunoscînd orientările unor drepte (exemplu ale dreptei

$OP_1, OP_2, OP_3$ ), scădem din orientările acestor drepte citirile făcute pentru ele, se obține unghiul de orientare.

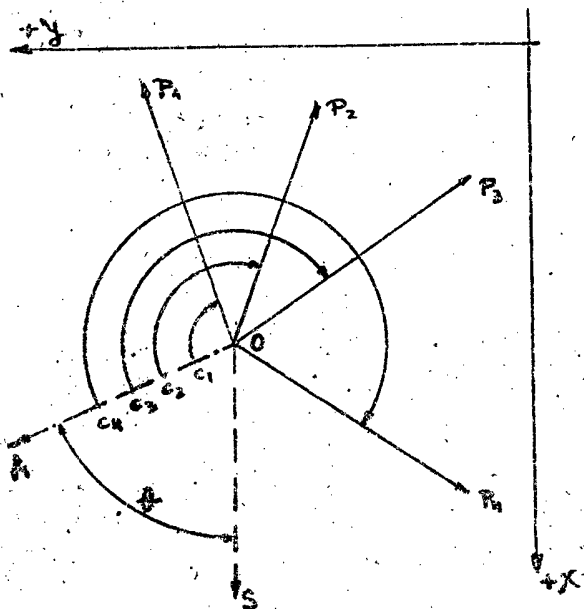


Fig. 154.

- 223 -

In exemplul dat in protocolul de vize ce urmează avind orientările  $OP_1$ ,  $OP_2$ ,  $OP_{10}$ , am găsit unghiul de orientare de  $10^{\circ} 20' 32''$  pentru  $OP_1$ , de  $10^{\circ} 20' 36''$  pentru  $OP_2$  și  $10^{\circ} 20' 31''$  pentru  $OP_{10}$ .

Se ia media aritmetică a valorilor găsite pentru unghiul de orientare, adică  $10^{\circ} 20' 33''$ , pe care adaugându-o la citire, avem orientările cerute.

Protocolul de vize.

Vize	De la	Citiri						Media			Media			Unghiul			Orientările			Obs.
		Vernier I			Vernier II			I - II			C.V.S. C.V.D.			de orientare						
		0	I	II	0	I	II	0	I	II	0	I	II	0	I	II	0	I	II	
$OP_1$		30	20	10	210	20	20	30	20	15				10	20	32	40	40	47	
$OP_2$		51	30	20	231	30	30	51	30	25				10	20	33	61	50	58	
$OP_3$		84	28	20	264	28	20	84	28	20				10	20	33	94	48	53	
$OP_4$		152	48	15	352	48	25	152	48	20				10	20	33	163	03	53	
$OP_5$		164	52	30	344	52	20	164	52	25				10	20	36	175	13	01	
$OP_6$		189	56	30	9	56	20	189	56	25				10	20	33	200	16	58	
$OP_7$		242	33	20	62	33	20	242	33	20				10	20	33	252	53	53	
$OP_8$		298	42	30	118	42	40	298	42	35				10	20	33	309	03	08	
$OP_9$		345	24	20	165	24	30	345	24	25				10	20	33	355	48	58	
$OP_{10}$		352	40	20	172	40	10	352	40	15				10	20	31	2	09	46	

In acest protocol nu au mai fost trecute mediile pentru ambele poziții ale lunetelor, considerind că am făcut citiri numai cu luneta în poziție cu cercul vertical la stînga, așa că s-au luat numai mediile vernier I + II

Orientările subliniate sînt cele cunoscutе, din diferența cărora și citirile respective, am aflat valorile subliniate pentru unghiul de orientare.



- 10. Măsurarea unghiurilor verticale.

Cînd se pune problema de a măsura unghiuri verticale, adică unghiul format de planul de viză cu planul orizontal, ne sîrvin de cercul vertical al teodolitelor care este solidar cu luneta.

Unghiul vertical  $h$  este socotit dela orizont pînă la axul  $XX$  al lunetei, iar suplimentul său, pînă la  $90^\circ$ , este unghiul  $Z$ , numit unghiul zenital.

Așa de exemplu, dacă luneta ia poziția  $LL'$  (Fig. 155), unghiul vertical  $h = HCL'$ , iar  $h + Z = 90^\circ$ .

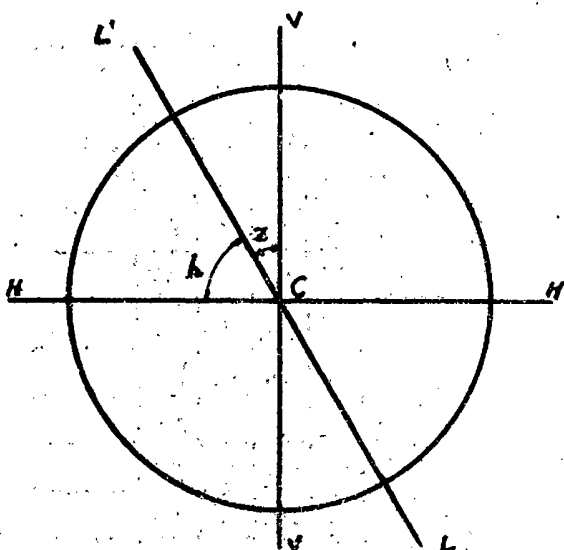


Fig. 155.

alidă, prin citire la ambele verniere.

c) Planul de viză pentru măsurarea unghiului vertical trebuie să treacă prin axa YY.

Această eroare este analoagă cu excentricitatea lunetei, așa că eliminarea ei se face prin citirea unghiului în cele două poziții ale lunetei, odată cu cercul vertical la stînga și a doua oară cu cercul vertical la dreapta.

În ceea ce privește felul măsurătorilor de unghiuri verticale, se poate face următoarea clasificare:

- a) Măsurarea simplă a unghiului vertical,
- b) Măsurarea dublă a unghiului vertical,

Condițiunile teoretice care trebuiesc îndeplinite la măsurarea unghiurilor verticale sînt:

a) Axul YY să fie perpendicular pe cercul vertical. Această condiție este la discreția fabricii constructoare, eroarea putînd fi comisă la montarea instrumentului și odată comisă, ea nu mai poate fi eliminată de către noi.

b) Axul YY să treacă prin centrul (C) al cercului vertical (în fig. 155 axul YY coincide cu punctul c).

În caz că există eroare, ea poate fi eliminată, fiind asemănătoare cu eroarea excentricitate a cercului

- 225 -

respective a unghiului zenital.

In prima metodă măsurarea unghiului se face simplu prin citirea la ambele verniere, luneta fiind în poziție normală, adică cu cercul vertical la stînga și luînd media citirilor.

In măsurătoarea dublă se disting însă două cazuri și anume:

- I. Măsurarea dublă fără control cu nivele și
- II. " " " cu " " "

#### Cazul I.

Atunci, cînd axul ZZ este perfect vertical și rămîne vertical în tot timpul măsurătorilor.

In acest caz cu luneta inclinată se vizează un punct oarecare A.

Se fac citirile respective la cele două verniere. Dar, datorită faptului, că zerurile vernierelor I și II, atunci cînd luneta este orizontală, nu coincid cu exactitate cu diviziunile zero, respective la vernierul II cu diviziunea  $180^\circ$ , ale cercului vertical, citirile făcute de noi vor fi eronate și în loc să avem valoarea adevărată a unghiului  $h$  - noi găsim  $h - \Delta\epsilon$ . (Fig. 156).

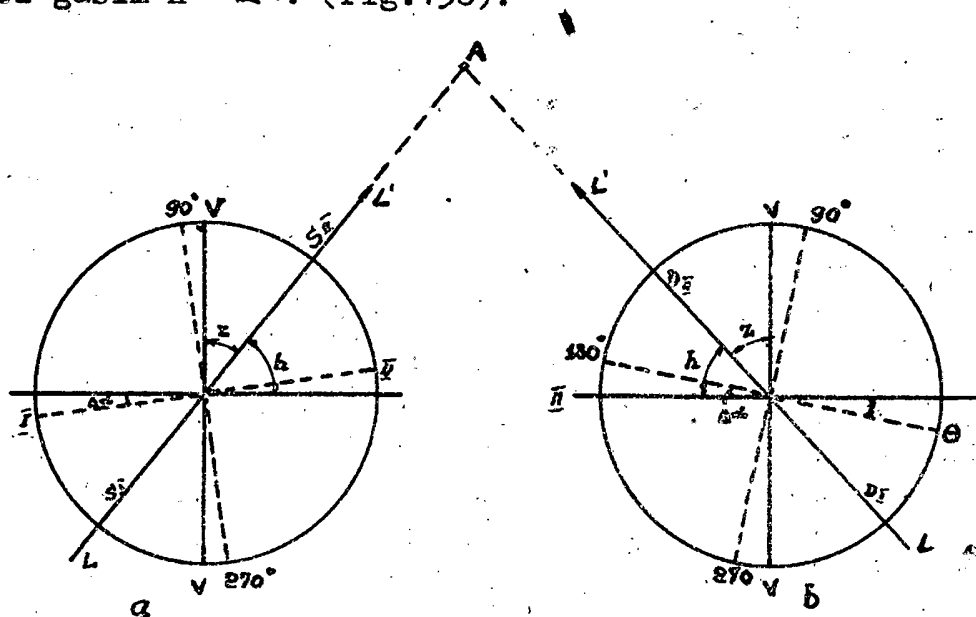


Fig. 156.

unghiul  $h$  este afectat de eroarea  $\Delta\alpha$ .

Cu luneta în poziție normală (Fig. 149, a), cu cercul vertical la stânga se fac la cele două verniere citirile  $S_x$  și  $S_{II}$ , a căror medie este:

$$S = \frac{S_x + S_{II}}{2}$$

Unghiul vertical este : (1)  $h = S - O \pm 360^\circ$   
Unde  $O$  este diviziunea cercului vertical din dreptul lunetei.

Rotind teodolitul cu  $180^\circ$  în jurul axului  $VV$ , dînd luneta peste cap și vizînd acelaș  $A$ , vom fi în situația din Fig. 164 b, în care poziție, prin darea lunetei peste cap s-a rotit aceasta în jurul axului  $YY$  cu unghiul  $180^\circ - 2h$ .

Acum luneta are cercul vertical la dreapta. La cele două verniere citim  $D_x$  și  $D_{II}$  iar unghiul  $h$  este:

$$h = 180^\circ + O - D = 360^\circ \text{ unde } D = \frac{D_x + D_{II}}{2}$$

Insumînd relațiile (1) și (2) și ținînd cont de faptul că  $Z + h = 90^\circ$ , obținem:

$$2h = 180^\circ + S - D = 180^\circ - (D - S)$$

$$\text{Deci: } h = 90^\circ - \frac{D - S}{2}$$

$$Z = 90^\circ - h = \frac{D - S}{2}$$

$$O = \frac{D + S}{2} - 90^\circ$$

Așa că pentru a nu avea eroarea  $\Delta\alpha$  se va corecta aceasta prin mișcarea vernierelor cu citimea  $360^\circ - O = \Delta\alpha$ .

Luăm un exemplu numeric pe care îl trecem în protocolul de vize.

Vize	De la	Poziția cercului vertical	Cercul vertical						Media			Unghiul zenital și vertical	Eroare de indice	Obs.
			Vernier I			Vernier II			I + II					
			0	I	II	0	I	II	0	I	II			
0	A	S	4	35	00	184	39	00	4	37	00	$z = 85^\circ 20' 45''$		
		D	175	21	30	355	19	30	195	20	30	$h = 4^\circ 30' 15''$	$1' 15''$	
												$O = 359^\circ 58' 45''$		

Eroarea de indice este dată de diferența  $360^\circ - 359^\circ 58' 45''$ .

- 227 -

Cazul II, cînd verticalitatea axului ZZ este constatată cu o nivelă, în timpul operațiunilor, căutîndu-se ca bula de aer a libelei să fie în permanență între repere, sau ținînd cont de eventualele ei deplasări și luîndu-le în calculele ce urmează după măsurătoare.

Nivela de control se găsește pe cercul alidat al cercului vertical, adică pe cercul pe care se află vernierele cercului vertical.

Această nivelă de control trebuie să îndeplinească următoarele condițiuni și anume: tangenta la marca ei să fie perpendiculară pe axul de rotație ZZ.

Rectificarea ei este identică cu a nivelelor de pe cercul orizontal, adică eroarea constatată se anulează jumătate din șuruburile de calaj și jumătate prin șuruburile dela montura libelei.

## CAP. IV.

MASURAREA INDIRECTA A DISTANTELOR.A. Principii și metode.1. Generalități și principii fundamentale.

Măsurarea lungimilor în mod direct, adică prin parcurgerea lor efectivă, așa cum s-a descris la Cap. II., nu poate fi utilizată cu succes decât în cazul când terenul nu este prea accidentat, fiindcă în acest caz măsurătoarea ar fi expusă la erori mari, ba chiar uneori imposibil de efectuat, cum este cazul când trebuie măsurată distanța între două puncte inaccesibile din cauza unui obstacol interpus.

În aceste cazuri sîntem nevoiți a recurge la o altă metodă, pentru a măsura distanțele și anume la măsurarea lor în mod indirect, servindu-ne de instrumente cari ne permit a găsi lungimea respectivă fără a o parcurge.

Metoda de măsurare indirectă a lungimilor poartă denumirea de Tachimetrie sau Stadimetrie.

Ea a fost inventată de Italieni și apoi adoptată universal în cazul arătat mai sus, precum și atunci cînd avem de făcut lucrări expeditivă cari nu cer o precizie prea mare, cum ar fi ridicările de detalii, datorită faptului că operațiunile tachometrice sînt rapide și în plus ne dau în același timp și planimetria și nivelmentul regiunii. La baza acestei metode stă următoarea observațiune:

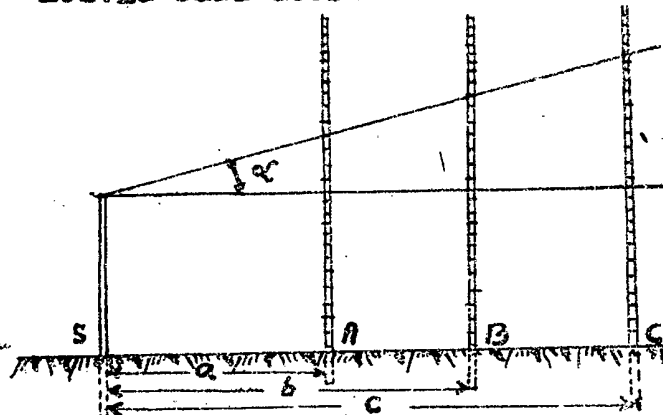


Fig. 157.

dacă se deplasează o miră parlantă față de un operator aflat în punctul de stație S, numărul diviziunilor de pe miră cuprins într-un unghi constant  $\alpha$  va fi cu atât mai mare, cu cât distanța între punctul S și punctul unde se găsește mira va fi mai mare. Adică numărul de diviziuni cuprins între razele cari determină unghiul  $\alpha$  este proporțional cu distanța

de la punctul de stație la punctul unde este instalată mira.

Ca atare, pentru a putea determina distanța, ceea ce ne interesează, având diviziunile de pe miră, nu ne rămâne decât de a găsi un coeficient  $K$ , cu care, înmulțind numărul diviziunilor citite, se obține distanța.

Ca un exemplu, dacă am avea un carton,  $a b$

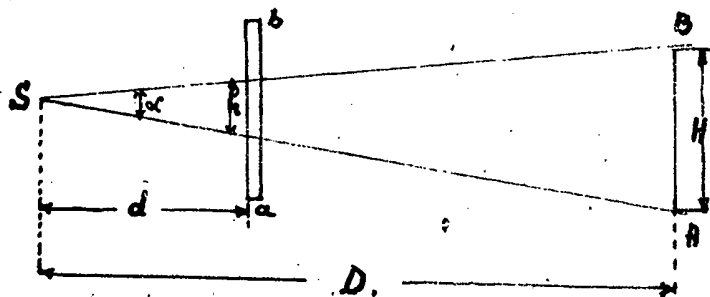


Fig. 158.

(Fig. 158), prevăzut cu o deschizătură de înălțime  $h$  și îl așezăm normal pe raza vizuală a unui observator aflat în punctul  $S$ , cunoscând distanța  $d$ , la care se află cartonul precum și înălțimea  $h$  a deschizăturii, ca și porțiunea  $H$  citită pe mira  $AB$ , putem determina distanța  $D$  din relația:

$$D = \frac{H}{h} d.$$

Acesta este principiul tachimetriei, care ne cere să cunoaștem cele trei elemente  $H$ ,  $h$ ,  $d$ , pentru a afla lungimea care ne interesează.

Problema care se pune acum este de a ne forma acel unghi constant  $\alpha$ , adică de a avea elementele  $d$  și  $\alpha$  de mai sus, ceea ce se realizează prin firele reticulare  $SS$  și  $s's'$ , aflate pe placa reticulară a lunetei (Fig. 159).

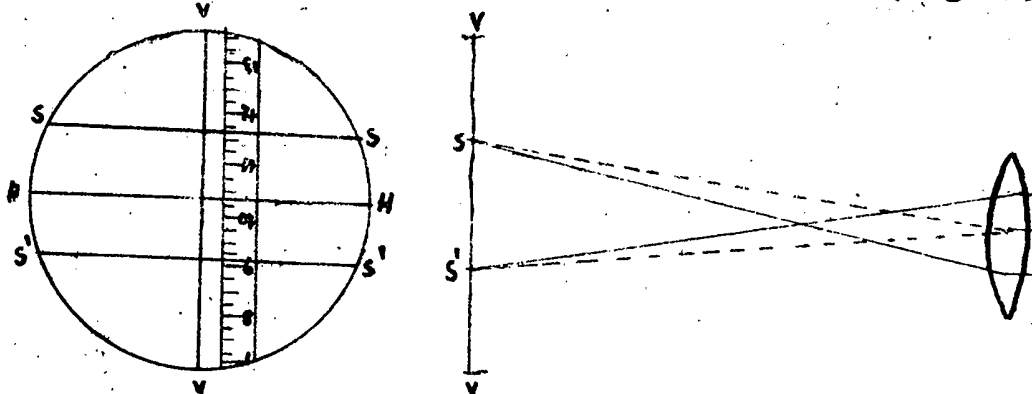


Fig. 159.

Aceste fire poartă denumirea de fire stadimetrice.

Pentru cel de al treilea element  $H$  se așază mira parlantă, a căreia descriere o dăm mai jos, în punctul pînă la care voim să măsurăm distanța și facem citirea gradațiunilor ei aflate în dreptul firelor stadimetrice  $SS$  și  $s's'$ .

Pentru control citirile se fac atât în dreptul firelor stadimetrice cât și în dreptul firului orizontal (HH) al firelor reticulare.

În exemplul din Fig.159 la firul de jos citim  $S' = 86$ , la mijloc 102, iar la firul de sus  $S = 118$ .

Dață mira este ținută vertical, va trebui ca  $\frac{S + S'}{2} = 102$ , adică:

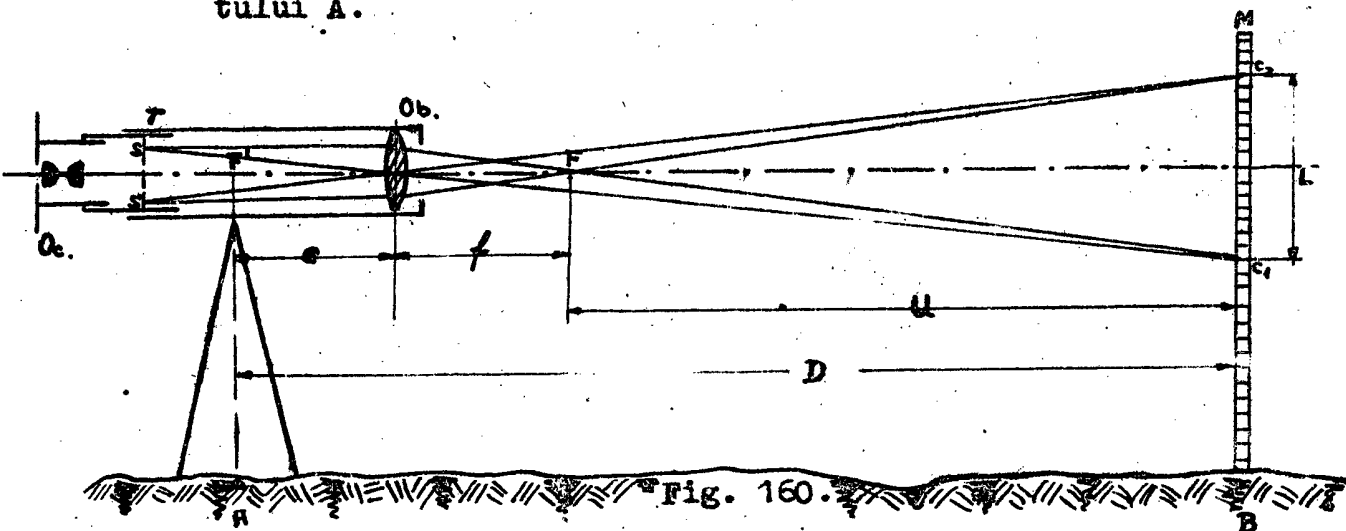
$$\frac{118 + 86}{2} = 102.$$

Deci în cazul din Fig.159 mira a fost ținută întradevăr verticală.

## - 2. Stabilirea relației care ne dă distanța.

Având de măsurat distanța între punctele A și B, se așează instrumentul în punctul A (Fig.160) în care se face stație, iar în punctul B, punct de viză, se așează în poziție verticală o miră parlantă (M).

Tachimetrul este așezat în punctul de stație A, astfel, ca centrul său ( $F'$ ) să fie pe verticala punctului A.



Razele de lumină dela diviziunile  $C_1$  și  $C_2$  ale mirei, trecând prin focarul  $F$ , ajung la lentila obiectivului ( $O_b$ ) și apoi conduse la reticulul  $r$  și la ocularul  $O_c$ .

Cu ajutorul ocularului vom citi acele diviziuni  $C_1$  și  $C_2$  în dreptul firelor stadimetrice  $S$  și  $S'$  de pe placa reticulară.

Cu notațiile din figură, unde  $e$  este distanța dela axul vertical al aparatului la obiectivul său,

$f$  distanță focală și  $U$  distanța dela focarul  $F$  la punctul  $B$  și să notăm distanța între firele stadimetrice cu  $\rho$ , iar diferența între citirile  $C_1$  și  $C_2$  ale mirei cu  $L$ , adică

$$L = C_2 - C_1 \text{ avem:}$$

$$\frac{L}{\rho} = \frac{U}{f} \text{ sau: } U = \frac{f}{\rho} L = k_1 L$$

$k_1$  fiind o constantă, adică:  $k_1 = \frac{f}{\rho}$

Dar distanța care ne interesează pe noi este:

$$D = U + e + f.$$

In această formulă  $e$  și  $f$  sînt constante, așa că putem nota:  $e + f = k_2$  și relația care ne dă distanța este:

$$D = k_1 L + k_2$$

Aceste valori  $k_1$  și  $k_2$  sînt constantele aparatului, ele fiind scrise pe cutia fiecărui aparat.

In mod obișnuit, firele stadimetrice sînt dispuse în așa fel, în cît  $f = 100$ , adică să avem  $k_1 = 100$ , această în scopul comodității și ușurinței lucrărilor.

In ceea ce privește constanta  $k_2$ , aceasta la instrumentele moderne este redusă la zero prin introducerea unei lentile colectoare între ocular și obiectiv, constituind sistemul care poartă numele lui Porro (ofițer piemontez), iar luneta este numită lunetă analitică.

Cu ajutorul sistemului Porro, luneta va avea focarul în interiorul lunetei în  $F'$  în loc de a fi în punctul  $F$ .

In mod schematic luneta analitică este reprezentată în Fig. 161, unde prin introducerea lentilei analitice  $A_2$ , focarul este mutat în  $F'$  adică în punctul aflat pe verticala punctului în care se face stație.

Notînd cu  $a$  distanța între cele două lentile (lentila analitică și lentila obiectivului), constanta  $k_2$  din formula distanței  $D = k_1 L + k_2$  este zero. Ea este dată de relația:

$$k_2 = e - \frac{f(a-f')}{f+f'} = a \text{ unde } f$$

este distanța focală înainte de a fi introdusă lentila in-

termediară  $A_2$ ,  $f'$  este distanța focală redusă prin introducerea lentilei analitice.

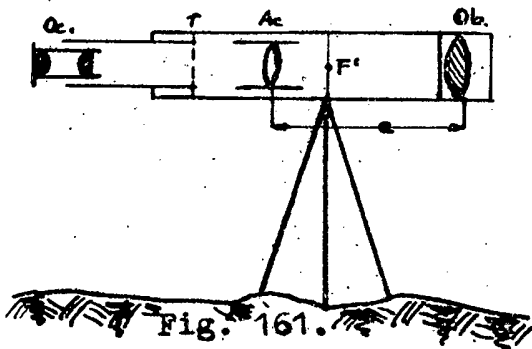


Fig. 161.



- 232 -

Bazat pe aceste considerente, profesorul Tintier a stabilit valori pentru  $f$ ,  $f'$ ,  $a$  și  $e$ , cari au constituit date constructive pentru instrumente tachimetrice.

Astfel el a găsit:

$$f = 345 \text{ mm}, \quad f' = 126 \text{ mm}, \quad a = 237 \text{ mm}, \quad e = 163,7 \text{ mm}.$$

Având instrumente cu lentilă analitică pentru a afla distanța între două puncte, se va înmulți  $L$ , adică diferența între citirile pe miră, făcute în dreptul celor două fire tachimetrice, cu constanta  $k_1$ , care este egală cu 100, adică  $D = 100 L$ .

Cu alte cuvinte, fiecare centimetru de pe miră ar reprezenta un metru distanță pe teren.

### - 3. Determinarea constantelor $k_1$ și $k_2$ .

Dacă pe cutia instrumentului nu am avea trecute valorile constantelor  $k_1$  și  $k_2$ , cari intră în formula de calcul a distanței măsurate tachimetric sau în cazul cînd placa reticulară a fost deteriorată, ori instrumentul a fost în reparație și părțile constitutive ale lunetei, datorită împrejurărilor impuse, au fost deplasate, sîntem nevoiți a determina aceste constante ( $k_1, k_2$ ) denumite coeficienți stadimetrici.

Coeficientul  $k_2$ , care știm că este  $k_2 = f + e$ , poate fi determinat direct și anume: Distanța focală  $f$  este  $f = d + \frac{d^2}{2r}$ , formulă în care  $r$  reprezintă grosimea lentilei dela obiectiv, iar  $d$  distanța dela virful acestei lentile la focar.

Acest  $f$  poate fi determinat scoțînd lentila obiectivului afară și cu ajutorul razelor solare se află focarul, deci și distanța  $d$ , la care adăugînd jumătatea grosimei  $r$  a lentilei, s-a obținut  $f$ .

În ceea ce privește valoarea lui  $e$ , aceasta se găsește măsurînd distanța dela obiectiv la punctul de stație.

Pentru determinarea coeficientului  $k_1$ , sîntem nevoiți a face o serie de măsurători asupra unor distanțe măsurate dinainte, adică valoarea lui va trebui să fie aflată în mod indirect.

Deci, dacă se cunosc distanțele  $D_1, D_2, \dots, D_n$ , cu ajutorul tachimetrului facem citirile pe miră,  $L_1, L_2, \dots, L_n$ , la distanțele de mai sus și atunci obținem  $n$  ecuații cu o singură necunoscută  $k_1$ :

$$\begin{aligned}
 D_1 &= k_1 L_1 + k_2 & k_1 &= \frac{D_1 - k_2}{L_1} \\
 D_2 &= k_1 L_2 + k_2 & k_1 &= \frac{D_2 - k_2}{L_2} \\
 D_3 &= k_1 L_3 + k_2 & k_1 &= \frac{D_3 - k_2}{L_3} \\
 &\vdots & & \vdots \\
 D_n &= k_1 L_n + k_2 & k_1 &= \frac{D_n - k_2}{L_n}
 \end{aligned}$$

Cea mai probabilă valoare a lui  $k_1$  se obține luând media valorilor rezultate din aceste calcule:

$$k_1 = \frac{\frac{D - k_2}{L}}{n}$$

Exemplu numeric pentru determinarea lui  $k_1$ :

$$k_2 = e + f = 0,344.$$

n	D	L	$D - k_2$	$\frac{k_1 = \frac{D - k_2}{L}}$	V	VV	Observ.
1	40	0,4630	39,656	85,65	-0,11	0,0121	$\mu = \Delta \pi \sqrt{\frac{v \cdot v}{n(n-1)}}$
2	60	0,6975	59,656	85,53	+0,01	0,0001	$\mu = 0,025$
3	84	0,9780	83,656	85,54	0,00	0,0000	$\kappa_2 = 85,54^2 \cdot 0,025$
4	104	1,2120	103,656	85,53	+0,01	0,0001	$M = 85 \frac{3,23}{6}$
5	124	1,4453	123,656	85,52	+0,02	0,0004	$M = 85,54$
6	144	1,6305	143,656	85,46	+0,08	0,0064	
					$[v] = 0$	0,0161	
						$[vv]$	

În afară de modul cum am determinat pe  $k_1$  și  $k_2$  mai sus, aceste constante pot fi determinate simultan făcând o serie de  $n$  măsurători asupra unor distanțe  $D_1, D_2, D_3, \dots, D_n$  și făcând citirile  $L_1, L_2, \dots, L_n$ .

pe miră, se vor obține astfel ecuații n cu două necunoscute, adică:

$$D_1 = k_1 L_1 + k_2$$

$$D_2 = k_1 L_2 + k_2$$

$$D_3 = k_1 L_3 + k_2$$

⋮

$$D_n = k_1 L_n + k_2$$

Sistem care prin ecuațiile normale ale lui Gauss ne vor da valorile lui  $k_1$  și  $k_2$ .

#### - 4. Măsurarea distanței cu viză înclinată.

În exemplul anterior s-a măsurat distanța între tachimetru și miră, în cazul când luneta a fost orizontală, iar mira perfect verticală.

Se pune problema de a afla distanța atunci când trebuie să dăm viză cu lunetă înclinată, ca în Fig. 162.

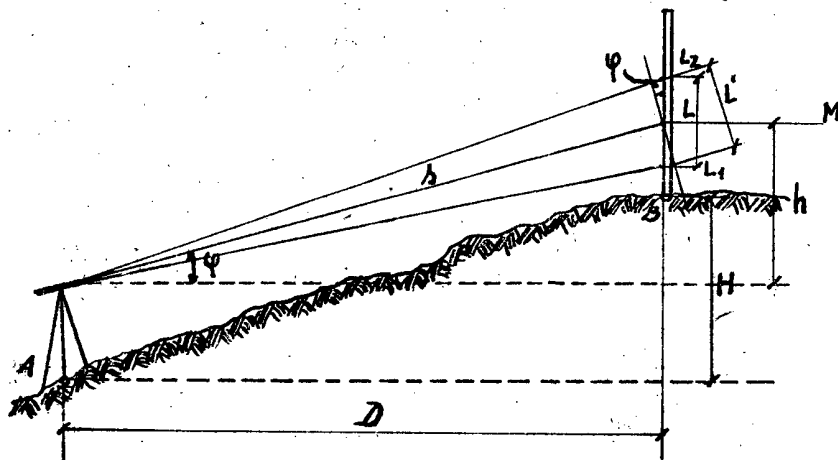


Fig. 162.

Raza mijlocie a lunetei este CM, adică în dreptul intersecției fi-relor reticulare citim pe mira așezată vertical în punctul B citimea M.

În dreptul firelor stadimetrice se citește pe miră  $L_1$  și  $L_2$ , diferența între aceste citiri este  $L$  adică:

$$L = L_2 - L_1.$$

Raza mijlocie face

cu orizontul un unghi de înclinare  $\psi$ .

Referindu-ne la figura de mai sus, avem:  
 $D = s \cos \psi$  unde  $s$  este lungimea razei mijlocii,

Dar, ducând în M o perpendiculară la CM, aceasta perpendiculară, care face cu mira un unghi  $\psi'$ , va fi de lungime  $L'$  între firele stadimetrice, ori din cele stabilite anterior, avem:

sau

$$s = k_1 L' + k_2$$

$$D = k_1 L' \cdot \cos \psi + k_2 \cdot \cos \psi.$$

- 235 -

Însă:  $L' = L \cdot \cos \varphi$ , prin urmare:  $D = k_1 L \cdot \cos^2 \varphi + k_2 \cos \varphi$ .

Atunci când unghiul  $\varphi$  este egal cu zero, formula care ne dă distanța  $D$  se reduce la  $D = k_1 L + k_2$ , adică ceea ce am stabilit anterior pentru cazul când luneta este orizontală.

După cum vom vedea în altă parte, se pot determina  $h$  și  $H$ , cari reprezintă:  $H$  diferența de nivel între punctele  $B$  și  $A$ , iar  $h$  este înălțimea lui  $M$  față de nivelul la care se găsește luneta.

Elementele  $D$  și  $h$  sînt așa numite elemente tachimetrice.

Pentru luneta analitică, formula generală care dă pe  $D$ , așa cum s-a arătat, este  $D = k L$ , iar pentru cazul măsurării distanței cu luneta înclinată este  $D = k L \cdot \cos^2 \varphi$ .

- 5. Măsurarea distanței prin viză înclinată și mira perpendiculară pe axul optic al lunetei.

Analog cu problema tratată anterior, măsurăm distanța cu luneta înclinată, însă mira este ținută perpendicular pe direcția lunetei.

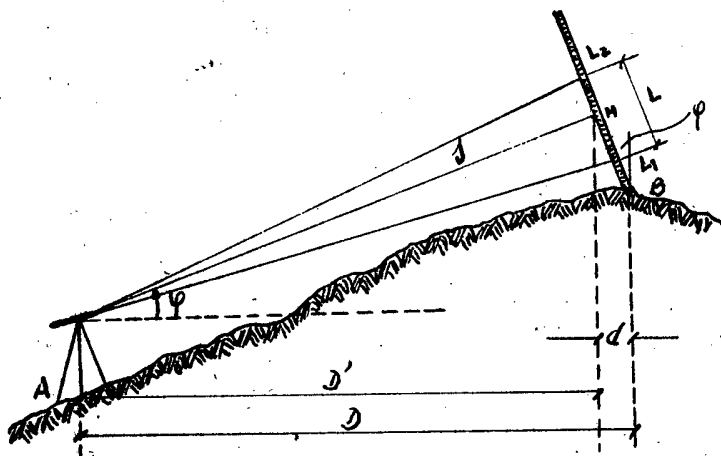


Fig. 163.

Operațiunea de a așeza mira perpendicular pe direcția lunetei, fiind foarte greoasă, această metodă este puțin utilizată.

În Fig. 163 vedem că:

$$D' = s \cdot \cos \varphi$$

$$D = D' + d$$

$$d = MB \cdot \sin \varphi$$

Deci:

$$D = s \cdot \cos \varphi + MB \sin \varphi$$

Însă:

$$s = k + L + k_2$$

Din cele de mai sus rezultă:

$$D = k_1 L \cdot \cos^2 \varphi + k_2 \cos \varphi + MB \cdot \sin \varphi$$

- 6. Determinarea distanței cu lată (miră) orizontală.

Măsurarea optică a distanțelor o putem

face și cu lată orizontală, care față de mira verticală prezintă următoarele avantaje:

- a) Se elimină erorile datorite înclinării mirei verticale, fiindcă lata orizontală se pune cu mai multă precizie în stație și mult mai ușor iar în afară de aceasta ea se poate îndrepta, cu mai multă exactitate, perpendicular, pe viza de mijloc (Fig. 164), cu ajutorul unui colimator montat pe lată.
- b) În aceste condițiuni precizia operațiilor este sensibil egală cu precizia măsurării directe a distanțelor.

În ceea ce privește formulele de calcul, ele rămân aceleași, adică:

$$s = k_1 L + k_2$$

$$D = s \cdot \cos \varphi$$

Deosebirea constă și în faptul că măsurătoarea se face cu teodolite obișnuite, înșă teodolite de precizie, cum sînt teodolitul Zeiss sau Wild.

Dînd vize către  $L_1$ ,  $L_2$ , și  $M$  și măsurînd unghiul orizontal  $\alpha$

respectiv  $2d$  și unghiul vertical  $\varphi$ , cu ajutorul cărora se determină distanța  $D$  din formulele de sus sau din cele ce vor fi stabilite imediat mai jos.

Ca un exemplu de lată, întrebuințată în aceste măsurători, vom nota lata de precizie a lui Wild, a căreia lățime fixă  $L$  este 2 m.

Ea este prevăzută cu o nivelă pentru orizontalizarea brațelor și cu un colimator ce servește la așezarea latei perpendicular pe direcția lunetei (perpendicular pe  $s$ ).

Dela teodolit se dă viza și se prinde colimatorul, iar prin colimator se caută centrul obiectivului.

Materialul din care este confecționată această lată este invarul. Cu un teodolit Wild sau Zeiss se vizează și se observă

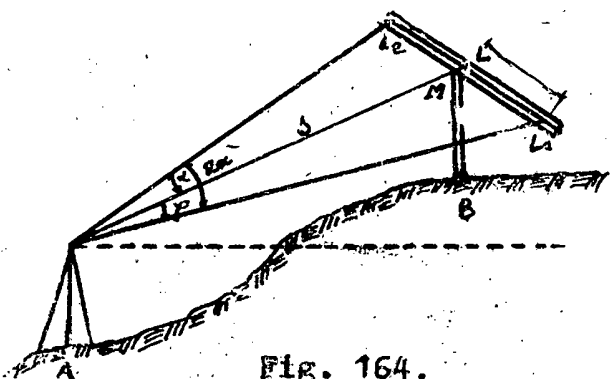


Fig. 164.

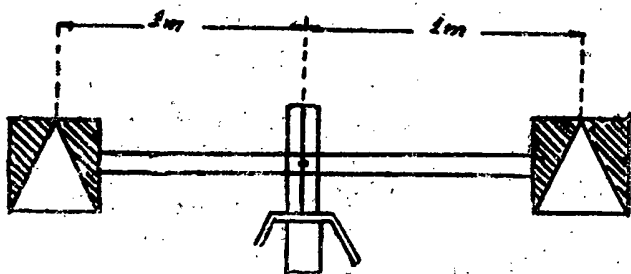


Fig. 165

unghiul  $2\alpha$  respectiv unghiul  $\alpha$ , Fig.166. Se întrebuițează

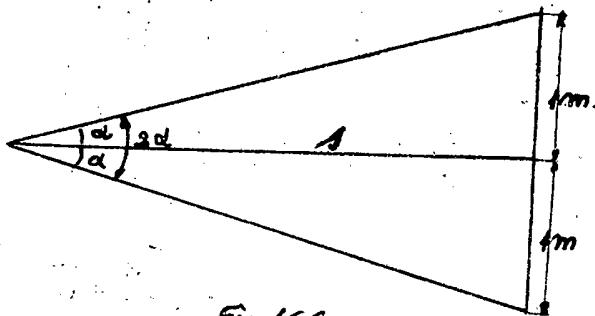


Fig 166

teodolit Wild sau Zeiss pentru că unghiul trebuie măsurat cu precizie, ori precizia dată de teodolitele Zeiss și Wild este de  $1''$ , așa cum s-a arătat la capitolul respectiv.

Din Fig.166 vedem că:

$$S = \frac{1 \text{ m}}{\text{tg } \alpha} = 1 \text{ m} \cdot \text{ctg } \alpha$$

Deci formula de calcul a distanței este:

$$D = S \cdot \cos \gamma \text{ și } S = 1 \text{ m} \cdot \text{ctg } \alpha.$$

Ca observațiune trebuie să amintim că, pentru a avea precizie, nu se vor măsura distanțe prea mari, ci distanțe de maximum 100 m.

- 7. Metoda trigometrică cu miră verticală.

Ca ultima metodă de măsurare indirectă a distanței, dăm metoda trigometrică, în care se dau vize înclinate, măsurându-se unghiuri verticale, unghiurile  $\alpha$  și  $\beta$  Fig.170.

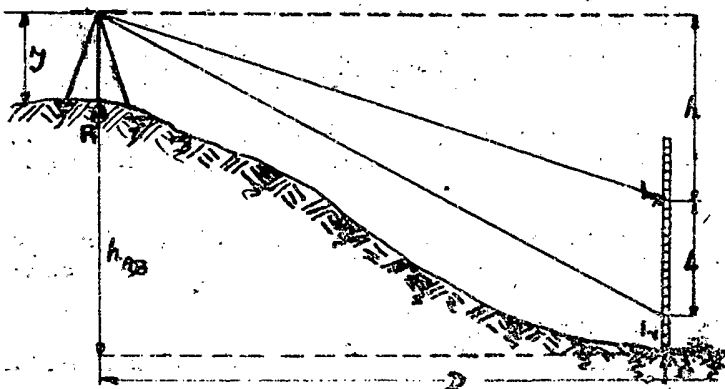


Fig. 167.

Adică se dă viza  $S_1$  măsurând unghiul  $\alpha$  citit la cercul vertical și pe miră se face citirea  $L_1$ , apoi se dă viza  $S_2$ , se măsoară unghiul  $\beta$  și citim pe miră  $L_2$ . Din figură avem:

$$L = L_2 - L_1$$

$$(1) h = D \cdot \text{tg } \beta$$

$$(2) h + L = D \cdot \text{tg } \alpha$$

Introducând valoarea

lui  $h$  din relația (1) în relația (2), se află relația:  $L = D (\text{tg } \alpha - \text{tg } \beta)$ , de unde se deduce relația care ne dă distanța:

$$D = \frac{L}{\text{tg } \alpha - \text{tg } \beta}$$

Iar dacă voim să aflăm diferența de nivel  $h_{AB}$  ea este:

$$h_{AB} = h + L_2 - \mathcal{I}$$

Unde  $h = D \text{tg } \beta$ , iar  $\mathcal{I}$  este înălțimea instrumentului.

Trebuie să facem însă remarcă următoare că, atunci când întrebuițăm această metodă, ca de altfel în toate metodele, la măsurarea distanțelor mari, se va ține cont de a pământului și de refracția luminii.

### - 8. Precizia măsurătorilor optice.

Spre a ne da seama de precizia pe care ne-o dau măsurătorile optice, să facem o comparație cu măsurarea directă a lungimilor, în care știm că eroarea medie a unei singure observațiuni este :  $\Delta D = \sqrt{D}$ , așa cum am stabilit la capitolul respectiv.

Să vedem ce se întâmplă în cazul măsurătorilor optice.

Acum erorile care afectează măsurătorile, adică distanța măsurată, pot proveni din următoarele motive:

- a) Neașezarea perfect vertical a mirei, în cazul măsurării distanțelor cu mira verticală sau a orizontalizării ei în cazul măsurătorilor cu miră orizontală,
- b) Nedeterminarea exactă a unghiului  $\varphi$ , adică eroare la măsurarea acestui unghi,
- c) Constantele  $k_1$  și  $k_2$  pot să nu aibe valorile cu cari lucrăm, datorită unor cauze amintite deja. Adică va trebui ca ele să fie stabilite de noi.

Să presupunem că avem pe  $k_1$ ,  $L$  și  $k_2$  afectate de erori, considerînd constanta  $k_2$  ca fiind egală cu zero.

Ori în măsurătorile optice, după cum știm, formula care ne dă distanța în cazul cînd  $k_2 = 0$  este:

$$D = k_1 L \cos^2 \varphi$$

Diferențiala acestei funcțiuni ne dă:

$$\Delta D = \pm \frac{\partial D}{\partial k} \Delta k \pm \frac{\partial D}{\partial L} \Delta L \pm \frac{\partial D}{\partial \varphi} \Delta \varphi$$

În aceasta relație  $\Delta k$ ,  $\Delta L$ ,  $\Delta \varphi$  pot avea valori pozitive sau negative, motiv pentru care au fost luate ambele semne.

Pentru a scăpa de aceste semne, se ridică la pătrat și se obține:

$$\Delta D = \sqrt{\left(\frac{\partial D}{\partial k} \Delta k\right)^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial L} \Delta L\right)^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial \varphi} \Delta \varphi\right)^2}$$

- 239 -

Inșă:

$$\frac{\partial D}{\partial k} = L \cdot \cos^2 \varphi = \frac{D}{k}$$

$$\frac{\partial D}{\partial L} = k \cdot \cos^2 \varphi = \frac{D}{L}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \varphi} = -2 k \cdot L \cdot \cos \varphi \sin \varphi = -2 k L \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$

$$\cos^2 \varphi = -2 D \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

Deci:

$$\Delta D = \sqrt{D^2 \left( \frac{\partial k}{k} \right)^2 + D^2 \left( \frac{\partial L}{L} \right)^2 + D^2 \left( \frac{\partial \varphi}{\operatorname{ctg} \varphi} \right)^2}$$

$$\text{Sau: } \frac{\Delta D}{D} = \sqrt{\left( \frac{\partial k}{k} \right)^2 + \left( \frac{\partial L}{L} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\operatorname{ctg} \varphi} \right)^2}$$

Să analizăm această formulă pentru cazurile cele mai frecvente, adică:  $\Delta k = \theta$ ,  $\Delta \varphi = \theta$ , presupunând că pe  $k$  l-am determinat în mod riguros și nu a fost luat eronat în calcule.

In această ipoteză:

$$\frac{\Delta D}{D} = \pm \frac{\Delta L}{L} \quad \text{sau} \quad \Delta D = \pm D \frac{\Delta L}{L}$$

După cum știm:

$$\frac{\Delta L}{L} = \mu \quad \text{așa că} \quad \Delta D = \pm M \cdot D$$

Deci în cazul măsurătorilor optice se comit erori mai mari ca în cazul măsurătorilor directe, fapt pentru care Cadastrul român admite ca toleranțe în măsurătorile tachimetrice 20 cm la distanța de 100 m, față de 5 cm cât prevede la măsurarea directă.

Pentru a ne putea da seamă de valorile pe cari le poate lua  $\Delta L$  în cazul că mira nu este perfect verticală, să considerăm în Fig. 161 că mira ar fi înclinată,

făcând cu verticale un unghi  $\alpha$ , așa că, în loc de a citi  $L$  se citește  $L'$ .  
In acest caz:

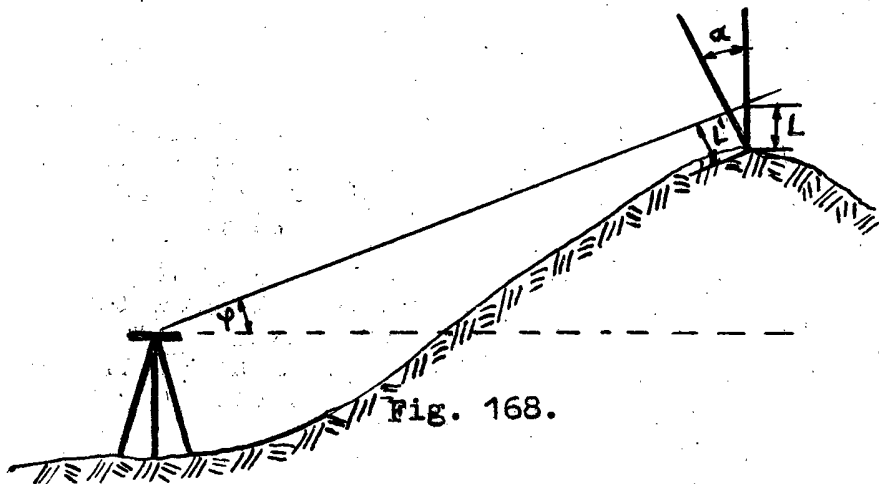


Fig. 168.



- 240 -

In acest caz:

$$\frac{L}{\sin \gamma} = \frac{L'}{\sin (90^\circ - \gamma)} = \frac{L'}{\cos \gamma}$$

$$\sin \gamma = \sin [180^\circ - (\alpha + 90^\circ - \gamma)] =$$

$$= \cos (\gamma - \alpha)$$

Deci:

$$L = \frac{\cos (\gamma - \alpha)}{\cos \gamma} L'$$

Sau:

$$L = (\cos \alpha + \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \gamma) L'$$

Unghiul  $\alpha$  fiind mic, putem considera aproximativ  
că:  $\sin \alpha \approx \alpha$  iar  $\cos \alpha \approx 1$ , așa că relația noastră devine:

$$L = (1 + \alpha \operatorname{tg} \gamma) L', \text{ iar eroarea } \Delta L \text{ va fi:}$$

$$\Delta L = L - L' = L' \alpha \cdot \operatorname{tg} \gamma$$

Pentru un unghi  $\alpha = 30'$  avem:

$\gamma$	$\Delta L$	$\Delta L/L$	$\Delta D$	$\gamma$	$\Delta L$	$\Delta L/L$	$\Delta D$
5	0,00084	1:1250	0,0008 D	25	0,00414	1:244	0,0041 D
10	0,00154	1:667	0,0015 D	30	0,00504	1:200	0,0050 D
15	0,00234	1:435	0,0023 D	31	0,00614	1:164	0,0061 D
20	0,00324	1:313	0,0032 D	32	0,00734	1:127	0,0073 D

In afară de aceasta erorile în măsurătorile tachimetrice sînt influențate și de factorii atmosferici: claritatea și vibrațiunile atmosferice, cari fac ca pe timp de vibrațiuni puternice să fim nevoiți a întrerupe lucrările, apoi mai intervine refracția atmosferică.

In concluzie, trebuie stabilită că raza de acțiune a tachimetrelor este limitată și distanța maximă la care se măsoară, este 250 m.

### O b s e r v a ț i u n e .

După cum s-a văzut în cele stabilite la acest capitol din formulele găsite, se obțin distanțele reduse la orizont, însă sîntem nevoiți a face calcule cu elementele primite în urma măsurătorilor, cum sînt  $L$  și  $\gamma$ .

Pentru înlesnirea calcului și pentru evitarea erorilor ce ar surveni în calcule, au fost întocmite tabele tachimetrice, cari ne dau pentru valorile lui  $L$  și  $\gamma$  atît distanța redusă la orizont, cît și diferența de nivel între punctul de stație și punctul unde este așezată mira.

- 241 -

Intre tabele tachimetrice menționăm tabelele prof. Jordan, ale lui L. Pons, J. Orlandi, etc.

Mai mult, în afară de tabele pentru calcule, așa cum se va arăta la descrierea instrumentelor tachimetrice, au fost construite tacheometre autoreductoare, cari ne dau direct distanța redusă la orizont.

Deoarece în capitolul nivelment va trebui să studiem și nivelmentul tachimetric, felul de a căuta distanțele reduse în tabele, se va arăta atunci, împreună cu protocolul pentru măsurătorile tachimetrice.

## - B. Aparatele tachimetrice.

În cele ce urmează se vor descrie în mod sumar, câteva tipuri de instrumente tachimetrice, arătându-se în special principiul pe care sînt bazate.

### - 1. Teodolitul tacheometru.

Orice teodolit, care are pe reticul, în afară de cele două fire reticulare, orizontal și vertical (HH și VV) și cele două fire stadimetrice, poate fi utilizat cu succes în măsurarea optică a distanțelor.

Dealtfel astăzi, pe teren, se întrebuintează în măsurarea indirectă a lungimilor, cu predilecție teodolitele, datorită faptului că sînt instrumente cari pot face mai multe operațiuni, pe cînd tacheometrele construite special în acest scop, nu servesc decît numai anumite operațiuni.

Pentru acest motiv pînă și la teodolitele geodezice au fost montate fire stadimetrice.

În ceea ce privește adaptarea lunetei anelactice, pe lîngă avantajul adus, adică anularea constantei  $k_1$ , prezintă și desavantajul că, reducînd distanța focală, reduce și mărirea obiectivului, ca atare se reduce și cîmpul de acțiune al aparatului.

### - 2. Tacheometrul.

Datorită faptului că prin gravarea firelor stadimetrice la teodolite, acestea pot măsura distanța în mod indirect, tacheometrele cari nu reduc distanța la orizontală, au fost complectamente scoase din uz.

- 242 -

Amintim doar ca principiu, că tacheometrul, care nu este altceva decât o derivată a teodolitului, de construcție robustă, are atașat în plus un declinator, care servește la măsurarea directă a azimuturilor.

Au cercul orizontal și vertical de diametre foarte mici, iar pentru citirea diviziunilor acestor cercuri sînt prevăzute cu microscopie foarte puternice.

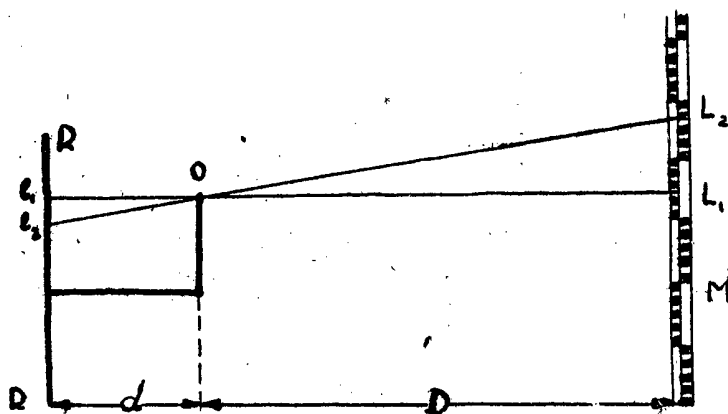
Declinatoarele, cari în fond nu sînt decît niște busole, au o construcție specială, în formă de cutie dreptunghiulară, iar acul magnetic are un mic joc de oscilație în jurul axului său longitudinal.

### - 3. Tacheometrul autoreductor Sanguet.

Intrucît în urma măsurărilor efectuate cu teodolitul tacheometrul sau cu tacheometrele obișnuite, sîntem nevoiți a face calcule de birou pentru aflarea distanțelor reduse la orizont, calcule cari, pe lîngă durată, sînt susceptibile de erori, au fost imaginate tachometre cari ne dau direct distanța redusă la orizont.

Înse tacheometrele autoreductoare avem tacheometrul Sanguet al cărui principiu este următorul.

O lunetă pivotează în jurul unui ax orizontal  $O$  (Fig. 169), iar în spatele axului orizontal  $O$  se află o riglă gradată  $RR$ .



Luneta putînd primi, printr-un mecanism, înclinare diferită, se vizează o miră ( $M$ ) așezată în punctul pînă la care vom să măsurăm distanța și dacă facem pe miră citirile  $L_1$  și  $L_2$ , se arată pe riglă  $RR$  deplasarea lunetei, prin citirile  $l_1'$  și  $l_2'$ .

Distanța  $d$  este constantă și cunoscută. Din asemănarea triunghiurilor se determină:

$$D = \frac{L_2 - L_1}{l_1' - l_2'} d \quad \text{sau notînd: } L_2 - L_1 = L \text{ și } l_1' - l_2' = l$$

$$D = \frac{L}{l} d.$$

Fig. 169.

- 243 -

Pentru ușurință diviziunile riglei RR reprezintă chiar raportul  $\frac{d}{z}$ .

În privința măsurării distanțelor, cu acest tacheometru, sînt date ca instrucțiuni practice anumite valori pentru  $(\frac{d}{z})$  cu cari să se facă măsurarea.

Așa sînt date ca valori pentru acest raport, citit direct pe riglă 1, 1,8, 2,2.....

Măsurînd consecutiv o distanță cu aceste valori, se vor face citirile respective pe miră (A, B, C), deci:

$$D = \frac{A}{1} = \frac{B}{1,8} = \frac{C}{2,2} = \frac{A + B + C}{5}$$

#### - 4. Tacheometrul autoreductor Hammer-Fennel.

În ansamblu acest tacheometru nu diferă mult de un teodolit obișnuit. Ca deosebire, demnă de remarcat, este că ocularul tacheometrului Hammer-Fennel nu mai culisează în interiorul tubului lunetei, ci este fix, iar punerea la punct a imaginii se face prin deplasarea obiectivului care culisează împreună cu o lentilă colectoare (lentilă analitică), prin intermediul unei cremaliere.

Aceste dispozițiuni au fost dictate de următoarele considerente: în locul cercului vertical, care

lipsește cu desăvârșire, este fixată o placă cu microfotografia unei diagrame, care poartă denumirea de diagrama Hammer-Fennel (Fig. 170).

Imaginea diagramei se transmite în ocular cu ajutorul unor prisme și trebuie să fie pusă mereu la punct și sub ochiul observatorului. Acesta este și motivul că punerea la punct se face prin deplasarea obiectivului, pentru că în caz contrar punerea la punct a obiectivului (mira parlantă) ar fi urmată întotdeauna de punerea la punct a microfotografiei, ceea ce ar lungi mult operațiunea.

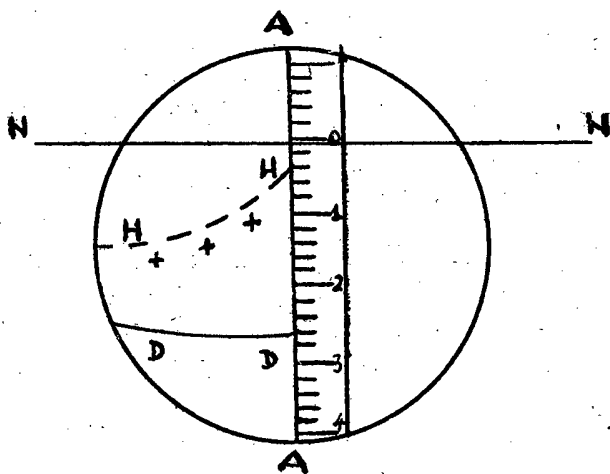


Fig. 170.

- 244 -

Placa este fixată perpendicular atît pe cercul orizontal, cît și pe axul YY.

În cîmpul de viză se observă două fire reticulare NN și AA, dintre cari firele reticulare AA sînt chiar muchia prismei care ne dă imaginea microfotografiei (arătată în partea stîngă a figurei), cu curba de distanță DD și curba diferențelor de nivel HH.

Partea dreaptă a cîmpului este liberă, așa că ne permite să putem observa mira parlantă plasată în punctul de pe teren care ne interesează.

Pentru a putea lucra cu acest tacheometru autoreductor, va trebui ca gradațiunea zero de pe miră să fie prinsă pe firul NN.

În acest mod înclinația lunetei ne va pune în evidență o anumită porțiune din placa microfotografia (care este legată, cum s-a amintit, invariabil de axul YY).

Fixînd lumeta asupra diviziunii zero de pe miră, în dreptul diagramei DD, se va citi distanța, care este egală cu citirea de pe miră din dreptul diagramei multiplicată cu 100. În cazul din figură avem  $D = 0,26 \times 100$ , iar în dreptul diagramei HH citim diferența de nivel egală cu diviziunea din dreptul ei (0,06 în cazul nostru), multiplicată cu 20, ceea ce în cazul din figură este  $20 \times 0,06 = 1,2$  m, luat cu semnul (+), (arătat în figură), adică avem ~~pentă~~.

#### - 5. Tacheometrul Buller-Breithaupt.

Deși instrumentul descris mai sus este destul de ingenios, totuși, erorile nu sînt excluse. De aceea s-a căutat a se construi un astfel de instrument, cu care s-ar putea obține, în mod precis și sigur, planul porțiunii de teren chiar în timpul operațiunilor, adică instrumente cari se facă atît ridicarea cît și redactarea planurilor, denumite tachigrafometre.

Astfel de instrumente s-au construit și totuși întrebuințarea lor nu s-a răspândit, datorită faptului că mira trebuie ținută perfect perpendicular pe raza de vizare, ceea ce este greu realizabil, constituînd o permanentă sursă de erori.

Un pas înainte s-a făcut prin tachigrafometrul lui Buller, la care mira se ține vertical, al cărui

- 245 -

principiu este următorul:

Cu instrumentul în punctul de stație A vizăm mira plasată în punctul B.

După ce am așezat instrumentul în stație, notăm diviziunea de pe miră  $L_1$ , aflată în dreptul firului de jos, precum și numărul diviziunilor cuprinse între firul de jos și cel de sus, adică  $\alpha$ . (Fig. 171).

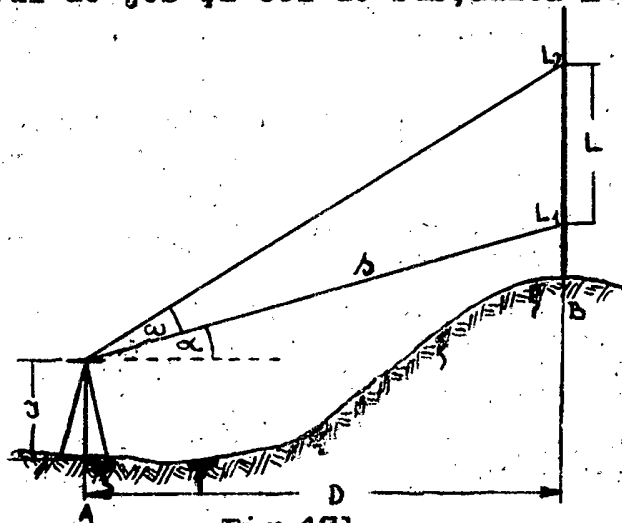


Fig. 171.

Știind că unghiul stadimetric al lunetei este  $\omega$  putem determina distanța D, adică:

$$\frac{L}{\sin \omega} = \frac{s}{\sin [90^\circ - (\alpha + \omega)]} = \frac{s}{\cos (\alpha + \omega)}$$

$$\text{Deci: } s = \frac{L \cdot \cos (\alpha + \omega)}{\sin \omega}$$

Iar:

$$D = \frac{L \cdot \cos (\alpha + \omega)}{\sin \omega} \cdot \cos \alpha$$

Din punct de vedere al construcției instrumentul constă dintr-o planșetă circulară de diametru 43 cm, pe care se poate în-

tinde un disc de hirtie de calc.

În lungul lunetei invariabil legată de axul optic al lunetei, există o riglă AA, iar perpendicular pe această riglă culisează, prin intermediul unui cursor, un braț de oțel de care este legată o a doua riglă BB, dispusă la  $\frac{1}{2}$  din înălțimea coloanei verticale care susține luneta.

În mod schematic se arată în Fig. 172

tachiografometrul lui Buller-Breithaupt.

Capătul riglei AA coincide cu centrul lunetei, iar rigla BB este înclinată cu un unghi  $\omega$ .

Instrumentul mai are un echer P, montat pe roțițe, care se mișcă pe o a treia riglă gradată CC, dispusă orizontal la baza piciorului de susținere al lunetei.

Apoi patru verniere și anume vernierul I este vertical montat pe tija de oțel vernierul II montat pe aceeași tije însă în contact

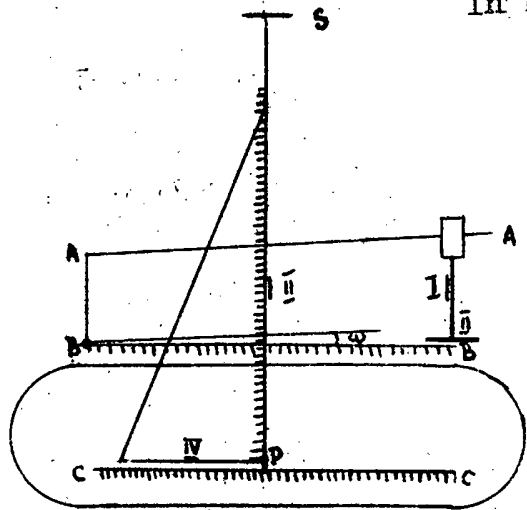


Fig. 172.

- 246 -

cu rigla BB, vernierul III montat pe echer în mod vertical și în fine vernierul IV pe echer la contactul cu rigla orizontală.

Operația cu aparatul constă în următoarele:

După ce am așezat instrumentul în stație, măsurăm înălțimea lui cu ajutorul unui fir cu plumb.

Se îndreaptă luneta către miră și se observă diviziunea din dreptul firului de jos, cunoaștem astfel valoarea lui  $BL_1$  (Fig. 164).

Cu ajutorul șurubului micrometric S aducem ca zero vernierului III să cadă pe diviziunea  $\gamma - BL_1$ , unde  $\gamma$  este înălțimea aparatului.

Apoi se aduce zero vernierului II pe diviziunea  $L = L_2 - L_1$  de pe rigla BB.

Se aduce echerul P în atingere cu vernierul I de pe tije și operațiunea este terminată, distanța se citește pe rigla CC la vernierul IV, iar la vernierul I, pe echerul vertical, se citește diferența de nivel.

Cu ajutorul creionului cu care este prevăzut capătul drept al echerului, se poate fixa pe hirtie punctul vizat.

Așa că avem pe teren un control al erorilor ce s-ar comite.

## - 6. Tacheometrul autoreductor Zeiss-Bosshardt (Redta)

Tacheometrul autoreductor Zeiss - Bosshardt, prescurtat denumit "Redta", face parte din seria instrumentelor moderne.

Este un instrument care permite măsurarea precisă a distanțelor în mod optic, fiind cu predilecție utilizat la măsurarea distanțelor în poligonatii, în metoda polară, precum și în ridicările de detalii.

Tacheometrul, însoțit de un telemetru autoreductor, permite citirea direct, pe mira așezată orizontal, a distanței orizontale, din punctul unde este așezat în stație, până la locul unde este plasată mira.

Cu alte cuvinte, în câmpul lunetei pot fi citite direct distanțele orizontale.

Precizia, pe care o dau este de 2 - 3 cm la 200 m, ceea ce înseamnă că se face măsurarea mai precis

ca în cazul măsurătorilor directe. Inșă distanța maximă la care putem face măsurători cu el este 200 m.

Reducerea distanței la orizont este făcută de către un dispozitiv, din trei prisme conice, inventat de R. Bossardt.

Instrumentul văzut din două părți în Fig. 173 și 174 este fixat pe triunghiul său prin șurubul D, care servește pen-

tru imobilizarea aparatului, iar șurubul micrometric R îi imprimă o mișcare micrometrică cercului orizontal.

Un alt sistem de șuruburi S, unul de fixare și altu. micrometric, imobilizează și deplasează micrometric cercul alid.

Șurubul H servește pentru înclinarea lunetei.

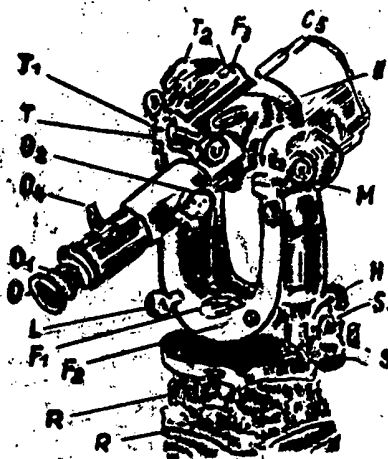


Fig. 173.

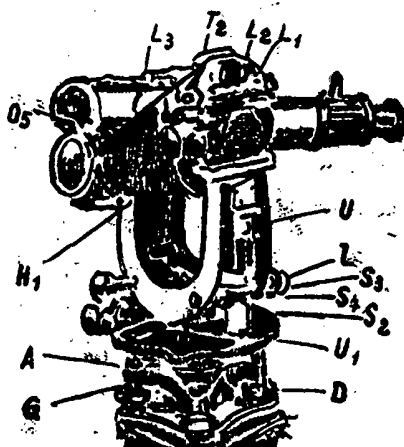


Fig. 174.

Suportul U poartă nivela sferică  $F_1$  și nivela transversală  $F_2$ .

Nivela care servește pentru nivelment este nivela  $F_3$  plasată deasupra lunetei.

Nivela  $L_1$  a cercului vertical se calează cu ajutorul tamburului  $\Delta$  observând coincidențele extremităților bulei de aer în prisma  $L_2$  și în acelaș timp prin reglarea piesei  $L_3$ .

Diviziunile cercului orizontal sînt aduse în cîmpul de citire de către reflectoarele rotative  $S_1$  și  $S_2$ , iar cele ale cercului vertical de către oglinda rotativă  $H_1$ .

Toate trei citirile se fac în microscopul M și sînt puse clar la punct prin rotirea ocularului acestuia.

Așa că în microscop apare cîmpul de citire din Fig. 175 unde partea de sus ( $H_2$ ) ne dă citirile pentru cercul orizontal (în cazul nostru avem 22,130 grade centesimale), partea aflată imediat sub diametrul cîmpului ne dă unghiurile verticale (în cazul nostru în sistemul centesimal avem 94,740 grade), iar jos



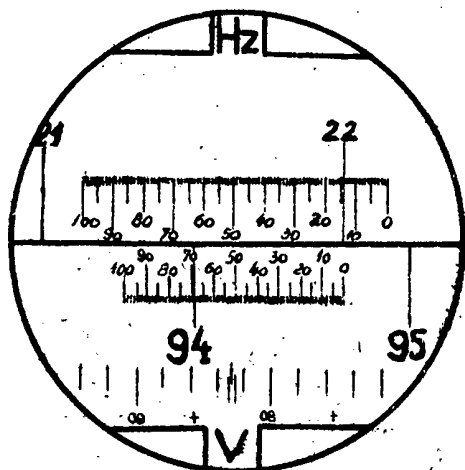


Fig. 175.

se obține tangenta, în cazul nostru este 0,0830.

Această tangență multiplicată cu citirea pe miră ne va da diferența de nivel între cele două puncte.

Ocularul  $O_1$  al lunetei se pune la punct prin rotirea inelului zimat  $O_1$  pe cînd roțița  $O_2$  servește pentru punerea la punct a imaginilor.

Vizorii  $O_4$  și  $O_5$  servesc pentru a ușura îndreptarea lunetei.

Linia de viză a lunetei rămîne paralelă la ea însăși în ceea ce privește jumătatea superioară a extremității obiectivului lunetei, însă în ceea ce privește partea inferioară, ea se deplasează lateral prin reglarea celor trei prisme conice.

Cu alte cuvinte, dintre cele două fire stadimetrice, deși ele sînt fixe, cel de sus rămîne în aceeași poziție, însă cel de jos este arătat în lunetă, prin cele trei prisme ale lui Bosshardt, ca fiind mobil, ceea ce permite reducerea distanțelor la orizontală, oricare ar fi panta în care măsurăm.

Pentru efectuarea măsurătorilor optice cu cea mai mare precizie, instrumentul este prevăzut cu un tambur  $T$  prin care se realizează deplasarea liniei de viză a lunetei, paralel cu ea însăși, pînă cînd una din liniile vernierului de pe miră coincide cu linia de separație a celor două jumătăți de imagini, dîndu-ne astfel în afară de diviziunile citite pe miră și cm și mm.

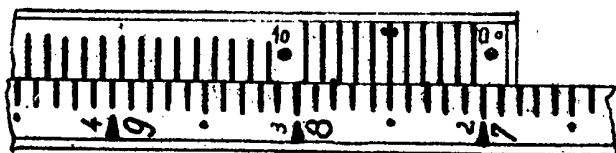


Fig. 176.

Adică pe mira în cazul Fig. 176 citim 71,5 m, însă diviziunea  $5^{-2}$  a vernierului nu este în perfectă coincidență și atunci se rotește tamburul  $T$  pînă cînd o vedem exact în coincidență și ne va da astfel în plus centimetri și milimetri.

În Fig. 173,  $T_1$  este un index care ne indică micile corecțiuni ce trebuiesc făcute pentru diversele inclinații ale lunetei, iar șuruburile mici  $T_2$  servesc la reglarea prismelor conice rotative.

La măsurarea distanțelor tacheometrul Redta este însoțit de o miră telemetrică, sumar descriasă mai jos.

- 249 -

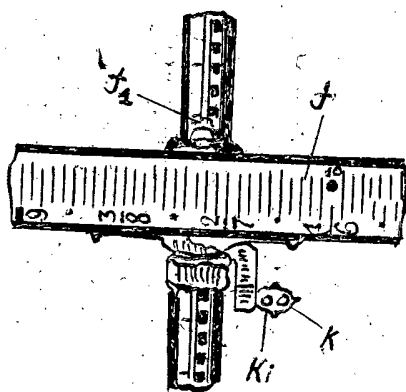


Fig. 177.

vizor K, un colimator K, ne indică dacă mira este bine orientată.

O miră J, divizată cu mare precizie, este menținută în poziție orizontală de către un șurub  $J_1$  pe o port miră, care la rândul ei poate culisa în lungul unei coloane metalice.

Mira verticală este menținută în această poziție de către două tije (picioare), cari în gură nu apar.

Mira orizontală trebuie adusă în poziție perpendiculară pe linia de viză a lunetei, ceea ce se realizează cu ajutorul unui

### - 7. Mira.

Pentru măsurarea distanțelor în mod optic, după cum s-a văzut în acest capitol, avem nevoie de mire, cari sînt rigle de lemn gradate obișnuit din cm în cm.

Descrierea lor se va face însă în capitolul nivelment, unde sînt iarăși întrebuițate.

### C. A p l i c a ț i u n i.

Înainte de a încheia acest capitol al măsurării distanțelor în mod optic sau indirect, vom arăta câteva cazuri în cari această operațiune își găsește aplicabilitate.

#### - 1. Determinarea pantei unei căi de comunicații

Una din problemele curente ale Tehnometriei este determinarea pantelor.

De exemplu, în Fig. 178, avînd profilul în lung al unei căi de comunicații, se așază teodolitul în stație în punctul A, iar în punctul B plasăm o mîră verticală.

Cu ajutorul unui fir cu plumb gradat se măsoară înălțimea "J" a aparatului.

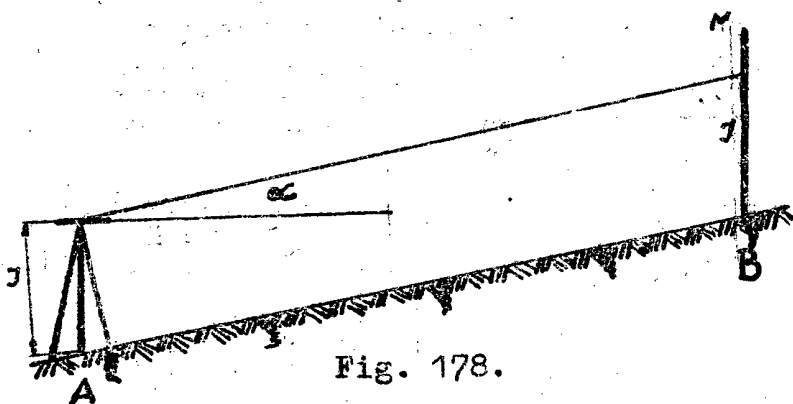


Fig. 178.

Vizăm mira M, căutînd să citim diviziunea egală cu valoarea J.

Se obține la aparat unghiul de pantă  $\alpha$  sau se determină distanța AB și diferența de nivel  $h_{AB}$

$$\text{deci: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{AB}$$

2. - Aflarea înălțimei unui turn, a unui arbore, etc.

Să presupunem că avem de măsurat înălțimea unui turn, Fig. 179, instalăm aparatul în stație în punctul A, iar la baza turnului se fixează o miră.

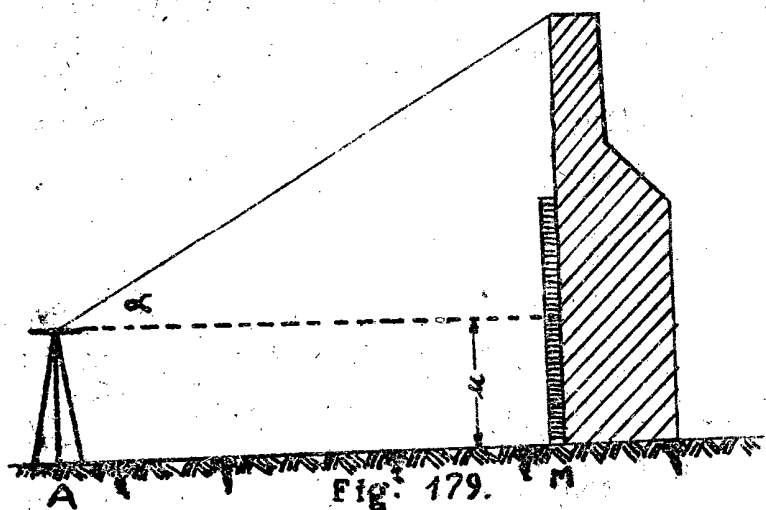


Fig. 179.

Vizăm cu luneta orizontal mira și măsurăm optic distanța AM.

Vizînd apoi vîrfurile turnului, se măsoară unghiul  $\alpha$ .

Avînd distanța AM, pe J și  $\alpha$  din calculele se va putea deduce înălțimea turnului.

3. - Trasarea pe teren a curbelor în arc de cerc.

Dacă se cere să trasăm o curbă în arc de cerc, de rază dată, tangență la un aliniament AB în punctul A dat (Fig. 180)

Pentru o coardă de lungime ( $l$ ) luată arbitrar, valoarea unghiului  $\alpha$  este dată de relația:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{l}{2r}$$

Insa unghiul  $\widehat{TAC}$ ,  $\widehat{TAD}$ ,  $\widehat{TAE}$ , cind  $AC = CD = DE$  sint  
 $\widehat{TAC} = \frac{\alpha}{2}$  ;  $\widehat{TAD} = 2 \frac{\alpha}{2}$  ,  $\widehat{TAE} = 3 \frac{\alpha}{2}$

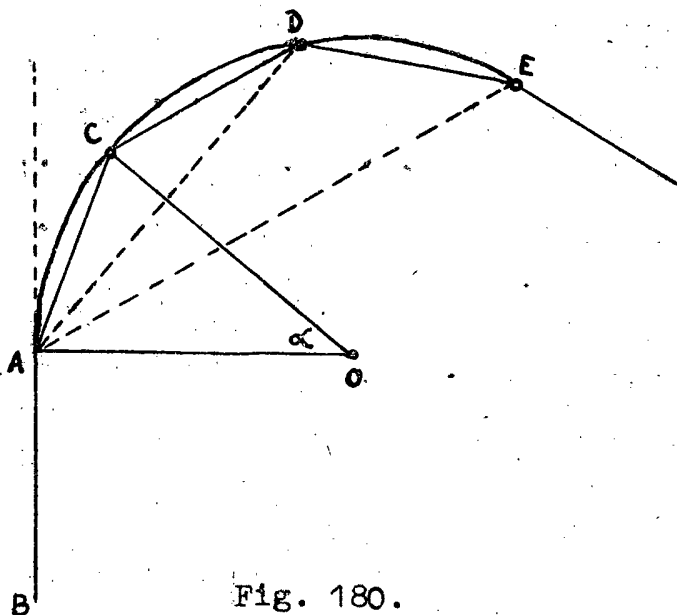


Fig. 180.

Prin urmare, valorile acestor unghiuri putind fi determinate, cu ajutorul tachimetrului aflat in statie in punctul A pot fi trasate aliniamentele AC, AD, AE, care, masurate tachimetric, ne permit fixarea pe teren a punctului A, D, E.

- 4. Ridicarea detaliilor.

punct poate fi fixat fata de un punct A al aliniamentului AB (Fig. 181) atunci, cind se cunoaste distanta dela acel punct (C) la punctul A si unghiul  $\alpha$  pe care il face cu aliniamentul AC cu aliniamentul AB.

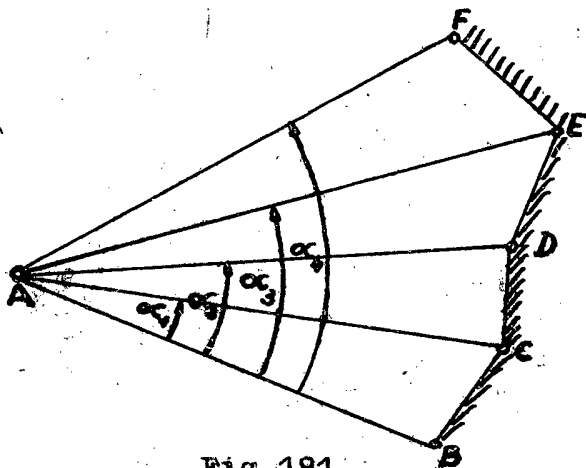


Fig. 181.

Prin asa numita metoda polara, ce va fi descrisa in cadrul unui alt capitol, un

La fel pentru alte puncte D, E, F, etc. Pentru ridicarea detaliilor, metoda polara este utilizata cu deosebire in cazul punctelor izolate, se fac ridicari tachimetrice cind distanta este mai mare de 20 - 30 m.

- 5. Masurarea distantelor in poligonatii.

In poligonatii avind nevoie de a masura distantele, atunci cind se lucreaza in teren accidentat, masurarea directa a lungimilor poate deveni imposibila si atunci se vor masura distantele in mod optic.

## CAP. V.

PROBLEME FUNDAMENTALE DE PLANIMETRIE.- 1. Generalități.

Un punct oarecare poate fi cu ușurință raportat pe hirtie, atunci când sînt cunoscute coordonatele sale în raport cu axele unui sistem de axe de coordonate ales.

În privința alegerii sistemului de axe coordonate, se va insista mai mult în cadrul capitolului "Raportarea planurilor".

Amintim numai că pentru un sistem principal de coordonate, axele lui sînt rectangulare, distingînduse două cazuri pe cari la întîlnim în Topografie.

- Sistemul geodezic, nordic sau cadastral, întrebuitat de către Cadastrul Român, (Fig. 182), cu axa + x spre Est și + y spre Nörd.

- Sistemul sudic, (Fig. 183), cu axa de + x spre Sud și + y spre West.

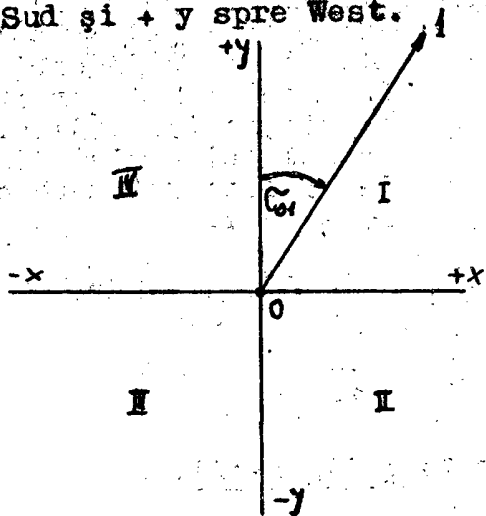


Fig. 182.

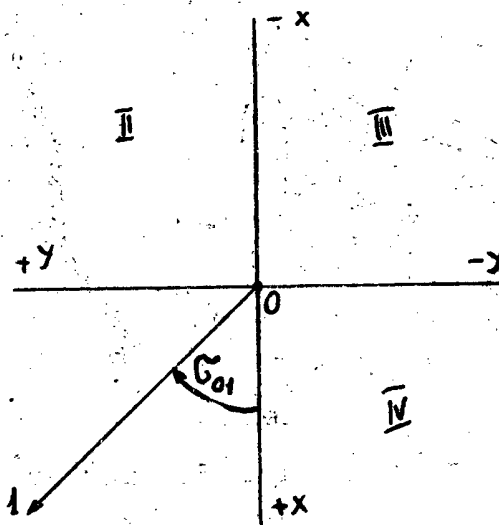
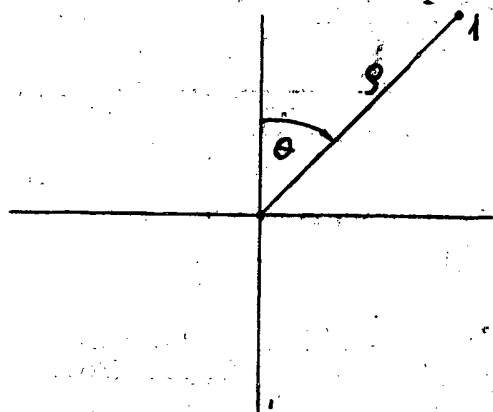


Fig. 183.

In calculele noastre se vor utiliza ambele sisteme, atit primul, folosit de Cadastrul Român, cit și ultimul.

In cele două sisteme de axe de coordonate, cadranele se succed în ordinea indicată pe figură.

Se mai amintește sistemul de axe de coordonate polare, frecvent utilizat în ridicările de detalii, în care poziția punctului este stabilită cînd se cunosc coordonatele lui polare  $\rho$  și  $\varphi$  (Fig. 184).



unghiul  $\varphi$  reprezintă unghiul format de aliniamentul  $O_1$  cu sistemul de axe de coordonate, iar  $\rho = O_1$ .

Unghiul format de un aliniament de o dreaptă, cu axa + y în sistemul cadastral sau cu axa + x în sistemul sudic, se numește azimut sau orientare.

Notatia, arătată și în Fig. 182 și 183, a orientării, se face cu  $\rho$ .

Fig. 184.

- 2. Probleme de planimetrie.

Problema Nr. 1.

Se dă lungimea dreptei  $OP_1$  și orientarea ei  $\rho_{01}$ . Se cere să se determine punctul  $P_1$ , adică să se afle coordonatele sale  $x_1, y_1$ .

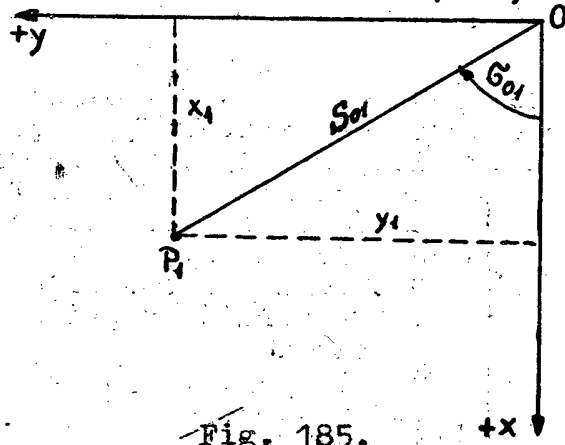


Fig. 185.

Notînd  $OP_1 = S_{01}$ , din Fig. 185, avem:

$$\cos \rho_{01} = \frac{x_1}{S_{01}}$$

$$\sin \rho_{01} = \frac{y_1}{S_{01}}$$

Deci:

$$x_1 = S_{01} \cdot \cos \rho_{01}$$

$$y_1 = S_{01} \cdot \sin \rho_{01}$$

Drept control va trebui ca:

$$\operatorname{tg} \rho_{01} = \frac{\sin \rho_{01}}{\cos \rho_{01}} = \frac{y_1}{x_1} \text{ și}$$

$$S_{01} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

- 254 -

După cum se vede orientarea sau azimutul, este unghiul format de dreapta OP cu axa x lor pozitivi și este socotit în sensul acelor ceasornicului, pornind de la axa + x, la sistemul sudic și de la axa de + y la sistemul nordic sau geodezic.

În sistemul cadastral calculul se face analog, cu deosebire că se vor inversa coordonatele.

### Exemplu numeric:

Date:  $S_{01} = 200$  m, și  $\alpha_{01} = 30^\circ$

Se cere să se determine coordonatele punctului  $P_1$ , adică  $x_1, y_1$ .

Din cele de mai sus:

$$x_1 = S_{01} \cdot \cos \alpha_{01}$$

$$y_1 = S_{01} \cdot \sin \alpha_{01}$$

logaritmiind, avem:

$$\log x_1 = \log S_{01} + \log \cos \alpha_{01} = 2,3010300 + 9,9375306 = 2,2385606.$$

$$\log y_1 = \log S_{01} + \log \sin \alpha_{01} = 2,3010300 + 9,6989700 = 2,0000000.$$

deci:

$$x_1 = 173,205 \text{ m,}$$

$$y_1 = 100,000 \text{ m.}$$

Control:

$$\operatorname{tg} \alpha_{01} = \frac{y_1}{x_1}, \text{ sau } \log \operatorname{tg} \alpha_{01} = \log y_1 - \log x_1 = 9,7614394.$$

Aflind valoarea lui  $\alpha_{01}$  din calcule, se obține:  $\alpha_{01} = 30^\circ$   
Ca atare calculul a fost bine efectuat.

### Problema Nr.2

Fiind dat punctul  $P_1$ , adică avind coordonatele sale  $x_1, y_1$ , precum și orientarea  $\alpha_{12}$ , ca și lungimea  $S_{12}$ , se cere să se determine punctul  $P_2$ , adică să se afle coordonatele lui  $x_2, y_2$ .

Problema aceasta este mai generală ca prima problemă.

Din Fig. 186 se poate scrie relația:

$$x_2 - x_1 = S_{12} \cdot \cos \alpha_{12}$$

$$y_2 - y_1 = S_{12} \cdot \sin \alpha_{12}$$

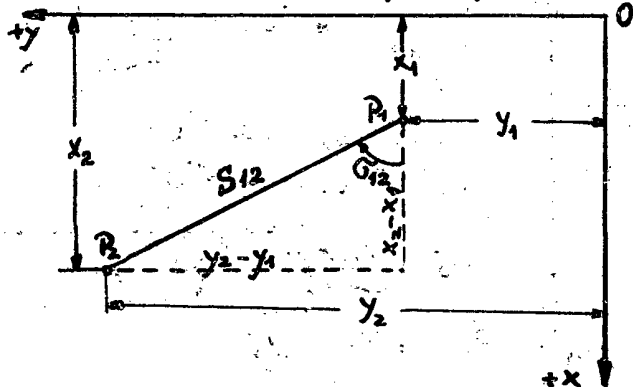


Fig. 186.

- 255 -

de unde :

$$x_2 = x_1 + S_{12} \cos \beta_{12}$$

$$y_2 = y_1 + S_{12} \sin \beta_{12}$$

Control:

$$\operatorname{tg} \beta_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$S_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \frac{x_2 - x_1}{\cos \beta_{12}} = \frac{y_2 - y_1}{\sin \beta_{12}}$$

Dacă se notează:

$$x_2 - x_1 = \Delta x \quad \text{și} \quad y_2 - y_1 = \Delta y.$$

Relațiile de mai sus devin:

$$x_2 = x_1 + \Delta x$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y$$

$$\operatorname{tg} \beta_{12} = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad S_{12} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \frac{\Delta x}{\cos \beta_{12}} = \frac{\Delta y}{\sin \beta_{12}}$$

In sistemul cadastral  $\Delta x$  este inversat cu  $\Delta y$  și  $\operatorname{tg} \beta_{12} = \frac{\Delta x}{\Delta y}$ Exemplu numeric:

Date:

$$P_1 \quad x_1 = + 463,85 \text{ m} \quad S_{12} = 740,64 \text{ m}, \quad \beta_{12} = 78^\circ 51' 52''$$

$$y_1 = + 16,85 \text{ m}$$

Se cere:

$$P_2 \quad x_2 = ?$$

$$y_2 = ?$$

In primul rînd se vor determina valorile lui  $\Delta x$  și  $\Delta y$  din relațiile:

$$\Delta x = S_{12} \cos \beta_{12}$$

$$\Delta y = S_{12} \sin \beta_{12}$$

Logaritmand aceste relații și introducînd valorile date se va obține:

$$\log \Delta x = \log S_{12} + \log \cos \beta_{12} = 2,8696072 + 9,2858518 = 2,1554590$$

$$\log \Delta y = \log S_{12} + \log \sin \beta_{12} = 2,8696072 + 9,9917456 = 2,8613528$$

Căutînd în tabelele antilogaritmilor, se află:

$$\Delta x = 143,04 \text{ m},$$

$$\Delta y = 726,70 \text{ m}.$$

Cu aceste valori se determină punctul  $P_2$ , adică:

$$x_2 = x_1 + \Delta x = 463,85 + 143,04 = 606,89 \text{ m},$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y = 16,85 + 726,70 = 743,55 \text{ m}.$$

Control:

$$\operatorname{tg} \beta_{12} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$S_{12} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$



Dacă valorile găsite din aceste formule pentru  $\alpha_1$  și  $S_{12}$  corespund cu cele date, atunci calculul este bun și valorile lui  $\Delta x$  și  $\Delta y$  sînt acceptabile.

Problema nr. 3:

Se dau punctele  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$  prin coordonatele lor și se cere să se determine orientarea  $\alpha_{12}$  și distanța  $S_{12}$ .

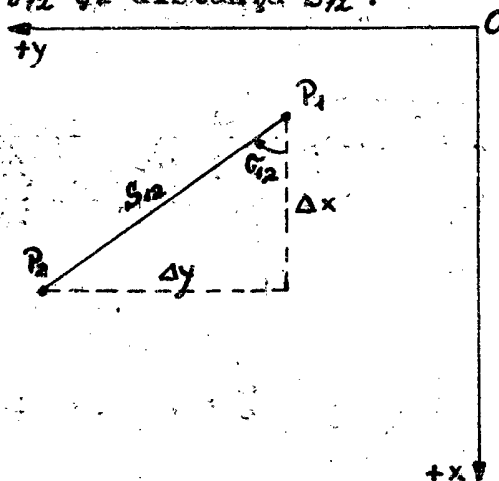


Fig. 187.

Notînd la fel ca în problema anterioară,  $\Delta x = x_2 - x_1$

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

avem:

$$\text{tg } \alpha_{12} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Însă atunci cînd orientarea este mai mare decît  $90^\circ$ , noi din calcule nu obținem adevărata valoare a orientării, ci se deduce numai un unghi  $\alpha'$ , care este unghiul de calcul, adică unghiul redus la primul cadran.

Pentru a determina adevărată valoarea a orientării, va trebui să știm în ce cadran se găsește unghiul  $\alpha'$ , ceea ce se deduce din

valorile lui  $\Delta x$  și  $\Delta y$ . În tabloul ce urmează, se arată în fiecare cadran semnele pe cari le au  $\Delta x$  și  $\Delta y$ , precum și valoarea adevărată a orientării, pentru sistemul sudic.

Cadranul	$\Delta x$	$\Delta y$	Valoarea orientării $\alpha$
I	+	+	$\alpha = \alpha'$
II	-	+	$\alpha = 180^\circ - \alpha'$
III	-	-	$\alpha = 180^\circ + \alpha'$
IV	+	-	$\alpha = 360^\circ - \alpha'$

De exemplu, cînd  $\Delta y$  este pozitiv, iar  $\Delta x$  este negativ, înseamnă că ne găsim în cadranul II și unghiul  $\alpha'$ , dedus din calcul, se va scădea din  $180^\circ$  pentru a afla orientarea

În formula care ne dă orientarea

$$\text{tg } \alpha' = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

făcînd suma numărătorului și numitorului pe diferența lor, se obține:  $\text{tg} (45^\circ + \alpha')$  adică:

- 257 -

$$\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha_{12}}{1 - \operatorname{tg} \alpha_{12}} = \frac{\Delta x + \Delta y}{\Delta x - \Delta y} = \operatorname{tg} (45^\circ + \alpha_{12}).$$

Această formulă este utilizată pentru a avea un control de calcul, adică se face comparație între valorile obținute din ambele formule.

În ceea ce privește distanța între punctele  $P_1$  și  $P_2$ , adică  $S_{12}$ , valoarea ei este dată de următoarele trei relații:

$$S_{12} = \frac{\Delta x}{\cos \alpha_{12}} = \frac{\Delta y}{\sin \alpha_{12}} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

În sistemul nordic:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta x}{\Delta y} \quad \text{și} \quad S = \frac{\Delta x}{\sin \alpha} = \frac{\Delta y}{\cos \alpha}$$

Din aceste relații una va servi pentru aflarea distanței, iar celelalte două vor servi pentru control.

### Exemplu numeric.

Date:

$$P_1 \quad x_1 = 648,52 \text{ m,} \\ y_1 = 748,38 \text{ m.}$$

$$P_2 \quad x_2 = -1,64 \text{ m,} \\ y_2 = -100,45 \text{ m.}$$

Se cere:

$$\alpha_{12} = ? \quad S_{12} = ?$$

Aflăm orientarea  $\alpha$  din relația:

$$\operatorname{tg} \alpha_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-848,83}{-650,16}$$

Aplicăm logaritmi, fără a ține cont de faptul că avem numere negative, acestea servind numai pentru a ne atrage atenția că ne găsim în alt cadran decât cadranul I, adică în cazul nostru în cadranul III.

$$\log \operatorname{tg} \alpha_{12} = \log \Delta y - \log \Delta x = 2,9288207 - 2,8130202 = 0,1158005$$

$$\alpha_{12} = 52^\circ 32' 59'' \quad \alpha = 180^\circ + \alpha_{12} = 232^\circ 32' 59''$$

Control:

$$\operatorname{tg} (45^\circ + \alpha_{12}) = \frac{\Delta x + \Delta y}{\Delta x - \Delta y} = \frac{-1498,99}{+198,67}$$

În mod analog, nu vom ține cont de semne și găsim un unghi de calcul pe care, fiind în cadranul IV îl scădem din  $360^\circ$  și obținem pe  $(\alpha + 45^\circ)$ .

Deci:

$$\log \operatorname{tg} (45^\circ + \alpha_{12}) = \log (\Delta x + \Delta y) - \log (\Delta x - \Delta y) = 3,1757987 - 2,2981323 = 0,8776664$$

De unde găsim un unghi de calcul egal cu  $82^\circ 27' 01''$  așa că  $\alpha_{12} + 45^\circ = 360^\circ - 82^\circ 27' 01'' = 277^\circ 32' 59''$

- 258 -

Pentru control comparând valorile lui  $\alpha$  și  $\beta + 45^\circ$  rezultate în urma calculelor, vedem că ele concordă și ca atare s-a lucrat bine.

Distanța  $S_{12}$  este dată de relațiile:

$$S_{12} = \frac{\Delta x}{\cos \gamma_{12}} = \frac{\Delta y}{\sin \gamma_{12}} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

Luând numai primele două relații, găsim:

$$\log S_{12} = \log \Delta x - \log \cos \gamma_{12} = 2,813020 - 9,7839553$$

$$\log S_{12} = \log \Delta y - \log \sin \gamma_{12} = 2,9288207 - 9,8997558.$$

Din ambele se află că:

$$\log S_{12} = 3,0290649 \quad \text{sau } S_{12} = 1069,21 \text{ m.}$$

#### Problema Nr. 4 sau intersecție înainte.

Aceasta este o problemă frecvent întâlnită în lucrările curente pe teren. Sînt date două puncte  $P_1$  și  $P_2$ , adică se cunosc coordonatele acestor puncte și se cere să fie determinate coordonatele unui al treilea punct  $P_0$ , punctele  $P_1$  și  $P_2$  fiind staționabile. Acum problema poate admite următoarele două cazuri:

- un caz cînd și punctul  $P_0$  este staționabil și
- al doilea caz, cînd punctul  $P_0$  nu este staționabil

Vom cerceta primul caz, ultimul fiind o variantă a acestuia. Prin urmare, avînd punctele  $P_1$ ,  $P_2$ , date și punctul  $P_0$  ale cărui coordonate vom să le determinăm staționabile, se vor măsura unghiurile  $\alpha, \beta, \gamma$ . Prima operațiune pe care o facem este de a compensa unghiurile, pentru a satisface relația:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

A doua operațiune este aflarea orientării dreptei  $P_1 P_2$ , adică determinarea lui  $\gamma_{12}$  și  $\gamma_{21}$  din procedeul deja arătat.

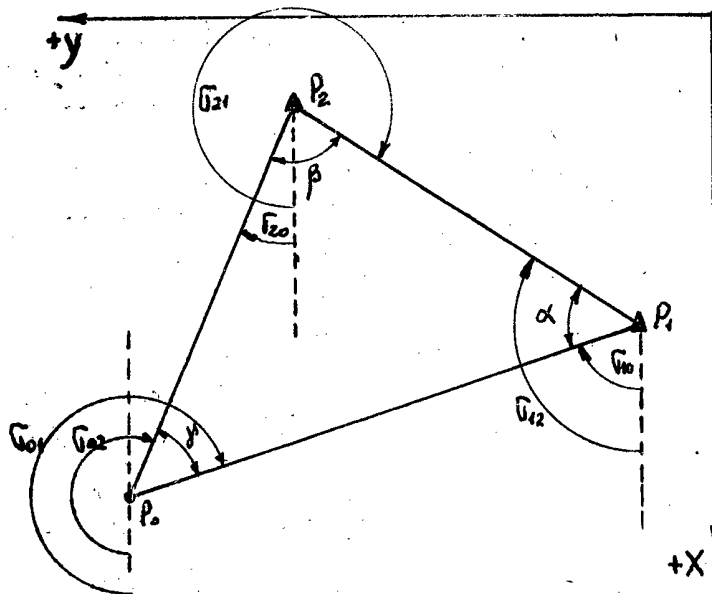


Fig. 188.

- 259 -

$$\operatorname{tg} \tilde{\nu}_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Avînd pe  $\tilde{\nu}_{12}$  se află și valoarea lui  $\tilde{\nu}_{21}$  care este  $\tilde{\nu}_{21} = \tilde{\nu}_{12} + 180^\circ$

Urmează determinarea laturei  $S_{12}$  cu ajutorul problemei Nr.3, adică:

$$S_{12} = \frac{\Delta x}{\cos \tilde{\nu}_{12}} = \frac{\Delta y}{\sin \tilde{\nu}_{12}} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

Din problema Nr.2 știm că, avînd un punct  $P_1$  și lungimea laturei  $S_{10}$ , ca și orientarea  $\tilde{\nu}_{10}$ , putem afla coordonatele punctului  $P_0$  din relația.

$$(1) \quad x_0 = x_1 + S_{10} \cos \tilde{\nu}_{10}$$

$$y_0 = y_1 + S_{10} \sin \tilde{\nu}_{10}$$

In această relație trebuie însă să se determine în prealabil  $\tilde{\nu}_{10}$  și  $S_{10}$ , dar:  $\tilde{\nu}_{10} = \tilde{\nu}_{12} - \alpha$ , la fel  $\tilde{\nu}_{20} = \tilde{\nu}_{12} + \beta - 180^\circ$ .

Iar din triunghiul  $P_1, P_2, P_0$  în care avem cunoscute toate unghiurile și latura  $S_{12}$ , pot fi aflate  $S_{10}$  și  $S_{20}$  adică:

$$S_{10} = S_{12} \frac{\sin \beta}{\sin f}$$

$$\frac{S_{12}}{\sin f} = \frac{S_{10}}{\sin \beta} = \frac{S_{20}}{\sin \alpha} \quad \text{deci:} \quad S_{20} = S_{12} \frac{\sin \alpha}{\sin f}$$

Așa că, avînd toate elementele, din relația(1) se vor afla coordonatele punctului  $P_0$ .

Pentru a avea un control de birou, aceste coordonate vor fi calculate și cu ajutorul punctului  $P_2$  din relațiile asemănătoare, adică:

$$x_0 = x_2 + S_{20} \cos \tilde{\nu}_{20}$$

$$y_0 = y_2 + S_{20} \sin \tilde{\nu}_{20}$$

Drept control pe teren, deși sînt suficiente cele două puncte  $P_1$  și  $P_2$ , se mai alege încă un al treilea punct staționabil, de coordonate cunoscute  $P_3$ , se măsoară toate unghiurile și dacă valorile lui  $x_0$ ,  $y_0$ , nu diferă prea mult, se ia media lor, iar în caz contrar, va trebui să fie refăcute măsurătorile.

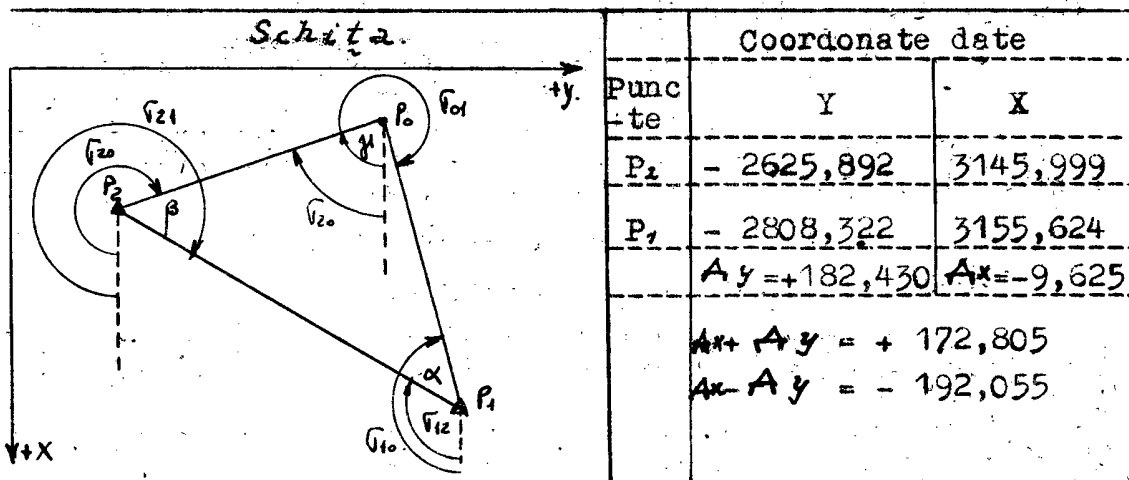
In ceea ce privește cazul cînd  $P_0$  nu este staționabil, problema se rezolvă analog, cu singura deosebire că acum ne lipsește prima operațiune, adică, nu se mai face compensarea unghiurilor, ci aflăm doar valoarea lui  $f$  din relația  $f = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ .

#### Exemplu numeric:

Date:  $P_1 \begin{cases} x_1 = 3155,624\text{m} \\ y_1 = -2008,322\text{m} \end{cases} P_2 \begin{cases} x_2 = 3154,999\text{m} \\ y_2 = -2625,892\text{m} \end{cases} \begin{matrix} = 78^\circ 52' 32'' \\ = 36^\circ 46' 18'' \\ = 64^\circ 21' 01'' \end{matrix}$

Se cere:  $P_0$   $x_0 = ?$   
 $y_0 = ?$

Pentru sistematizare și ușurință, în-  
 treg calculul se va face în tablouri asemănătoare cu cele  
 de mai jos.



Prima operațiune constă în compensarea  
 unghiurilor, apoi se vor determina toate orientările, știind  
 că:

$$\operatorname{tg} \nu_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\nu_{21} = \nu_{12} + 180^\circ$$

$$\nu_{10} = \nu_{12} + \alpha$$

$$\nu_{20} = \nu_{21} - \beta$$

Calculul lui $\nu_{12}$				Orientă- rile 0 I II			Proba 0 I II			Unghiuri								
										măsurate			compens.					
$\log \Delta y$				$\nu_{12}$	0	I	II				0	I	II	0	I	II		
$\log \Delta y$	2,2610853			$\nu_{12}$	93	01	12,5	$\alpha$	78	52	35							
$\log \Delta x$	0,9834007			$\nu_{10}$	171	53	47,6				78	52	33	2	78	52	35,1	
$\log \operatorname{tg} \nu_{12}$	1,2776956	$\nu_{12}$	$86^\circ 58' 47,5''$	$\nu_{21}$	273	01	12,5	$\beta$	36	46	21	36	46	19	13	36	46	20,9
$\log(\Delta x + \Delta y)$	2,2375563			$\nu_{20}$	236	14	51,6				64	21	02	8	64	21	0,40	
$\log(\Delta x - \Delta y)$	2,2934256			$\nu_{02}$	56	14	51,6	$\gamma$	64	21	04							
$\log \operatorname{tg}(\nu_{12} + 45^\circ)$	0,9541307	$\nu_{12} + 45^\circ$	$41^\circ 58' 47,5''$	$\nu_{01}$	351	53	47,6				179	59	54	[ ]	180	00	00	

Avind numărătorul cu (+) și numitorul cu (-), unghiul este în cadranul II, ca atare  $\beta_{12} = 180^\circ - \beta'_{12}$  și în mod analog  $\beta' + 45^\circ = 180^\circ - (\beta' + 45^\circ)$ .

Urmează calculul laturilor din relațiile:

$$S_{12} = \frac{A x}{\cos \beta_{12}} = \frac{A y}{\sin \beta_{12}} \quad S_{10} = \frac{S_{12}}{\sin \gamma} = \sin \beta \quad S_{20} = \frac{S_{12}}{\sin \gamma} = \sin \alpha$$

Calculul laturilor

$\log \Delta x$	0,9834007	$\log \Delta y$	2,2610963	$\log S_{12}$	2,2616976	$\log S_{12}$	2,2616976
$\log \cos \beta_{12}$	8,7217034	$\log \sin \beta_{12}$	9,9993987	$\log \sin \gamma$	9,9549464	$\log \sin \gamma$	9,9549464
$\log S_{12}$	2,2616976	$\log S_{12}$	2,2616976	$\log \frac{S_{12}}{\sin \gamma}$	2,3067512	$\log \frac{S_{12}}{\sin \gamma}$	2,3067512
$S_{12}$	182,683	$S_{12}$	182,683	$\log \beta$	9,7771648	$\log \alpha$	9,9917632
$S_{12} = 182,683$		$\log S_{10}$	2,0839160	$\log S_{20}$	2,2985144		

Si în fine ultima operațiune, calcularea coordonatelor punctului  $P_0$  din relațiile:

$$x_0 = x_1 + S_{10} \cos \beta'_{10} = x_2 + S_{20} \cos \beta'_{20}$$

$$y_0 = y_1 + S_{10} \sin \beta'_{10} = y_2 + S_{20} \sin \beta'_{20}$$

In aceste relații facem următoarele notații:

$$S_{10} \cos \beta'_{10} = \Delta x_1$$

$$S_{20} \cos \beta'_{20} = \Delta x_2$$

$$S_{10} \sin \beta'_{10} = \Delta y_1$$

$$S_{20} \sin \beta'_{20} = \Delta y_2$$

Calculul coordonatelor

Din punctul $P_1$				Din punctul $P_2$			
$\log S_{10}$	2,0839160	$\log S_{10}$	2,0839160	$\log S_{20}$	2,2985144	$\log S_{20}$	2,2985144
$\log \cos \beta'_{10}$	9,9956419	$\log \sin \beta'_{10}$	9,1493229	$\log \cos \beta'_{20}$	9,7447755	$\log \sin \beta'_{20}$	9,9198345
$\log \Delta x_1$	2,0795579	$\log \Delta y_1$	1,2332389	$\log \Delta x_2$	2,0432829	$\log \Delta y_2$	2,2183489
$\Delta x_1$	-120,105	$\Delta y_1$	17,109	$\Delta x_2$	-110,482	$\Delta y_2$	-165,329
$x_1$	3755,624	$y_1$	-2808,322	$x_2$	3745,999	$y_2$	-2625,892
$x_0'$	3035,519	$y_0'$	-2791,213	$x_0''$	3035,517	$y_0''$	-2791,221

Coordonatele definitive:  $x_0 = 3055,518$  m,  $y_0 = 2791,217$

- 262 -

Problema intersecției înainte, ca de altfel toate problemele de planimetrie, se calculează cu multă ușurință și în timp mult redus, cu ajutorul mașinei de calculat.

Putem chiar spune că această metodă a înlocuit aproape complet metoda logaritmică arătată mai sus.

Pentru acest motiv, înainte de a trece la calculul acestei probleme cu mașina de calculat, se va face o sumară descriere a mașinei de calculat, arătând toate operațiunile care pot fi făcute la aceasta mașină, urmînd ca apoi să revenim și să vedem cum se calculează o intersecție înainte cu mașina, precum și modul de calcul al celorlalte probleme de planimetrie ce se vor trata.

### MAȘINA DE CALCULAT.

În principiu se deosebesc două forme, sisteme, de mașini cu ajutorul cărora se pot efectua pe cale mecanică operațiunile aritmetice.

- 1. Mașini de calculat sau de multiplicat, la cari multiplicarea sau împărțirea se efectuează în interiorul mașinei prin piese speciale, astfel că, la efectuarea unei operațiuni e nevoie de o singură rotație a manivelei.

- 2. Mașini de adunat, la cari multiplicarea sau diviziunea se efectuează prin adunări sau scăderi repetate, această grupă, categorie de mașini fiind și mai răspîndită.

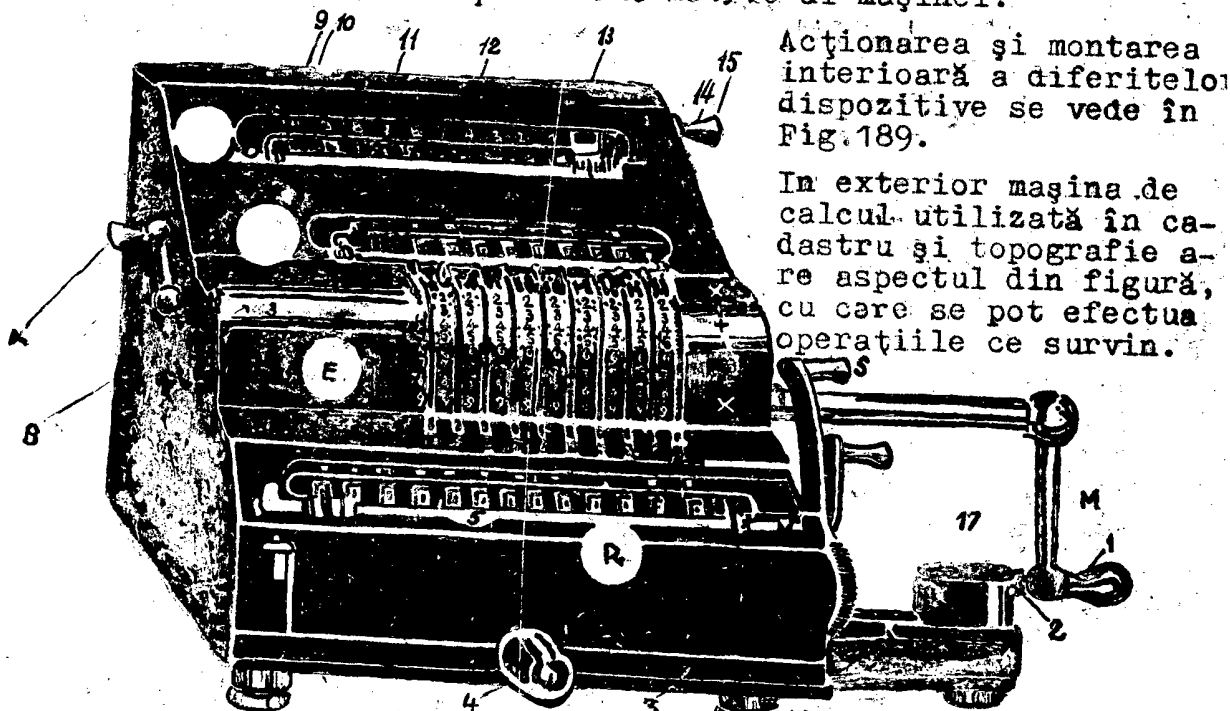
Acestui grup de mașini îi aparțin mașinile cu roată cu dinți variabili, așa zisele mașini Odhner și cele cu ax dințat în cascadă, mașinile Thomas și Mercedes:

În cele ce urmează ne vom ocupa exclusiv de mașinile sistem Odhner, denumite astfel după inventatorul lor T. Odhner, un mecanic din Leningrad, care în 1892 a imaginat pentru prima dată acest sistem de mașini, care a fost preluat mai tîrziu de firma Natalis și Grimme din Braunschweig.

Ele se aseamănă intrucîtva cu mașinile de adunat, intrucît, ca și la acestea, efectuarea unui calcul se face în două faze, adică a înscrierii (clapării) și înregistrării.

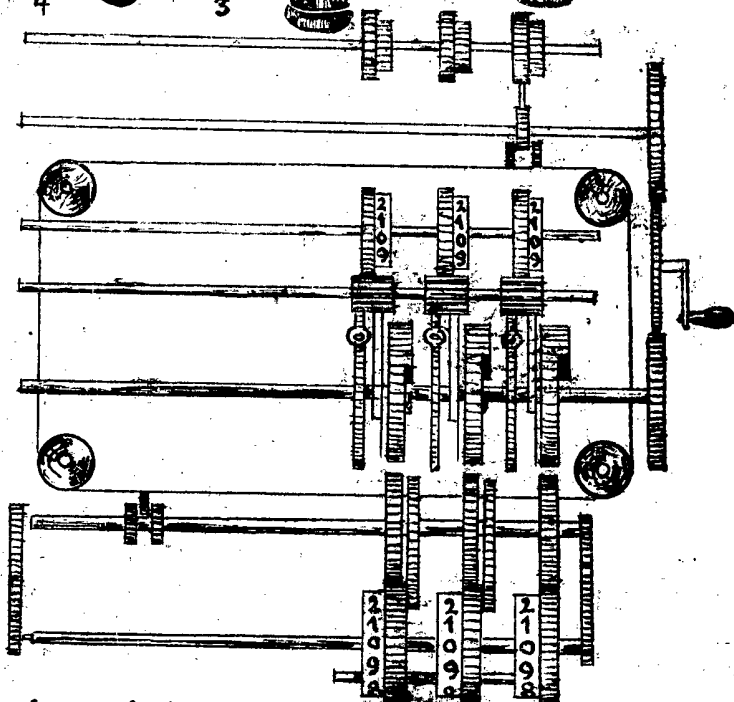
Avantajul acestor mașini constă în mică lor greutate, rezultatele se pot citi foarte ușor, se pot efectua toate operațiunile elementare aritmetice, minuția e simplă,

Deosebirea principală a acestor mașini față de celelalte este roata cu dinți variabili a lui Odhner care este și dispozitivul metric al mașinei.



Acționarea și montarea interioară a diferitelor dispozitive se vede în Fig. 189.

În exterior mașina de calcul utilizată în cadastru și topografie are aspectul din figură, cu care se pot efectua operațiunile ce survin.



E = dispozitiv de înregistrare  
 Z = indicator de rotații  
 M = manivelă

A = cadran indicator  
 R = totalizator  
 G = bară de anulare generală (șterg.gen.)



- 264 -

- X = mână de anulare pentru E și A
- 1 = mânerul manivelei
- 2 = cepul manivelei
- 3 = puncte de marșaj
- 4 = butonul de mîneră al căruciorului
- 5 = roțițe (disturi) de înregistrare
- 6 = pîrghie de deblocaj pentru 5
- 7 = pîrghie de anulare parțială
- 8 = orificii de ungere ale axului principal
- 9 = disc semnalizator
- 10 = indicator de blocaj pentru Z.
- 11 = " " " " E și A
- 12 = placă culisantă a ind.Z.
- 13 = indicator de poziție.
- 14 = manete.
- 15 = disp.de anulare pentru Z.
- 16 = ferestruică (indicator de poz. a căr).
- 17 = indicator de blocaj pentru R.
- 18 = bară de anulare pentru R.

### OPERATIUNI FUNDAMENTALE.

#### A. Adunarea.

Fie de adunat:	373
	+ 5.489
	+ 70.192
suma	= 76.054

Tragem de maneta de anulare generală G, aducînd toate elementele mașinii la zero indicatoarele roșii de blocaj ale lui E, A și Z (vezi 10 și 11 din deser. mașinii) devin invizibile, căruciorul se aduce cu butonul de manevră (4) în poziția 1 (vezi 16).

Cu ajutorul manetelor 1 - 3 înscrîm în E numărul 373 pe care printr-o rotație pozitivă a manivelei M îl înregistrăm în R, în același timp în Z apare cifra albă 1, reprezentînd numărul de rotații.

Cu ajutorul manetei de anulare X anulăm în E numărul 373 și cu manetele 1 - 4 formăm al doilea termen al adunării numărul 5489, pe care printr-o rotație pozitivă a manivelei M îl înregistrăm în R, unde se acumulează cu primul termen, apărînd suma parțială 5.862, în Z apare cifra albă 2.

Semnaleză în E termenul 5.489 și cu manetele 1 - 5 formează în E numărul 70.192, prin încă o rotație pozitivă a manivelei M, acest termen se înregistrează la R, unde se acumulează la suma parțială, apărînd suma totală de 76.054, în Z apare cifra albă 3, drept control că toți trei termeni au fost adunați.

În felul acesta se pot efectua adunări cu un număr oricît de mare de termeni, avînd grijă de a verifica în A de fiecare dată dacă în E s-a înscris numărul exact și în Z dacă au fost adunați toți termeni.

La adunarea numerilor zecimale se separă mai întîi cu ajutorul indicatoarelor de virgulă, în A și R numărul maxim de zecimale și se procedează ca mai sus, ținînd seamă să adunăm unități cu unități, zeci cu zeci, etc.

- b. Scăderea.

Fie de scăzut:	7812	de scăzutul
	935	scăzătorul
	<hr/>	
	6877	diferența.

Cu toate elementele la zero și cu căruciorul la poziția 1 se formează cu manetele 1 - 4 în E de scăzutul 7812 pe care printr-o rotație pozitivă a manivelei M îl înregistrăm în R, se anulează în E și cifra albă în Z și cu manetele 1 - 3 se formează în E scăzătorul 935, pe care printr-o rotație negativă a manivelei M îl scădem din 7812; în R apare diferența 6877, în Z cifra roșie 1 drept control că am efectuat scăderea.

- c. Scăderea repetată.

Fie de efectuat:  $7812 - (935 - 4859 + 5858)$   
 $= 7812 - 11652 = - 3840$

Cu toate elementele la zero și cu căruciorul la poziția 1 formăm în E cu manetele 1 - 4 descăzutul 7812 pe care-l înregistrăm în R printr-o rotație pozitivă a manivelei M, anulăm în E și Z și formăm primul scăzător 935 în E cu manetele 1 - 3 pe care-l scădem din 7812 printr-o rotație negativă a manivelei M; în R ne apare diferența parțială 6877, în Z cifra roșie 1; anulăm în E, unde cu manetele 1 - 4 formăm al doilea termen de scăzut 4859; pe care prin încă o rotație negativă a manivelei M îl scădem din prima diferență parțială + 6877, în R apărind a doua diferență parțială + 2018, în Z cifra roșie 2; anulăm în E și cu manetele 1 - 4 formăm al treilea scăzător 5858, pe care printr-o rotație negativă îl scădem din diferența parțială de + 2018; la ultima rotație negativă a manivelei, clopoțelul mașinii va suna, indicându-ne că în R s-a format un număr negativ, ceea ce la mașină se exteriorizează prin apariția complementului decadic; în R vom avea deci complementul decadic al lui - 3840 care este egal cu 99996160, iar în Z avem cifra roșie 3 care ne arată că am scăzut cei 3 termeni.

- d. Inmulțirea.

Fie de efectuat  $7683 \times 243 = 1866.969$

Tragem pârghia de acumulare generală G, cu manetele 1 - 4, înscrinem în E de înmulțitul 7683 care se înregistrează în R, începând cu prima cifră a înmulțitorului, deci căruciorul la poziția 3, în care poziție se execută două rotații pozitive, în Z apare numărul 200, în R produsul intermediar 1536600. Căruciorul în poziția 2 executăm 4 rotații pozitive, în Z apare numărul 243, în R produsul intermediar 1843910. Căruciorul în poziție 1, executăm 3 rotații pozitive, în Z apare factorul 243, în R produsul 1866969.

Evident, s-ar fi putut începe și cu ultima cifră a multiplicatorului 243 în care caz am fi efectuat în poziția 1 a căruciorului 3 rotații pozitive, în poziția 2 a căruciorului 4 rotații pozitive, în poziția 3 a căruciorului 2 rotații pozitive.

În regula generală se înscrie în E unul din factorii înmulțirii, de obicei cel cu mai multe cifre și se execută atâtea rotații până când apare al doilea factor în R, vom avea atunci produsul.

- 267 -

In cazul înmulțirilor cu zecimale, se detașează mai întâi în R numărul cifrelor zecimale al produsului care este egal cu suma cifrelor zecimale ale factorilor sau numărul zecimalelor din E + numărul zecimalelor din Z - numărul zecimalelor din R.

- e. Inmulțirea prescurtată.

La înmulțirea cu cifre cuprinse între 6 - 9 se poate reduce numărul rotațiilor prin utilizarea complimentului decadic.

$$\begin{aligned} \text{Fie de efectuat } 4567 \times 79 &= 360793 \\ \text{sau } 4567 \times (100-21) &= 360793 \end{aligned}$$

Cu căruciorul la poz.3 și cu toate elementele la zero, formăm cu manetele 1 - 4 în E numărul 4567, dăm o rotație pozitivă, în Z apare numărul 100, căruciorul la poz.2, executăm 2 rotații negative, în Z avem:  $100 - 20 = 80$ , căruciorul în poziția 1, executăm o rotație negativă, în Z avem  $100 - 21 = 79$ , în cifre albe, în R apare produsul 360793 și în loc de 16 rotații am efectuat numai 4.

- f. Impărțirea.

Prin scăderi repetate.

Fie de efectuat împărțirea:  $330 : 25 = 13,2$

Tragem de pârghia de anulare generală G și cu căruciorul la poz.10 înscriem în E cu manetele 2 și 3 de împărțitul 330, printr-o rotație pozitivă a manivelei M îl înregistrăm în R, separînd cu reperul de virgulă zecimalele, adică 330,000; anulăm în Z cifra albă 1 și înscriem în E cu manetele 2 și 3 împărțitorul 25, separînd și aci zecimalele, adică 25,0.

Efectuăm rotația negativă, în R rămîne restul 8, întrucît 25 se poate scădea numai o singură dată din 33; dacă am executa încă o rotație negativă, ar suna clopo-

telul și în R ar apărea un număr negativ, adică complimentul decadic, o atare rotație greșită se drege, executând o rotație în sens opus, adică una pozitivă.

Mutăm căruciorul în poziția 9, efectuând 3 rotații negative, în R ne apare un rest de 5, în Z avem numărul roșu 13.

Mutăm căruciorul în poziția 8 și efectuăm 2 rotații negative, în R ne apare restul zero, în Z avem citul 13,2.

Poziția virgulei zecimale al citului din Z se determină după regula: numărul zecimalelor de împărțitului, minus cel al împărțitorului = numărul zecimalelor citului sau: numărul cifrelor în R minus numărul cifrelor din E = numărul cifrelor Z, în cazul nostru avem în R 9 cifre zecimale, în E o cifră zecimală, în Z separăm deci  $9 - 1 = 8$  cifre zecimale.

- g. Impărțirea prin înmulțire.  
(impărțire sintetică)

Impărțirea la mașina de calcul se poate înlocui cu înmulțirea care este mai simplă: se înscrie în E împărțitorul și se execută atâtea rotații pozitive până când apare în R deîmpărțitorul, în care caz în Z avem citul în cifre albe.

Fie de executat:  $8234,28 : 26,7 = 308,4$

sau  $26,7 \times X = 8234,28.$

Cu toate elementele mașinii la zero și cu căruciorul la poz. 9, formăm în E manetele 3 - 5 factorul 26 7; prin rotații pozitive încercăm acum să ne apropiem pe cât posibil de deîmpărțitul 8234,28, astfel efectuând în poz. 9 a citului 3 rotații pozitive, apare în R 8010, o separăm virgula zecimală după cum știm în E la poz. 3 și în R la poz. 9, în Z vom avea poziția virgulei zecimale  $b = 9 - 3 = 6.$

Căruciorul la poz. 8 executând o rotație pozitivă, în R avem acum 8277, deci o rotație negativă și mutăm căruciorul la poz. 7 în care executăm 8 rotații pozitive, în R apărind numărul 8223,6, mutăm căruciorul la poz. 6, după 4 rotații pozitive apare în R deîmpărțitul 8234,28, în Z avem citul 308,4.

Ca regulă generală, amintim că numărul din R să fie mai mic sau cel mult egal cu deîmpărțitul.

- 269 -

- h. Impărțire prin compliment decadic.Fie de efectuat:  $784 : 32 = 24,5$ 

Cu toate elementele la zero și cu căruciorul în poz. 5, formăm în E de împărțitul 784, cu manetele 3 - 5 pe care printr-o rotație pozitivă îl înregistrăm în R, anulăm în E și în Z și înscrinem în E cu maneta 4 - 7 un compliment decadic al lui 32, ca de exemplu  $10.000 - 32 = 9968$ , (am putea forma și complimentul decadic al lui  $100.000 - 32 = 99968$ ).

Separăm zecimalele în R la poz. 6<sup>a</sup>, în E la poz. 3<sup>a</sup> și în Z la poz. 6 - 3 = 3<sup>a</sup>.

Dacă executăm acum rotații pozitive, citul va apărea în R și în Z; dacă executăm cumva o rotație prea mult, atunci citul din R și Z nu mai e egal și în R apar o serie de 9, operația se execută în felul următor:

în poz. 5 <sup>a</sup>	căruciorului	2	rot. pozitive
în poz. 4 <sup>a</sup>	"	4	" "
în poz. 3 <sup>a</sup>	"	5	" "

în Z și R vom avea același cit 24,5, deci operația împărțirii e terminată, dacă în R și în Z avem același număr care reprezintă chiar citul.

- 1. Extragerea rădăcinii patrute.

Operația extragerii rădăcinii patrute la mașina de calcul se bazează pe proprietatea că suma primelor  $n$  numere impare din șirul numerilor este egală cu tratul lui  $n$  și că radicalul acestui patrat este egal cu numărul cifrelor șirului, într-adevăr:

1	= 1	= 1
1 + 3	= 2	= 4
1 + 3 + 5	= 3	= 9
1 + 3 + 5 + 7	= 4	= 16
1 + 3 + 5 + 7 + 9	= 5	= 25

- 270 -

Extragem rădăcinii patrute se poate deci înlocui cu o operație de scădere la mașina de calcul prin faptul că din patratul respectiv se scad succesiv toate numerele impare  $1 + 3 + 5, \text{etc.}$ , numărul scăderilor apare în cifre roșii în Z și este egal cu  $\sqrt{n}$ .

Patrute cu mai multe cifre se împart ca și la extragerea rădăcinii patrute în aritmetică, în dreapta și în stînga virgulei zecimale, în grupe de câte 2 cifre, numărul grupelor întregilor (în stînga virgulei zecimale), este egal cu numărul cifrelor întregilor rădăcinii.

Fie de efectuat:  $\sqrt{590\ 49} = 24,3$  la mașina de calcul

Cu toate elementele la zero și cu căruciorul la poz.8, formăm în E cu manetele 1-5 numărul 590 49, printr-o rotație pozitivă a manivelei M îl înregistrăm în R, anulăm în E și Z și rixăm poziția virgulei zecimale cu indicatorul de virguliă.

Incepînd de la virgula zecimală, formăm în stînga și în dreapta ei grupa de câte 2 cifre, deci vom avea grupele 5, 90, 49.

Din primul grup, care în cazul nostru constă numai dintr-o singură cifră (5), scădem acum succesiv toate numerele impare, începînd cu 1, formăm deci în E cifra 1 cu maneta 5 care se găsește deasupra cifrei 5 din R și scădem, formăm în E cu maneta 5 cifra 3, scădem.

În R în dreptul manetei 5 din E se găsește cifra 1, deci numai putem scădea dintr-însa cifra următoare impară 5.

În Z vom avea cifra roșie 2 care reprezintă prima cifră a rădăcinii patrute.

Mutăm căruciorul în poz.7, în E formăm cu ajutorul manetei 5 din cifra 3 un 4, egală cu dublul primei cifre roșii Z și cu maneta următoare (4) formăm succesiv cifrele: 1, 3, 5, astfel în E se formează numerele 41, 43, 45, .....etc., cari prin câte o rotație negativă se scad în modul următor: formăm în E cu maneta 5 și 4 ma 41 și scădem, formăm în E cu manetele 5 și 4 pe 43, scădem,

"	"	"	"	"	"	45,	"
"	"	"	"	"	"	47,	"

În Z apar în culoare roșie cifre întregi ale rădăcinii patrute, adică 24, mutăm căruciorul în poz.6, formăm cu man.5, 4 și 3 numărul  $481 = (2 \times 24 \times 10) + 1$  și scădem, formăm cu man.5, 4 și 3 numărul  $483 = (2 \times 24 \times 10) + 3$  și scădem, " " " " "  $485 = (2 \times 24 \times 10) + 5$  și scădem, în R vom avea zero, în Z numărul 24 3 în cifre roșii, care reprezintă rădăcina patrută a numărului dat.

- 271 -

- j. Efectuarea produsului unui număr  
și o diferență.

Fie de efectuat:

478 (679 - 596) pentru a nu mai face diferență  
679 - 596 = 83 și a efectua separat înmulțirea, procedăm în  
modul următor:

Cu căruciorul la poz.1 și cu toate ele-  
mentele la zero, formăm în E cu manetele 1 3 numărul 478,  
făcînd în gînd diferența dintre

$$\begin{array}{r} 679 \\ 596 \\ \hline +--+ \\ 123 \end{array}$$

scăzînd succesiv unități din unități, zeci din zeci, etc., e-  
fectuînd la poziția unităților produsul  $478 \times (+3)$ , în R  
ne va apare 1434, mutăm căruciorul la poziția 2 și efectuăm  
diferența zecilor  $7 - 9 = -2$ , deci 2 rotații, în R ne va a-  
pare numărul negativ 9991874 (la mașina de calcul numerile  
negative se exteriorează prin apariția complimentului deca-  
dic), intradevăr vom avea

$$\begin{array}{r} + 1434 \\ - (20 \times 478) = - 9560 \\ \hline - 8126 \\ 991874 \\ \hline 10000 \end{array}$$

mutăm căruciorul la poz.3 și efectuăm în gînd dif.sutelor  
 $6 - 5 = +1$ , deci o rotație pozitivă, în R obținem produsul  
efectuat 39674; intradevăr vom avea

$$\begin{array}{r} - 8126 \\ + (10 \times 478) = + 47800 \\ \hline + 39674 \end{array}$$

Dacă am fi avut de efectuat  $478 \times$   
(596 - 679), am fi procedat la fel, inversînd sensul rotațiilor  
obținînd în R complimentul decadic 99960326 - pe

$$\text{care scîzînd 1 din } 100000 = \frac{100000}{39674}$$

Calculul intersecției înainte cu mașina  
de calculat.

Cadastrul român, după cum am amintit,  
întrebuințează sistemul de axe coordonate cu axa de + y  
spre Nord și + x spre Est, așa cum se vede în Fig.191, măsura-  
rînd pe teren direct azimutul, adică orientarea  $\alpha$ , care acum



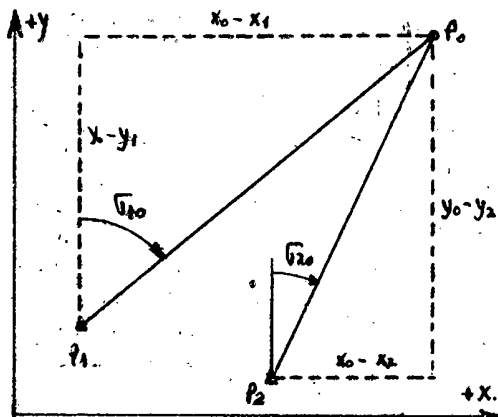
nu mai este ca in cazul sistemului de mai inainte dată de relația

$$\text{tg } \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ci este dată de relația

$$\text{tg } \beta = \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

Dispunind de mașină de calcul și de tabele de valori naturale ale funcțiilor trigonometrice, putem stabili cu ușurință coordonatele unui punct  $P_0$ , atunci cind cunoaștem și orientările  $\beta_{10}$  și  $\beta_{20}$  ale dreptelor  $P_1 P_0$  și  $P_2 P_0$  cu ajutorul formulelor de mai jos, obținute prin următorul artificiu de calcul



scriind:

$$x_0 = x_1 + (x_0 - x_1) = x_2 + (x_0 - x_2)$$

Observind însă Fig. 183, această relație devine:

$$x_0 = x_1 + (y_0 - y_1) \text{tg } \beta_{10} = x_2 + (y_0 - y_2) \text{tg } \beta_{20}$$

$$\text{tg } \beta_{20}$$

sau:

$$x_1 + (y_0 - y_1) \text{tg } \beta_{10} = x_2 + (y_0 - y_2) \text{tg } \beta_{20}$$

$$\text{tg } \beta_{20}$$

De unde;

Fig. 191.

$$y_0 = \frac{x_2 - x_1 + y_1 \text{tg } \beta_{10} - y_2 \text{tg } \beta_{20}}{\text{tg } \beta_{10} - \text{tg } \beta_{20}}$$

Ajungind astfel la relațiile cu cari putem calcula la mașină valorile lui  $x_0$  și  $y_0$ , adică la relațiile:

$$y_0 = \frac{x_2 - x_1 + y_1 \text{tg } \beta_{10} - y_2 \text{tg } \beta_{20}}{\text{tg } \beta_{10} - \text{tg } \beta_{20}}$$

$$x_0 = x_1 + (y_0 - y_1) \cdot \text{tg } \beta_{10} = x_2 + (y_0 - y_2) \text{tg } \beta_{20}$$

Obişnuit orientările  $\beta_{10}$  și  $\beta_{20}$  sînt măsurate în sistemul centesimal.

Pentru a vedea cum rezolvăm problema aceasta cu ajutorul mașinei de calculat, să luăm un exemplu numeric și anume:

$$P_1 \quad \begin{aligned} x_1 &= 1427,53 \text{ m} \\ y_1 &= 2158,71 \text{ m} \\ &= 42^\circ,1516 \end{aligned}$$

$$P_2 \quad \begin{aligned} x_2 &= 3012,46 \text{ m} \\ y_2 &= 1635,24 \text{ m} \\ &= 381^\circ,2210 \end{aligned}$$

Intreg calculul se trece într-un tablou simplu ca cel de mai jos, în care se trec în primul rînd datele (coordoanatele punctelor  $P_1, P_2$  și orientările  $\beta_{10}, \beta_{20}$ ), apoi se scot din tabelele de valori naturale  $\text{tg } \beta_{10}$  și  $\text{tg } \beta_{20}$  și apoi urmează calculul lui  $y_0$  și  $x_0$ , care se face cu mașina de calculat, astfel:

- 273 -

Punctul	x	y	tg sau ctg $\theta$	$\theta$
1	$x_1$	$y_1$	Val. tg sau ctg $\theta_{10}$	$\theta_{10}$
0				
2	$x_2$	$y_2$	Val. tg sau ctg $\theta_{20}$	$\theta_{20}$

Pentru calculul intersecției înainte la mașina de calculat formăm următorul tablou:

	x	y	tg sau ctg $\theta$	$\theta$
1	1427,53	2158,71	+ 0,779613	42° 15' 16''
0	2453,53	3474,75	tg	
2	3012,46	1635,24	- 0,303844	381° 22' 10''

Cu toate elementele la zero și cu căruciorul la poz. 1 înscrinem în E  $x_2 = 3012,46$  cu manetele 1 - 6 și cu o rotație +, îl înregistrăm în R, tot cu manetele 1 - 6 formăm în E  $x_1 = 1427,53$  pe care cu o rotație a manivelei îl scădem din  $x_2$ , în R vom avea dif.  $x_2 - x_1 = 158,93$ , aducem căruciorul la poz. 1 și cu manetele 1 - 6 formăm  $y = 2158,71$ , în E pe care îl înmulțim cu tg  $\theta_{10}$ , ținând cont de semnul tg-ei, în felul următor:

poz. 1 a căruciorului	+ 3 rotații
" 2	+ 1 "
" 3	+ 6 "
" 4	+ 9 "
" 5	+ 7 "
" 6	+ 7 "

în Z ne va apare tg  $\theta_{10} = 0,779613$ , în R vom avea efectuate operațiile  $x_2 - x_1 + Y_1 \cdot tg \theta_{10} = 3267,88637923$ .

Mutăm căruciorul înapoi la poz. 1 și cu manetele 1 - 6 formăm  $Y_2 = 1635,24$ , pe care-l înmulțim, (tot pozitiv în cazul acesta, întrucât) - ( $1635,24 \times (-0,303844)$ ) = +  $1635,24 \times 0,303844$ ) cu 0,303844 în felul următor:

- 274 -

poz. 1	a căruciorului	+ 4	rotații
" 2	"	+ 4	"
" 3	"	+ 8	"
" 4	"	+ 3	"
" 5	"	0	"
" 6	"	+ 3	"

în R vom avea efectuat numărătorul relației:

$$y_0 = \frac{x_2 - x_1 + y_1 \operatorname{tg} \beta_{10} - y_2 \operatorname{tg} \beta_{20}}{\operatorname{tg} \beta_{10} - \operatorname{tg} \beta_{20}}$$

iar în Z vom avea acumulată:

$$\operatorname{tg} \beta_{10} - \operatorname{tg} \beta_{20} = 1,083457.$$

Cu manetele 1 - 7 formăm numitorul:

1.083457, anulăm în Z și putem efectua împărțirea, în Z ne va apare cîțul care reprezintă  $Y_0 = 3474,75$ .

Pentru calculul lui  $X_0$  folosim relațiile:

$$X_0 = X_1 + (Y_0 - Y_1) \cdot \operatorname{tg} \beta_{10} = X_2 + (Y_0 - Y_2) \cdot \operatorname{tg} \beta_{20}.$$

Cu căruciorul la poz.7 și cu toate elementele la zero, formăm în E cu manetele 1 - 6 numărul  $X_1 = 1427,53$  și printr-o rotație + 1, înregistrăm în R, anulăm în E și tot acolo cu manetele 1 - 6 formăm  $\operatorname{tg} \beta_{10} = 0,779613$  pe care o înmulțim cu dif. între  $Y_0 - Y_1$  în felul următor:

la poz. 1	a căruciorului	+ 4	rotații
" 2	"	0	"
" 3	"	4	"
" 4	"	+ 2	"
" 5	"	+ 3	"
" 6	"	+ 1	"

obținînd în R,  $X_0 = 2453,53$

pentru verificare calculăm pe  $X_0$  și din a doua relație.

Cu toate elementele la zero și căruciorul la poz.7 formăm în E cu manetele 1 - 6,  $X_2 = 3012,46$  și îl înregistrăm în R, anulăm în Z și în E și cu manetele 1 - 6 formăm  $\operatorname{tg} \beta_{20} = 0,303844$  pe care-l înmulțim cu  $(Y_0 - Y_2)$ .  
 $(- 0,303844) = (Y_2 - Y_0) \cdot 0,303844,$

avem la poz. 1 a căruciorului - 1 rotații

" 2	"	- 5	"
" 3	"	+ 1	"
" 4	"	- 4	"
" 5	"	+ 2	"
" 6	"	- 2	"

în R ne apare același  $X_0 = 2453,535$ , deci calculul e bun.

Problema Nr. 5 intersecție laterală.

Dacă am avea cazul din Fig. 184, adică am avea date punctele  $P_1$ ,  $P_2$  și se cere determinarea coordonatelor punctului  $P_0$ , însă unul din punctele date, de exemplu punctul  $P_2$  nu este staționabil, sîntem în cazul intersecției laterale, cînd, pentru ca problema să poată fi soluționată, este necondiționat nevoie ca punctul  $P_0$  să fie staționabil.

În acest fel avem posibilitate de a măsura unghiurile  $\alpha$  și  $\beta$  cîzînd în cazul II al problemei intersecției înaintate.

De aci încolo mersul și rezolvarea problemei este identică cu cea a intersecției înaintate.

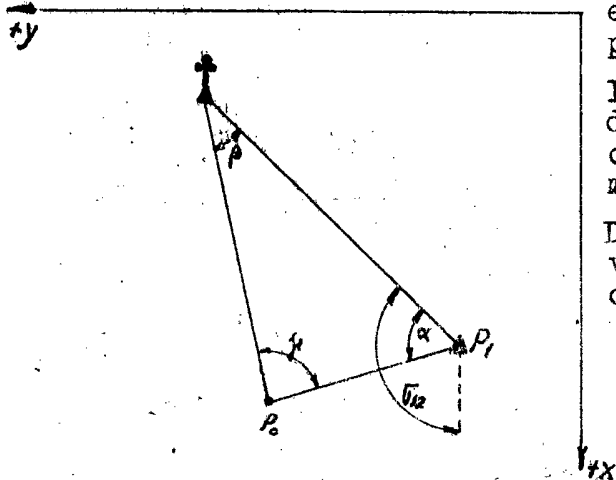


Fig. 192.

Problema Nr. 6 intersecție înapoi.

Cunoscînd coordonatele a trei puncte nestaționabile  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ , putem determina coordonatele unui al patrulea punct  $P_0$  dacă în acest punct putem face stație și măsura unghiurile  $\alpha$  și  $\beta$  din Fig. 193.

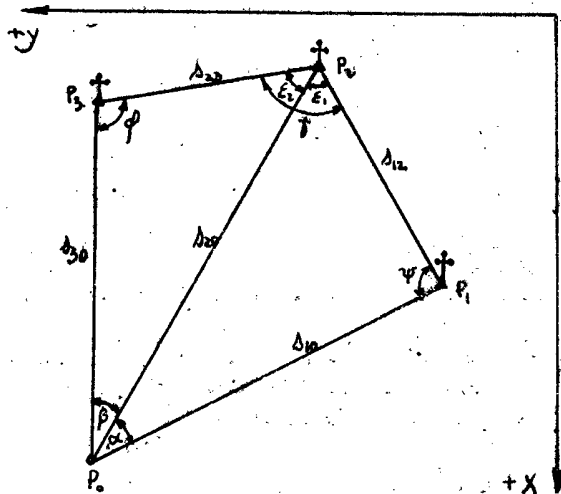


Fig. 193.

Întradevăr, dacă putem calcula valorile unghiurilor  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\epsilon_1$  și  $\epsilon_2$ , problema se reduce la două intersecții înaintate, adică avem coordonatele a două puncte și se cunosc toate unghiurile, ca atare se poate determina cel de al treilea punct.

Din cele arătate pînă acum se pot calcula orientările  $\psi_{12}$ ,  $\psi_{23}$ , precum și  $\psi_{21}$ ,  $\psi_{32}$  din relațiile cunoscute:

- 276 -

$$\operatorname{tg} \beta_{12} = \frac{\Delta Y_{12}}{\Delta X_{12}} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}; \quad \operatorname{tg} \beta_{23} = \frac{\Delta Y_{23}}{\Delta X_{23}} = \frac{Y_3 - Y_2}{X_3 - X_2}$$

Iar:  $\beta_{21} = \beta_{12} + 180^\circ$   $\beta_{32} + 180^\circ = \beta_{23}$

Evident că la calculul lui  $\beta_{12}$  și  $\beta_{23}$  se va aplica și relația de control, adică:

$$\operatorname{tg}(45^\circ + \beta_{12}) = \frac{\Delta X_{12} + \Delta Y_{12}}{\Delta X_{12} - \Delta Y_{12}}; \quad \operatorname{tg}(45^\circ + \beta_{23}) = \frac{\Delta X_{23} + \Delta Y_{23}}{\Delta X_{23} - \Delta Y_{23}}$$

Urmează apoi calcularea laturilor  $S_{12}$  și  $S_{23}$ , știind că:

$$S_{12} = \frac{\Delta X_{12}}{\cos \beta_{12}} = \frac{\Delta Y_{12}}{\sin \beta_{12}}; \quad S_{23} = \frac{\Delta X_{23}}{\cos \beta_{23}} = \frac{\Delta Y_{23}}{\sin \beta_{23}}$$

Având calculate orientările  $\beta_{12}$  și  $\beta_{23}$  putem determina valoarea unghiului  $\gamma$  care este:

$$\gamma = \beta_{23} - \beta_{12} + 180^\circ$$

Din patrulaterul  $P_0, P_1, P_2, P_3$  se obține:

$$\alpha + \beta + \gamma + \psi + \varphi = 360^\circ$$

$$\gamma + \psi = 360^\circ - (\alpha + \beta + \varphi).$$

Urmează a se mai găsi o relație pentru  $\gamma$  și  $\psi$  spre a putea determina valoarea lor.

Această relație o deducem aplicând un artificiu de calcul.

Din fig. vedem că:

$$\frac{S_{20}}{\sin \psi} = \frac{S_{23}}{\sin \beta} ; \quad S_{20} = \frac{S_{23}}{\sin \beta} \cdot \sin \psi \quad \text{și}$$

$$\frac{S_{20}}{\sin \psi} = \frac{S_{12}}{\sin \alpha} ; \quad S_{20} = \frac{S_{12}}{\sin \alpha} \cdot \sin \psi$$

deci:

$$\sin \psi \cdot \frac{S_{23}}{\sin \beta} = \frac{S_{12} \sin \psi}{\sin \alpha}$$

de unde:

$$\frac{\sin \psi}{\sin \beta} = \frac{S_{12} \cdot \sin \beta}{S_{23} \cdot \sin \alpha} = \operatorname{tg} \lambda.$$

Valoarea unghiului  $\lambda$  se deduce din relația aceasta:

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{S_{12} \sin \beta}{S_{23} \sin \alpha}$$

în care în partea doua a relației avem cunoscute toate elementele.

Unghiul  $\lambda$  fiind determinat, printr-un artificiu de calcul se ajunge la determinarea lui  $\gamma$  și  $\psi$ . Intrașevăr, din relația:

$$\frac{\sin \psi}{\sin \gamma} = \operatorname{tg} \lambda$$

Avem:

$$\frac{\sin \psi + \sin \gamma}{\sin \psi - \sin \gamma} = \frac{1 + \operatorname{tg} \lambda}{1 - \operatorname{tg} \lambda}$$

- 277 -

Această expresiune făcîndu-o logaritmabilă:

$$\frac{2 \cdot \sin \frac{\psi + \gamma}{2} \cdot \cos \frac{\psi - \gamma}{2}}{2 \cdot \sin \frac{\psi - \gamma}{2} \cdot \cos \frac{\psi + \gamma}{2}} = \operatorname{tg} (45^\circ + \lambda)$$

Adică:

$$\operatorname{tg} \frac{\psi + \gamma}{2} \cdot \operatorname{cotg} \frac{\psi - \gamma}{2} = \operatorname{tg} (45^\circ + \lambda)$$

Sau:

$$\operatorname{tg} \frac{\psi - \gamma}{2} = \operatorname{tg} \frac{\psi + \gamma}{2} \cdot \operatorname{cotg} (45^\circ + \lambda)$$

Din această relație rezultă  $\frac{\psi - \gamma}{2}$ , dar avînd

$\frac{\psi + \gamma}{2}$  se poate găsi valorile unghiurilor  $\gamma$  și  $\psi$ .

Odată unghiurile  $\gamma$  și  $\psi$  determinate, se vor afla și valorile unghiurilor  $\varepsilon_1$  și  $\varepsilon_2$ :

$$\varepsilon_1 = 180^\circ - (\alpha + \psi); \quad \varepsilon_2 = 180^\circ - (\beta + \gamma)$$

Așa că problema de acum este redusă la două intersecții înainte, putînd calcula orientările  $\beta_{10}, \beta_{20}, \beta_{30}$  și laturile  $S_{10}, S_{20}, S_{30}$ ; din relațiile cunoscute, adică:

$$\beta_{10} = \beta_{12} - \psi; \quad \beta_{20} = \beta_{23} - \varepsilon_2; \quad \beta_{30} = \beta_{32} + \gamma$$

$$S_{10} = S_{12} \frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \alpha}; \quad S_{20} = S_{12} \frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \psi} = S_{23} \frac{\sin \varepsilon_2}{\sin \gamma}; \quad S_{30} = S_{23} \frac{\sin \varepsilon_2}{\sin \beta}$$

Si în fine coordonatele căutate sînt date de următoarele trei relații, din care una ne servește pentru calcule, iar celelalte două pentru control:

$$x_0 = x_1 + S_{10} \cos \beta_{10} = x_2 + S_{20} \cos \beta_{20} = x_3 + S_{30} \cos \beta_{30}$$

$$y_0 = y_1 + S_{10} \sin \beta_{10} = y_2 + S_{20} \sin \beta_{20} = y_3 + S_{30} \sin \beta_{30}$$

Exemplu practic:

Date:  $P_1 \begin{cases} x_1 = 2146,289 \\ y_1 = -2816,862 \end{cases} \quad P_2 \begin{cases} x_2 = 1778,740 \\ y_2 = -5646,880 \end{cases} \quad P_3 \begin{cases} x_3 = 2850,280 \\ y_3 = -4080,000 \end{cases}$

$$\alpha = 54^\circ 46' 26,4 \quad \beta = 14^\circ 57' 36,9$$

Se cere:  $P_0 \begin{cases} x_0 = ? \\ y_0 = ? \end{cases}$

Toate datele ca și calculele se trec într-un tablou:

Calculul azimutelor:

$$\operatorname{tg} \beta_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \operatorname{tg} \beta_{32} = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}$$

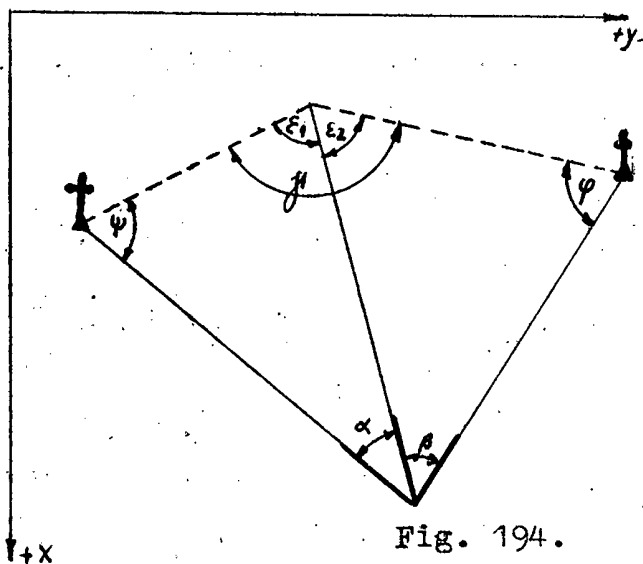


Fig. 194.

$y_2 = -5646,880$	$x_2 = 1778,740$	$y_2 = -5646,880$	$x_2 = 1778,740$
$y_1 = -2816,862$	$x_1 = 2146,289$	$y_3 = -4080,000$	$x_3 = 2850,280$
$y_2 - y_1 = -2830,018$	$x_2 - x_1 = -367,549$	$y_2 - y_3 = -1566,880$	$x_2 - x_3 = -1071,540$
$\log \Delta y = 3,4517891$		$\log \Delta y = 3,1950357$	
$+ \text{colog } \Delta x = 7,4346848$		$+ \text{colog } \Delta x = 6,9699916$	
$\log \text{tg } \rho'_{12} = 0,8864739$		$\log \text{tg } \rho'_{32} = 0,1650273$	
$\rho'_{12} = 82^\circ 36' 00,43 \quad \rho'_{12} = 262^\circ 36' 00,43 \quad \rho'_{32} = 55^\circ 37' 58,8 \quad \rho'_{32} = 235^\circ 37' 58,8$			
$45^\circ + \rho'_{12} = 307^\circ 36' 00,57$		$45^\circ + \rho'_{32} = 280^\circ 37' 58,8$	

Pr o b a

$\Delta x = -367,549 \quad \log(\Delta x + \Delta y) = 3,5088196$	$\Delta x = -1071,540 \quad \log(\Delta x + \Delta y) = 3,4213439$
$\Delta y = -2830,018 \quad \log(\Delta x - \Delta y) = 6,6086293$	$\Delta y = -1566,880 \quad \log(\Delta x - \Delta y) = 7,2050966$
$\Delta x + \Delta y = -3197,568 \quad \log \text{tg}(45^\circ + \rho'_{12}) = 0,1134489$	$\Delta x + \Delta y = -2638,420 \quad \log \text{tg}(45^\circ + \rho'_{32}) = 0,7264405$
$\Delta x - \Delta y = +2462,469 \quad 45^\circ + \rho'_{12} = 52^\circ 23' 59,54$	$\Delta x - \Delta y = +498340 \quad 45^\circ + \rho'_{32} = 10^\circ 37' 58''$
$45^\circ + \rho'_{12} = 307^\circ 36' 00,46$	$45^\circ + \rho'_{32} = 280^\circ 37' 58,8$

- 2. Calculul laturilor S<sub>12</sub> și S<sub>23</sub>

$S_{21} = \frac{\Delta y_{21}}{\sin \alpha_{21}} = \frac{\Delta x_{21}}{\cos \alpha_{21}}$		$S_{32} = \frac{\Delta y_{32}}{\sin \alpha_{32}} = \frac{\Delta x_{32}}{\cos \alpha_{32}}$	
$\log \Delta y_{21} = 3,4517891$	$\log \Delta x_{21} = 2,5653152$	$\log \Delta y_{32} = 3,1950357$	$\log \Delta x_{32} = 3,0300084$
$^+ \text{colog} \sin \alpha_{21} = 0,0036322$	$^+ \text{colog} \cos \alpha_{21} = 0,8901060$	$^+ \text{colog} \sin \alpha_{32} = 0,00833152$	$^+ \text{colog} \cos \alpha_{32} = 0,2483425$
$\log S_{21} = 3,4554213$	$\log S_{21} = 3,4554212$	$\log S_{32} = 3,2783509$	$\log S_{32} = 3,2783509$
$S_{21} = 2853,785$	$S_{21} = 2853,785$	$S_{32} = 1898,239$	$S_{32} = 1898,239$

- 3. Calculul unghiurilor  $\gamma$  și  $\psi$

$\text{tg} \frac{\psi - \gamma}{2} = \text{ctg} (45^\circ + \lambda) \cdot \text{tg} \frac{\gamma + \psi}{2}; \text{tg} \lambda = \frac{S_{12} \cdot \sin \beta}{S_{23} \cdot \sin \alpha}; \frac{\psi + \gamma}{2} = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$	
$\log S_{12} = 3,4554213$	$\log S_{23} = 3,2783509$
$+ \text{colog} \sin \alpha = 0,0878400$	$+ \text{colog} \sin \beta = 0,5881298$
$\log \frac{S_{12}}{\sin \alpha} = 3,5432613$	$\log \frac{S_{23}}{\sin \beta} = 3,8664807$
$\log \frac{S_{12}}{\sin \alpha} = 3,5432613$	$\alpha_{21} = 82^\circ 36' 00,43$
$\text{colog} \frac{S_{23}}{\sin \beta} = 4,1335193$	$\alpha_{23} = 55^\circ 37' 58,8$
$\log \text{tg} \lambda = 9,6767806$	$\gamma = 26^\circ 58' 01,63$
$\lambda = 25^\circ 24' 43,77$	$\alpha = 54^\circ 46' 26,40$
$45 + \lambda = 70^\circ 24' 43,77$	$\beta = 14^\circ 57' 36,90$
$\log \text{cotg} (\lambda + 45^\circ) = 9,5512608$	$\alpha + \beta + \gamma = 96^\circ 42' 04,93$
$\log \text{tg} \frac{\psi + \gamma}{2} = 0,0509118$	$\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = 48^\circ 21' 02,46$
$\log \text{tg} \frac{\psi - \gamma}{2} = 9,6021726$	$\frac{\psi + \gamma}{2} = 131^\circ 38' 57,54$
$\frac{\psi - \gamma}{2} = 21^\circ 48' 23,51$	$\frac{\psi - \gamma}{2} = 21^\circ 48' 23,51$
	$\psi = 109^\circ 49' 34,03$
	$\gamma = 153^\circ 27' 21,05$
$\alpha = 54^\circ 46' 26,40$	$\beta = 14^\circ 57' 36,90$
$\alpha_{21} = 82^\circ 36' 00,43$	$\alpha_{23} = 55^\circ 37' 58,8$
$\psi = 109^\circ 49' 34,03$	$\gamma = 153^\circ 27' 21,05$
$\psi = 109^\circ 49' 34,03$	$\beta + \gamma = 168^\circ 24' 57,95$
$\alpha + \psi = 164^\circ 36' 00,43$	$\beta + \psi = 168^\circ 24' 57,95$
$\beta + \psi = 168^\circ 24' 57,95$	$\alpha_{20} = 192^\circ 25' 34,46$
$\alpha_{20} = 192^\circ 25' 34,46$	$\alpha_{20} = 224^\circ 02' 56,75$



- 4. Calculul laturilor  $S_{10}$ ,  $S_{20}$ ,  $S_{30}$ .

$\frac{S_{12}}{\sin \alpha} = \frac{S_{10}}{\sin \varepsilon_1} = \frac{S_{20}}{\sin \psi}$		$\frac{S_{23}}{\sin \beta} = \frac{S_{20}}{\sin \varphi} = \frac{S_{30}}{\sin \varepsilon_2}$	
$S_{10}$	$S_{20}$	$S_{20}$	$S_{30}$
$\log \frac{S_{12}}{\sin \alpha} = 3,5432613$	$\log \frac{S_{12}}{\sin \alpha} = 3,5432613$	$\log \frac{S_{23}}{\sin \beta} = 6,1335193$	$\log \frac{S_{23}}{\sin \beta} = 6,1335193$
$\log \sin \varepsilon_1 = 9,4236941$	$\log \sin \psi = 9,9734178$	$\log \sin \varphi = 7,3831598$	$\log \sin \varepsilon_2 = 7,0357310$
$\log S_{10} = 2,9669554$	$\log S_{20} = 3,5166791$	$\log S_{20} = 3,5166791$	$\log S_{30} = 3,1692503$
$S_{10} = 926,734$	$S_{20} = 3286,095$	$S_{20} = 3286,095$	$S_{30} = 1476,557$

- 5. Calculul coordonatelor:  $X_0$ ,  $Y_0$ .

$\Delta y_1 = S_{10} \sin \beta_{10}$	$\Delta x_1 = S_{10} \cos \beta_{10}$	$\Delta y_2 = S_{20} \sin \beta_{20}$	$\Delta x_2 = S_{20} \cos \beta_{20}$
$y_0 = y_1 + \Delta y_1$	$x_0 = x_1 + \Delta x_1$	$y_0 = y_2 + \Delta y_2$	$x_0 = x_2 + \Delta x_2$
$\log S_{10} = 2,9669554$	$\log S_{10} = 2,9669554$	$\log S_{20} = 3,5166791$	$\log S_{20} = 3,5166791$
$\log \sin \beta_{10} = 9,333769$	$\log \cos \beta_{10} = 9,9896773$	$\log \sin \beta_{20} = 9,9677202$	$\log \cos \beta_{20} = 9,5879842$
$\log \Delta y_1 = 2,3003353$	$\log \Delta x_1 = 2,9566327$	$\log \Delta y_2 = 3,4813993$	$\log \Delta x_2 = 3,1046633$
$\Delta y_1 = 199,680$	$\Delta x_1 = 904,966$	$\Delta y_2 = 3029,697$	$\Delta x_2 = 1272,516$
$\Delta y_1 = -2816,862$	$x_1 = 2146,289$	$y_2 = -5646,880$	$x_2 = 1778,740$
$y_0 = -2617,182$	$x_0 = 3051,256$	$y_0 = -2617,183$	$x_0 = 3051,256$
Coordonate definitive:		$y_0 = -2617,182$	$x_0 = 3051,256$

Metoda Cassini.

Pentru a calcula o intersecție înapoi cu mașina de calculat, este întrebuițată fie metoda Cassini, fie metoda Collin.

Să vedem în primul rând metoda Cassini,

arătînd formulele utilizate în calculul cu mașină.

Fiind date punctele  $P_1, P_2, P_3$ , prin coordonatele lor și cerîndu-se determinarea coordonatelor unui alt punct  $P_0$ , din care s-au măsurat, dînd viza la cele trei puncte date, unghiurile  $\alpha$  și  $\beta$ , știind că prin trei puncte se poate duce un cerc, putem construi figura 195, unde prin punctele  $P_1, P_2, P_3$  și prin  $P_1, P_2, P_0$ , am dus cîte un cerc cu centrele în  $O_1$  și  $O_2$ .

Punctele  $M$  și  $N$ , aflate pe cele două cercuri, determinate prin diametrele  $P_2M$  și  $P_2N$ , sînt coliniare cu punctul  $P_0$ , deoarece suma unghiurilor

$$\widehat{MP_0P_2} + \widehat{P_2P_0N} = 180^\circ,$$

ambele aceste unghiuri fiind unghiuri drepte.

Aflînd coordonatele punctelor  $M$  și  $N$  se va afla și orientarea acestei drepte, după care se va determina și orientarea dreptei  $P_0P_1$ , ca și lungimea ei, ceea ce apoi ne va conduce la rezolvarea problemei, adică la stabilirea coordonatelor lui  $P_0$ .

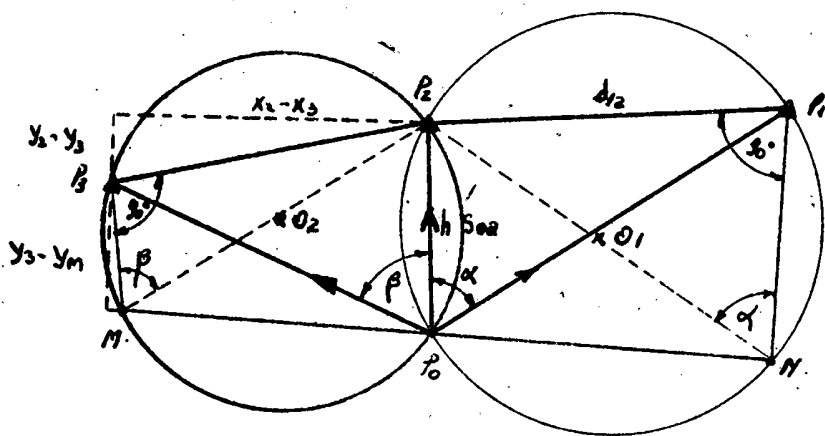


Fig. 195.

Din figură observăm că unghiurile

$\widehat{P_3MP_2} = \beta$  și  
 $\widehat{P_1NP_2} = \alpha$ , iar  
 $\widehat{P_2P_3M} = 90^\circ$ , la fel  
 și  $\widehat{P_2P_1N} = 90^\circ$ .

Aceste fiind stabilite, putem scrie că:

$$\begin{aligned} \text{tg } \beta &= \frac{S_{13}}{S_{3M}} \text{ și} \\ \text{tg } \alpha &= \frac{S_{12}}{S_{1N}} \end{aligned}$$

$\widehat{P_3MP_2}$  se deduce:

$$(1) \quad \frac{S_{13}}{S_{3M}} = \frac{x_2 - x_3}{y_3 - y_M} = \frac{y_2 - y_3}{x_3 - x_M} = \text{tg } \beta.$$

Prin următorul artificiu se vor stabili relațiile care dau coordonatele punctului  $M$  și prin analogie pe cele ale punctului  $N$ .

$$x_M = x_3 + (x_M - x_3)$$

$$y_M = y_3 - (y_3 - y_M)$$

Însă din relația (1) avem:

$$x_M - x_3 = (y_2 - y_3) \cdot \text{cotg } \beta \text{ și } y_3 - y_M = (x_2 - x_3) \cdot \text{cotg } \beta.$$

Deci:

$$x_M = x_3 + (y_2 - y_3) \cotg B.$$

$$y_M = y_3 - (x_2 - x_3) \cotg B.$$

Sau generalizînd :

$$x_M = x_3 \pm (y_2 - y_3) \cotg B \text{ și analog: } x_N = x_1 \pm (y_2 - y_1) \cdot \cotg \alpha$$

$$y_M = y_3 \pm (x_2 - x_3) \cotg B \quad y_N = y_1 \pm (x_2 - x_1) \cdot \cotg \alpha$$

Asupra sumelor nu este nevoie să facem presupuneri, ele fiind luate după cum avem cazul din Fig. 187 a, sau 187 b, și anume: în cazul din Fig. 187 a, se vor lua relațiile;

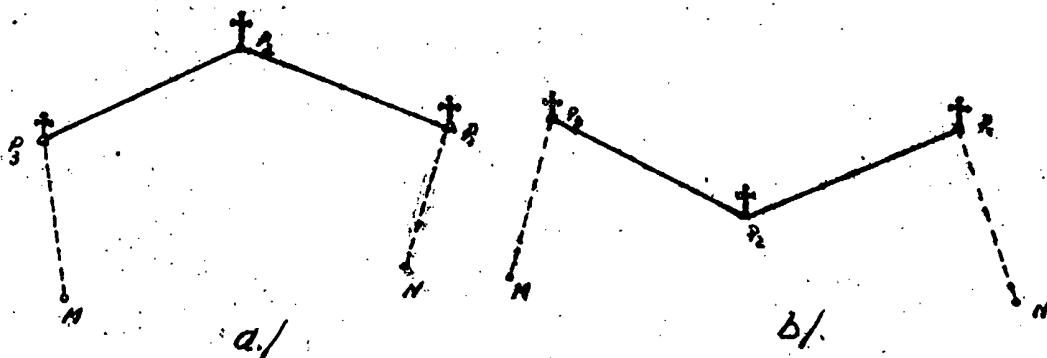


Fig. 187.

$$x_M = x_3 + (y_2 - y_3) \cotg B$$

$$y_M = y_3 - (x_2 - x_3) \cotg B,$$

iar în cazul din Fig. 187 b, se vor lua relațiile:

$$x_M = x_3 - (y_2 - y_3) \cotg B \text{ și } y_M = y_3 + (x_2 - x_3) \cdot \cotg B$$

odată stabilite coordonatele lui M și N, putem calcula orientarea  $\beta_{MN}$ , utilizînd formula dată pentru sistemul de axe de coordonate întrebuițat în Cadastru, adică:

$$\operatorname{tg} \beta_{MN} = \frac{x_N - x_M}{y_M - y_N}$$

Cu aceasta orientare pot fi calculate și orientările  $\beta_{01}, \beta_{02}, \beta_{03}$ , precum și  $\beta_{10}, \beta_{20}, \beta_{30}$  deoarece

$$\beta_{01} = \beta_{MN} \pm (90^\circ - B), \beta_{02} = \beta_{MN} \pm 90^\circ, \beta_{03} = \beta_{MN} \pm (90^\circ + \alpha)$$

Coordonatele punctului  $P_0$  sînt date de relațiile cunoscute:

$$x_0 = x_2 + S_{02} \cdot \sin \beta_{02}$$

$$y_0 = y_2 + S_{02} \cdot \cos \beta_{02}$$

Pentru determinarea lui  $\rho_{20} = h$  se calculează suprafața triunghiului  $MP_2N$ , având coordonatele acestor puncte și apoi se deduce:

$$h = \frac{2S}{MN}$$

METODA COLLIN.

Ca în cazul precedent, sînt cunoscute coordonatele punctelor  $P_1, P_2, P_3$  și vom să determinăm coordonatele lui  $P_0$ .

În acest scop staționînd cu instrumentul în  $P_0$  se măsoară unghiurile  $\alpha, \beta$ , dînd vize către  $P_1, P_2, P_3$ .

Prin punctele  $P_1, P_0, P_3$ , se poate duce un cerc (Fig. 196).

Unind punctul  $P_0$  cu  $P_2$  și prelungînd această dreaptă pînă cînd taie cercul, găsim punctul C, denumit punctul lui Collin.

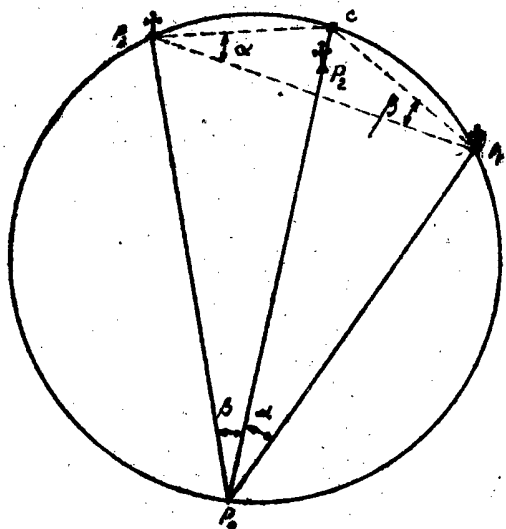


Fig. 196.

Observăm însă că unghiurile

$$\widehat{P_1P_2C} \text{ și } \widehat{P_3P_2C} \text{ sînt:}$$

$$\widehat{P_1P_2C} = \alpha, \quad \widehat{P_3P_2C} = \beta$$

În această situație, coordonatele lui  $P_1$  și  $P_2$  fiind date iar valorile unghiurilor  $\alpha, \beta$  găsite prin măsurare, coordonatele punctului C se pot deduce cu ajutorul problemei intersecției înainte.

Odată determinat punctul C, servindu-ne de coordonatele lui și de cele ale lui  $P_2$  cari sînt date, calculăm orientarea  $\rho_{20}$  cu ajutorul relației:

$$\text{tg } \rho_{20} = \frac{y_c - y_2}{x_c - x_2}$$

că:

Punctele  $C, P_2$  și  $P_0$  fiind coliniare, urmează

$$\rho_{20} = \rho_{02}$$

Calculăm apoi orientările  $\rho_{01}$  și  $\rho_{03}$  cari sînt

$$\rho_{03} = \rho_{02} - \beta; \quad \rho_{01} = \rho_{02} + \alpha$$

Problema acum este redusă la o intersecție înainte și coordonatele lui  $P_0$  sînt date de relațiile stabilite la această problemă pentru calculul la mașină, adică:

$$y_0 = \frac{x_2 - x_1 + y_1 \operatorname{tg} \beta_{10} - y_2 \operatorname{tg} \beta_{20}}{\operatorname{tg} \beta_{10} - \operatorname{tg} \beta_{20}} = \frac{x_3 - x_2 + y_2 \operatorname{tg} \beta_{20} - y_3 \operatorname{tg} \beta_{30}}{\operatorname{tg} \beta_{20} - \operatorname{tg} \beta_{30}}$$

$$x_0 = x_1 + (y_0 - y_1) \operatorname{tg} \beta_{10} = x_2 + (y_0 - y_2) \operatorname{tg} \beta_{20} = x_3 + (y_0 - y_3) \operatorname{tg} \beta_{30}.$$

- Problema Nr.7 sau problema Hanzen.

Am văzut că, pentru determinarea coordonatelor unui punct staționabil, cazul intersecției înapoi, au fost necesare trei puncte inaccesibile.

În cazul cînd am avea numai două puncte de coordonate cunoscute, punctele fiind inaccesibile pentru stație, se pot calcula coordonatele unui nou punct, staționabil, cu ajutorul problemei Hanzen, însă numai cu ajutorul unui a patrulea punct ajutător, în care să se poate face și să fie văzute toate celelalte trei puncte. În mod obișnuit, cele două puncte noi sînt alese astfel, încît printr-un singur calcul să fie determinate coordonatele a două puncte.

Observînd Fig. 197, vedem că problema se

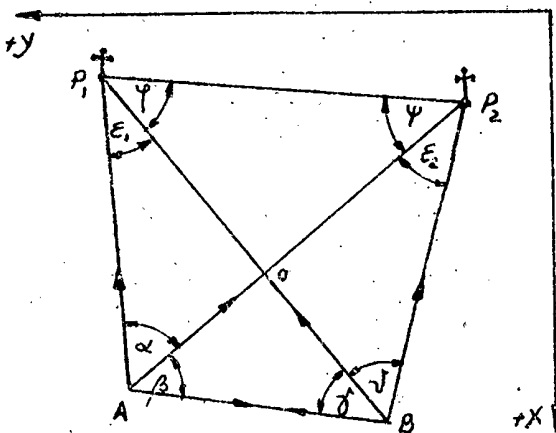


Fig. 197.

$$\begin{aligned} \overline{OA} &= \overline{OP_1} \frac{\sin \epsilon_1}{\sin \alpha} = \overline{OP_2} \frac{\sin \epsilon_1 \cdot \sin \psi}{\sin \alpha \cdot \sin \gamma} = \overline{OB} \frac{\sin \epsilon_1 \cdot \sin \psi \cdot \sin \delta}{\sin \alpha \cdot \sin \gamma \cdot \sin \epsilon_2} = \\ &= \overline{OA} \frac{\sin \epsilon_1 \cdot \sin \psi \cdot \sin \delta \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \gamma \cdot \sin \epsilon_2 \cdot \sin \beta} \end{aligned}$$

reduce la determinarea unghiurilor  $\psi$  și  $\psi'$  cari, odată cunoscute și determinînd pe  $\epsilon_1$  și  $\epsilon_2$  problema este redusă la o intersecție înainte, avînd pentru calcularea punctului A coordonatele lui  $P_1, P_2$  și unghiurile  $\psi + \epsilon_1$  și  $\psi'$ , iar pentru coordonatele lui B avem punctele  $P_1, P_2$  și unghiurile  $\psi$  și  $\psi' + \epsilon_2$ . Determinarea lui  $\psi$  și  $\psi'$  se face astfel:

sau:  $\frac{\sin \alpha \sin \beta \sin \epsilon_2 \sin \gamma}{\sin \beta \sin \gamma \sin \epsilon_1 \sin \psi} = 1$ , de unde

$$\frac{\sin \gamma}{\sin \psi} = \frac{\sin \beta \sin \beta' \sin \epsilon_1}{\sin \alpha \sin \gamma \sin \epsilon_2} = \operatorname{tg} \lambda.$$

Relație pe care știm că o putem reprezenta sub forma:

$$\operatorname{tg} \frac{\psi - \gamma}{2} = \operatorname{tg} \frac{\psi + \gamma}{2} \cdot \operatorname{ctg} (\lambda + 45^\circ).$$

Din această relație se scoate  $\frac{\psi - \gamma}{2}$  iar  $\frac{\psi + \gamma}{2}$  se află din relația  $\psi + \gamma = \beta + \beta'$ .

Cu aceste două relații obținem pe  $\gamma$  și  $\psi$  reducând problema la o intersecție înainte, care se calculează prin formulele arătate la tratarea acelei probleme.

Exemplu numeric.

Să se calculeze coordonatele punctelor A și B, cunoscând coordonatele punctelor P<sub>1</sub> și P<sub>2</sub>, precum și unghiurile  $\alpha, \beta, \beta', \delta$  (vezi Fig. 190).

$$P_1 \begin{cases} x_1 = -805,320 \\ y_1 = 116,500 \end{cases} \quad P_2 \begin{cases} x_2 = -805,000 \\ y_2 = 716,410 \end{cases}$$

$$\alpha = 49^\circ 09' 24'', \quad \beta = 40^\circ 50' 36'', \quad \beta' = 60^\circ 00' 00'', \quad \delta = 59^\circ 59' 59''$$

$$\psi + \gamma = \beta + \beta' = 100^\circ 50' 36''$$

$$\alpha = 49^\circ 09' 24'' \quad \delta = 60^\circ 00' 00''$$

$$\beta = 40^\circ 50' 36'' \quad \beta' = 59^\circ 59' 59''$$

$$\beta' = 60^\circ 00' 00'' \quad \beta = 40^\circ 50' 36''$$

$$\alpha + \beta + \beta' = 149^\circ 59' 60'' \quad \delta + \beta + \beta' = 160^\circ 50' 35''$$

$$180^\circ 00' 00'' \quad 180^\circ 00' 00''$$

$$150^\circ 00' 00'' \quad 160^\circ 50' 35''$$

$$\epsilon_1 = 30^\circ 00' 00'' \quad \epsilon_2 = 19^\circ 09' 25''$$

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta' \cdot \sin \epsilon_2}{\sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \sin \epsilon_1}$$

$$\operatorname{log} \operatorname{tg} \lambda = \operatorname{log} \sin \alpha + \operatorname{log} \sin \beta' + \operatorname{log} \sin \epsilon_2 + \operatorname{colog} \sin \beta + \operatorname{colog} \sin \gamma + \operatorname{colog} \sin \epsilon_1$$

$$\operatorname{log} \operatorname{tg} \lambda = 9,8788093 + 9,9375398 + 9,516085 + 0,0624694 + 0,18332864 + 0,3010264$$

$$\operatorname{log} \operatorname{tg} \lambda = 9,8792550$$

De unde:  $\lambda = 37^\circ 08' 10''$   
 $\lambda + 45^\circ = 82^\circ 08' 10''$

și deci:  $\operatorname{tg} \frac{\psi - \gamma}{2} = \operatorname{tg} \frac{\psi + \gamma}{2} \cdot \operatorname{cotg} (\lambda + 45^\circ)$   
 $\operatorname{logtg} \frac{\psi - \gamma}{2} = \operatorname{logtg} \frac{\psi + \gamma}{2} + \operatorname{log} \operatorname{cotg} (\lambda + 46^\circ) = 0,0826831 +$   
 $+ 9,1402538$   
 $\operatorname{log} \operatorname{tg} \frac{\psi - \gamma}{2} = 9,2229369$

De unde:

$$\frac{\psi - \gamma}{2} = 9^\circ 29' 08''$$

Așa că:

$$\gamma = 54' 25'' \quad \psi = 40^\circ 56' 09,5$$

Problema acum se reduce la calculul a două intersecții înalțe; pentru punctul A avem  $P_1, P_2 =$  baza cu orientarea  $\alpha = 89^\circ 58' 10''$  și unghiurile  $\epsilon_1 + \gamma = 89^\circ 54' 26''$  și  $\psi = 40^\circ 56' 09,5$ ;

pentru punctul B, aceiași bază însă unghiurile sînt:

$$\epsilon_2 + \gamma = 60^\circ 05' 34,5 \quad \text{și} \quad \psi = 59^\circ 54' 25,5$$

Efectuînd calculele obținem:

$$A \begin{cases} x_A = -1324,909 \\ y_A = 117,618 \end{cases} \quad B \begin{cases} x_B = -1324,265 \\ y_B = 418,106 \end{cases}$$

Problema Hanzen metoda 2<sup>a</sup>

O altă metodă de rezolvarea problemei Hanzen este următoarea; știind coordonatele punctelor  $P_1, P_2$  și dorind a calcula coordonatele punctului A, alegem încă un

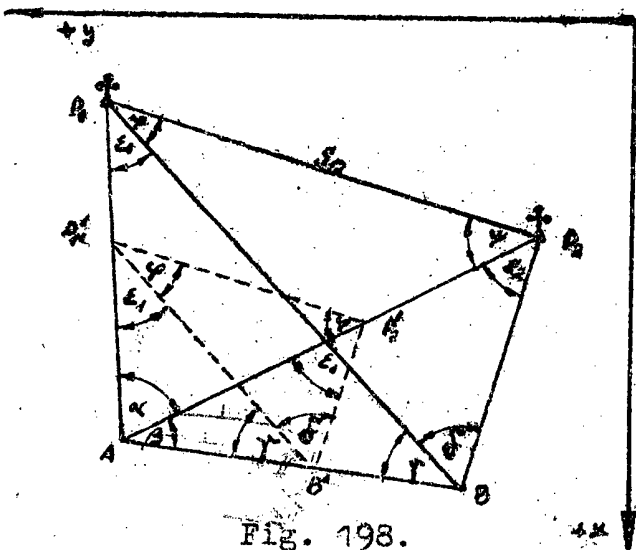


Fig. 198.

punct B pe teren, din punctele A și B ca stații, măsurăm unghiurile  $\epsilon_1, \beta, \delta, \lambda$ .

Dacă am avea posibilitatea de a măsura exact distanța AB, problema ar fi simplă, reducîndu-se la o intersecție înalțe.

În caz că nu se poate măsura, se ia o lungime arbitrară  $AB' = 1 \text{ km}$ , cu această lungime rezolvăm figura asemenea  $(AB'P_2P_1)$  și anume:

Din triunghiul  $AB'P_1$ , în care cunoaștem latura  $AB'$  și toate unghiurile se deduc laturile  $AP_1$  și  $B'P_1$ .

deduc laturile  $AP_1$  și  $B'P_1$ , iar din triunghiul  $AP_2B'$  se deduc laturile  $AP_2$  și  $B'P_2$ .

- 287 -

Apoi rezolvăm triunghiurile  $AP_1P_2'$  și  $B'P_1'P_2'$  și se află latura  $P_1'P_2'$ .

Din coordonatele punctelor  $P_1, P_2$ , putem afla latura  $S_{12} = P_1P_2$ .

Între laturile  $S_{12} = P_1P_2$  și  $P_1'P_2'$  deduse din calcul, există un raport care este chiar raportul de asemănare între figura noastră  $AP_1P_2$  și figura asemenea  $AP_1'P_2'$ .

Notînd:  $\frac{S_{12}}{S_{12}'} = K$

avem raportul de asemănare  $K$  și deci putem calcula toate distanțele adevărate, fiind suficient a înmulți fiecare latură a figurei asemenea  $AP_1'P_2'$ , dedusă mai sus, cu acest coeficient  $K$ .

Cunoscînd distanțele și unghiurile  $\gamma$  și  $\gamma'$ , deduse din relațiile:

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma - \varepsilon_1 - \gamma'}{2} = \frac{\overline{AP_2'} - \overline{AP_1'}}{\overline{AP_2'} + \overline{AP_1'}} \cdot \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} \quad \text{și}$$

$$\frac{\gamma + \gamma'}{2} = \frac{B + \delta}{2}$$

se pot calcula coordonatele lui  $A$  și  $B$ , problema fiind redusă la o intersecție înaintată, adică:

$$A \begin{cases} x_1 = x_2 + S_{A1} \cos \alpha_{A1} = x_2 + S_{A2} \cos \alpha_{A2} \\ y_1 = y_2 + S_{A1} \sin \alpha_{A1} = y_2 + S_{A2} \sin \alpha_{A2} \end{cases}$$

$$B \begin{cases} x_2 = x_1 + S_{B1} \cos \alpha_{B1} = x_2 + S_{B2} \cos \alpha_{B2} \\ y_2 = y_1 + S_{B1} \sin \alpha_{B1} = y_2 + S_{B2} \sin \alpha_{B2} \end{cases}$$

Cu ajutorul coordonatelor  $A$  și  $B$  poate fi dedusă lungimea  $AB$ , adică:

$$S_{AB} = \frac{J_2 - J_1}{\sin} = \frac{x_B - x_A}{\cos \alpha_{AB}}$$

avînd în același timp controlul:

$$\frac{S_{AB}}{S_{AB}'} = K.$$

Exemplu numeric:

Date:  $P_1 \begin{cases} x_1 = -805,49 \text{ m} \\ y_1 = -116,69 \text{ m} \end{cases} \quad P_2 \begin{cases} x_2 = -805,17 \text{ m} \\ y_2 = -716,67 \text{ m} \end{cases}$



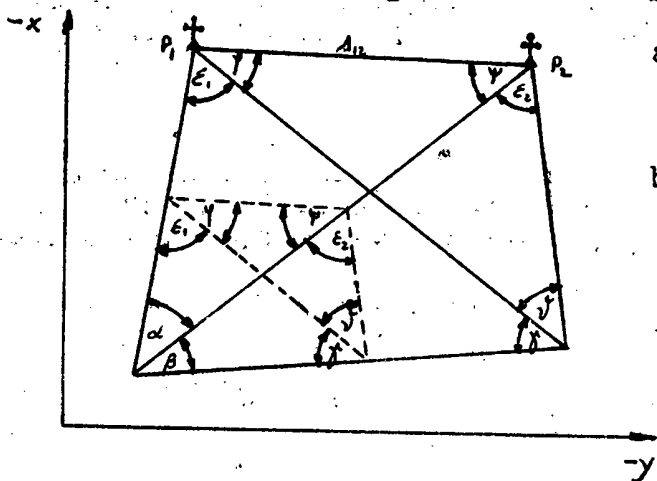
Măsurate:  $\alpha = 49^\circ 09' 11''$   
 $\beta = 40^\circ 50' 15''$   
 $\gamma = 59^\circ 59' 40''$   
 $\delta = 59^\circ 59' 43''$

Se cere:

$$A \begin{cases} X_A = ? \\ Y_A = ? \end{cases} \quad \overline{AB} = ?$$

$$B \begin{cases} X_B = ? \\ Y_B = ? \end{cases}$$

Luind lungimea AB arbitrară egală cu 100 m, rezolvăm figura asemenea  $AB'P_1P_2$ .



a) Calculăm pe  $\epsilon_1$  și  $\epsilon_2$   
 $\epsilon_1 = 180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma) = 30^\circ 00' 54''$   
 $\epsilon_2 = 180^\circ - (\beta + \delta + \gamma) = 19^\circ 10' 22''$

b) Avind latura  $\overline{AB'} = 100$  m și toate unghiurile în triunghiul  $AB'P_1$ , se calculează laturile  $AP_1$  și  $B'P_1$ .

$$\overline{AP_1} = \frac{\sin \delta}{\sin \epsilon_1} \cdot \overline{AB'}$$

$$\overline{B'P_1} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \epsilon_1} \cdot \overline{AB'}$$

$$\log \overline{AP_1} = \log \sin \delta - \log \sin \epsilon_1 + \log \overline{AB'} =$$

$$= 9,9375663 + 2,0000000 - 9,6990211 =$$

$$= 2,2384852$$

Fig. 199.

$$\log \overline{B'P_1} = \log \sin(\alpha + \beta) + \log \overline{AB'} - \log \sin \epsilon_1 = 0,0000000 + 2,0000000 - 9,6990211 = 2,3009789.$$

și găsim:  $\overline{AP_1} = 173,175$  m

$$\overline{B'P_1} = 199,976$$
 m.

c) In mod analog, din triunghiul  $AB'P_2$  calculăm laturile  $AP_2$  și  $B'P_2$

$$\overline{AP_2} = \frac{\sin(\delta + \gamma)}{\sin \epsilon_2} \overline{AB'}; \quad \overline{B'P_2} = \frac{\sin \beta}{\sin \epsilon_2} \overline{AB'}$$

$$\log \overline{AP_2} = \log \sin(\delta + \gamma) + \log \overline{AB'} - \log \sin \epsilon_2 = 9,93757576 +$$

$$+ 2,0000000 - 9,5164259 = 2,4211497$$

$$\log \overline{B'P_2} = \log \sin \beta + \log \overline{AB'} - \log \sin \epsilon_2 = 9,8155219 +$$

$$+ 2,0000000 - 9,5164259 = 2,2990960$$

$$\overline{AP_2} = 263,724$$
 m,

$$\overline{B'P_2} = 199,111$$
 m.

d) Urmează calculul unghiurilor  $\gamma'$  și  $\gamma''$ . Din triunghiul  $AP_1P_2$  avem:

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma' + \epsilon_2 - \gamma''}{2} = \frac{\overline{AP_2} - \overline{AP_1}}{\overline{AP_2} + \overline{AP_1}} \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} = \frac{90,549}{436,899} \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{\psi + \varepsilon_2 - \gamma}{2} = \log 90,549 + \log \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} - \log 436,899 =$$

$$= 1,9568837 + 0,3397638 - 2,6403820 = 96562655.$$

De unde:  $\frac{\psi + \varepsilon_2 - \gamma}{2} = 24^\circ 22' 42''$

$$\frac{\psi - \gamma}{2} = 9^\circ 22' 15''$$

$$\frac{\psi + \gamma}{2} = \frac{B + d}{2} = 50^\circ 24' 57,5''$$

Cu relațiile:  $\frac{\psi + \gamma}{2}$  și  $\frac{\psi - \gamma}{2}$  aflăm pe  $\gamma$  și  $\psi$ , găsind că:

$$\gamma = 41^\circ 02' 42,5''$$

$$\psi = 59^\circ 47' 12,5''$$

e) Unghiurile  $\gamma$  și  $\psi$  fiind determinate, se calculează latura  $P_1' P_2'$ .

$$\overline{P_1' P_2'} = \frac{\sin \alpha}{\sin \psi} \overline{AP_1'} \quad \log \overline{P_1' P_2'} = \log \sin \alpha + \log \overline{AP_1'} - \log \sin \psi$$

$$\log \overline{P_1' P_2'} = 9,8787856 + 2,2384852 - 9,9365932 = 2,1806776$$

$$\overline{P_1' P_2'} = 151,59 \text{ m.}$$

f) Din coordonatele punctelor  $P_1, P_2$  se calculează latura  $S_{12} = \overline{P_1 P_2}$

$$S_{12} = \frac{\Delta x_{12}}{\cos \rho_{12}} = \frac{\Delta y_{12}}{\sin \rho_{12}}$$

$$\operatorname{tg} \rho_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-599,91}{+0,32}; \quad \log \operatorname{tg} \rho_{12} = \log 599,91 - \log 0,32$$

$$\log \operatorname{tg} \rho_{12} = 2,77808 - 9,50515 = 3,27293.$$

$$\rho_{12}' = 89^\circ 58' 11''$$

$$\rho_{12} = 360^\circ - \rho_{12}' = 270^\circ 01' 49''$$

$$\rho_{21} = 90^\circ 01' 49''$$

Pentru control se va aplica și relația:

$$\operatorname{tg} (45^\circ + \rho_{12}') = \frac{\Delta x_{12} + \Delta y_{12}}{\Delta x_{12} - \Delta y_{12}}$$

$$\log S_{12} = \log 0,32 - \log \cos \rho_{12} = 2,74039, \quad S_{12} = 550,04 \text{ m}$$

Raportul dintre valoarea reală a lungimii  $\overline{P_1 P_2}$  și valoarea calculată cu lungimea arbitrară, este un raport constant, cu care multiplicând valorile deduse din calcul, se deduc toate laturile în valoarea lor adevărată.

$$K = \frac{\overline{P_1 P_2}}{\overline{P_1' P_2'}} = \frac{550,04}{151,59} = 3,62846$$

- 290 -

Deci:  $\overline{AP_1} = \overline{AP_1'} \times K = 173,175 \times 3,63 = 628,625$   
 $\overline{AP_2} = \overline{AP_2'} \times K = 263,724 \times 3,63 = 1320,318$   
 $\overline{BP_1} = \overline{B'P_1'} \times K = 199,976 \times 3,63 = 725,912$   
 $\overline{BP_2} = \overline{B'P_2'} \times K = 199,111 \times 3,63 = 722,773$   
 $\overline{AB} = \overline{AB'} \times K = 100 \times 3,62846 = \underline{362,846 \text{ m}}$

De aci încolo problema se rezolvă ca o intersecție înalate, adică se vor calcula orientările  $\alpha_{1A}, \alpha_{2A}, \alpha_{1B}, \alpha_{2B}$  și apoi coordonatele lui A și B vor fi date de relațiile:

$$A \begin{cases} x_A = x_1 + S_{1A} \cos \alpha_{1A} = x_2 + S_{2A} \cos \alpha_{2A} \\ y_A = y_1 + S_{1A} \sin \alpha_{1A} = y_2 + S_{2A} \sin \alpha_{2A} \end{cases}$$

$$B \begin{cases} x_B = x_1 + S_{1B} \cos \alpha_{1B} = x_2 + S_{2B} \cos \alpha_{2B} \\ y_B = y_1 + S_{1B} \sin \alpha_{1B} = y_2 + S_{2B} \sin \alpha_{2B} \end{cases}$$

Problema Nr. 8 poligonatie sau drumuire.

Scopul final al ridicărilor topografice fiind ridicarea detaliilor, din porțiunea de teren respectivă, care știm că se execută sprijinindu-se pe vize drepte între punctele de coordonate cunoscute, cuprinse în porțiunea de teren dată, este necesar a împinge punctele de coordonate cunoscute cât mai aproape de punctele de detalii.

Uneori însă din cauza obstacolelor care stau în cale, nu putem duce aceste puncte prin linii drepte, ci sîntem nevoiți a determina mai multe puncte intermediare al cărora ansamblu, împreună cu liniile de viză dintre ele, constituie poligonatie sau drumuirea.

Grație acestei metode putem înmulți numărul punctelor de coordonate cunoscute pînă cînd suprafața destinată pentru ridicări topografice este îndesăjuns de acoperită cu linii poligonale, care se mai numesc și linii de sprijin.

Criteriul în alegerea punctelor poligonale, respectiv plasarea liniilor poligonale, îl constituie necesitatea ca punctele de detalii importante să fie ridicate cel puțin față de două linii poligonale, pentru a avea certitudinea asupra situației lor reale pe suprafața ce se ridică.

Ca exemplu, figura 200 ne prezintă o porțiune de teren în care avem cunoscute două puncte A și B.

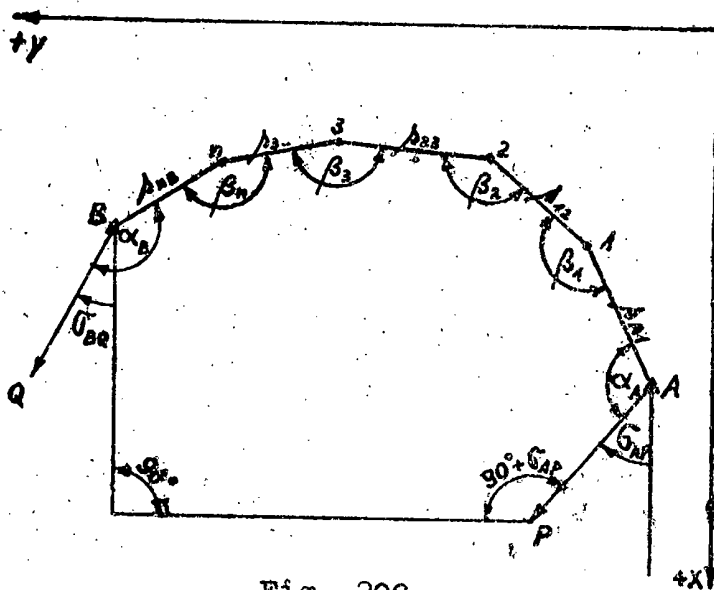


Fig. 200.

Detaliile cari există pe teren pot fi ridicate față de linia dreaptă AB, însă din cauza că pe terenul acestui aliniament există obstacole, ca păduri, clădiri, etc., sîntem nevoiți să determinăm mai multe puncte 1, 2, ..., n, iar ridicările de detalii vor fi efectuate față de liniile de sprijin A - 1, 1 - 2, ..., n - 1, n - 2, ... Pentru calculul unei poligonatii în condițiuni optime este necesar ca punctul de pornire A să fie cunoscut prin coordonate sale într-un sistem oarecare, cît și prin înălțimea sa deasupra nivelului mării, sau a unui plan de comparație adecvat pentru porțiunea de teren respectivă.

La fel și în ceea ce privește punctul de închidere B.

Apoi atît punctul de pornire A, cît și punctul de închidere B, să dea posibilitatea unei vize îndepărtate asupra unui punct de coordonate cunoscute ( P și Q ), pentru a avea o bază în orientarea laturilor poligonatiei și în compensarea unghiurilor măsurate.

**Ca recomandări practice:**

Lungimea laturilor de sprijin, dictată de împrejurări, variază de la cîtiva metri (cazuri speciale de poligonatii în mină) pînă la maximum 120 - 200 m.

Cifra ultimă se admite numai în cazuri speciale.

Poligonatia să fie cît mai întinsă, adică să nu meargă în zig-zag, lungimea totală a laturilor să fie cel mult egală cu 1,5 km.

Laturile poligonatiei, pe cît posibil, egale între ele, să nu fie o prea mare disproporție între lungimea lor, raportul maxim fiind 1/3.

În operațiunile noastre se poate întîlni cazul cînd punctul P să coincidă cu Q, adică nu acelaș punct servește ca viză depărtată atît pentru punctul A, cît și pentru B.

Este cazul din Fig. 201.

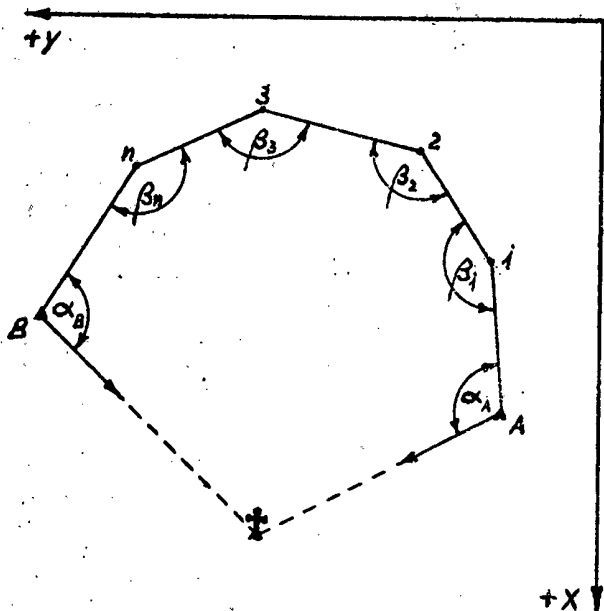


Fig. 201.

Evident că aceasta nu prezintă nici un inconvenient pentru calculele moastre, precum nici cazul special când putem de viză îndepărtată dela A direct la B și invers.

Referindu-ne la Fig.200, să vedem cum se calculează o poligonație.

Pentru aceasta reamintim că se dau punctele A,B,P și Q prin coordonatele lor. Să măsoară toate unghiurile, de oboceiu cele interioare, în tot cazul cele cari sînt în aceeași parte a liniilor de poligonație, adică unghiurile  $\alpha_A, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \alpha_B$  precum și distanțele:  $S_{A1}, S_{12}, S_{23}, \dots, S_{nB}$

Se cere să se determine coordonatele punctelor intermediare 1,2,3,.....n, cuprinse între punctele A și B între cari se face poligonația.

În cazul cînd nu avem erori la măsurarea unghiurilor, va trebui ca suma unghiurilor în poligonul închis format de liniile de poligonație și de perpendiculara comună, dusă la direcțiile meridianelor din P și B (respectiv Q sau P) minus un număr întreg de  $\pi$ , trebuie să fie egală cu zero, adică, așa cum reiese din Fig.196.

$$\alpha_A + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_n + \alpha_B - \angle_{BA} + \angle_{AP} - K \cdot 180^\circ = 0$$

Sau notînd simbolic:

$$[\alpha] = \alpha_A + \alpha_B \quad \text{și} \quad [\beta] = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$$

$$(1) \quad [\alpha] + [\beta] - (\angle_{BA} - \angle_{AP}) - K \cdot 180^\circ = 0$$

În realitate însă sînt erori la măsurarea unghiurilor și ca atare expresiunea noastră este:

sau:

$$[\alpha] + [\beta] - (\angle_{BA} - \angle_{AP}) - K \cdot 180^\circ \neq 0$$

$$[\alpha] + [\beta] - (\angle_{BA} - \angle_{AP}) - K \cdot 180^\circ = f_w$$

Unde  $f_w$  reprezintă eroarea unghiulară de închidere.

În această ultimă expresiune unghiurile  $\angle_{BA}$  și  $\angle_{AP}$  se deduc din relațiile cunoscute:

$$\text{tg } \angle_{AP} = \frac{y_P - y_A}{x_P - x_A}; \quad \text{tg } \angle_{BA} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

- 293 -

utilizând și relațiile pentru control, adică:

$$\operatorname{tg}(45^\circ + \beta_{AP}) = \frac{\Delta X_{AP} + \Delta Y_{AP}}{\Delta X_{AP} - \Delta Y_{AP}}; \quad \operatorname{tg}(45^\circ + \beta_{BA}) = \frac{\Delta X_{BA} + \Delta Y_{BA}}{\Delta X_{BA} - \Delta Y_{BA}}$$

Intrucât unghiurile  $\beta_{BA}$  și  $\beta_{AP}$  nu pot fi eronate, ele fiind provenite din calcule, înseamnă că eroarea  $f_w$  pe care am comis-o, este datorată numai unghiurilor măsurate, adică unghiurilor  $[\alpha]$  și  $[\beta]$ .

Ca eroare de închidere se admite ca:  
 $f_w \max. = 45'' \sqrt{n} + 45'' \pm 25\%$ , unde "n" reprezintă numărul unghiurilor măsurate, (+ pentru munte și - pentru șes).

Fiind stabilit acum că eroarea de închidere este datorată unghiurilor măsurate, urmează că numai acestea să fie compensate pentru a satisface relația (1) de mai sus.

Ca atare se va face raportul  $\frac{f_w}{n}$ , și se va găsi că este:  $\frac{f_w}{n} = \xi''$

Deci se va adăuga sau scădea, după cum este cazul, unghiurilor măsurate ( $\alpha_A, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \alpha_B$ ) această cîtimitime  $\xi''$  și compensarea unghiurilor este terminată.

Urmează determinarea orientării fiecărei laturi din poligonatie, care se deduce din însumarea orientării precedente cu unghiul măsurat și compensat, aflat între liniile de poligonatie și minus  $180^\circ$ .

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= \beta_{AP} + \alpha_A = \beta_{PA} + \alpha_A - 180^\circ \\ \beta_{12} &= \beta_{11} + \beta_1 - 180^\circ \\ \beta_{23} &= \beta_{12} + \beta_2 - 180^\circ \\ &\vdots \\ \beta_{nB} &= \beta_{nB} + \alpha_B - 180^\circ \end{aligned}$$

Stiind orientarea laturei și lungimea ei, precum și coordonatele punctului A, putem calcula coordonatele punctelor de poligonatie cu ajutorul relațiilor de mai jos, însă după cum se va vedea acestea sînt numai niște coordonate provizorii:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_A + S_{A1} \cos \beta_{11} & y'_1 &= y_A + S_{A1} \sin \beta_{11} \\ x'_2 &= x'_1 + S_{12} \cos \beta_{12} & y'_2 &= y'_1 + S_{12} \sin \beta_{12} \\ x'_3 &= x'_2 + S_{23} \cos \beta_{23} & y'_3 &= y'_2 + S_{23} \sin \beta_{23} \\ &\vdots & & \vdots \\ x'_n &= x'_{n-1} + S_{n-1n} \cos \beta_{n-1n} & y'_n &= y'_{n-1} + S_{n-1n} \sin \beta_{n-1n} \\ x'_B &= x'_n + S_{nB} \cos \beta_{nB} & y'_B &= y'_n + S_{nB} \sin \beta_{nB} \end{aligned}$$

Au fost calculate coordonatele relative deoarece lungimile  $S_{12}, S_{23}, \dots$  fiind măsurate, sînt afectate de erori și ca atare la finele calculului, cînd ar trebui să găsim coordonatele cunoscute ale lui B, adică  $X_B$  și  $Y_B$ , noi în realitate am obținut coordonatele unui punct  $B'$ , adică pe  $X_{B'}$  și  $Y_{B'}$  calculate mai sus.

Avînd cunoscute coordonatele punctelor A, B și  $B'$ , putem calcula orientările dreptelor AB și  $AB'$  și deci să stabilim unghiul cu care se rotește întreg sistemul, din cauza erorilor comise la măsurarea lungimilor.

Ne interesează însă în mod special compensarea coordonatelor, adică să aflăm coordonatele reale ale punctelor intermediare.

Pentru aceasta știind coordonatele lui B și cele ale lui  $B'$ , putem avea eroarea de coordonate

$$x_B - x_{B'} = \delta x ; \quad y_B - y_{B'} = \delta y$$

Dacă la compensarea unghiurilor am repartizat eroarea în mod egal fiecărui unghi măsurat, la compensarea de coordonate trebuie ținut cont de lungimea măsurată.

Ca atare se va adăuga sau scădea după caz, coordonatele provizorii o cîtine  $K_x$ , respective  $K_y$ , proporțională cu distanța măsurată pînă la acel punct.

Acești coeficienți  $K_x$ ,  $K_y$  sînt dați de relațiile:

$$K_x = \frac{\delta x}{[S]} ; \quad K_y = \frac{\delta y}{[S]}$$

unde:

$$[S] = S_{A1} + S_{12} + S_{23} + \dots + S_{nB}$$

În baza celor spuse mai sus, coordonatele definitive ale punctelor intermediare sînt:

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1 + K_x S_{A1} & y_1 &= y'_1 + K_y S_{A1} \\ x_2 &= x'_2 + K_x (S_{A1} + S_{12}) & y_2 &= y'_2 + K_y (S_{A1} + S_{12}) \\ &\vdots & &\vdots \\ x_B &= x'_B + K_x \cdot [S] & y_B &= y'_B + K_y \cdot [S] \end{aligned}$$

Observăm că în acest mod coordonatele lui B sînt cele cari au fost date, deoarece  $K_x [S] = \delta x$  sau  $K_y [S] = \delta y$ , adică se adaugă sau se scade la coordonatele lui B tocmai eroarea.

- 295 -

Exemplu numeric.

Date:

$$A \begin{cases} x_A = +15.529,15 \\ y_A = +14.924,61 \end{cases}$$

$$B \begin{cases} x_B = + 14.825,64 \\ y_B = + 14.083,20 \end{cases}$$

Măsurate:

$$P \begin{cases} x_P = + 14.759,00 \\ y_P = + 15.115,48 \end{cases}$$

$$Q \begin{cases} x_Q = + 15.329,81 \\ y_Q = + 14.447,19 \end{cases}$$

Unghiurile:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 23^\circ 26' 40'' \\ \beta_1 &= 191^\circ 02' 15'' \\ \beta_2 &= 175^\circ 19' 14'' \\ \beta_3 &= 223^\circ 49' 18'' \\ \beta_4 &= 188^\circ 39' 43'' \\ \beta_5 &= 191^\circ 18' 48'' \\ \beta_6 &= 176^\circ 59' 26'' \\ \beta_7 &= 193^\circ 12' 58'' \\ \alpha_B &= 305^\circ 56' 17'' \end{aligned}$$

Laturile:

$$\begin{aligned} S_{A1} &= 178,45 \text{ m} \\ S_{12} &= 190,76 \text{ m} \\ S_{23} &= 178,75 \text{ m} \\ S_{34} &= 123,21 \text{ m} \\ S_{45} &= 140,80 \text{ m} \\ S_{56} &= 165,06 \text{ m} \\ S_{67} &= 143,17 \text{ m} \\ S_{7B} &= 157,11 \text{ m} \end{aligned}$$

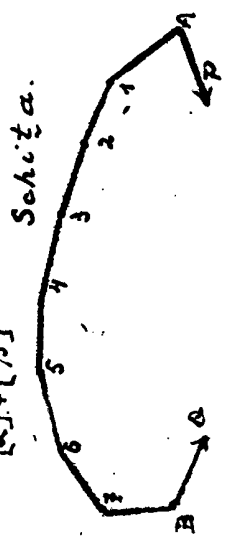


Calculul poligonatilor

Punct de indep. poligon	Distanțe măsurate		Unghiuri		Azimuturi		Logaritmi		Calculata			Compensate		Coordinate definitive				
	0	I	0	I	0	I	0	I	A'x	A'y	+ A'x	+ Ay	x	y				
A	178,45	23	26	40	23	26	42	189	31	32	2,2454868	2,2515166	2,2187651	0,01	29,53	176,00	14759,00	15115,48
1	190,76	191	02	15	11	191	02	16	200	33	2,2518952	2,2548873	2,2456071	0,01	67,00	178,62	15353,15	14898,10
2	178,75	175	19	14	11	175	19	15	195	53	2,2353385	2,2522461	2,2437264	0,01	48,92	171,93	15174,53	14828,12
3	123,21	223	49	18	11	223	49	19	239	42	2,17934517	2,20905460	2,2362369	0,01	106,39	62,16	15002,60	14779,22
4	140,80	188	39	43	11	188	39	44	248	22	2,17152032	2,1986027	2,2168834	0,01	130,87	57,91	14940,44	14672,84
5	165,06	191	18	48	11	191	18	49	259	40	2,14707671	2,2276418	2,2529195	0,01	162,37	29,57	14888,53	14547,97
6	143,17	176	59	26	11	176	59	27	256	40	2,15785457	2,19881438	2,21439958	0,01	139,30	33,01	14858,96	14376,60
7	157,11	193	12	58	11	193	12	59	269	53	2,2865357	2,1962038	2,2999992	0,01	107,10	0,31	14825,95	14240,30
B		305	56	17	12	305	56	19	35	49	2,1962030						14825,64	14083,20

Compensarea coordonatelor  
 $[A'x] = -703,43$   $[Ay] = -844,53$   
 $x_A - x_B = -703,51$   $y_A - y_B = -841,41$   
 $f(x) = -0,08$   $f(y) = +0,12$

Compensarea unghiurilor  
 $[x]4[\beta] = 1669^{\circ}44'39''$   
 $9 \times 180^{\circ} = 1620^{\circ}$   
 $\Delta\alpha - \Delta\beta = 49^{\circ}44'39''$   
 $f.w \frac{f(w)}{n} = \frac{41}{9} \approx 4,55$



- 297 -

Se cere a se face calculul poligonației și a determina coordonatele punctelor 1,2.....7.

Toate datele, calculele și rezultatele se vor trece într-un tablou, așa cum se arată mai jos, în care s-au făcut următoarele notații:

$$S \cos \alpha = \Delta'x \quad \text{și} \quad S \sin \alpha = \Delta'y$$

Aceste diferențe trebuie calculate pentru a ne da coordonatele provizerii, arătate mai sus și cari astfel devin:

$$(1) \quad \begin{array}{l} x'_1 = x_A + \Delta'x_{A1} \\ x'_2 = x'_1 + \Delta'x_{12} \\ \vdots \\ x'_B = x'_n + \Delta'x_{nB} \end{array} \quad \begin{array}{l} y'_1 = y_A + \Delta'y_{A1} \\ y'_2 = y'_1 + \Delta'y_{12} \\ \vdots \\ y'_B = y'_n + \Delta'y_{nB}. \end{array}$$

Practic, așa cum se vede în tablou, nu au mai fost calculate coordonatele definitive, întrebuintînd următorul artificiu:

Insumînd relațiile (1) și făcînd reducerile, avem:

$$x'_B = x_A + [\Delta'x] \quad \text{și} \quad y'_B = y_A + [\Delta'y]$$

Ori, ștîind că:

$$f_x = x_B - x'_B \quad \text{și} \quad f_y = y_B - y'_B$$

Avem:

$$\begin{array}{l} f_x = x_B - x_A + [\Delta'x] \\ f_y = y_B - y_A + [\Delta'y]. \end{array}$$

Ca atare, calculînd pe  $\Delta'y$  și  $\Delta'x$ , s-a făcut suma lor și am obținut pe  $f_x$  și  $f_y$ , în mod mult mai simplu decît dacă am fi făcut calculul coordonatelor provizerii și am fi făcut diferențele  $x_B - x'_B$  și  $y_B - y'_B$ .

### Poligonație cu orientări.

În această poligonație, utilizată și de către Cadastrul Român, nu se măsoară unghiurile, ci se măsoară direct orientările, în sistemul cadastral, adică cu axa de + Y spre Nord și + X spre West, iar calculele sînt făcute la mașina de calculat și în locul logaritmilor, se iau în calcule valorile naturale ale liniilor trigonometrice.

- 298 -

Avantajele pe care le avem, utilizând această metodă, provin pe de o parte din faptul că se calculează mai rapid, cu mașina, iar pe de altă parte, mersul operațiunilor pe teren este la rîndul lui mai repede și controlat.

Dar pentru a putea fi măsurate azimuturile, orientările, este necesar ca la ieșirea pe teren, să avem calculate orientările  $\beta_{AP}$  și  $\beta_{BQ}$ , ale căror valori sînt deduse din relațiile

$$\operatorname{tg} \beta_{AP} = \frac{Y_P - Y_A}{X_P - X_A} \quad \text{și} \quad \operatorname{tg} \beta_{BQ} = \frac{Y_Q - Y_B}{X_Q - X_B}$$

Bineînțeles că orientările  $\beta_{AP}$  și  $\beta_{BQ}$  pentru control vor fi calculate și cu ajutorul relațiilor:

$$\operatorname{tg} (\beta_{AP} + 45^\circ) = \frac{\Delta X_{AP} + \Delta Y_{AP}}{\Delta X_{AP} - \Delta Y_{AP}} \quad \text{și} \quad \operatorname{tg} (\beta_{BQ} + 45^\circ) = \frac{\Delta X_{BQ} + \Delta Y_{BQ}}{\Delta X_{BQ} - \Delta Y_{BQ}}$$

Avînd orientarea  $\beta_{AP}$  calculată, ea va fi pusă în teodolit, făcînd ca zero al vernierului să ne indice chiar valoarea acestei orientări, apoi se solidarizează cercul alidat cu cercul gradat și în aceasta poziție se staționează cu teodolitul în punctul A (Fig. 202), dînd viză cître punctul P.

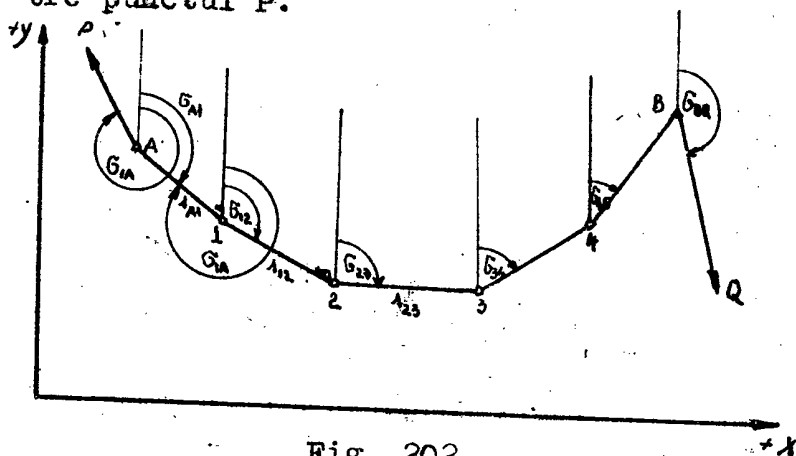


Fig. 202.

Acum aparatul este orientat, el avînd gradațiune zero a cercului alidat chiar pe direcțiunea axei + Y.

Desfăcînd șurubul de presiune al cercului alidat și fixînd pe cel al limbului gradat, se vizează punctul 1, iar citirea ce se face este tocmai orien-

tarea  $\beta_{A1}$  pe care o trecem în protocolul de vize.

Se trece la punctul 1 și se face stație pentru a măsura orientarea  $\beta_{12}$ .

Dar pentru aceasta va trebui ca în aparat zero al vernierului să ne indice orientarea  $\beta_{1A}$  și nu  $\beta_{A1}$  pe care am avut-o.

- 299 -

Pentru acest motiv, înainte de a pleca din punctul de stație A se dă luneta peste cap și se vizează punctul 1, acum în aparat avem  $\beta_{11} + 180^\circ$ , adică în instrument avem pe  $\beta_{1A}$  cu cercurile gradat și alidat, solidare, se vizează punctul A, se desface șurubul cercului alidat, vizăm punctul 2 și am măsurat orientarea  $\beta_{12}$ , apoi cu luneta peste cap se vizează din nou punctul 2, pentru a avea în aparat orientarea  $\beta_{21}$  și se schimbă stația.

Procedând analog, în fiecare stație, ajungem ca din punctul B să măsurăm orientarea  $\beta_{20}$ .

Dacă nu am avea erori, trebuie ca această orientare măsurată, pe care să o notăm cu  $\beta_{20}$  să fie egală cu calculată la eșirea pe teren.

Din cauza însă că avem erori, între aceste două orientări există o diferență:  $\Delta w = \beta_{20} - \beta'_{20}$  și ca atare va trebui să facem compensarea, repartizând orientărilor măsurate în mod progresiv cîttimea  $\frac{\Delta w}{n}$  (n fiind numărul de stații).

Adică la orientarea  $\beta'_{11}$  se adaugă sau se scade cîttimea  $\frac{\Delta w}{n}$ , după cum este semnul acestei erori, apoi la  $\beta'_{12}$  se adaugă  $2 \frac{\Delta w}{n}$  la  $\beta'_{13} \pm 3 \frac{\Delta w}{n}$  și așa mai departe, iar la  $\beta'_{20} \pm n \frac{\Delta w}{n}$ .

De exemplu, presupunînd că am măsurat orientările  $\beta'_{11}, \beta'_{12}, \beta'_{13}, \beta'_{13}$  și pe  $\beta'_{20}$  și diferența între  $\beta_{20}$  măsurat și calculat, ne dă eroarea  $\Delta w = 20''$ .

In acest caz va trebui să adăugăm la  $\beta'_{11}$  cîttimea  $\frac{\Delta w}{n} = 4''$ , obținînd orientarea  $\beta'_{11}$ .  
Apoi:  $\beta'_{12} = \beta'_{12} + 8''$ ;  $\beta'_{13} = \beta'_{13} + 12''$ ,  $\beta'_{13} = \beta'_{13} + 16''$   
și în fine:  $\beta_{20} = \beta'_{20} + 20''$ .

Din cele arătate se poate vedea că operațiunea de măsurare a orientărilor, ne prezintă control prin faptul că orientarea măsurată  $\beta'_{20}$  nu trebuie să difere față de orientarea  $\beta_{20}$  calculată decît cu o cîttime care să fie în limita toleranțelor, altfel denotă că am făcut greșeli și ca atare operațiunile vor trebui repetate.

Desigur că și în cazul poligonatiei cu orientări, se vor măsura distanțele, adică  $S_{11}, S_{12}, \dots$  putînd apoi trece la calcularea coordonatelor provizorii, pe cari le aflăm din relațiile, analoage cu cele stabilite deja.

- 300 -

$$x'_1 = x_A + S_{A1} \cdot \cos \beta_{A1}$$

$$x'_2 = x'_1 + S_{12} \cdot \cos \beta_{12}$$

$$x'_3 = x'_2 + S_{23} \cdot \cos \beta_{23}$$

⋮

$$x'_B = x'_n + S_{nB} \cdot \cos \beta_{nB}$$

$$y'_1 = y_A + S_{A1} \cdot \sin \beta_{A1}$$

$$y'_2 = y'_1 + S_{12} \cdot \sin \beta_{12}$$

$$y'_3 = y'_2 + S_{23} \cdot \sin \beta_{23}$$

⋮

$$y'_B = y'_n + S_{nB} \cdot \sin \beta_{nB}$$

Operațiune după care urmează compensarea de coordonate, identică cu cea din cazul precedent și apoi determinarea coordonatelor definitive.

Ca dezavantajul al acestei metode l-ar putea constitui faptul că pe teren s-ar putea prezenta situația de a fi executată o poligonatie suplimentară, sau o poligonatie bazată pe alte puncte decât cele ale cărora coordonate le-am avut, adică alte puncte decât A, B, P și Q.

### Cazuri speciale de poligonatie.

În punctul B nu avem viză îndepărtată (lipsește punctele) și nici punctele A sau P nu sînt văzute din punctul B. Este cazul din figura de mai jos, în care

nu mai putem măsura unghiul  $\alpha_B$  și nu avem nici orientarea  $\beta_B$ .

Prin urmare nu putem avea un control de unghiuri, deci nu mai poate fi făcută compensarea unghiurilor.

Pentru acest motiv se impune ca măsurarea unghiurilor, în fiecare stație, să fie făcută cît mai precis.

Singurul control, pe care îl putem avea, este cel al coordonatelor și ca atare numai compensarea de coordonate va putea fi efectuată.

Se va căuta, pe cît posibil, ca acest caz să fie evitat.

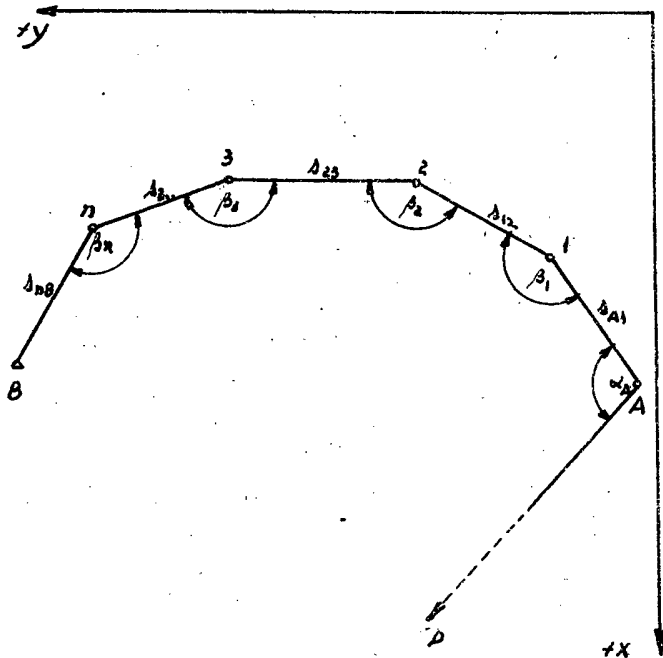


Fig. 203.

- b) Dacă lipsesc ambele puncte de viză îndepărtată (P și Q), însă din punctul de plecare A poate fi văzut punctul de închidere B (și invers), putem face poligonatie, deși nu avem toate 4 puncte, însă acum punctul B joacă rol de punct P pentru punctul A, care la rândul său îndeplinește rolul de punct Q pentru punctul de închidere B.

In acest caz (Fig. 204) se pot măsura unghiurile  $\alpha_1, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \alpha_2$ , precum și laturile  $A_1, A_2, \dots, A_n, B$

Se calculează orientarea dreptei AB, adică:

$$\operatorname{tg} \rho_{AB} = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}$$

Cu această orientare putem calcula apoi toate coordonatele provizorii și definitive.

După cum se vede problema nu diferă cu nimic de cazul general, putînd face atît compensare de unghiuri, cît și compensarea de coordonate.

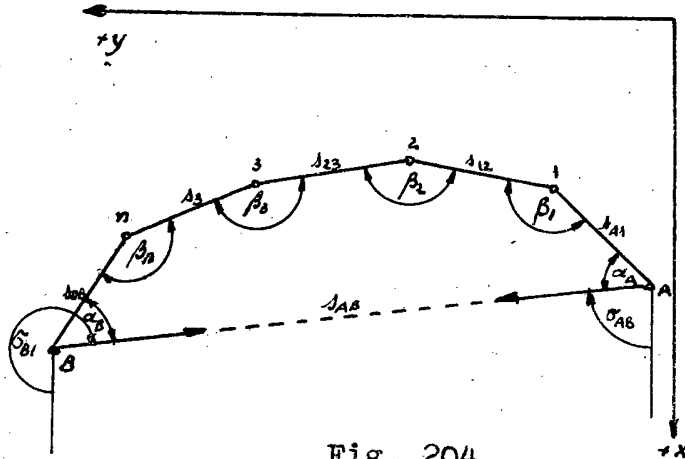


Fig. 204.

- c) Poligonatie în subteran sau poligonatie minieră, o prezintă cazul cînd lipsesc punctele de viză îndepărtată P, Q și nici punctul B nu este văzut din A.

In acest caz (Fig. 205) frecvent întălnit în subteran, se măsoară distanțele  $s_{11}, s_{12}, \dots$  și unghiurile  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$

și va trebui să ne alegem un sistem particular de axe de coordonate, avînd punctul de origine al sistemului chiar punctul A, iar axa de Y este pe direcția laturii  $A_{n1}$  și perpendicular pe ea, în punctul A axa x-ilor

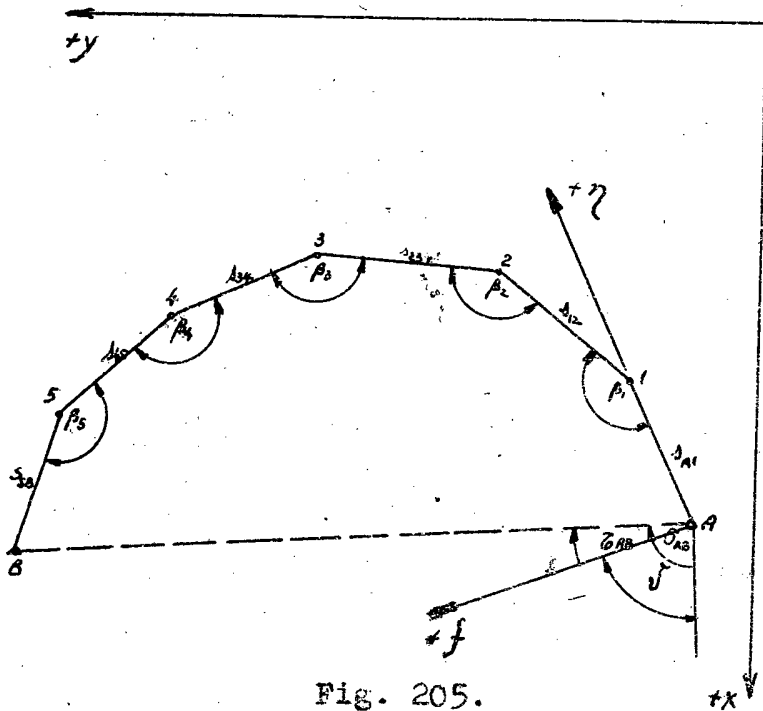


Fig. 205.

Este sistemul arătat în figură, în care axa Y este notată  $\eta$ , iar axa X este notată cu  $\xi$ .

Orientările, cari în sistemul de axe de coordonate XY le notăm cu  $\sigma$ , în acest sistem particular se notează cu  $\tau$ .

Aceste orientări pot fi calculate din relațiile:

$$\begin{aligned} \tau_{A1} &= 90^\circ \\ \tau_{12} &= \tau_{11} + \beta_1 \pm 180^\circ \\ \tau_{23} &= \tau_{12} + \beta_2 \pm 180^\circ \\ &\vdots \\ \tau_{n8} &= \tau_{n-1,n} + \beta_n \pm 180^\circ \end{aligned}$$

În acest sistem particular, în care avem coordonatele punctului A ( $\xi_A = 0, \eta_A = 0$ ), lungimea laturilor  $s_{A1}, s_{12}, \dots, s_{nB}$  și orientările lor se pot calcula coordonatele  $\xi$  și  $\eta$  ale tuturor celorlalte puncte, folosindu-se de relațiile:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_A + s_{A1} \cdot \cos \tau_{A1} & \eta_1 &= \eta_A + s_{A1} \cdot \sin \tau_{A1} \\ \xi_2 &= \xi_1 + s_{12} \cdot \cos \tau_{12} & \eta_2 &= \eta_1 + s_{12} \cdot \sin \tau_{12} \\ &\vdots & & \vdots \\ \xi_B &= \xi_n + s_{nB} \cdot \cos \tau_{nB} & \eta_B &= \eta_n + s_{nB} \cdot \sin \tau_{nB} \end{aligned}$$

Orientarea dreptei AB poate fi calculată acum atât în sistemul particular  $\xi \eta$  cât și în sistemul general XY:

$$\operatorname{tg} \tau_{AB} = \frac{\eta_B - \eta_A}{\xi_B - \xi_A}; \quad \operatorname{tg} \sigma_{AB} = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}$$

Diferența între aceste orientări, cum poate fi văzut și pe figură, ne dă unghiul de rotație  $\rho$  al sistemului  $\xi \eta$  față de sistemul general XY.

$$\text{Deci: } \tau_{AB} - \sigma_{AB} = -\rho$$

Știind unghiul de rotație  $\rho$  se pot afla orientările tuturor laturilor, având deja calculate orientările acestora în sistemul particular:

$$\begin{aligned} \sigma_{AB} &= \tau_{AB} + \rho \\ \sigma_{A1} &= \tau_{A1} + \rho \\ \sigma_{12} &= \tau_{12} + \rho \\ &\vdots \\ \sigma_{nB} &= \tau_{nB} + \rho \end{aligned}$$

Cu aceste date problema poate fi rezolvată, adică putem calcula coordonatele tuturor punctelor față de sistemul general de axe de coordonare, aflând în primul rând coordonatele provizorii și apoi pe cele definitive prin compensarea de coordonate, ca în cazul general de calcularea poligonațiilor.

Deci:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_A + s_{A1} \cdot \cos \rho_{A1} & y'_1 &= y_A + s_{A1} \cdot \sin \rho_{A1} \\ x'_2 &= x'_1 + s_{12} \cdot \cos \rho_{12} & y'_2 &= y'_1 + s_{12} \cdot \sin \rho_{12} \\ &\vdots & & \vdots \\ x'_n &= x'_n + s_{nB} \cdot \cos \rho_{nB} & y'_n &= y'_n + s_{nB} \cdot \sin \rho_{nB} \end{aligned}$$

După aceasta urmează compensarea coordonatelor, așa cum am arătat deja.

Trebuie să remarcăm că în poligonația minieră nu poate fi făcută compensarea de unghiuri, ca atare, măsurarea acestora trebuie executată cu multă precizie.

Dealtfel asupra acestei probleme se va reveni în capitolul Topografiei miniere.

Poligonație cu stație unică.

În această poligonație, care se pretează atunci când dintr-un punct se văd toate punctele poligonației, cu aplicație specială la drumuri, nu se face stație cu teodolitul decât într-un singur punct O (Fig. 206) de coordonate cunoscute.

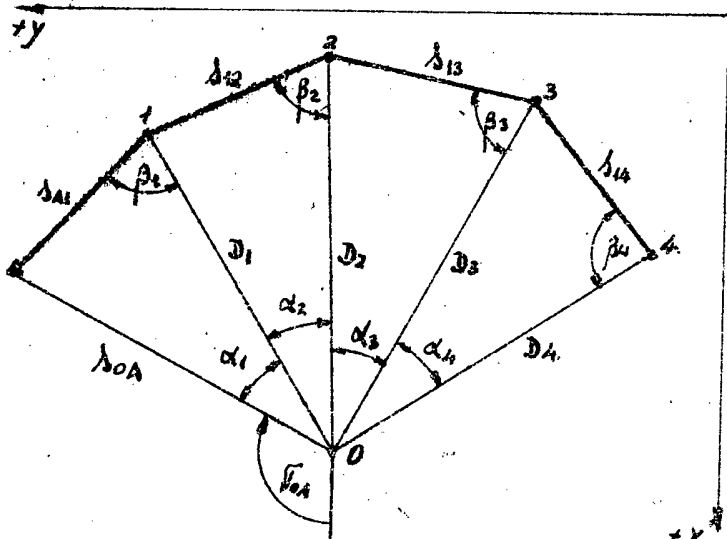


Fig. 206.

Se măsoară laturile  $s_{11}, s_{12}, s_{13}, \dots$  și unghiurile  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  Unghiurile  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$  precum și laturile  $D_1, D_2, D_3, \dots$  nu se măsoară, ci se deduc din calcule, din aproape în aproape.

Punctele O și A, având coordonate cunoscute, orientarea  $\rho_{OA}$  și latura  $s_{OA}$  pot fi calculate, prin relațiile a-

rătate în cadrul acestui capitol, iar unghiurile  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  fiind măsurate, se pot calcula și orientările



Stiind că relațiile care ne dau coordonatele punctelor 1,2 .....sînt:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_0 + D_1 \cdot \cos \rho_{01} & y'_1 &= y_0 + D_1 \cdot \sin \rho_{01} \\ x'_2 &= x_0 + D_2 \cdot \cos \rho_{02} & y'_2 &= y_0 + D_2 \cdot \sin \rho_{02} \\ &\vdots & &\vdots \\ x'_B &= x_0 + D_B \cdot \cos \rho_{0B} & y'_B &= y_0 + D_B \cdot \sin \rho_{0B}. \end{aligned}$$

In aceste relații singurele necunoscute sînt distanțele  $D_1, D_2, \dots, D_n$ , cari însă se determină din relația:

$$\begin{aligned} D_1 &= s_{0A} \cdot \cos \alpha_1 + s_{A1} \cdot \cos \beta_1 \\ D_2 &= D_1 \cdot \cos \alpha_2 + s_{12} \cdot \cos \beta_2 \\ &\vdots \\ D_n &= D_{n-1} \cdot \cos \alpha_n + s_{n-1,n} \cdot \cos \beta_n. \end{aligned}$$

Iar unghiurile  $\beta$ , cari nici ele nu au fost măsurate, cum am amintit mai sus, se calculează din relație:

$$\frac{s_{A1}}{\sin \alpha_1} = \frac{s_{12}}{\sin \beta_1} ; \quad \frac{s_{12}}{\sin \alpha_2} = \frac{D_1}{\sin \beta_2} ; \quad \dots$$

Odată găsite valorile lui  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  și distanțele  $D_1, D_2, \dots, D_n$ , calculul și compensarea poligonației se face ca în cazul general.

Poligonație cu orientări și stații sărite.

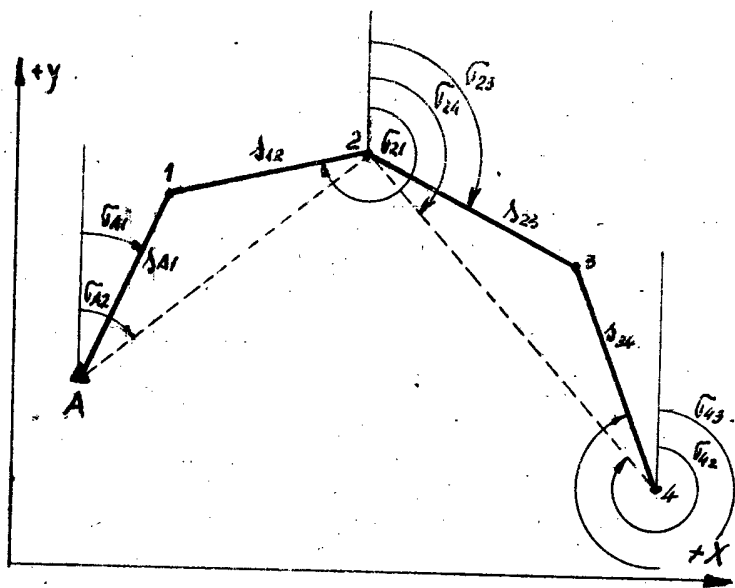
In loc de a staționa cu teodolitul în fiecare punct al poligonației și să măsurăm orientarea fiecărei laturi, putem sări punctul următor și să staționăm în cel de al doilea punct.

De exemplu, în cazul din Fig. 207, staționînd în punctul A, se măsoară orientarea  $\rho_{A1}$  dînd vize atît cîtred punctul 1, cît și cîtred punctul 2.

După aceea se face stație în punctul 2, săriind punctul 1 și potrivind în aparat ca să avem orientarea  $\rho_{A2} + 180^\circ$ .

Se vizează punctele 1,2 și 4, măsurînd orientările  $\rho_{21}, \rho_{23}$  și  $\rho_{24}$ .

După aceea s-ar face stație în punctul 4 și ar fi sărit punctul 3 și a.m.d.



Bineînțeles că distanțele se măsoară toate ( $s_{11}, s_{12}, s_{22}, \dots$ ). Această metodă, față de metoda staționării în fiecare punct, prezintă următoarele avantaje: rapiditatea lucrului, dispensându-ne de a așeza aparatul în toate punctele, precizia mai mare, provenită din faptul că erorile cumulate, provenite din punerea în stație sînt mai mici, avînd stații mai puține.

Fig. 207.

Căutarea greșelilor grosolane în poligonatie.

Între greșelile care pot fi comise pe teren, sînt: greșeli la măsurarea lungimilor și greșeli la măsurarea unghiurilor.

Problema care se pune este de a afla ce fel de greșeli au fost comise și în care punct, sau unde au fost comise.

- a) Greșeli la măsurarea laturilor.

Dacă în timpul măsurării lungimilor, de exemplu în punctul 3 am greșit cu o lungime de panglică în plus, cu 20 m (Fig. 208) la măsurarea laturii  $s_{23}$ , atunci poligonul nostru nu se va închide în punctul de închidere B, ci se găsește coordonatele unui alt punct B' între care coordonatele calculate, și coordonatele punctului B e-

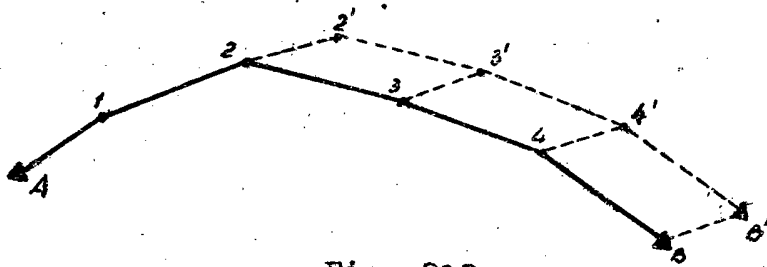


Fig. 208.

xistă o diferență ce depășește limita admisibilă, atunci se va calcula orientarea dreptei  $BB'$  și lungimea ei, din relațiile:

$$\operatorname{tg} \alpha_{22'} = \frac{Y_{2'} - Y_2}{X_{2'} - X_2}$$

$$\Delta_{22'} = \frac{Y_{2'} - Y_2}{\sin \alpha_{22'}} = \frac{X_{2'} - X_2}{\cos \alpha_{22'}}$$

și se va vedea că latura  $BB' = 20$  m.

Găsirea punctului în care a fost comisă greșala, se face prin compararea orientării laturii  $\overline{BB}$  cu a celorlalte laturi și atunci la măsurarea acelei laturi, s-a făcut greșala, a căreia orientare corespunde cu cea a laturii  $BB'$ , în cazul nostru am găsi că  $\alpha_{22'} = \alpha_{23}$  și vom deduce că am greșit cu 20 m la măsurarea laturii 2 - 3.

O altă greșală de măsurare a lungimilor ar fi citirea inversă a panglicii, adică în loc să citim de exemplu 11 m, citim invers, adică 9 m, comițind o eroare în minus de 2 m.

Găsirea erorii se face prin același procedeu.

- b). Greșeli la măsurarea unghiurilor.

Făcând calculul unei poligonatii, observăm că ajungem la un punct  $B'$  diferit de punctul de închidere  $B$

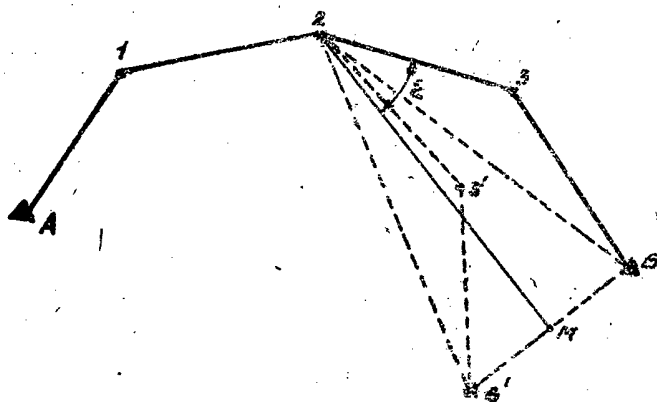


Fig. 209.

diferent de punctul de închidere  $B$ , la care trebuia să ajungem și, calculând orientarea  $\alpha_{22'}$ , vedem că nu corespunde cu orientarea nici uneia din laturi, așa că avem probă sigură că nu s-a putut comite greșala decât la măsurarea unghiurilor.

De exemplu (Fig. 209), să presupunem că am comis la măsurarea unghiului  $\beta_2$  o eroare  $\epsilon$ , în acest caz în loc să se închidă poligonatia, în punctul  $B$ ,

se va închide în  $B'$ .

Pentru a afla punctul în care a fost comisă greșala, pot fi întrebuițate una din următoarele metode:

Se calculează poligonatia aflând coordonatele lui  $B'$  apoi se calculează orientarea  $\alpha_{22'}$ .

Observăm că triunghiul  $B_2 B$  este isoscel iar perpendiculara dusă în punctul  $M$ , pe mijlocul dreptei

- 307 -

BB' ne determină punctul în care s'a comis eroarea la măsurarea unghiului.

Prin aceasta metodă se determină în mod grafic punctul în care s-a greșit, adică se vor așeza punctele poligonației calculate pe hirtie, precum și punctul B, apoi pe mijlocul dreptei BB' se ridică o perpendiculară.

Dar cu această metodă putem găsi și analitic punctul respectiv, astfel:

Se calculează coordonatele punctului M, orientarea dreptei  $M_i$  o cunoaștem, ea fiind:  $\alpha_{M_i} = \alpha_{B_i} + 90^\circ$ .

Punctul unde a fost comisă greșala, trebuie să se găsească pe această dreaptă, deci trebuie să satisfacă relația:

$$\operatorname{tg} \alpha_{M_i} = \frac{Y_i - Y_M}{X_i - X_M}$$

Așa că, făcînd succesiv încercarea cu coordonatele punctelor poligonației, se găsește punctul ale cărui coordonate satisfac relația și deci acela este punctul în care s-a comis greșala.

O altă metodă constă în determinarea distanțelor bazată tot pe observațiunea că avem acel triunghi isoscel, în care laturile  $B'_2 = B_2$ .

Așa că, la fel ca mai sus, se vor calcula succesiv aceste distanțe cu ajutorul coordonatelor

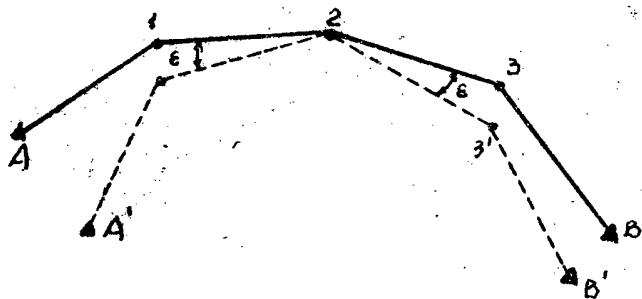


Fig. 210.

punctelor poligonației și acela este punctul pentru care distanța la punctul B este egală cu cea pînă la punctul B'.

Si în fine încă o metodă care constă în calcularea poligonației și în mod invers.

Calculînd poligonația (Fig. 210), începînd din punctul A, găsim eroarea de închidere BB'.

Dacă se începe calculul din punctul B, adică invers, se va ajunge la eroarea de închidere AA' și putem observa că singurul punct care are aceleași coordonate și într-un caz și în celalalt, este tocmai punctul unde a fost făcută greșala de unghi  $\varepsilon$ , care a făcut ca întreaga poligonație să fie rotită în jurul acestui punct cu acel unghi constant  $\varepsilon$ .

Odată determinat punctul în care unghiul a fost măsurat eronat, se va măsura din nou, în acel punct, unghiul respectiv.

### Intersecția poligonațiilor și calculul nodurilor.

Intersecția a doua sau chiar mai multe poligonații se întâmplă mai ales în orașe sau localități, unde la întretăiere de străzi avem și întretăiere de poligonații.

Punctul de intersecție (K) al poligonațiilor (Fig.211), se numește nod de poligonație.

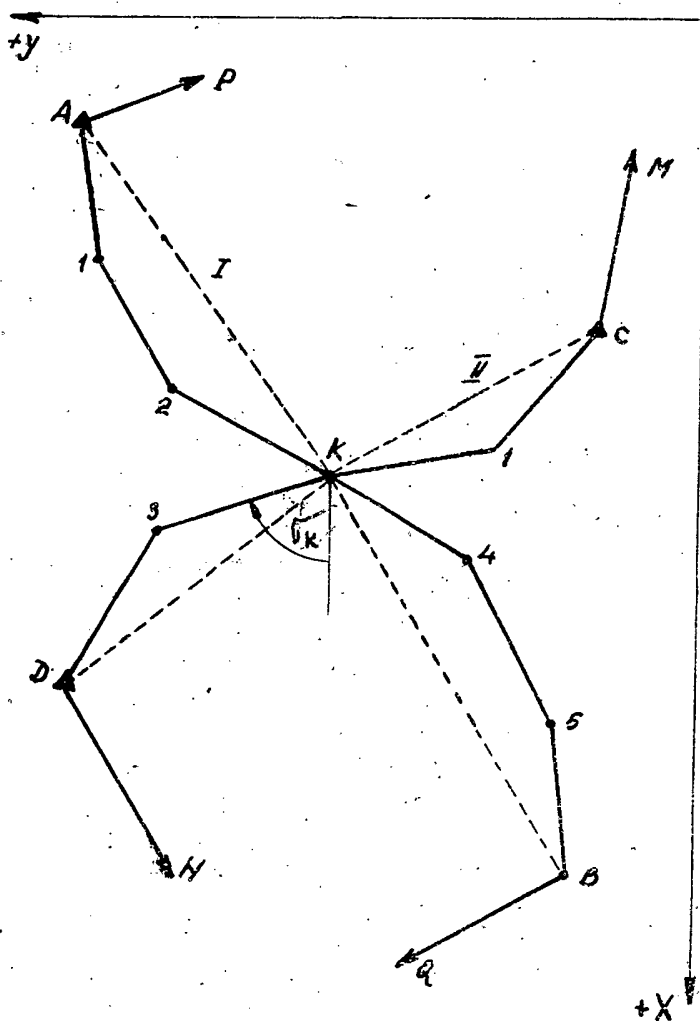


Fig. 211.

Acest punct, nod de poligonație, trebuie să îndeplinească condițiunea de a avea aceleași coordonate rezultate din calculul tuturor poligonațiilor care se intersectează în K.

Ori acest lucru datorită erorilor și compensărilor, pe cari le facem, nu este posibil și pentru acest motiv va trebui să găsim coordonatele lui cele mai probabile, cele adevărate.

De aceea se vor calcula toate poligonațiile care trec prin punctul K stabilindu-se coordonatele lui:

$$x_K^{(1)} = x_A + [dx]^{(1)}$$

$$x_K^{(2)} = x_B + [dx]^{(2)}$$

...

$$x_K^{(n)} = x_n + [dx]^{(n)}$$

Și apoi se ia media aceste coordonate și se află coordonatele lui cele mai probabile.

În mod analog se va calcula și orientarea laturilor care se intersectează în punctul K; de exemplu orientarea  $\alpha_K$  din figură, pentru latura notată cu L, se va calcula din toate poligonațiile și apoi se ia media orientărilor.

## CAP. VI.

RIDICAREA PLANURILOR SI ALEGEREA METODELOR DE  
RIDICARE.

Generalități, definiții:

Ridicarea planului topografic al unei porțiuni de teren înseamnă a determina pe un plan orizontal ansamblul proiecțiilor ortogonale a mai multor puncte din porțiunea de teren respectivă, în așa fel, încît ele să ne reprezintă pe hîrtie cît mai fidel, cît mai exact, porțiunea noastră de teren.

Pentru aceasta se va căuta ca punctele ce vor fi proiectate, să fie alese de așa manieră, încît ele să îndeplinească relul ce le revine de a ne reda cu fidelitate configurația terenului.

Ca metode întrebuintate, în acest scop, în topografie sînt metode foarte apropiate de metodele geometriei și trigonometriei, așa cum se va putea vedea în cadrul acestui capitol, ceea ce face ca Topografia să se apropie foarte mult de procedeele matematicilor pure.

Trebue să facem, din nou, următoarea remarcă și anume: cînd sîntem puși în situația de a ridica planul topografic al unei porțiuni de teren, trebue să deosebim următoarele cazuri:

- cînd avem de ridicat porțiuni mici de teren, de maximum  $200 \text{ km}^2$ , sîntem în domeniul topografiei, cînd ne servim de legile geometriei și a trigonometriei plane, iar în cazul suprafețelor mari, (țări, continente, etc.) sîntem în domeniul Geodeziei și vom fi nevoiți să ținem cont de sfericitatea pămîntului, de mișcarea planetelor și de diferite legi fizice, mai ales de refracția luminii, acum vom avea nevoie de mai multe cunoștințe și va trebui să aplicăm legile geometriei în spațiu, ale trigonometriei sferice, fizicii, analizei, precum și al celor astronomice.

În cadrul acestui curs noi ne vom ocupa însă numai de domeniul Topografiei, dar și în acest domeniu va trebui să facem o următoare clasificare a ridicărilor.

- 310 -

și anume: ridicarea suprafețelor mai mici de 100 ha și ridicarea suprafețelor mai mari de 100 ha.

Prin urmare, în raport cu această clasificare, ne vom alege metodele de ridicare.

- A. Ridicarea suprafețelor mai mici de 100 ha.

În ridicarea suprafețelor mici, când nu este cerută o precizie prea mare, pot fi întrebuintate diferite metode care pot fi grupate în următoarele categorii: metode grafice, metode numerice și metode combinate, adică grafice și numerice.

- 1. Metode grafice.

Aceste metode constau în a transpune, în mod grafic, pe hîrtie diferitele elemente de care ne servim în ridicarea planurilor, cum sînt distanțele și unghiurile care, pe lângă punct sînt elementele de bază în ridicările topografice.

Vom arăta pe rînd diferitele metode grafice folosite în practica topografică.

Dar, pentru că în metodele grafice, aparatul de care ne servim, este planșeta, primul mijloc pe care știința l-a avut la îndemînă pentru măsurarea unghiurilor, în primul rînd se va rîta în ce constă o planșetă și care sînt accesoriile sale care ne ajută în ridicările ce se fac.

Aparatura necesară constă dintr-o planșetă, care nu este altceva decît o mîsuță pe care se întinde hîrtia pentru a desena direct măsurătorile pe teren.

Această mîsuță este construită din lemn de teiu, cu suprafața plană și netedă, de dimensiuni 50 cm x 40 cm sau 60 cm x 50 cm.

Altădată planșeta era montată pe o articulația cu genunchiu, astăzi însă ea este așezată pe un trepied, prevăzut cu șuruburi de calaj, Fig. 212.

Planșeta poate primi o mișcare de rotație, în jurul axului vertical, pe trepiedul său, pentru a putea fi adusă în poziția voită.

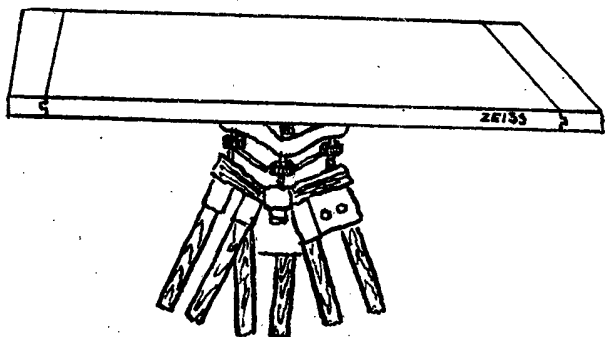


Fig. 212.

Dar în afară de mișcarea de rotație, ea poate avea și o mișcare de translație.

Pentru a obține rezultate cât mai precise, trebuie ca planșeta să poată fi pusă în stație cu exactitatea deasupra punctului ales și planul ei să fie orizontal.

Punerea în stație, deasupra punctului topografic, cu precizie, se face cu ajutorul unui echer de lemn (ABC, Fig. 213), prevăzut cu un fir de plumb.

Echerul de lemn constă din două rigle de lemn AB și BC, îmbinate una în alta sub un unghi de  $45^\circ$ , având în punctul C o scobitură prin care trece firul cu plumb, iar rigla AB se termină exact în prelungirea firului cu plumb (poziția desenată în figură).

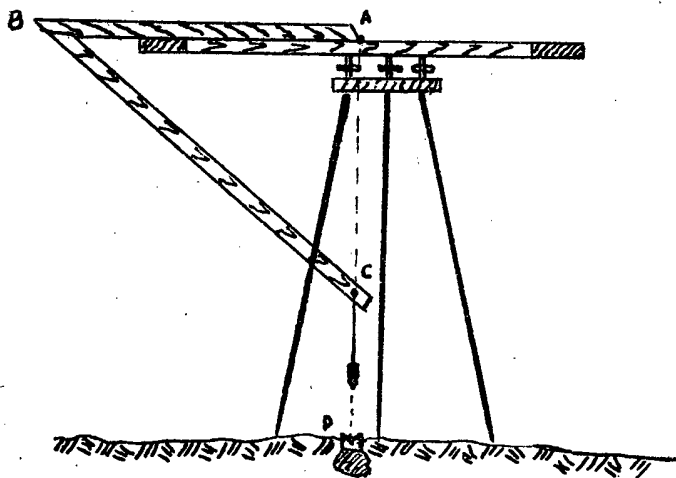


Fig. 213.

semnalizăm, planșeta este însoțită de o alidadă, care este o riglă de alamă sau nichel, prevăzută cu pinule sau cu lunetă.

Când alidada este prevăzută cu lunetă, aceasta are fire reticulare prevăzute și cu fire stadimetrică și în cele mai multe cazuri are și cerc vertical gradat și cu verniererele respective.

Capătul A este tăiat înclinat.

Cu acest dispozitiv punctul P este adus cu exactitate pe planșetă.

Orizontalizarea planșetei se face cu ajutorul nivelei cu bulă de aer, așezată pe două direcții perpendiculare, iar aducerea bulii între repere se face cu șuruburi de calaj.

Pentru a putea visa diferite puncte, pe cari în prealabil le



- 312 -

Din descrierea sumară a alidadei, rezultă că planșeta poate servi nu numai pentru măsurătorile de planimetrie, ci și pentru tachimetrie și nivelment.

Precizia pe care o dau este în funcție de scara adoptată, la scară mare, precizie mai mare.

Trebuie făcută următoarea remarcă și anume: construcția planșetei nu permite deplasări mari pentru așezarea ei deasupra punctului de stație (în cazul teren tării), mai ales pentru punctele situate pe marginea planșetei.

Deaceia pentru a evita manipulari inutile, se recomandă a se orienta în primul rând planșeta din echi, cât de precis posibil și numai după aceea, prin deplasări mici, să se atingă scopul operației, adică așezarea precisă a planșetei deasupra punctului de stație și orientarea ei.

Si acum să arătăm diferitele metode grafice folosite precum și operațiunile pe care le facem.

- a) Metoda polară sau radială.

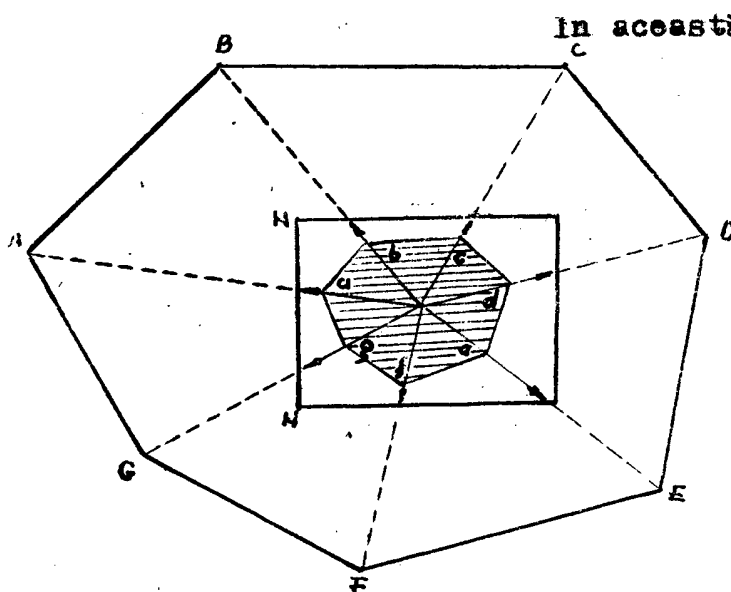


Fig. 214.

planșetă, aceste vize.

Măsurăm cu panglica pe teren distanțele OA, OB, OC.....și le reducem la scara la care vom să lucrăm obținând astfel pe hirtie lungimile  $0_a, 0_b, 0_c, \dots, 0_g$  corespunzătoare celor de pe teren, reduse la scara adăisă și obținem planul terenului nostru, arătat hașurat în figură.

În această metodă, presupunind că am avea de ridicat planul unei suprafețe de forma unui poligon (Fig. 214), alegem un punct central O, de unde vom să facem ridicarea, punct denumit pol, de aceia și denumirea de metodă polară.

Se așează planșeta în stație deasupra lui O, pe care cu ajutorul echerului cu fir de plumb îl transpunem pe planșetă.

Vizind cu alidada punctele A, B, C, trasăm pe hârtia așezată pe

- 313 -

Mai amintim că ridicarea așa cum s-a făcut în operațiunea descrisă, este cu planșeta neorientată, adică am ridicat porțiunea de teren orientată față de nordul magnetic sau nordul geografic, putem însă să ne orientăm ulterior planul ridicat.

Pentru a ridica chiar pe teren planul orientat, se va orienta planșeta, cu ajutorul declinatorului, în așa fel ca latura sa, de exemplu NN, să fie orientată după nordul magnetic.

Dacă vom să facem orientarea după meridian, adică după nordul geografic, va trebui să cunoaștem unghiul de declinație, unghiul făcut de nordul magnetic cu nordul geografic, ceea ce este posibil numai în regiunile sau localitățile prevăzute cu stațiuni care stabilesc această declinație.

În rezumat, metoda pelară grafică poate fi executată cu planșeta orientată și cu planșeta neorientată.

Dacă porțiunea de teren pe care vom să o ridicăm, este de suprafață mai mare și nu pot fi făcute ridicări cu un singur pol, se mai alege încă un pol ( $O_1$ ), figura 215.

În acest caz se procedează astfel:

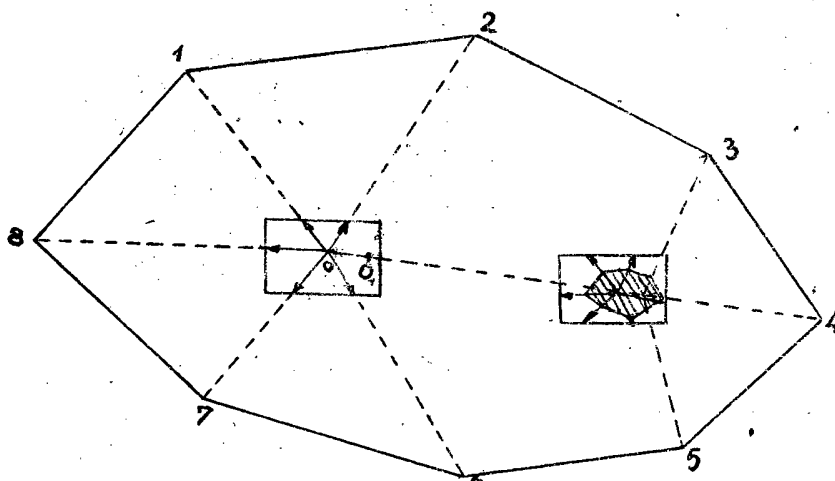


Fig. 215.

Se așează planșeta în stație în punctul  $O$ , se dau vize către polul  $O_1$  și 1, 2, 7, 8, adică numai către punctele mai apropiate și către polul  $O_1$ , măsurând și distanțele respective  $O_1, O_2, \dots$

După aceea se face stație în  $O_1$ , așezând planșeta în așa fel, ca punctul  $O_1$  stabilit pe hirtie când planșeta a fost pusă în stație în  $O$ , să

fie deasupra punctului  $O_1$  de pe teren și se dau vize către 3, 4, 5, măsurând distanțele la aceste puncte dela  $O_1$ .

Bineînțeles că punctul  $O_1$  fixat pe planșetă în stația  $O$  este dat de distanța  $OO_1$  redusă la scara aleasă.

Reducem apoi distanțele la scară și obținem planul terenului hașurat pe planșetă.

- 314 -

- b) Metoda intersecției.

Si în această metodă putem lucra cu planșeta orientată sau cu ea neorientată.

În această metodă, la fel ca la intersecția înainte, având două puncte A și B staționabile, se cere să fie determinată poziția punctului C.

Distanța AB fiind cunoscută, dacă nu, se măsoară, se va reduce la scară și o transpușem pe hirtie.

După aceea se așează planșeta în stație în punctul A și se orientează planșeta în așa fel ca punctul B de pe teren să fie pe direcția AB, trasată pe hirtie (Fig. 216).

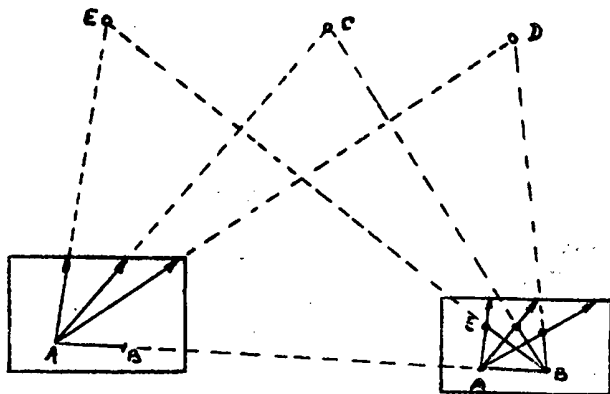


Fig. 216.

Vizăm punctul C și trăsăm pe hirtie direcția AC.

Schimbăm stația în B, făcând ca punctul B de pe teren să fie proiectat în punctul B fixat pe hirtie.

Se vizează punctul A pentru orientarea înapoi a planșetei, astfel ca viza dată să fie în coincidență cu direcția AB de pe hirtie.

Dând acum viză către punctul C, la întoarcerea vizei acesteia cu cea trasată în prima stație și găsește punctul c.

În mod analog pentru alte puncte D, E, etc.

Pentru controlul, dacă este posibil, se așează planșeta și într-unul din punctele vizate și se observă dacă vizele au sau nu direcția către A și B, în caz afirmativ operația a fost bine executată.

Operațiunea descrisă este intersecția înainte cu planșetă.

Tot la această metodă poate fi făcută și intersecția laterală, care se utilizează atunci, când unul din punctele cunoscute, de exemplu punctul B (Fig. 217) este nestaționabil.

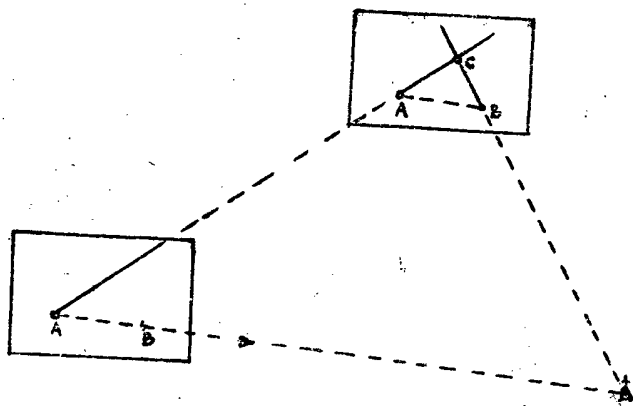


Fig. 217.

Modul de operație este următorul:

fiind cu planșetă în stație în punctul A, se orientează către punctul inaccesibil pe care îl stabilizează, distanța AB fiind cunoscută și viză către punctul C, a cărui poziție e căutată, trasând viza respectivă.

Schimbăm stația în punctul C, orientând planșeta după viza CA.

Poziția punctului C se găsește la intersecția vizei trasate, în prima stație cu viza care u-

nește punctul B de pe teren cu B fixat pe hîrtie.

Dacă am avea încă un punct, acesta nu ne va servi și pentru controlul operației.

Intersecția faapei sau Pothomet cu planșeta, posibilă numai cînd avem trei puncte cunoscute și trebuie să determinăm poziția punctului de stație  $P_1$ .

Metoda utilizată este metoda cu punctul lui Colliu, care dă rezultate multumitoare.

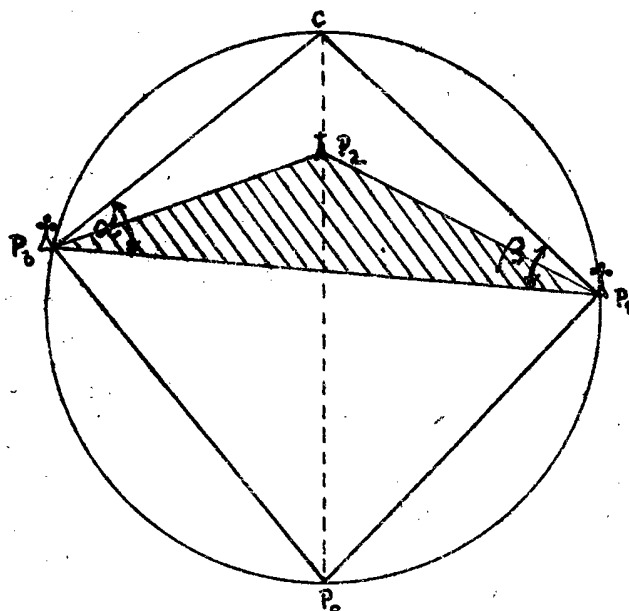


Fig. 218.

Se trec pe planșetă cele trei puncte  $P_1, P_2, P_3$  ale căror coordonate nu le cunoaștem, ci le luăm de pe hîrtie, orientarea lor făcîndu-se prin orientarea marginii planșetei cu marginea hîrții, adică se trasează pe hîrtie, la scara aleasă, numai partea hașurată din Fig. 218.

Pe teren se face stație în punctul  $P_0$ , pe care veia să-l determinăm, așezînd planșeta în așa fel ca punctul  $P_1$  de pe hîrtie, să fie deasupra lui

- 316 -

$P_2$  și se așază ca direcția  $P_2, P_1$  din triunghiul hașurat să fie pe direcția  $P_1, P_2$  de pe teren, iar din punctul  $P_2$  de pe hîrtie așezat deasupra lui  $P_2$  de pe teren se trasează o viză către  $P_1$  și am construit unghiul  $\alpha$  din  $P_2$ .

După aceea se operează în mod similar punînd punctul  $P_1$  de pe hîrtie deasupra lui  $P_1$ , orientînd direcția  $P_1, P_2$  după  $P_1, P_2$  de pe teren și se trasează unghiul  $\beta$  în punctul  $P_1$ .

La intersecția celor două vize traseate, avem punctul C, numit punctul lui Collin, care este coliniar cu  $P_1$  și  $P_2$  și încă o proprietate: prin cele trei puncte  $P_1, P_2, P_0$  se poate duce un cerc, după cum știm, iar punctul lui Collin se găsește pe acest cerc, deoarece unghiurile  $\alpha$  și  $\beta$  construite și cu cele existente între cele trei puncte și punctul  $P_0$  sînt egale ca măsurînd acelaș arc de cerc.

Odată determinat punctul lui Collin, sîntem în posesia unei direcții sigure  $CP_2$ , pe care se va găsi și punctul  $P_0$ .

Orientînd planșeta în așa fel ca direcția  $CP_2$  să treacă prin punctul de stație  $P_0$ , operația este aproape terminată și nu ne rămîne decît să trasăm cu alida o viză prin punctul  $P_2$  de pe hîrtie și  $P_2$  de pe teren și prin  $P_1$  de pe hîrtie o viză cître  $P_1$  de pe teren, cari prin intersecție ne vor da punctul  $P_0$ .

În mod obișnuit aceste vize date prin punctele  $P_1$  și  $P_2$  de pe hîrtie, cître cele de pe teren și cu direcția  $CP_2$ , nu se intersectează într-un anumit punct, ci formează un triunghi.

Punctul  $P_0$  va fi considerat în centrul de greutate al acestui triunghi.

Această metodă mai este cunoscută și sub numele de metoda italiană și este mult întrebuintată de către militari.

Problema Hansen poate fi și ea tratată în cadrul acestui capitol, putînd fi rezolvată grafic ca o întretăiere înapoi (Pöthenet), cu deosebirea față de cele enumerate că problema poate fi rezolvată chiar cu două puncte cunoscute.

Se cere să căutăm poziția punctului C, avînd pe A și B.

Alegem un al 4-lea punct D și cu stație în punctul C trasăm cele trei direcții CA, CB și CD.

Mutîndu-ne în punctul D, facem stație, cu distanța cd, luată arbitrar și se dă vize cître A și B,

după ce în prealabil planșeta a fost orientată după DC, se va obține o figură asemenea cu ABCD, în figură a'b'c'd', însă nu la scara la care sînt fixate cele două puncte A și B (Fig.219.).

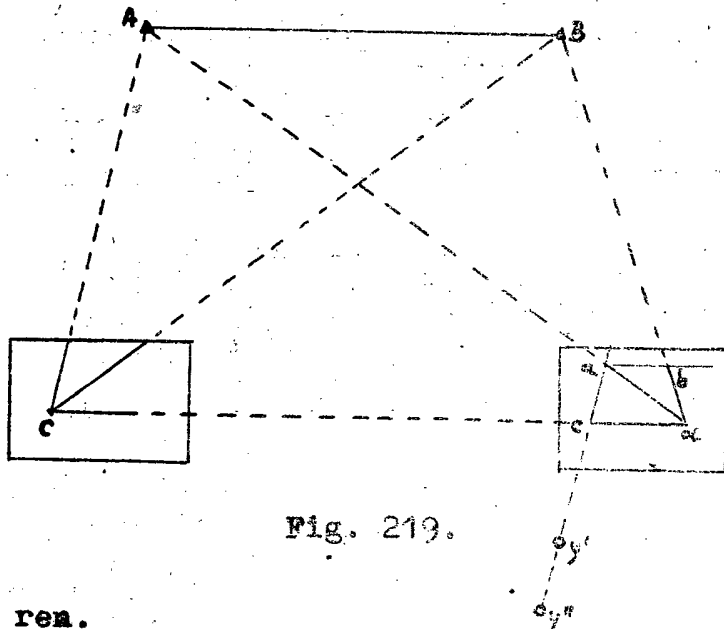


Fig. 219.

Odată figura asemenea desenată, se marchiază pe teren unghiul BAC prin jalocamele  $y_1, y_2, y_1', y_2'$ . Se șterge tot desenul, se orientează a b la scara dată pe direcția  $a'b'$  cu a în a și se trasează pe planșetă direcția a c, după a'c', folosindu-ne de jalocamele  $y', y$ . Planșeta acum este perfect orientată pe teren.

ren.

Cu stație în D se trasează direcția AD rotind linia alidadei în jurul lui a pînă este pe aliniamentul ei și punctul A, la fel se va trasa BD rotind alidada în jurul lui b, se obține astfel la intersecția lor punctul d prin vizare înapoi.

Din d vizînd pe C, se obține punctul c adevărat.

Dacă dorim să mai facem o verificare, atunci ne mutăm din nou în C și facem vizele respective.

Avantajul acestei metode constă în aceea că putem lucra cu două puncte cunoscute.

Însă pierderea timpului cu desensarea unei figuri asemenea, fixarea direcțiilor cu jalocame, o nouă orientare și punere în stație, plus ștergerea, năzicirea unei operațiuni, constituiesc dezavantajul metodei.

La acestea se mai adaugă și controlul, cam șubred, cu vizarea din nou din punctul C.

La avantajele însă se poate adăuga faptul că prin acest procedeu determinăm concomitent două puncte ( C și D ), fiindcă nu sîntem oprîți de a ne alege punctul D chiar unul din punctele pe cari vom sprijini între ridicări.

- c) Metoda poligonală sau metoda drumurilor.

Este metoda întrebuintată în cazul când vizele în anumite direcții nu pot fi date, cum este de exemplu determinarea conturului unei păduri.

În poligonatie sau drumuire facem stații succesive în punctele alese, măsurând și distanțele pe care le reducem la scara admisă și apoi le fixăm în sensul vizelor trasate.

Având de determinat conturul 1, 2, 3, 4, 5, 6 (Fig. 220), se face stație cu planșeta în punctul 1, vizăm spre 2 și 6, măsurăm distanțele 1-2 și 1-6, cari, reduse la scară, se trec pe vizele corespunzătoare trasate pe planșetă.

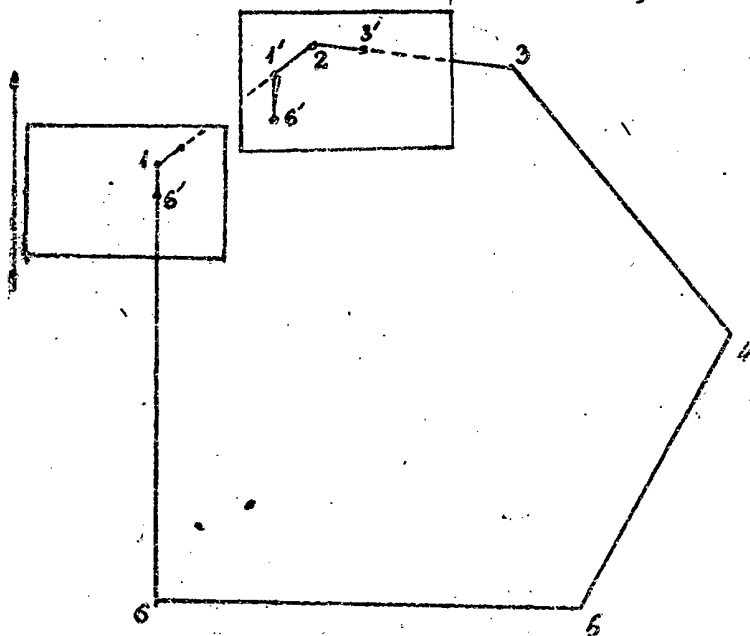


Fig. 220.

La stația în punctul 6 va trebui, drept control, ca, orientând planșeta înapoi, viza 6-1 de pe teren, să coincidă cu 6'-1' deja fixată pe planșetă.

Se schimbă punctul de stație în punctul 2, fiind planșeta se va așeza de așa manieră încât 2' de pe planșetă, trasat în prima stație, să fie proiecția lui 2 de pe teren și se orientează planșeta înapoi către 1, pe direcția 2'-1', vizăm punctul 3, măsurăm distanța și o reducem la scară, determinând astfel pe planșetă punctul 3'.

Operațiunea se continuă și ajungând a face stația în punctul 3, vizăm punctul 4, măsurăm distanța și o reducem la scară, determinând astfel pe planșetă punctul 4'.

Operațiunea se continuă și ajungând a face stația în punctul 4, vizăm punctul 5, măsurăm distanța și o reducem la scară, determinând astfel pe planșetă punctul 5'.

Operațiunea se continuă și ajungând a face stația în punctul 5, vizăm punctul 6, măsurăm distanța și o reducem la scară, determinând astfel pe planșetă punctul 6'.

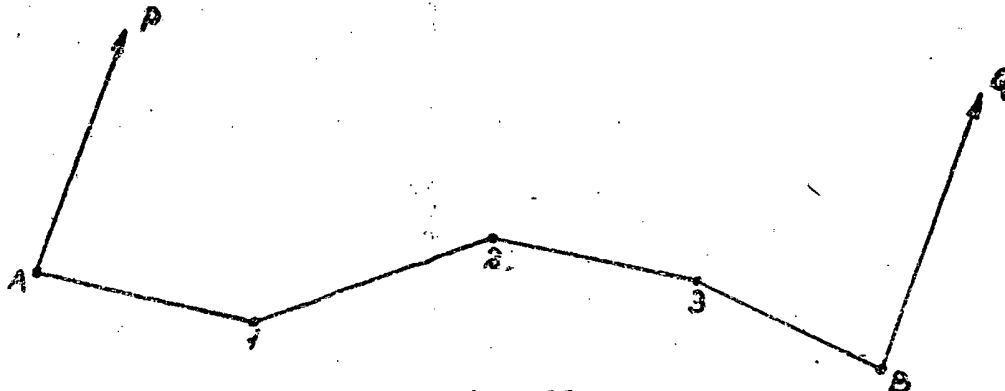


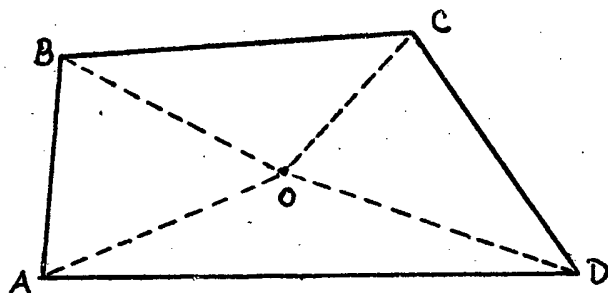
Fig. 221.

- 319 -

Poligonatia poate avea și forma reprezentată în figura de mai sus, adică poligonul nu este închis, ci pornește din punct cunoscut A către un alt punct cunoscut B, iar punctele P și Q sînt cele două vize îndepărtate, cari servesc la orientarea planșetei.

- d) Metoda triunghiului sau triangulație grafică

În loc de a măsura toate distanțele ca în cazul poligonatiei, atunci avem un poligon închis, ca în Fig. 222 și 230, se măsoară o singură lungime, o bază, de exemplu AB, alegem un punct central O, și după ce s-a trecut pe



hîrtie la scară distanța AB, îl determinăm prin intersecția vizelor date din punctele A și B.

După aceea avînd latura BO, determinată prin vize din O și B, se determină punctul C, ș.a.m.d. pînă cînd au fost determinate toate punctele.

Fig. 222.

- e). Metoda abscise și ordonate.

Se aplică cu predilecție în cazul terenurilor cu forme negeometrice, neregulate.

De exemplu la ridicarea terenului din Fig. 223, care are contur o linie curbă. În acest caz se vor

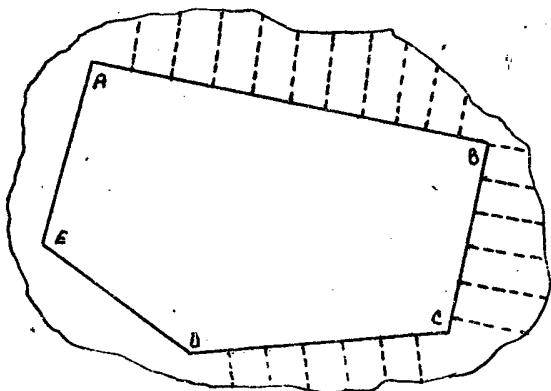


Fig. 223.

se vor alege cîteva puncte A, B, C, D, E, a căror ridicare o facem printr-una din metodele arătate, se divizează aceste lungimi AB, BC, etc de exemplu din 5 în 5 m și se măsoară distanțele dela aceste puncte pînă la conturul terenului și le trecem pe planșetă la scară.

Vom obține prin unirea acestor ordonate, trasate întrerupt pe schiță, conturul terenului.



Evident că pentru determinarea cât mai precisă a conturului, va trebui ca distanțele între aceste ordine să fie cât mai mici.

### O b s e r v a Ț i u n e .

În general se vor aplica toate metodele, înțrebuițind cea mai adecuată sau chiar combinate.

Dacă vom ca terenul ridicat să fie legat de sistemul general de axe coordonate, va trebui să fie determinate coordonatele cel puțin a două puncte din terenul nostru, față de cari puncte se vor face toate celelalte ridicări necesare pentru aflarea altor puncte.

Acum hîrtia, care obișnuit are dimensiunile 64 cm x 50 cm, va fi cadrilată, avînd cadrilajul pentru 50, 100 sau 200 m.

Un cadrilaj este atunci perfect, cînd cele două diagonale sînt egale ca lungime și cînd ele trec prin punctele de intersecție ale cadrilajului.

### - 2. Metode numerice.

Aceste constau în a măsura elementele cari ne interesează și apoi în birou ar uraa să fie raportate pe plan pentru a afla configurația terenului respectiv, pe cînd în metodele grafice întregă operațiune este terminată pe teren.

Și în acest caz deosebim mai multe metode.

#### - a) Metoda polară.

Se alege un punct P, numit pol și cu ajutorul teodolitului se măsoară toate unghiurile  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  (Fig. 224) față de o distanță cunoscută PA.

După aceea se măsoară toate distanțele PA, P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub> ..... și apoi în birou se desenează trecînd pe planșetă unghiurile cu ajutorul unui raportor special și distanțele la scară.

Dacă suprafața este mai mare, poate fi luat

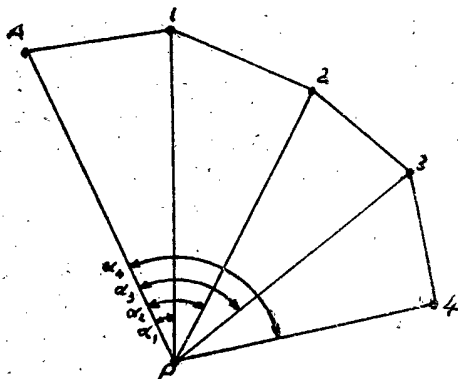


Fig. 224.

și un al doilea sau al treilea pol.

Avantajul pe care îl prezintă metoda polară numerică față de cea grafică constă în faptul că unghiurile sînt măsurate mai precis și se trec pe planșetă mai precis.

Desavantaj că cere mai mult timp și instrumente mai precise și deci mai costisitoare.

- b) Metoda intersecției.  
Intersecție înainte.

Analoagă cu metoda grafică, adică se măsoară lungimea AB și cu teodolitul măsurăm unghiurile  $\alpha$  și  $\beta$  și poziția punctului căutat este perfect determinată.

Sau o altă metodă constă în a afla lungimea segmentelor  $m = AC$   $n = BC$ ,  $h = 1 - C$  (Fig. 225)

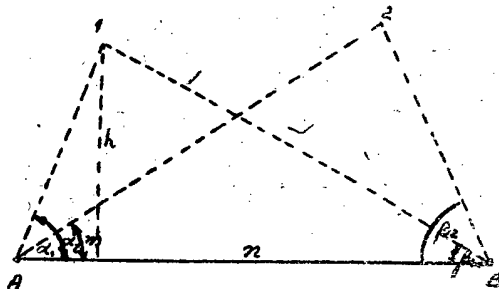


Fig. 225.

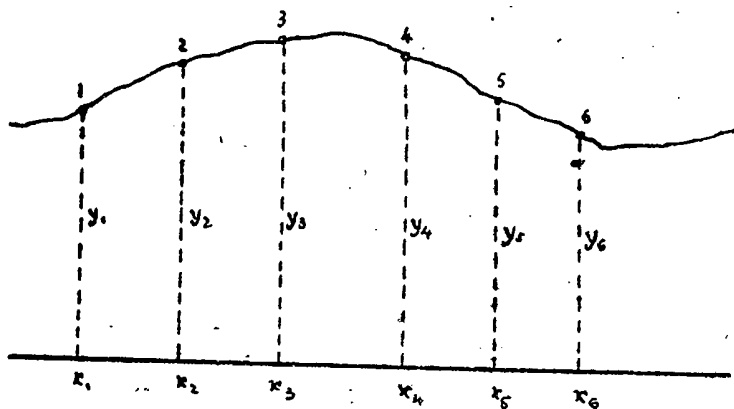
- c) Metoda poligonală.

Este identică cu metoda poligonală grafică, doar că unghiurile se măsoară cu teodolitul.

- d) Metoda abscise și ordinate.

Pe teren se măsoară cu cea mai mare precizie o lungime AB și față de aceasta se va ridica apoi conturul terenului.

În cazul din Fig. 226 se va ridica linia curbă, măsurînd ordinatele punctelor 1, 2, 3, ..... față de dreapta AB considerată ca axă XX.



Trasarea sau determinarea piciorului perpendicularăi coborite din punctele 1, 2, ... pe treapta AB, luată ca axă x, se face cu ajutorul echerului cu prisme pentru distanțe mai mici, pentru ordonate mici, iar pentru distanțe mai mari cu teodolitul.

Fig. 226.

În schița din Fig. 234 abscisele  $x_1, x_2, x_3, \dots$  sînt considerate începînd din punctul A pînă la piciorul perpendicularăii punctului respectiv.

Eroarea unghiulară ce poate fi făcută cu echerul cu prisme este la unghiul drept de  $\pm 2$  minute.

Se pune întrebarea care este precizia măsurătorilor în metoda abscise și ordonate, considerînd de exemplu ordonata ca fiind  $y = 50$  m, eroarea medie este:

$$m_x = \frac{\pm 2'}{\rho''} y \quad \rho'' = 3438 \quad m_x = \pm \frac{2}{3438} \cdot 5000 = 3 \text{ cm}$$

În mod obișnuit această metodă a absciselor și ordonatelor întrebuintată pentru ridicarea liniilor curbe, utilizează echerul cu prisme pentru ordonate maxime de 30 m.

Pentru acest motiv în cazul terenurilor care au conturi neregulate, o linie curbă, axa ce este luată ca axa xx se va apropia cît mai mult de linia curbă pentru ca ordonatele să nu fie mai mari de 30 m.

- e) Metoda triunghiului sau triangulație.

Similară cu metoda grafică a triangulației, cu deosebirea că se măsoară unghiurile cu teodolitul.

Este metoda întrebuintată în special cînd suprafața terenului este mai mare, aproape de 100 ha și cînd se cere o mai mare precizie.

Unghiurile măsurate va trebui să fie compensate în modul cum se va arăta în cazul suprafețelor mai mari de 100 ha.

- 323 -

Numai după această operațiune se vor calcula celelalte laturi ale triangulației în funcție de latura, bază, măsurată și unghiurile compensate.

### - 3) Metode combinate.

De cele mai multe ori în ridicarea planurilor se vor întrebuița metode combinate, adică atât metode grafice cât și numerice sau mai multe metode numerice, ori grafice.

De exemplu, având de ridicat planul unui teren de formă neregulată, ca cel din figura 227, se vor alege mai multe puncte A, B, C, D, E, F și se va forma o linie

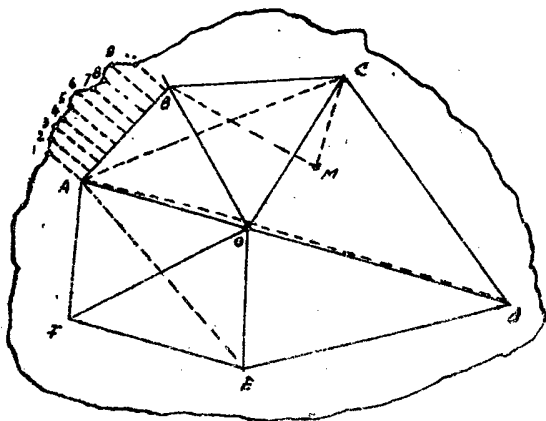


Fig. 227.

poligonală, care poate fi determinată fie prin metoda poligonală, fie prin cea a triangulației, luând un punct central O și formând triunghiurile din figură sau tot metoda triunghiului, însă triunghiurile formate prin unirea punctelor alese, în figură cu linii întrerupte.

Mai pot fi determinate punctele A, B, C, ..... și prin metoda intersecției. Odată stabilite toate punctele A, B, C, ..... și

având conturul acesta poligonal, pentru ridicarea conturului curb al terenului se va utiliza metoda absciselor și ordinate, luând succesiv ca axe de coordonate laturile AB, BC, CD, etc.

Dacă am avea puncte izolate, de exemplu M, acestea poate fi ridicat printr-una din metodele descrise, una sau mai multe intersecții grafice sau numerice

În sferă de combinarea metodelor între ele, pot fi combinate și aceleași metode, cea grafică cu cea numerică, așa cum este cazul intersecției înapoi, metoda construirii grafice a unghiurilor și și și care au fost măsurate.

Adică, având trei puncte  $P, P_1, P_2$ , se cere să se determine poziția pe plan, a punctului  $P_0$  cunoscut pe teren.

Cu teodolitul așezat în stație în punctul  $P_0$  se vor măsura unghiurile  $\alpha$  și  $\beta$ .

- 324 -

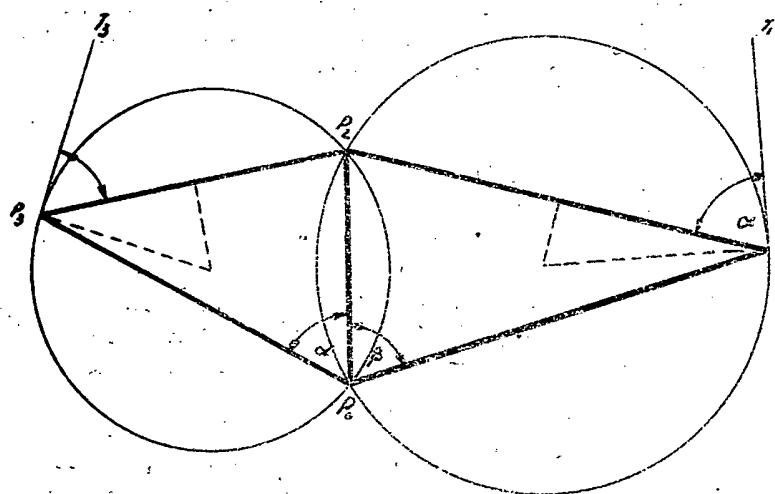


Fig. 228.

Pe hirtie avem plasate punctele  $P_1, P_2, P_3$ , cari au fost luate de pe o hartă, sau date prin coordonatele lor.

În punctele  $P_1$  și  $P_2$  construim cu raportorul unghiul  $\alpha$  și  $\beta$  cu valearea primită după măsurarea lor pe teren

Ridicînd perpendiculare pe mijlocul laturilor  $P_1P_2$  și  $P_2P_3$  și în punctele  $P_1$  și  $P_2$  la tangentele  $P_1T_1$  și  $P_2T_2$  se vor determina cen-

trele  $O_1$  și  $O_2$  a celor două cercuri, la a căror intersecție se va găsi punctul  $P_0$  și problema este rezolvată.

Sau o altă metodă, cea a hirtiei de calc, cea mai rapidă, dar puțin precisă, acceptabilă pentru operațiunile militarilor de cari este mult întrebuintată.

Metoda constă în desemnarea pe hirtie de calc a unghiurilor sub cari se văd punctele  $P_1, P_2, P_3$  din punctul  $P_0$  în care a fost făcută stație și s-au măsurat aceste unghiuri ( $\alpha$  și  $\beta$ ).

Pe planșetă sînt desenate punctele

$P_1, P_2, P_3$ .

Se caută apoi poziția hirtiei de calc pe planșetă, pentru ca cele trei raze (vize) să treacă prin punctul respectiv  $P_1, P_2, P_3$ .

Poziția această este unică, deci scopul este ajuns.

Cîndă găsită această poziție, se întea-pă virful comun al unghiurilor  $\alpha$  și  $\beta$  și astfel avea fixată poziția punctului pe planșetă.

#### O b s e r v a ț i u n e.

În ridicarea planșurilor se vor utiliza oricare din metodele asintite sau mai multe metode sau metode combinate, căutînd metoda cea mai adecuată.

- B. Ridicarea suprafețelor mai mari de 100 ha.

---

1. Generalități - formarea canevasului.

Cind terenul de ridicat în plan are o suprafață mai mare de 100 ha, metodele geometrice arătate anterior, nu mai sînt aplicabile, fiindcă măsurarea directă a lungimilor, necesară pentru determinarea mai multor puncte, nu numai că este o operațiune grea, costisitoare, cere timp și în multe cazuri imposibil de executat, dar nu ne va putea da nici precizie suficientă.

Pentru acest motiv, procedînd dela ansamblu la detalii, se vor obține rezultate mult mai precise întrebuintînd metode trigonometrice, cari constau în măsurarea unui număr restrîns de lungimi, în multe cazuri una sau două și măsurînd toate unghiurile, operațiune mult mai ușoară și expeditivă, apoi se calculează toate celelalte laturi ale figurilor geometrice prin relații trigonometrice.

Deci, pornind dela ansamblu cître detalii, vor fi în primul rînd, stabilite un număr suficient de puncte, prin unirea cărora să se obțină triangulația aceluia teren și numai după determinarea cu cea mai mare precizie a acestor puncte cari formează așa numitul canevas fundamental, se va trece la ridicarea detaliilor prin metode deja cunoscute și cari vor fi repetate, enumerîndu-le în cadrul acestui capitol.

Din cele amintite reiese în mod neîndoios, că prima operațiune ce avem de făcut în cazul terenurilor de suprafață mare, este recunoașterea terenului în scopul alegerii formei canevasului fundamental, după împrejurări, pentru formarea rețelei de triangulație, această operațiune, aflată la discreția operatorului, va depinde de priceperea lui și de scopul urmărit.

Tot cu ocazia recunoașterii terenului va fi stabilit locul unde se va plasa baza triangulației, adică latura care va fi măsurată pentru a ne ajuta în calcule la determinarea celorlalte laturi ale triangulației.

După aceea urmează marcarea punctelor așa cum s-a văzut în cadrul Capitolului I.

Mai amintim că va trebui, pe cît posibil, ca alegerea punctelor să fie făcută în așa fel ca triunghiurile canevasului ce va rezulta, să aibe forma unui triunghi echilateral.

Acest principiu se va avea în vedere în totdeauna pentru considerente ce vor fi văzute la transmiterea erorilor în triangulație.

să fie mai mic de  $30^\circ$ . În nici un caz unghiurile nu trebuie

Formarea canevasului și alegerea ipotezei de triangulație depinde de forma pe care o are terenul respectiv.

În cazul terenurilor cu dimensiuni egale în toate direcțiile, forma de triangulație cea mai adecvată ar fi cea din Fig. 229, adică un poligon cu un punct central și cu triunghiurile formate cât mai apropiat de triunghiul echilateral.

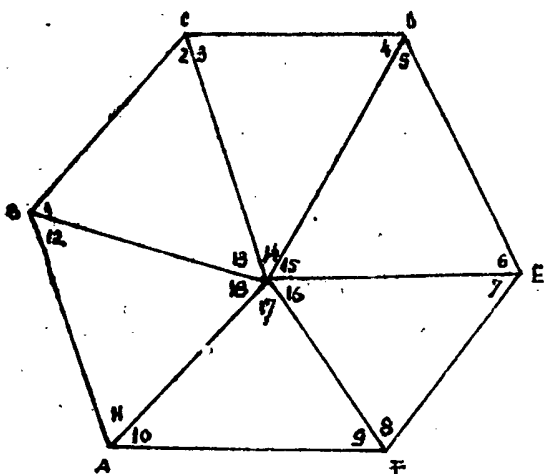


Fig. 229.

Aceasta este posibil atunci când terenul în interior nu este acoperit și ne permite a viza punctul central O și din acest punct să putem da vize către toate celelalte puncte.

Sau în caz că terenul este acoperit, să ne permită a găsi un punct central O care să fie mai înalt în așa fel ca să permită

darea vizelor de mai sus.

O altă formă, care se impune când terenul este lung și îngust, cazul cursurilor de apă, când nu pot fi alese puncte centrale, este forma în lanț de triunghiuri (Fig. 230), în care, în mod analog se va ține cont de

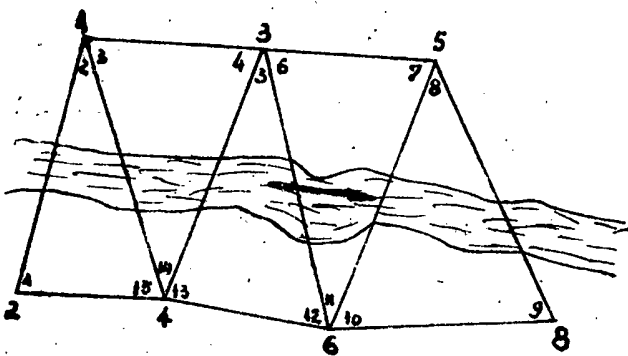


Fig. 230.

principiul enunțat, triunghiurile vor fi formate cât mai apropiat de triunghiul echilateral.

Lanțul de triunghiuri utilizat, cum am menționat, când avem de triangulat baziul unei văi poate fi format deci numai atunci când terenul din interiorul perimetrului este descoperit și ne permite a da toate vizele necesare.

În locul lanțului de triunghiuri, poate fi format lanț de patrulatere, Fig. 231,

frecvent utilizat. Formarea lui cere aceleași condițiuni ca formarea lanțului de triunghiuri, adică în interiorul perimetrului să avea

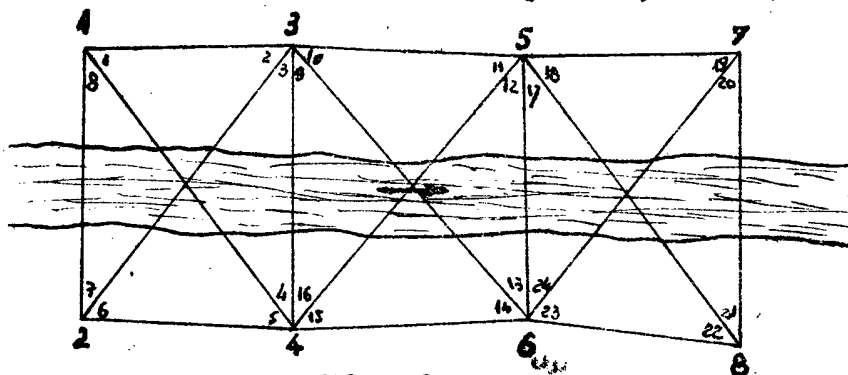


Fig. 231.

teren descoperit, pentru ca vizele să nu fie împiedecate

Desigur că pot fi întrebuintate și rețele combinate, cum ar fi rețeaua arătată în Fig. 240, în care nu avem altceva decât primul caz arătat, doar că în loc de un punct central, avem două, după cum pot fi luate mai multe.

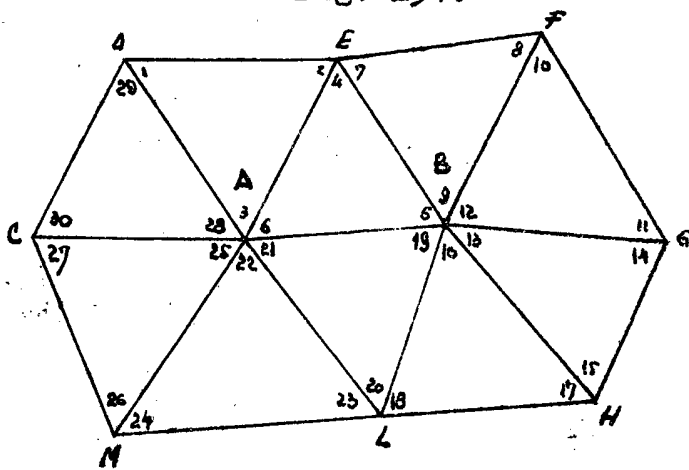


Fig. 232.

Când terenul e acoperit, cazul pădurilor, unde terenul este plan, dar nu permite adaptarea nici unaia din triangulațiile arătate, pentru motivul că vizele nu pot fi făcute, sîntem nevoiți a forma

un lanț înconjurător de triunghiuri sau patrulatere, Fig. 232, cari sînt răsizate pe perimetrul pădurii.

Oricare ar fi dispozitivul adaptat pentru formarea camevasului, va trebui ca rețeaua de triunghiuri sau patrulatere să acopere în întregime, pe cît posibil, suprafața terenului de ridicat.

Iar în ceea ce privește numărul de puncte sau de triunghiuri ce se formează, singurul considerent, ce trebuie avut în vedere, este că numărul lor să fie cel strict necesar, pentru că exactitatea lucrării va fi cu atît mai mare cu cît acest număr este mai mic.

Desigur că dacă situația permite, vor fi luate ca puncte de triangulație acelea, cari au mai multă stabilitate și nu prezintă pericol de a fi pierdute, cum ar fi coșuri de fabrici, turnuri de biserici, etc.



- 328 -

- 2. Măsurarea unghiurilor.

După ce a fost format canevasul și s-a făcut marcarea punctelor pe teren, urmează măsurarea unghiurilor, operațiune care va trebui executată cu cea mai mare precizie, fapt pentru care vor fi utilizate instrumente de precizie mare, cum este teodolitul Zeiss sau Wild, cari dau precizie de 1 secundă.

Ca metode de măsurarea unghiurilor, vor fi utilizate cele arătate la Capitolul respectiv, se recomandă însă metoda cea mai obișnuită în triangulație, metoda combinațiilor posibile.

Deoarece, oricâtă precizie am avea, totuși, în măsurarea unghiurilor se vor comite erori, urmează să se afle adevărata valoare a unghiurilor, adică se face compensarea lor.

- 3. Compensarea unghiurilor-metodă practică.

Conform celor stabilite în Capitolul Calculul erorilor, adevăratele valori ale unghiurilor se vor afla, cu ajutorul ecuațiilor normale ale lui Gauss, după ce am stabilit, în prealabil, numărul ecuațiilor de condiții, cu ajutorul formelor cunoscute:

$$r = w - 2p + 4$$

$$w_1 = l - p + 1$$

$$w_2 = \text{tur de orizont}$$

$$s = l - 2p + 3$$

În afară de metoda lui Gauss, avem și o altă metodă practică, aplicabilă tuturor formelor de canevas.

- a) Compensarea unghiurilor prin metoda practică în cazul canevasului de forma poligonului cu punct central.

Stabilind numărul relațiilor de condiții, avem:

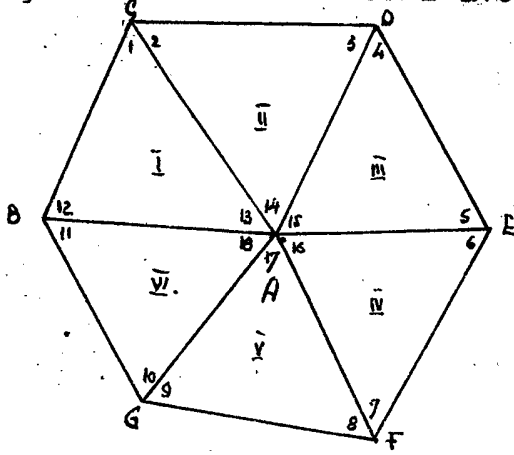
$$r = \omega - 2p + 4 = 18 - 2 \times 7 + 4 = 8$$

$$\omega_1 = l - p + 1 = 12 - 7 + 1 = 6$$

$$\omega_2 = \text{- tur de orizont} = 1$$

$$s = l - 2p + 3 = 12 - 14 + 3 = 1$$

Deci numărul total al ecuațiilor de condiții este  $r = 8$  din cari avem 7 condiții de unghiuri și una de laturi, iar condițiile de unghiuri sînt  $\omega_1 = 6$ ,



adică 6 condiții de triunghiuri sau suma unghiurilor în triunghi să fie  $180^\circ$  și a 7 condiții de unghiuri este turul de orizont, sau suma unghiurilor în jurul punctului central să fie  $360^\circ$ .

Conform numărului de condiții stabilit, compensarea va fi făcută în următoarele faze:

Fig. 233.

Faza 1-a :

Îndeplinirea condițiilor ce-  
cece revine în cazul nostru  
ca în cele 6 triunghiuri suma  
unghiurilor să fie  $180^\circ$ , ceea-  
ce se realizează prin însuma-  
rea celor trei unghiuri ale  
triunghiurilor și eroarea în  
plus sau minus, față de  $180^\circ$   
se repartizează celor 3 un-  
ghiuri.

Faza 2-a :

Îndeplinirea condițiilor tur  
de orizont, în cazul nostru o  
singură condiție.  
Practic însumăm unghiurile din  
jurul punctului central și di-  
ferența față de  $360^\circ$  o reparti-  
zăm unghiurilor în mod egal.

Faza 3-a :

Datorită faptului că în urma  
fazei a 2-a suma unghiurilor  
în triunghiuri nu mai este  
 $180^\circ$ , va trebui să îndeplinim  
și această condiție, ca atare  
eroarea adăugată unghiurilor  
din jurul punctului central în  
faza 2-a va fi înjumătățită  
și scăzută din celelalte un-  
ghiuri ale triunghiurilor.

Faza 4-a : Satisfăcerea condiției de laturi, ultima condiție.  
 Relația care dă condiția de laturi este următoarea:

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \frac{\sin(1)}{\sin(12)} \quad \overline{AC} = \frac{\sin(1) \cdot \sin(3)}{\sin(12) \cdot \sin(2)} \quad \overline{AD} = \frac{\sin(1) \cdot \sin(3) \cdot \sin(5)}{\sin(12) \cdot \sin(2) \cdot \sin(4)} \quad \overline{AE} = \\ &= \frac{\sin(1) \cdot \sin(3) \cdot \sin(5) \cdot \sin(7)}{\sin(12) \cdot \sin(2) \cdot \sin(4) \cdot \sin(6)} \quad \overline{AF} = \frac{\sin(1) \cdot \sin(3) \cdot \sin(5) \cdot \sin(7) \cdot \sin(9)}{\sin(12) \cdot \sin(2) \cdot \sin(4) \cdot \sin(6) \cdot \sin(8)} \quad \overline{AS} = \\ &= \frac{\sin(1) \cdot \sin(3) \cdot \sin(5) \cdot \sin(7) \cdot \sin(9) \cdot \sin(11)}{\sin(2) \cdot \sin(4) \cdot \sin(6) \cdot \sin(8) \cdot \sin(10) \cdot \sin(12)} \quad \overline{AB} \end{aligned}$$

sau: 
$$\frac{\sin(1) \cdot \sin(3) \cdot \sin(5) \cdot \sin(7) \cdot \sin(9) \cdot \sin(11)}{\sin(2) \cdot \sin(4) \cdot \sin(6) \cdot \sin(8) \cdot \sin(10) \cdot \sin(12)} = 1.$$

În această relație unghiurile au fost trecute în paranteză, deoarece voește să arate că unghiurile compensate vor trebui să satisfacă relația care constituie condiția de laturi.

Cu alte cuvinte, unghiurile rezultate în urma primelor trei faze nu vor satisface relația de laturi, ci vor da o diferență, adică:

$$\frac{\sin \hat{1} \cdot \sin \hat{3} \cdot \sin \hat{5} \dots \dots \dots}{\sin \hat{2} \cdot \sin \hat{4} \cdot \sin \hat{6} \dots \dots \dots} = 1 + \Delta.$$

Dacă  $\Delta > 0$  înseamnă că unghiurile de la numărător sînt prea mari, iar cele de la numitor prea mici.  
 Deci:

$$\begin{aligned} \hat{(1)} &= \hat{1} - \nu & \hat{(2)} &= \hat{2} + \nu \\ \hat{(3)} &= \hat{3} - \nu & \hat{(4)} &= \hat{4} + \nu \\ \vdots & & \vdots & \end{aligned}$$

Acum relația de laturi va lua forma:

$$\frac{\sin(1-\nu) \cdot \sin(3-\nu) \cdot \sin(5-\nu) \dots \dots \dots}{\sin(2+\nu) \cdot \sin(4+\nu) \cdot \sin(6+\nu) \dots \dots \dots} = 1.$$

sau:

$$\begin{aligned} &\log \sin(1-\nu) + (\log \sin(3-\nu) + \log \sin(5-\nu) + \dots) \\ &- \log \sin(2+\nu) - \log \sin(4+\nu) - \log \sin(6+\nu) - \dots = 0 \end{aligned}$$

Desvoltînd în serie pe  $\log \sin(1-\nu)$  se obține:

$$\log \sin(1-\nu) = \log \sin \hat{1} - \nu \frac{\log \sin \hat{1}}{\hat{1}}$$

și în mod analog pentru ceilalți logaritmi.

Inlocuind aceasta relația noastră devine:

$$\left[ \log \sin \hat{1} - \nu \frac{\partial \log \sin \hat{1}}{\partial \hat{1}} \right] + \left[ \log \sin \hat{3} - \nu \frac{\partial \log \sin \hat{3}}{\partial \hat{3}} + \dots - \right. \\ \left. - \left[ \log \sin \hat{2} + \nu \frac{\partial \log \sin \hat{2}}{\partial \hat{2}} \right] - \left[ \log \sin \hat{4} + \nu \frac{\partial \log \sin \hat{4}}{\partial \hat{4}} - \dots \dots \dots \right] = 0$$

Notind:

$$\frac{\partial \log \sin 1}{\partial \hat{1}} = a_1, \quad \frac{\partial \log \sin 3}{\partial \hat{3}} = a_3, \quad \frac{\partial \log \sin 5}{\partial \hat{5}} = a_5, \dots \\ \frac{\partial \log \sin 2}{\partial \hat{2}} = a_2, \quad \frac{\partial \log \sin 4}{\partial \hat{4}} = a_4, \quad \frac{\partial \log \sin 6}{\partial \hat{6}} = a_6, \dots$$

Relațiile acestea nu reprezintă altceva decât variația logaritmului sinusului unghiului pentru variația unghiului, sau mai explicit, cîtimea cu care variază sinusul cînd unghiul variază cu o secundă.

Aceste cîtimi pot fi luate direct din tabele.

Cu aceste notații relația va deveni:

$$(\log \sin 1 + \log \sin 3 + \log \sin 5 + \dots) - (\log \sin 2 + \log \sin 4 + \log \sin 6 + \dots) - \nu (a_1 + a_2 + a_3 + \dots) = 0$$

Dar:

$$(\log \sin 1 + \log \sin 3 + \log \sin 5 + \dots) - (\log \sin 2 + \log \sin 4 + \dots) = \Delta$$

$$\text{Deci: } \Delta - \nu (a_1 + a_2 + a_3 + \dots) = 0$$

$$\text{Sau: } \Delta = \nu [a]$$

$$\text{De unde: } \nu = \frac{\Delta}{[a]}$$

Prin urmare, întroducînd în relația de laturi unghiurile rezultate din faza 3-a, se va determina eroarea  $\nu$  pe care o scădem sau o adăugăm, după cum  $\Delta$  este pozitiv sau negativ, dela unghiurile numărătorului și se adăugă sau se scade unghiurilor dela numitor și compensarea este terminată.

Observația :

In fiecare fază vor fi luate în considerare unghiurile rezultate în urma fazei anterioare;

Exemplu numeric:

Unghiurile măsurate, (referindu-se la figura 242) :

$\hat{1} = 74^{\circ} 21' 22''$	$\hat{7} = 39^{\circ} 31' 04''$	$\hat{13} = 49^{\circ} 41' 20''$
$\hat{2} = 64^{\circ} 22' 42''$	$\hat{8} = 66^{\circ} 24' 22''$	$\hat{14} = 47^{\circ} 15' 54''$
$\hat{3} = 68^{\circ} 21' 19''$	$\hat{9} = 54^{\circ} 17' 40''$	$\hat{15} = 93^{\circ} 23' 02''$
$\hat{4} = 44^{\circ} 03' 30''$	$\hat{10} = 38^{\circ} 20' 22''$	$\hat{16} = 32^{\circ} 50' 09''$
$\hat{5} = 42^{\circ} 33' 32''$	$\hat{11} = 64^{\circ} 07' 54''$	$\hat{17} = 59^{\circ} 17' 53''$
$\hat{6} = 107^{\circ} 38' 50''$	$\hat{12} = 55^{\circ} 57' 11''$	$\hat{18} = 77^{\circ} 31' 50''$

Faza 1 :

In fiecare triunghi suma unghiurilor să fie  $180^{\circ}$ .

<u>Triunghiul I</u>	<u>Triunghiul II</u>	<u>Triunghiul III</u>
$\hat{1} = 74^{\circ} 21' 22'' + 2''$	$\hat{2} = 64^{\circ} 21' 41'' + 2''$	$\hat{4} = 44^{\circ} 03' 30'' - 1''$
$\hat{12} = 55^{\circ} 57' 11'' + 2''$	$\hat{3} = 68^{\circ} 21' 19'' + 2''$	$\hat{5} = 42^{\circ} 33' 32'' - 1''$
$\hat{13} = 49^{\circ} 41' 20'' + 2''$	$\hat{14} = 47^{\circ} 15' 54'' + 2''$	$\hat{15} = 93^{\circ} 23' 02'' - 2''$
<u><math>179^{\circ} 59' 53''</math></u>	<u><math>179^{\circ} 59' 54''</math></u>	<u><math>180^{\circ} 00' 04''</math></u>

<u>Triunghiul IV.</u>	<u>Triunghiul V.</u>	<u>Triunghiul VI.</u>
$\hat{6} = 107^{\circ} 38' 50'' - 1''$	$\hat{8} = 66^{\circ} 24' 22'' + 2''$	$\hat{10} = 38^{\circ} 20' 22'' - 2''$
$\hat{7} = 39^{\circ} 31' 04'' - 1''$	$\hat{9} = 54^{\circ} 17' 40'' + 1''$	$\hat{11} = 64^{\circ} 07' 54'' - 2''$
$\hat{16} = 32^{\circ} 50' 09'' - 1''$	$\hat{17} = 59^{\circ} 17' 53'' + 2''$	$\hat{18} = 77^{\circ} 31' 50'' - 2''$
<u><math>180^{\circ} 00' 03''</math></u>	<u><math>179^{\circ} 59' 55''</math></u>	<u><math>180^{\circ} 00' 06''</math></u>

Faza 2 :

In jurul punctului central suma unghiurilor  $360^{\circ}$  se iau unghiurile cu valorile aflate in urma fazei 1-a.

$\hat{13} = 49^{\circ} 41' 23'' - 2'' = 49^{\circ} 41' 21''$
$\hat{14} = 47^{\circ} 15' 56'' - 2'' = 47^{\circ} 15' 54''$
$\hat{15} = 93^{\circ} 23' 00'' - 1'' = 93^{\circ} 22' 59''$
$\hat{16} = 32^{\circ} 50' 08'' - 2'' = 32^{\circ} 50' 06''$
$\hat{17} = 59^{\circ} 17' 55'' - 2'' = 59^{\circ} 17' 53''$
$\hat{18} = 77^{\circ} 31' 48'' - 1'' = 77^{\circ} 31' 47''$
<u><math>360^{\circ} 00' 10''</math></u>

Faza 3 :

Din nou suma unghiurilor in triunghi  $180^{\circ}$

Se va adăuga fiecărui unghi al triunghiului jumătate din numărul secundelor scăzute unghiului din jurul punctului central, cuprins în acel triunghi și vor avea :

$$\begin{aligned} \hat{1} &= 74^\circ 21' 24'' + 1'' & \hat{2} &= 64^\circ 22' 43'' + 1'' & \hat{4} &= 44^\circ 03' 25'' + 1'' \\ \hat{12} &= 55^\circ 57' 13'' + 1'' & \hat{3} &= 68^\circ 21' 21'' + 1'' & \hat{5} &= 42^\circ 33' 31'' \\ \hat{13} &= 49^\circ 41' 21'' & \hat{14} &= 47^\circ 15' 54'' & \hat{15} &= 93^\circ 22' 59'' \\ \hat{6} &= 107^\circ 38' 49'' + 1'' & \hat{8} &= 66^\circ 24' 24'' + 1'' & \hat{10} &= 38^\circ 20' 20'' \\ \hat{7} &= 39^\circ 31' 03'' + 1'' & \hat{9} &= 54^\circ 17' 41'' + 1'' & \hat{11} &= 64^\circ 07' 52'' + 1'' \\ \hat{16} &= 32^\circ 50' 08'' & \hat{17} &= 59^\circ 17' 53'' & \hat{18} &= 77^\circ 31' 47'' \end{aligned}$$

Faza 4 :

Satisfacerea ecuației de condiție de laturi:

logsin $\hat{1}$	= 9,9836078	$a_1 = 5,9$	logsin $\hat{2}$	= 9,9550492	$a_2 = 10,0$
logsin $\hat{3}$	= 9,9682466	$a_3 = 8,4$	logsin $\hat{4}$	= 9,8422287	$a_4 = 21,7$
logsin $\hat{5}$	= 9,8301677	$a_5 = 22,9$	logsin $\hat{6}$	= 9,9790661	$a_6 = 6,7$
logsin $\hat{7}$	= 9,8036739	$a_7 = 25,6$	logsin $\hat{8}$	= 9,9620904	$a_8 = 9,2$
logsin $\hat{9}$	= 9,9095734	$a_9 = 15,2$	logsin $\hat{10}$	= 9,7926099	$a_{10} = 26,6$
logsin $\hat{11}$	= 9,9541445	$a_{11} = 10,2$	logsin $\hat{12}$	= 9,9183383	$a_{12} = 14,2$
	9,4494139	88,2		9,4493826	88,4.

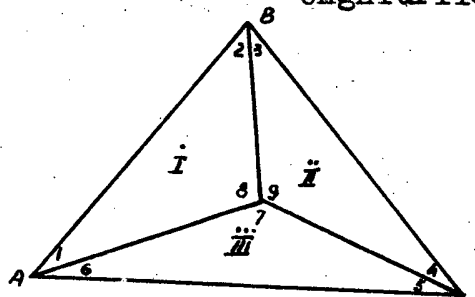
$$\Delta = 9,4494139 - 9,4493826 = 313 \text{ [a]} = 88,2 + 88,4 = 176,6$$

$$\nu'' = \frac{\Delta}{[a]} = \frac{313}{176,6} = 1,77 \approx 2''$$

Valoarea unghiurilor compensate va fi:

$\hat{1} = 74^\circ 21' 25'' - 2''$	$\hat{10} = 38^\circ 20' 20'' + 2''$
$\hat{2} = 64^\circ 22' 44'' + 2''$	$\hat{11} = 64^\circ 07' 53'' - 2''$
$\hat{3} = 68^\circ 21' 22'' - 2''$	$\hat{12} = 55^\circ 57' 14'' + 2''$
$\hat{4} = 44^\circ 03' 30'' + 2''$	$\hat{13} = 49^\circ 41' 21''$
$\hat{5} = 42^\circ 33' 31'' - 2''$	$\hat{14} = 47^\circ 15' 54''$
$\hat{6} = 107^\circ 38' 50'' + 2''$	$\hat{15} = 93^\circ 22' 59''$
$\hat{7} = 39^\circ 31' 04'' - 2''$	$\hat{16} = 32^\circ 50' 08''$
$\hat{8} = 66^\circ 24' 25'' + 2''$	$\hat{17} = 59^\circ 17' 53''$
$\hat{9} = 54^\circ 17' 42'' - 2''$	$\hat{18} = 77^\circ 31' 47''$

Exemplu numeric: Unghiurile măsurate din Fig.234 sînt



$\hat{1} = 25^\circ 18' 40''$	$\hat{6} = 29^\circ 26' 40''$
$\hat{2} = 32^\circ 13' 41''$	$\hat{7} = 123^\circ 19' 10''$
$\hat{3} = 38^\circ 15' 25''$	$\hat{8} = 122^\circ 27' 30''$
$\hat{4} = 27^\circ 31' 21''$	$\hat{9} = 114^\circ 13' 17''$
$\hat{5} = 27^\circ 14' 00''$	

Compensarea unghiurilor se face identic ca în cazul precedent:

Fig.234.

- 334 -

$$\begin{aligned} \gamma &= \omega - 2p + 4 = 9 - 2 \times 4 + 4 = 5 \\ \omega_1 &= \ell - p + 1 = 6 - 4 + 1 = 3 \\ \omega_2 &= \text{tur de orizont} = 1 \\ s &= \ell - 2p + 3 = 6 - 8 + 3 = 1 \end{aligned}$$

Faza I : In fiecare triunghi suma unghiurilor să fie  $180^\circ$ .

Triunghiul I	Triunghiul II.	Triunghiul III.
$\hat{1} = 25^\circ 18' 40'' + 3''$	$\hat{3} = 38^\circ 15' 25'' - 1''$	$\hat{5} = 27^\circ 14' 00'' + 3''$
$\hat{2} = 32^\circ 13' 41'' + 3''$	$\hat{4} = 27^\circ 31' 21'' - 1''$	$\hat{6} = 29^\circ 26' 40'' + 3''$
$\hat{8} = 122^\circ 27' 30'' + 3''$	$\hat{9} = 114^\circ 13' 17'' - 1''$	$\hat{7} = 123^\circ 19' 10'' + 4''$
<u>179° 59' 51"</u>	<u>180° 00' 03"</u>	<u>179° 59' 50"</u>

Faza II : Suma unghiurilor din jurul punctului central să fie  $360^\circ$ .

$$\begin{aligned} \hat{7} &= 123^\circ 19' 14'' - 1'' = 123^\circ 19' 13'' \\ \hat{8} &= 122^\circ 27' 33'' - 1'' = 122^\circ 27' 32'' \\ \hat{9} &= 114^\circ 13' 16'' - 1'' = 114^\circ 13' 15'' \\ \hline &360^\circ 00' 03'' \end{aligned}$$

Faza III : In fiecare triunghi suma unghiurilor  $180^\circ$ .

$$\begin{aligned} \hat{1} &= 25^\circ 18' 43'' + 1'' & \hat{3} &= 38^\circ 15' 24'' + 1'' & \hat{5} &= 27^\circ 14' 03'' + 1'' \\ \hat{2} &= 32^\circ 13' 44'' & \hat{4} &= 27^\circ 31' 20'' & \hat{6} &= 29^\circ 26' 43'' \\ \hat{8} &= 122^\circ 27' 32'' & \hat{9} &= 114^\circ 13' 15'' & \hat{7} &= 123^\circ 19' 13'' \end{aligned}$$

Faza IV :

$$\frac{\sin(1) \cdot \sin(3) \cdot \sin(5)}{\sin(2) \cdot \sin(4) \cdot \sin(6)} = 1$$

$$\begin{aligned} \log \sin 1 &= 9,6309876 \quad a_1 = 44,5 & \log \sin 2 &= 9,7269740 \quad a_2 = 33,4 \\ \log \sin 3 &= 9,7918234 \quad a_3 = 26,7 & \log \sin 4 &= 9,6647290 \quad a_4 = 40,4 \\ \log \sin 5 &= 9,6605159 \quad a_5 = 40,9 & \log \sin 6 &= 9,6106049 \quad a_6 = 37,3 \\ \hline &9,0833279 \quad 121,1 & & 9,0833079 \quad 111,1 \end{aligned}$$

$$\Delta = 9,0833279 - 9,0833079 = 200 \quad [a] = 121,1 + 111,1 = 231,2$$

$$\gamma'' = \frac{\Delta}{[a]} = \frac{200}{231,2} = 1''$$

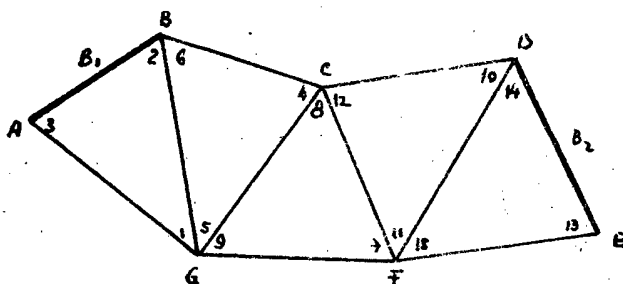
Adevăratele valori ale unghiurilor vor fi:

$$\begin{aligned} \hat{1} &= 25^\circ 18' 44'' - 1'' = 25^\circ 18' 43'' \\ \hat{2} &= 32^\circ 13' 44'' + 1'' = 32^\circ 13' 45'' \\ \hat{3} &= 38^\circ 15' 25'' - 1'' = 38^\circ 15' 24'' \\ \hat{4} &= 27^\circ 31' 20'' + 1'' = 27^\circ 31' 21'' \\ \hat{5} &= 27^\circ 14' 04'' - 1'' = 27^\circ 14' 03'' \\ \hat{6} &= 29^\circ 26' 43'' + 1'' = 29^\circ 26' 44'' \end{aligned}$$

Celelalte unghiuri (  $\hat{7}, \hat{8}, \hat{9}$  ) au valorile stabilite in urma fazei 2-a.

- b) Compensarea practică in cazul lanțului de triunghiuri.

In cazul lanțului de triunghiuri compensarea se face numai in două faze:



Faza 1 : In fiecare triunghi suma unghiurilor să fie 180

Operațiunea se execută întotdeauna ca in prima fază din cazul studiat anterior.

Faza 2 : Îndeplinirea condiției de latitudine care este următoarea:

Fig.235.

Notind:  $\overline{AB} = B_1$  și  $\overline{DE} = B_2$ .

$$B_1 \cdot \frac{\sin 1 \cdot \sin 4 \cdot \sin 7}{\sin 3 \cdot \sin 6 \cdot \sin 9} = \overline{BC} = \frac{\sin 1 \cdot \sin 4 \cdot \sin 7}{\sin 3 \cdot \sin 6 \cdot \sin 9} \cdot \overline{CF} =$$

$$= \frac{\sin 1 \cdot \sin 4 \cdot \sin 7 \cdot \sin 10}{\sin 3 \cdot \sin 6 \cdot \sin 9 \cdot \sin 12} \cdot \overline{FD} = \frac{\sin 1 \cdot \sin 4 \cdot \sin 7 \cdot \sin 10}{\sin 3 \cdot \sin 6 \cdot \sin 9 \cdot \sin 12}$$

$$\frac{\sin 13}{\sin 15} \cdot B_2 \text{ sau } \frac{B_2 \cdot \sin 1 \cdot \sin 4 \cdot \sin 7 \cdot \sin 10 \cdot \sin 13}{B_1 \cdot \sin 3 \cdot \sin 6 \cdot \sin 9 \cdot \sin 12 \cdot \sin 15} = 1$$

Deci, in cazul lanțului de triunghiuri pentru a face compensarea, este necesar a fi măsurată latura AB, numită bază de pornire și latura DE sau baza de închidere.

De aci încolo problema se rezolvă ca in cazul poligonului cu punct central.



Exemplu numeric.

Măsurate:  $B_1 = 2387,48 \text{ m}$        $B_2 = 3463,28 \text{ m}$

$\hat{1} = 74^\circ 21' 22''$	$\hat{6} = 64^\circ 22' 41''$	$\hat{11} = 32^\circ 50' 09''$
$\hat{2} = 49^\circ 41' 20''$	$\hat{7} = 42^\circ 33' 32''$	$\hat{12} = 107^\circ 38' 50''$
$\hat{3} = 55^\circ 57' 11''$	$\hat{8} = 93^\circ 23' 02''$	$\hat{13} = 54^\circ 17' 40''$
$\hat{4} = 68^\circ 21' 19''$	$\hat{9} = 44^\circ 03' 30''$	$\hat{14} = 59^\circ 17' 53''$
$\hat{5} = 47^\circ 15' 54''$	$\hat{10} = 39^\circ 31' 04''$	$\hat{15} = 66^\circ 24' 22''$

Faza 1 : Suma unghiurilor în triunghi să fie  $180^\circ$ .

Triunghiul I	Triunghiul II	Triunghiul III
$\hat{1} = 74^\circ 21' 22'' + 2''$	$\hat{4} = 68^\circ 21' 19'' + 2''$	$\hat{7} = 42^\circ 33' 32'' - 1''$
$\hat{2} = 49^\circ 41' 20'' + 3''$	$\hat{5} = 47^\circ 15' 54'' + 2''$	$\hat{8} = 93^\circ 23' 02'' - 2''$
$\hat{3} = 55^\circ 57' 11'' + 2''$	$\hat{6} = 64^\circ 22' 41'' + 2''$	$\hat{9} = 44^\circ 03' 30'' - 1''$
$179^\circ 59' 53''$	$179^\circ 59' 54''$	$180^\circ 00' 04''$

Triunghiul IV	Triunghiul V
$\hat{10} = 39^\circ 31' 04'' - 1''$	$\hat{13} = 54^\circ 17' 40'' + 2''$
$\hat{11} = 32^\circ 50' 09'' - 1''$	$\hat{14} = 59^\circ 17' 53'' + 1''$
$\hat{12} = 107^\circ 38' 50'' - 1''$	$\hat{15} = 66^\circ 24' 22'' + 2''$
$180^\circ 00' 03''$	$179^\circ 59' 55''$

Faza 2 :

log $B_2 = 3,5394876$	-      log $B_1 = 3,3779398$	-
log sin 1 = 9,9836072	$a_1 = 5,9$	log sin 3 = 9,9183355 $a_3 = 14,3$
log sin 4 = 9,9682466	$a_4 = 8,3$	log sin 6 = 9,9550492 $a_6 = 10,1$
log sin 10 = 9,8036739	$a_{10} = 25,6$	log sin 12 = 9,9790661 $a_{12} = 6,7$
log sin 7 = 9,8301654	$a_7 = 22,9$	log sin 9 = 9,8422244 $a_9 = 21,8$
log sin 13 = 9,9095719	$a_{13} = 15,2$	log sin 15 = 9,9620886 $a_{15} = 9,2$
3,0347526	77,9	3,0347036      62,1

$$\Delta = 3,0347526 - 3,0347036 = 490 \quad [a] = 77,9 + 62,1 = 140$$

$$v'' = \frac{\Delta}{[a]} = \frac{490}{140} \approx 3''$$

Valoarea adevărată a unghiurilor este :

$$\begin{array}{lll} \hat{1} = 74^{\circ} 21' 24'' - 4'' & \hat{6} = 64^{\circ} 22' 43'' + 4'' & \hat{11} = 32^{\circ} 50' 08'' \\ \hat{2} = 49^{\circ} 41' 23'' & \hat{7} = 42^{\circ} 33' 31'' - 4'' & \hat{12} = 107^{\circ} 38' 49'' + 4'' \\ \hat{3} = 55^{\circ} 57' 13'' + 4'' & \hat{8} = 93^{\circ} 23' 00'' & \hat{13} = 54^{\circ} 17' 42'' - 4'' \\ \hat{4} = 68^{\circ} 21' 21'' - 4'' & \hat{9} = 44^{\circ} 03' 29'' + 4'' & \hat{14} = 59^{\circ} 17' 54'' \\ \hat{5} = 47^{\circ} 15' 56'' & \hat{10} = 39^{\circ} 31' 03'' - 4'' & \hat{15} = 66^{\circ} 24' 24'' + 4'' \end{array}$$

- c) Compensarea unghiurilor după Brönimann în cazul patrulaterului.

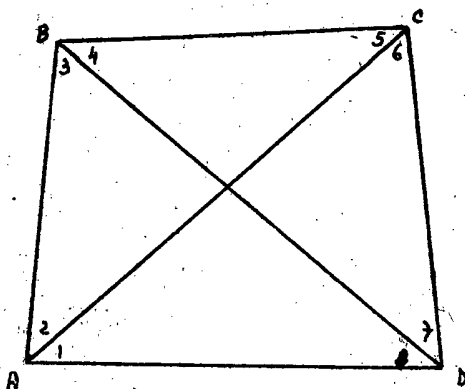


Fig. 236.

Faza 1: Suma tuturor unghiurilor să fie  $360^{\circ}$

Diferența se scade sau se adună, repartizînd-o în mod egal tuturor unghiurilor.

Faza 2: Suma unghiurilor din triunghiurile opuse la vîrf, să fie egale, adică:

$$\begin{array}{l} \hat{2} + \hat{3} = \hat{6} + \hat{7} \\ \hat{4} + \hat{5} = \hat{1} + \hat{8} \end{array}$$

Pentru aceasta se face diferența și se împarte la 4.

Citimea rezultată se adaugă unghiurilor, la fiecare din cele două unghiuri a căror sumă este mai mică și se scade din celelalte două.

Faza 3: Ecuația de condiție de laturi, care este:

$$\frac{\sin(1) \cdot \sin(3) \cdot \sin(5) \cdot \sin(7)}{\sin(2) \cdot \sin(4) \cdot \sin(6) \cdot \sin(8)} = 1.$$

Exemplu numeric:

Unghiurile măsurate:

$$\begin{array}{l} \hat{1} = 37^{\circ} 26' 42'' - 1'' \\ \hat{2} = 34^{\circ} 35' 26'' - 1'' \\ \hat{3} = 41^{\circ} 17' 35'' - 1'' \\ \hat{4} = 55^{\circ} 58' 03'' - 1'' \\ \hat{5} = 48^{\circ} 09' 03'' - 1'' \\ \hat{6} = 29^{\circ} 51' 27'' - 1'' \end{array}$$

- 338 -

$$\begin{array}{r} \hat{7} = 46^{\circ} 01' 28'' - 1'' \\ \hat{8} = 66^{\circ} 40' 24'' - 1'' \\ \hline 360^{\circ} 00' 08'' \end{array}$$

**Faza 1:** Suma unghiurilor să fie 360.

Făcînd suma unghiurilor, rezultă o diferență în plus de 8", pe care o repartizăm în mod egal tuturor unghiurilor, adică se scade din fiecare unghi  $\frac{8''}{8} = 1''$

**Faza 2:**

$$\begin{array}{r} \hat{2} + \hat{3} = \hat{6} + \hat{7}; \quad \hat{4} + \hat{5} = \hat{1} + \hat{8} \\ \hat{2} = 34^{\circ} 35' 25'' - 2'' \quad \hat{6} = 29^{\circ} 51' 26'' + 2'' \\ \hat{3} = 41^{\circ} 17' 34'' - 1'' \quad \hat{7} = 46^{\circ} 01' 27'' + 1'' \\ \hline 75^{\circ} 52' 59'' \quad \quad \quad 75^{\circ} 52' 53'' \end{array}$$

Unghiurile:  $(\hat{2} + \hat{3}) - (\hat{6} + \hat{7}) = 6''$

Se va scădea din unghiurile 2 și 3 în total 3", iar unghiurilor 6 și 7 le adunăm 3".

$$\begin{array}{r} \hat{4} = 55^{\circ} 58' 02'' \quad \hat{1} = 37^{\circ} 26' 41'' \\ \hat{5} = 48^{\circ} 09' 02'' \quad \hat{8} = 66^{\circ} 40' 23'' \\ \hline 104^{\circ} 07' 04'' \quad \quad \quad 104^{\circ} 07' 04'' \end{array}$$

Diferența fiind zero, unghiurile nu mai trebuie compensate în această fază.

**Faza 3:**

$$\frac{\sin(1) \cdot \sin(3) \cdot \sin(5) \cdot \sin(7)}{\sin(2) \cdot \sin(4) \cdot \sin(6) \cdot \sin(8)} = 1.$$

logsin 1 = 9,7839006	$a_1 = 27,5$	logsin 2 = 9,7541159	$a_2 = 30,6$
logsin 3 = 9,8194803	$a_3 = 24,0$	logsin 4 = 9,9184065	$a_4 = 14,2$
logsin 5 = 9,8720983	$a_5 = 18,9$	logsin 6 = 9,6970901	$a_6 = 36,7$
logsin 7 = 9,8571129	$a_7 = 20,3$	logsin 8 = 9,9629658	$a_8 = 9,0$
<hr/>		<hr/>	
9,3325921	90,7	9,3325783	90,5

$$\Delta = 9,3325921 - 9,3325783 = 138$$

$$[a] = 90,7 + 90,5 = 181,2$$

$$v'' = \frac{\Delta}{[a]} = \frac{138}{181,2} = 1''$$

Valoarea adevărată a unghiurilor va fi:

- 339 -

$$\begin{array}{ll} \hat{1} = 39^{\circ} 26' 41'' - 1'' & \hat{5} = 48^{\circ} 09' 02'' - 1'' \\ \hat{2} = 34^{\circ} 35' 23'' + 1'' & \hat{6} = 29^{\circ} 51' 28'' + 1'' \\ \hat{3} = 41^{\circ} 17' 33'' - 1'' & \hat{7} = 46^{\circ} 01' 28'' - 1'' \\ \hat{4} = 55^{\circ} 58' 02'' + 1'' & \hat{8} = 66^{\circ} 40' 23'' + 1'' \end{array}$$

- 4) Alegerea și măsurarea bazei triangulației.

Canevasul adoptat, lanțul de triunghiuri, lanțul de patrulater, etc., poate fi rezolvat, adică pot fi calculate toate elementele sale, dacă se măsoară toate unghiurile fiecărui triunghi și una din laturi.

Ou aceste elemente apoi se vor calcula toate celelalte laturi.

Pentru control se mai măsoară, în mod direct, încă una din laturi și diferența între mărimea acestei laturi dedusă din calcule și cea măsurată direct, ne va da precizie sau gradul de precizie cu care a fost determinată triangulația.

Latura măsurată în mod direct, în scopul calculării celorlalte laturi, se numește bază, iar latura măsurată pentru control este bază de control.

Măsurarea bazei nu este o operațiune ușoară, cum s-ar putea crede, de ea depinzând în cea mai mare parte exactitatea triangulației.

Deaceia, odată cu recunoașterea terenului în vederea alegerii canevasului, se fixează și locul bazei, căutându-se un teren orizontal sau ușor înclinat și cu panta uniformă și de așa manieră, ca extremitățile ei să fie vizibile una dintr-alta, precum și dintr-una cât mai mare număr din punctele canevasului.

Am văzut importanța bazei în exactitatea triangulației, aceasta este cea care ne impune modul de măsurare a bazei, operațiune ce trebuie executată în cele mai bune condițiuni, cu multă grijă și atenție, repetându-o de mai multe ori în ambele sensuri și luând apoi media măsurătorilor, cari nu trebuie să depășească maximul toleranței admise, care este de un milimetru pe km.

Măsurarea bazei în lucrările obișnuite de topografie se face cu panglica de oțel, iar în lucrările de precizie mai mare, în triangulațiile de ordin superior, cu firul de invar, operațiunea fiind repetată cel puțin de trei ori. Înaintea de măsurare, etalonul de măsurat se verifică spre a se obține lungimea lui exactă pentru temperaturile de  $0^{\circ} \text{C}$  și  $15^{\circ} \text{C}$ .

În cazul cînd baza este pe un teren ușor înclinat, cu panta uniformă, se va măsura și unghiul de pantă pentru a putea face reducerea la orizont, iar în caz că terenul nu are pantă uniformă, se descompune în secțiuni de pantă uniformă, măsurîndu-se și reducîndu-se la orizont fiecare secțiune în parte.

Lungimea unei baze, mai ales în cazul triangulației de ordin superior, fiind mare (20 - 50 km), e greu dacă nu chiar imposibil de a putea fi măsurată direct și în acest caz se întrebuintează baza de joncțiune.

- a) Baza de joncțiune.

Este lungimea măsurată în mod direct care ne servește la determinarea în mod indirect, din calcule, a bazei, evitînd prin aceasta metoda măsurarea directă a lungimilor mari.

Cu alte cuvinte, se măsoară direct o lungime mică  $CD = b$ , numită bază de joncțiune, precum și unghiurile 1, 2, 3, 4, ..... 8 (Fig. 246) și apoi prin calcule se determină lungimea bazei de triangulație  $AB = B$ .

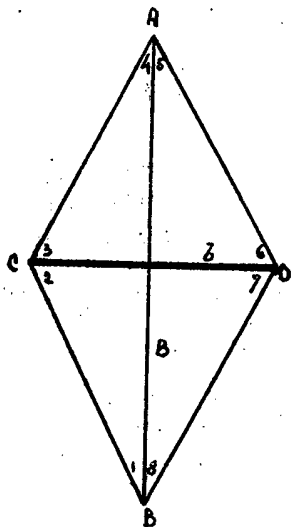


Fig. 237.

Unghiurile se vor măsura cu multă precizie și după aceea se va face compensarea lor, iar baza de joncțiune se măsoară cu precizie de 1 mm pe km.

Ca prescripțiune, se va alege baza de joncțiune pe cît posibil, perpendiculară pe bază, căutîndu-se ca unghiurile dela vîrf (4+5 și 7+8) să aibe o valoare minimă de  $30^\circ$ , pentru a nu se da erori prea mari.

După măsurarea bazei de joncțiune, măsurarea și compensarea unghiurilor cu ajutorul relațiilor trigonometrice se calculează lungimea bazei.

În cazul triangulațiilor de ordin superior, lungimea bazei fiind mare, nu este suficient a măsura o singu-

ră bază de joncțiune și în acest caz se vor utiliza două baze de joncțiune (Fig. 238), adică se măsoară în mod direct baza de joncțiune  $MN = b_1$ , deducînd apoi în mod indirect pe cea de a două bază de joncțiune  $CD = b_2$  și numai după aceea calculăm baza de triangulație  $AB = B$ .

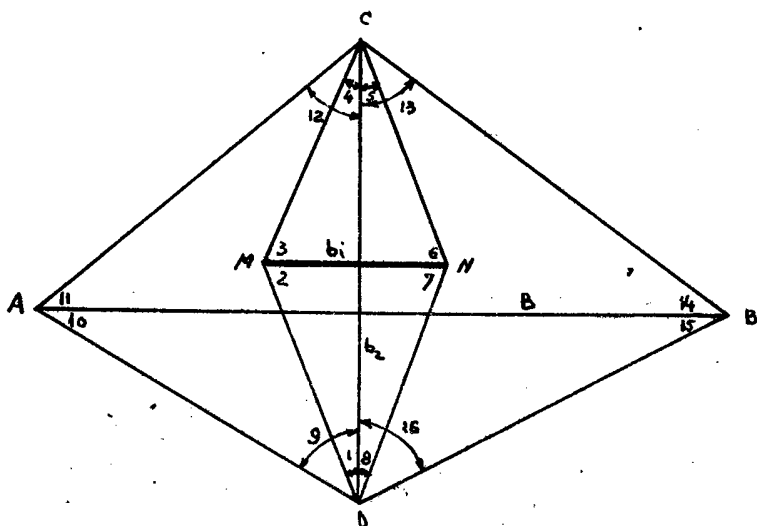


Fig. 238.

Evident că vor fi măsurate toate unghiurile numerotate pe figură.

În mod practic sînt utilizate cel mult două joncțiuni.

Fiind nevoiți a lua în considerare o bază de triangulație rezultată din calcule, după măsurarea directă a bazei de joncțiune și a unghiurilor, va trebui să facem următoarea observațiune:

- cu oricîtă precizie ar fi măsurate unghiurile, chiar cu precizie absolută, totuși eroarea ce afectează baza calculată este mai mare ca cea pe care am fi avut-o dacă ea ar fi fost măsurată direct, în condițiunile în care a fost măsurată baza de joncțiune  $b_1$ .

Pentru a pune în evidență cele afirmate mai sus, să exprimăm eroarea medie comisă pe unitatea de lungime a bazei de joncțiune  $b_1$ .

Relația care ne dă această eroare e:

$$\frac{\Delta b_1}{b_1} = \frac{\mu''}{\rho''} \cdot \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{1}{3}}$$

Unde  $\alpha$  reprezintă unghiul ascuțit din C sau D, adică  $\hat{1} + \hat{8}$ .

Din această relație a rezultat prescripțiunea că unghiurile ascuțite să fie în valoare de cel puțin  $30^\circ$ .

Punînd sub altă formă relația de mai

sus:

$$\Delta b_2 = b_2 \frac{\mu''}{\rho''} \cdot \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{2}{3}}$$

sau generalizînd:

$$\Delta b_2 = b \frac{\mu''}{\rho''} \cdot \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{1}{3}} \sqrt{n}$$

$n$  este numărul joncțiunilor.

Un exemplu numeric va arăta mai clar că eroarea comisă în măsurarea indirectă este mai mare ca cea comisă în măsurarea directă a bazei.

Să presupunem că:

- 342 -

$$b_2 = 10 \text{ km}, \quad \alpha = 30^\circ \quad \mu = 5''$$

$$\Delta b_2 = 10 \text{ km} \frac{10}{206,265} \cdot 2 \sqrt{\frac{2}{3}} = 50 \text{ cm.}$$

Pe cînd dacă măsurăm în mod direct distanța de 10 km, cu firul de invar, care ne dă o eroare de 1mm/km, am fi avut o eroare cu mult mai mică.

În plus, în calcul nu s-a ținut cont de eroarea bazei măsurate.

Din cele de mai sus, în special din exemplu arătat, rezultă că eroarea care defavorizează precizia măsurării indirecte a bazei este provenită din măsurarea unghiurilor și pentru a avea o precizie admisibilă, trebuie ca această eroare să fie cel mult de 1", adică  $\mu = 1''$ .

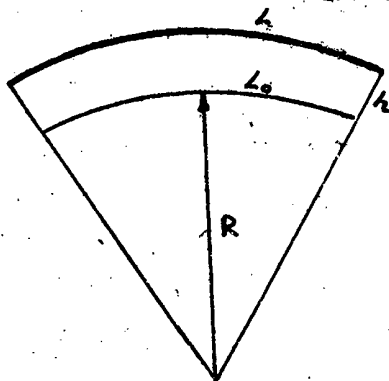
Deci unghiurile va trebui să se măsoare cu multă atenție, cu exactitate și cu instrumente de precizie.

#### - b) Reducerea bazei la nivelul mării.

Spre a avea o stabilitate a planurilor e necesar ca toate lungimile să fie raportate la un plan orizontal, de nivel constant, care este admis a fi suprafața mării.

Deaceia și baza este bine a fi calculată în proiecția ei la acest plan, adică a o reduce la nivelul mării.

Calculul, cu aceste considerațiuni, va fi condus în modul următor:



Notînd lungimea  $L$  (Fig. 248), ea fiind lungimea bazei măsurate,  $h$  = diferența de nivel față de nivelul mării,  $R$  = raza pămîntului și  $L_0$  lungimea bazei reduse, avem:

$$\frac{L_0}{L} = \frac{R}{R+h} = \frac{R+h-h}{R+h} = 1 - \frac{h}{R+h}$$

Deoarece  $h$  în raport cu  $R$  este o cîțime foarte mică, poate fi neglijat de la numărător și avem:

$$\frac{L_0}{L} = 1 - \frac{h}{R}$$

sau:

$$L_0 = L \left( 1 - \frac{h}{R} \right),$$

$$R = 6371 \text{ km.}$$

Fig. 239.

- c) Citeva date practice de măsurarea bazelor.

- La tunelul Simplon baza din lungime de 20 km, măsurată cu precizie de  $\frac{1}{1,000.000}$  ceea ce revine la 1 mm/km.

- Baza din Turchestan de 7,4 km măsurată de Generalul Geodenzov cu precizia de  $\frac{1}{4,900.000}$

- Baza din Delta Dunării de 9,462 km măsurată de Prof. I. Vidrașcu, precizia  $\frac{1}{1,240.000}$

- Baza din Madagascar 4,970 km, precizie  $\frac{1}{750.000}$

- Baza dela Tatar Bunar, măsurată de Cadastrul român, de 11,423 km și precizie  $\frac{1}{9,000.066}$

In general pentru triangulație se cere precizia de

- Triangulație de ord. I.....1 : 500.000
- Triangulație de ord. II și III.....1 : 200.000
- Triangulație de ord. IV.....1 : 50.000 -
- ↑ : 100.000.

Ca eroare unghiulară de închidere într-un triunghi:

- Triangulația de ord. I .....1" x  $\sqrt{3}$
- Triangulația de ord. II.....5" x  $\sqrt{3}$
- Triangulația de ord. III.....10" x  $\sqrt{3}$
- Triangulația de ord. IV .....20" x  $\sqrt{3}$
- Triangulația de ord. V .....60" -80" x  $\sqrt{3}$

In aceste foraele cifra 3 reprezintă numărul de unghiuri.

- 5) Calculul laturilor.

Laturile triunghiurilor triangulației, indiferent de canevasul adoptat, se calculează cu ajutorul cunoscutelor relații trigonometrice care există între laturile și sinusul unghiurilor într-un triunghi oarecare.



Este operațiunea pe care o facem după măsurarea bazei și compensarea unghiurilor în scopul de a determina prin calcule laturile lanțului, în loc de a le măsura direct.

Drept verificare, în ultimul triunghi, va trebui ca mărimea bazei de control, rezultată din calcule, să fie diferită în limitele admisibile față de valoarea ei rezultată în urma măsurării.

În mod practic, în cazul lanțurilor de triunghi sau patrulater, după 10 - 15 triunghiuri sau patrulater trebuie măsurată o bază de control.

Aceasta în cazul când se lucrează cu instrumente precise, pentru instrumente mai puțin precise, bazele de control se vor măsura mai des.

- a) Transmiterea erorilor în triangulație.

Problema care se pune este de a determina eroarea ce se transmite laturilor triangulației, pe care le calculăm cu o bază afectată de eroarea  $\Delta b$ , a căreia mărime a fost stabilită anterior și cu ajutorul unghiurilor  $\hat{A}$  și  $\hat{C}$  din Fig. 240, afectate la rândul lor de erorile  $\Delta A$  și  $\Delta C$ .

Cu alte cuvinte, se caută repercursiunea pe care o au erorile laturii  $b$ , adică  $\Delta b$  și erorile unghiurilor  $A$  și  $C$ ,  $\Delta A$  și  $\Delta C$ , asupra laturilor  $a$  și  $c$  din triunghiul  $ABC$ .

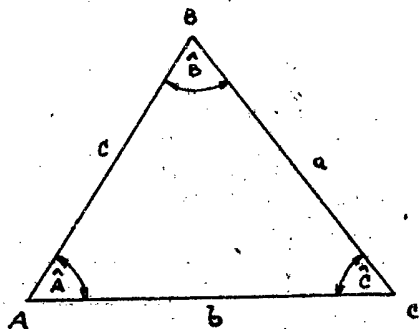


Fig. 240 .

Relația cu ajutorul căreia calculăm laturile, cum s-a amintit, este:

$$a = \frac{b}{\sin B} \cdot \sin A.$$

Diferențind și notând erorile respective ca mai sus, avem:

$$\Delta a = \frac{\sin A}{\sin B} \Delta b + \frac{b}{\sin B} \cos A \cdot \Delta A - \frac{b \cdot \sin A}{\sin^2 B} \cdot \cos B \cdot \Delta B.$$

sau:

$$\Delta a = \frac{a}{b} \Delta b + \frac{a}{\operatorname{tg} A} \Delta A - \frac{a}{\operatorname{tg} B} \Delta B$$

de unde:

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta A}{\operatorname{tg} A} - \frac{\Delta B}{\operatorname{tg} B}$$

Și pentru a înălțura semnele, cari pot fi plus sau minus, ridicăm la pătrat, neglijăm înființii mici de ordin superior, se obține:

$$\frac{\Delta a}{a} = \sqrt{\left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\Delta A}{\operatorname{tg} A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta B}{\operatorname{tg} B}\right)^2}$$

- 345 -

Analizând această expresiune, care ne arată repercursiunea erorilor  $\Delta b$ ,  $\Delta A$  și  $\Delta B$  asupra laturei  $a$ , observăm că valoarea erorii este cu atât mai mare cu cât unghiurile  $A$  și  $B$  sînt mai mici.

Aceasta este justificarea celor afirmate la alegerea canevasului, că se caută a se forma triunghiuri cît mai apropiate de triunghiul echilateral.

Neglijînd eroarea datorită bazei și considerînd unghiurile  $\hat{A} = \hat{B} = 60^\circ$ , rezultă o expresiune simplificată, dar practică, pe care o utilizăm curent:

$$\frac{\Delta a}{a} = \sqrt{2 \left( \frac{\Delta A}{\rho''} 60'' \right)^2} = \Delta A \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$\Delta A$  trebuie exprimat în radiani, sau în secunde, găsind relația deja cunoscută:

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\mu''}{\rho''} \sqrt{\frac{2}{3}}$$

- b) Repercursiunea erorilor asupra bazei de control sau închidere.

Într-un triunghi eroarea comisă asupra unei laturi, am văzut că este:

$$\frac{\Delta b_1}{b_1} = \frac{\mu''}{\rho''} \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Dacă am avea  $i$  triunghiuri, eroarea ce se comite asupra unei laturi din ultimul triunghi este:

$$\frac{\Delta b_i}{b_i} = \frac{\mu''}{\rho''} \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{i} = \frac{\mu''}{\rho''} \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Deci asupra bazei de închidere sau de control, se transmite eroarea dată de relația aceasta, în care intră și numărul de triunghiuri formate de lanțul de triunghiuri sau de lanțul de patrulatere, pînă la baza de control.

Practic, după maximum 20 de triunghiuri va trebui să avem măsurată o bază de control.

Diferența dintre valoarea calculată și cea măsurată a bazei de control va trebui apoi compensată, este compensarea de laturi, conform relației arătate la compensarea unghiurilor, ultima fază.

- c) Eroarea comisă asupra lungimei rețelei.

Avînd un lanț de triunghiuri sau patrulatere, ca cel din Fig. 241, lungimea rețelei este  $L$ .

Ne propunem să stabilim relația care dă eroarea  $\Delta L$  transmisă acestei lungimi.

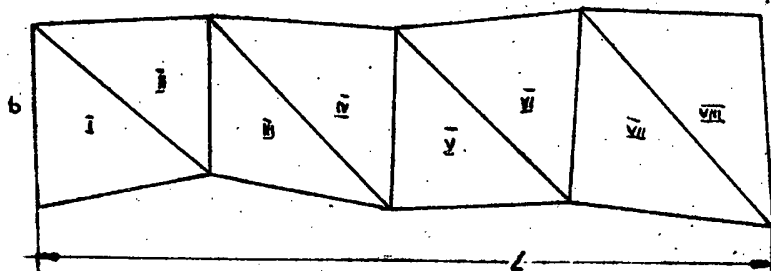


Fig. 241.

Avind  $r$  patrulatere, deci  $2r$  triunghiuri, asupra laturilor patrulaterelor comitem erorile:

$$\Delta b_1 = \pm \frac{\mu}{\rho} \sqrt{\frac{2}{3}} b_1^2$$

$$\Delta b_2 = \pm \frac{\mu}{\rho} \sqrt{\frac{2}{3}} b_2^2$$

$$\dots$$

$$\Delta b_r = \pm \frac{\mu}{\rho} \sqrt{\frac{2}{3}} b_r^2$$

Eroarea totală, ce afectează lungimea  $L$ , ar fi însumarea acestor erori:

$$\Delta L = \Delta b_1 + \Delta b_2 + \dots + \Delta b_r = \pm (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_r^2) \frac{\mu}{\rho} \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{\mu}{\rho} \sqrt{\frac{2}{3}} (1 + 2 + 3 + \dots + r)$$

Înlocuind:

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_r = b$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + r = \frac{r(1+r)}{2}$$

Se obține:

$$\Delta L = b \sqrt{\frac{r(1+r)}{3}}$$

- 6. Calculul coordonatelor.

După măsurarea și compensarea unghiurilor și calcularea laturilor triangulației, urmează a se calcula coordonatele vîrfurilor rețelei de triangulație față de un sistem de axe de coordonate fixat.

Trebuie să facem următoarea deosebire sau clasificare a ridicărilor suprafețelor mai mari de 100 ha și anume se vor distinge următoarele două cazuri:

- Cazul I.:

Cind in regiunea respectivă nu avem puncte geodezice (puncte de coordonate cunoscute).

- Cazul II:

Cind avem puncte geodezice.

In primul caz ne alegem un sistem arbitrar de axe de coordonate, de exemplu se va lua ca axă  $xx$  una din laturile triangulației și axa  $yy$  perpendiculară pe această latură.

In cazul II ne vom raporta la sistemul de axe de coordonate in care sint date coordonatele punctelor geodezice din regiune.

Avind sistemul de axe de coordonate stabilit, ca și valoarea unghiurilor triangulației, se va executa in primul rind calculul orientărilor laturilor.

De exemplu, in cazul I, avind triangulația din figura 242, s-ar putea lua ca axă  $xx$  latura  $AE$

și axa  $yy$  perpendiculară pe ea in punctul  $A$ .

Față de acest sistem de coordonate, pot fi deduse orientările tuturor celorlalte laturi și an avea:

$$\begin{aligned} \alpha_{A0} &= 360^\circ - \hat{10} \\ \alpha_{AB} &= \alpha_{A0} - \hat{1} \end{aligned}$$

In acest mod pot fi determinate orientările tuturor laturilor.

Dacă am fi in situația din cazul II, adică ne-am raporta la un sistem dat de axe de coordonate, in acest caz cunoscind orientarea unei drepte in acel sistem, pot determinate orientările tuturor laturilor, așa cum se

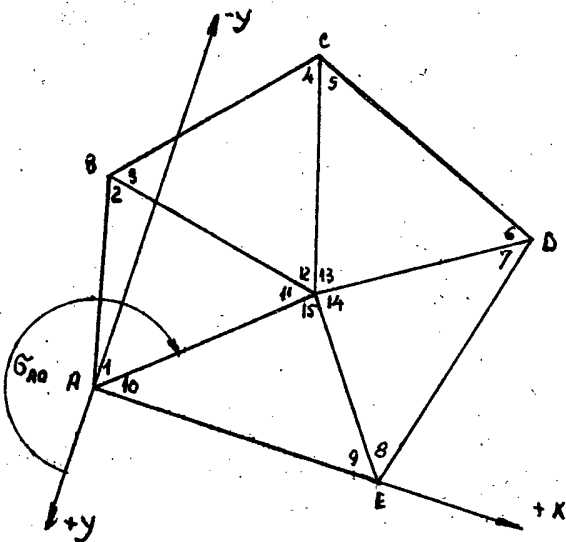


Fig. 242.

știe din problemele de planimetrie, arătate in Cap.V.

Acum orientările și lungimile laturilor fiind cunoscute, precum și coordonatele cel puțin a două puncte, coordonatele celorlalte puncte se calculează prin intersecție înainte.

Transmiterea erorilor de azimut.

Fiind dată orientarea  $\alpha_0$  (Fig.243), se arătate cum se calculează orientările celorlalte laturi.

Se pune întrebarea care este eroarea de azimut transmisă orientării, de exemplu  $\alpha_5$  cunoscută fie din coordonate, fie în urma determinărilor astronomice.

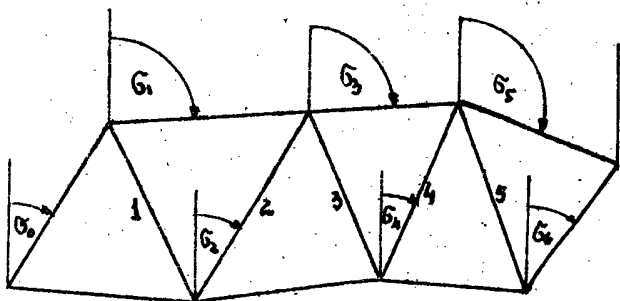


Fig. 243.

Cu alte cuvinte, se cunoaște orientarea primei laturi și determinând, prin calcule orientarea, azimutul, ultimei laturi, ne propunem a afla eroarea de azimut transmisă asupra acestei ultime laturi.

Intr-un unghiul condiția care există, este că suma celor trei un-

ghiuri să fie egală cu  $180^\circ$  sau:

$$\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ = \theta.$$

Din cauza erorilor unghiulare, eroarea de închidere este:

$$\Delta F = \pm \Delta \alpha \pm \Delta \beta \pm \Delta \gamma.$$

Eroarea medie comisă în triunghiul este:

$$m_f = \sqrt{\Delta \alpha^2 + \Delta \beta^2 + \Delta \gamma^2}$$

Dacă se consideră:

$$\Delta \alpha = \Delta \beta = \Delta \gamma = \varepsilon,$$

$\varepsilon$  fiind eroarea comisă la citirea unui unghi, relația pentru eroarea medie va fi:

$$m_f = \varepsilon \sqrt{3}$$

Pentru cazul a  $i$  triunghiuri, eroarea medie este:

$$m_i = \varepsilon \sqrt{3i}$$

În cazul nostru  $i = 5$ .

Această relație este valabilă numai în cazul când inițial nu am avut nici o eroare de azimut, adică  $\alpha_0$  este neafectat de erori, pentru cazul general eroarea de azimut va fi dată de relația:

$$\Delta F = \sqrt{\varepsilon_0^2 + 3i \varepsilon^2}$$

Practic, pornind cu un azimut precis,  $\varepsilon_0 = 0$  și relația cea arătată anterior, adică:

$$\Delta F = \varepsilon \sqrt{3i}.$$

Aceasta, va trebui să fie eroarea la care ne așteptăm a o avea asupra azimutului unei laturi, în cazul când operațiunile au fost conduse corect.

Indesirea punctelor de triangulație.

La ridicarea suprafețelor mari, țări, continente, etc, căutînd a determina în mod precis coordonatele punctelor principale de pe acea suprafață, se vor forma triangulații de ordin superior cu laturile de 20 - 40 km, adică se aplică triangulația de ord. I.

Am arătat la Cap. I că triangulația poate fi de diferite ordine:

Triangulația de ord. I	cu laturile de	30 - 40 km,
"	"	II " " " 10 - 20 km,
"	"	III " " " 5 - 10 km,
"	"	IV " " " 1 - 5 km,
"	"	V " " " 0,5 - 1 km.

De aceea după mărimea suprafeței ce avem de ridicat, se va forma canevassul cel mai adecvat și se va forma poligonația de ordinul cerut de această mărime a suprafeței.

Dacă am avea de exemplu o triangulație de ord. I, apoi în acest caz pentru a putea ridica toate detaliile, va fi necesar ca punctele de triangulație să fie indesite, ajungînd ca între aceste puncte indesite să se formeze triangulația de ordinul II, ale cărei puncte indesite ne vor conduce la triangulația de ordinul II, ș. a. m. d., ajungînd astfel pînă la triangulația de ordinul V.

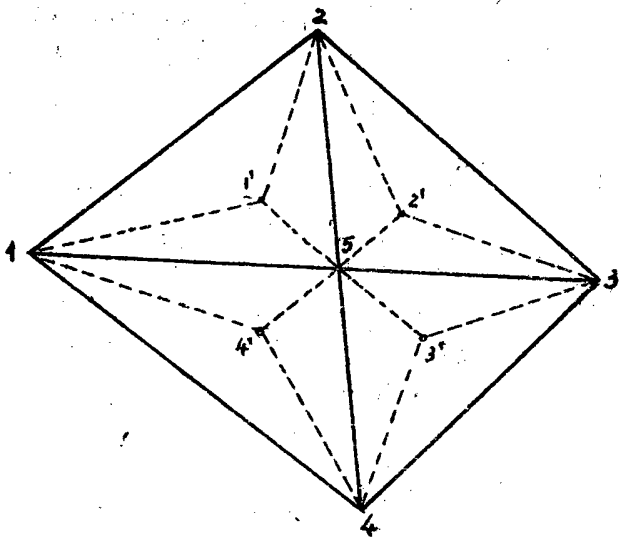


Fig. 244.

În cazul din Fig. 244, avînd punctele de triangulație (1, 2, 3, 4, 5), să presupunem, de ord. I, se va face indesirea lor și prin cel puțin două intersecții înainte, sau două intersecții înapoi, vor fi determinate coordonatele punctelor 1', 2', 3', 4', după ce, evident, au fost calculate coordonatele punctelor 1, 2, 3, 4.

În acest mod am făcut indesirea punctelor, adică am ajuns să avem mai multe puncte de coordonate cunoscute. Între aceste puncte va urma rețeaua de triangulație de ordinul II.

8. Incadrarea rețelilor de triangulație în rețele de ordin superior.

Am arătat că, prin indesirea punctelor de triangulație putem trece de la o rețea de triangulație de ordin superior la o rețea de ordin inferior, să vedem cum se face încadrarea acestei rețele de ordin inferior în rețeaua de ordin superior.

Pentru aceasta vom trata câteva cazuri mai frecvent întâlnite în practică, toate celelalte cazuri reducându-se, în ultima analiză, la unul din aceste cazuri, după cum le arată și L.A. Nazarov, prof. la Moscova, în tratatul său:

a) Fiind date punctele de triangulație de ordin superior A, B, C, D, coordonatele lor fiind deci cunoscute, se cere a se calcula triangulația de ordin inferior, sprijinită pe cele 4 puncte date, prin canevasul de forma din Fig. 245.

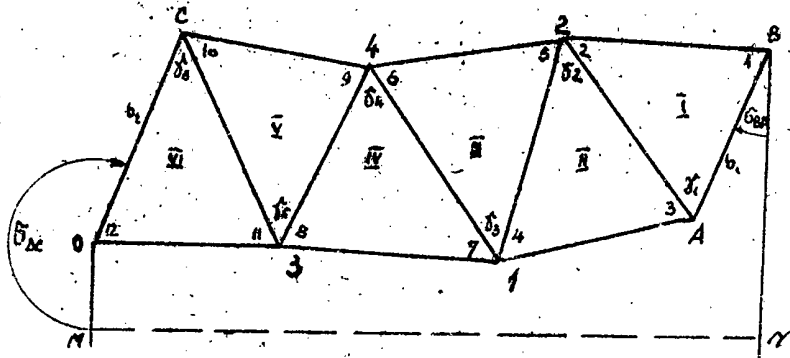


Fig. 245.

După ce măsurăm toate unghiurile  $\hat{1}, \hat{2}, \dots, \hat{12}$ ,  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{12}$ , se face compensarea lor după metoda Brommann, trecând prin cele două faze arătate, prima fază în toate triunghiurile suma unghiurilor să fie  $180^\circ$ , iar faza doua condiția de laturi dată de relația:

$$\frac{b_1 \cdot \sin 1 \cdot \sin 3 \cdot \sin 5 \cdot \dots \cdot \sin 11}{b_2 \cdot \sin 2 \cdot \sin 4 \cdot \sin 6 \cdot \dots \cdot \sin 12} = 1$$

În această relație bazele  $b_1$  și  $b_2$  sînt cunoscute, putînd fi deduse din coordonatele cunoscute ale punctelor A, B, C, D.

Nu este însă suficient atît, deoarece

se cunosc orientările  $\alpha_{BA}$  și  $\alpha_{CA}$  și calculând orientările tuturor laturilor, începând cu orientarea cunoscută  $\alpha_{AB}$ , prin calcule se va ajunge la o orientare pentru dreapta  $CD$  diferită de orientarea  $\alpha_{CD}$ .

De aceea se va considera întreg ansamblul ca o poligonatie dusă între puncte A și C, prin punctele 1, 2, 3, 4, (trasată pe figură prin linii mai accentuate) în care punctul B va fi considerat ca punct de viză îndepărtată pentru punctul A și punctul D este viza îndepărtată a punctului C.

În această poligonatie, ducând perpendiculara comună MN la paralele axei XX, duse din punctele B și D, știm că avem condiția ca:

$$[\alpha] + [\beta] - (\alpha_{DB} - \alpha_{AD}) - K \cdot 180^\circ = 0.$$

Ceea ce în cazul nostru devine:

$$\alpha_{AB} - \beta_1 + \beta_2 - \beta_3 + \beta_4 - \beta_5 + \beta_6 - \alpha_{CD} - K \cdot 180^\circ = 0.$$

sau simbolic:

$$[\beta_n] - [\beta_i] - (\alpha_{CD} - \alpha_{BA}) - K \cdot 180^\circ = 0,$$

unde  $[\beta_n]$  reprezintă suma unghiurilor  $\beta$  pereche, iar  $[\beta_i]$  suma unghiurilor  $\beta$  impare.

Deoarece această relație nu se adeverește, cum s-a arătat și în cazul poligonatiei, ei avem:

$$[\beta_n] - [\beta_i] - (\alpha_{CD} - \alpha_{BA}) - K \cdot 180^\circ = f_w.$$

Eroarea  $f_w$  repartizată unghiurilor  $\beta$ , ținând cont de semnele care le afectează, ne conduce la determinarea, prin calcule, cu exactitate la orientarea dată pentru  $\alpha_{CD}$ .

După această compensare, va fi necesar a se face din nou compensarea ca în fiecare triunghi suma unghiurilor să fie  $180^\circ$  și am aflat astfel cele mai probabile valori ale tuturor unghiurilor, putând apoi începe calculul laturilor 1-2, 2-3, etc., și apoi calculul orientărilor acestor laturi și în fine, calculul coordonatelor vîrfurilor rețelei de ordin inferior.

Avantajul practic constă în faptul că nu mai este necesară măsurarea bazelor, deoarece acestea ( $b_1, b_2$ ) sînt cunoscute.

b) Sînt date coordonatele a 3 puncte (A, B, C) de triangulație de ordin superior și se cer coordonatele punctelor  $P_1, P_2, P_3$  etc., de ordin inferior (Fig. 246).

Operațiunea se execută în următoarele faze:



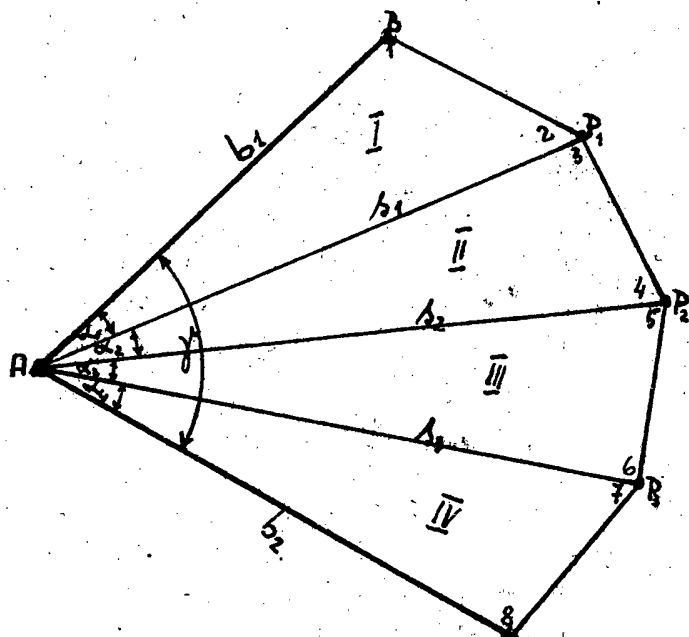


Fig. 246.

- Se măsoară unghiurile  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8$   
 - Se calculează orientările  $\alpha_{AB}, \alpha_{AC}$  și  
 apoi unghiul  $\gamma$  cu ajutorul relațiilor cunoscute:

$$\begin{aligned} \text{tg } \alpha_{AB} &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} ; \text{tg}(\alpha_{AB} + 45^\circ) = \frac{\Delta x_{AB} + \Delta y_{AB}}{\Delta x_{AB} - \Delta y_{AB}} \\ \text{tg } \alpha_{AC} &= \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} ; \text{tg}(\alpha_{AC} + 45^\circ) = \frac{\Delta x_{AC} + \Delta y_{AC}}{\Delta x_{AC} - \Delta y_{AC}} \\ \gamma &= \alpha_{AC} - \alpha_{AB} \end{aligned}$$

- Compensarea unghiurilor pentru a satisface relația:

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = \gamma$$

- Compensarea unghiurilor pentru ca în fiecare triunghi suma unghiurilor să fie  $180^\circ$ , fără a se mai compensa unghiurile  $\beta_1, \dots, \beta_4$  a căror valoare a fost aflată în urma compensării anterioare,

- Compensarea unghiurilor  $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \dots, \hat{8}$ , pentru a satisface relația de condiție de laturi:

$$\frac{b_1 \cdot \sin 1 \cdot \sin 3 \cdot \sin 5 \cdot \sin 7}{b_2 \cdot \sin 2 \cdot \sin 4 \cdot \sin 6 \cdot \sin 8} = 1$$

- Calcularea laturilor  $s_1, s_2, s_3$  cu ecuația sinusului, cunoscând latura  $b_1$  și toate unghiurile, în triunghiul I, apoi cu latura  $s_1$  și toate unghiurile în triunghiul II, ș.a.m.d.

- Ultima operație, calculul coordonatelor

lui  $P, P_1, P_2, P_3$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_A + s_1 \cdot \cos \alpha_{A1} \\ x_2 &= x_A + s_2 \cdot \cos \alpha_{A2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= y_A + s_1 \cdot \sin \alpha_{A1} \\ y_2 &= y_A + s_2 \cdot \sin \alpha_{A2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Orientările  $\alpha_{A1}, \alpha_{A2}, \dots$  fiind:  
 $\alpha_{A1} = \alpha_{AB} + \delta_1$ ;  $\alpha_{A2} = \alpha_{A1} + \delta_2$ ;  $\alpha_{A3} = \alpha_{AB} + \delta_3, \dots$

- c) Date punctele A și B, se cer coordonatele lui  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  (Fig. 247), operațiunile pe cari le facem, pentru rezolvarea problemei, se succed în următoarea ordine:

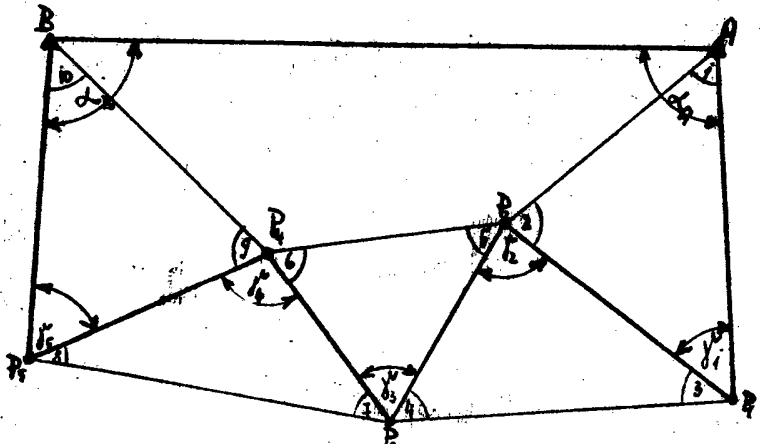


Fig. 247.

- Măsurăm unghiurile: 1, 2, 3, ..., 10,  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \alpha_{A1}, \alpha_{A2}$
- Compensăm unghiurile din poligoana, trasată accentuat în Fig.,  $AP_1P_2P_3P_4P_5B$  pentru a îndeplini condiția:

$\alpha_{A1} + \delta_1 + (360^\circ - \delta_2) + \delta_3 + (360^\circ - \delta_4) + \delta_5 + \alpha_{A2} = K \cdot 180^\circ$   
 sau:  $[\alpha] + [\delta_c] - [\delta_n] - K \cdot 180^\circ = 0$

Relație care, nefiind îndeplinită, ne dă eroarea  $f_w$  pe care o repartizăm în mod egal, unghiurilor măsurate, ținând cont de semnul erorii și de semnele unghiurilor din relație.

- Compensăm unghiurile  $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \dots, \hat{10}$ , astfel ca suma unghiurilor în fiecare triunghi să fie  $180^\circ$ .

- Luând pentru latura  $AP_1$  o valoare arbitrară, de exemplu 1 km și calculăm toate laturile lanțului.

- Cu orientarea  $\alpha_{AB}$  cunoscută, se calculează orientările tuturor laturilor.

- Urmează calcularea coordonatelor provizorii ale punctelor cu ajutorul relațiilor cunoscute, în cari se introduce valorile laturilor respective, deduse din calculul cu valoarea arbitrară a laturii  $AP_1$ , ajungând finalmente la coordonatele unui punct B'.

- Calculăm latura  $\alpha' = \overline{AB'}$ , cu ajutorul coordonatelor lui A și B', iar din coordonate și orientarea  $\alpha_{AB}$  se reduce latura  $\alpha = \overline{AB}$ .

Intre aceste laturi există raportul constant  $\frac{\alpha'}{\alpha} = K$ , un coeficient cu care multiplicând laturile calculate ale lanțului, se vor afla valorile lor adevărate.

- Urmează, ultima operație, recalcularea poligonației și stabilirea adevăratelor coordonate ale punctelor  $P_1, P_2, P_3, \dots$

- d) Cazul când sînt date două puncte A și B însă care nu pot fi văzute unul din celălalt.

Este situația din Fig. 256, în care deosebirea constă din faptul că nu pot fi măsurate unghiurile  $\alpha_1$  și  $\alpha_2$ .

Acum singura compensare, ce poate fi făcută, este ca suma unghiurilor în fiecare triunghi să fie  $180^\circ$  nu se mai poate face compensarea poligonației.

Pentru rezolvarea problemei se ia pe direcția  $AP_1$  un sistem de axe perpendicular  $z, \bar{z}$ , calculăm poligonația și se determină punctul  $B'$ , apoi distanțele  $\alpha' = AB'$  și  $\alpha = AB$ , precum și raportul lor  $\frac{\alpha'}{\alpha} = K$ .

Prin multiplicarea laturilor, care în prealabil au fost calculate cu o valoare arbitrară luată pentru  $AP_1$ , se determină adevăratele valori ale laturilor.

Avînd orientarea dreptei AB, adică pe  $\alpha_{AB}$  și calculînd orientarea ei în sistemul particular  $z, \bar{z}$ , adică  $\alpha_{z\bar{z}}$  se obține unghiul de rotație a sistemului  $z, \bar{z}$  față de sistemul x y se află cu alte cuvinte  $\delta = \alpha_{z\bar{z}} - \alpha_{AB}$  și de aci orientările tuturor laturilor:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \alpha_{A1} + \delta \\ \alpha_{12} &= \alpha_{12} + \delta \\ &\vdots \end{aligned}$$

Odată acestea stabilite, avem toate elementele necesare și pot fi stabilite coordonatele tuturor punctelor în sistemul de axe de coordonate x y.

- 9. Ridicarea detaliilor.

După îndesirea punctelor de triangulație, pentru a ne apropia mai mult de punctele ce vom să ridicăm, se face poligonații, așa cum s-a arătat și apoi, pe liniile de poligonații, prin metodele tratate în cazul suprafețelor mai mici de 100 ha, prin abscise și ordonate, metoda polară, etc. se vor stabili toate detaliile care interesează, terminînd astfel toate operațiunile pe teren, referitoare la ridicarea planului respectiv.

- 10. Triangulația orașelor și țărilor.

Ca încheiere a acestui Capitol și pentru a pune în evidență modul cum se alege canevasul și sînt

conduse lucrările de triangulație, se vor da câteva exemple de triangulații, executate la ridicările de orașe, precum și triangulații executate în diferite țări.

Ridicarea orașelor, cu scopul final, de a putea permite regularizarea lor rațională, sau sistematizarea străzilor, locurilor de construcții, etc., spre a ști suprafața și dimensiunile parcelor, atât a celor construite, cât și a celor reconstruite, de a ști unde sînt plasate și unde va trebui să se plaseze noi conducte de canalizare, apă, gaz, electricitate, etc., toate fiind considerente care au impus dela început o precizie mare acestor ridicări.

- a) Ca un exemplu de calcul al unei rețele de triangulație, dăm triangulația orașului Timișoara, luată ca exemplu datorită faptului, că la canevasa Timișoarei au fost aplicate toate normele și regulile universal adoptate astăzi.

Ridicarea orașului Timișoara a fost făcută de către profesorul Szestai dela Școala Politehnică din Budapesta, care a ales pentru canevasa 6 puncte, arătate în Fig. 248 și anume:

- I. Turnul Seminarului din Cetate (dăriaat în 1915)
- II. Turnul bis. ort. rom. din Ghioroc
- III. Turnul bis. catolice din Fräidorf
- IV. Turnul bis. sîrbești din Mehala
- V. Turnul bis. sîrbești din Ghiroda
- VI. Un punct staționabil, plasat în teren.

Baza triangulației s-a ales linia I - II (între Seminar și bis. din Ghioroc).

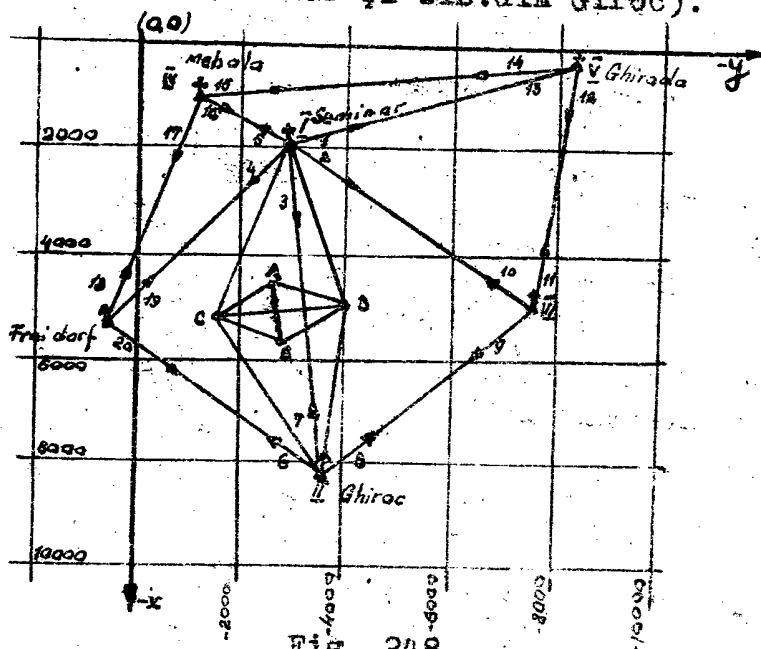


Fig. 248.

Pentru ca transmiterea erorii de măsurare asupra bazei I - II, care interesează, să fie minimă, s-a căutat ca măsurătoarea să fie executată cât mai precis utilizînd în acest scop late de lemn, prevăzute cu muchii de oțel la extremități, cu care s-a măsurat de 4 ori baza de joncțiune AB și rezultatul măsurătorilor a fost:

$$l_1 = 992,597 \text{ m};$$

$$l_2 = 992,604 \text{ m},$$

$$l_3 = 992,606 \text{ m},$$

$l_4 = 992,596 \text{ m}$ , iar valoarea cea mai pro-

tabilă, media aritmetică a acestor măsurători;

- 356 -

$l_0 = 992,601$  m. Calculându-se s-a determinat eroarea medie a unei singure măsurători:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[V V]}{n-1}}$$

și eroarea aritmetică:

$$\mu = \frac{m}{\sqrt{n}} = \pm 2,5 \text{ mm.}$$

Lungimea bazei măsurate a fost redusă la nivelul mării, cu ajutorul relațiilor arătate și s-a obținut

$$l_0' = 992,587 \text{ m.}$$

Cu ajutorul bazei măsurate AB și a unghiurilor, măsurate și compensate, s-a calculat cealaltă bază de joncțiune CD și apoi baza de triangulație I - II.

Unghiurile s-au compensat după Gauss și apoi au fost calculate lungimile tuturor laturilor.

Centrul axelor de coordonate (cu axa + x spre Sud și + y spre Est) a fost luat un punct din Mehala, după care au putut fi determinate coordonatele tuturor celorlalte puncte, virf, ale triangulației.

- b) În schițele de mai jos, fără a mai intra în amănunt, dăm ca exemple, unele din cele mai caracteristice canevase de triangulație a orașelor.

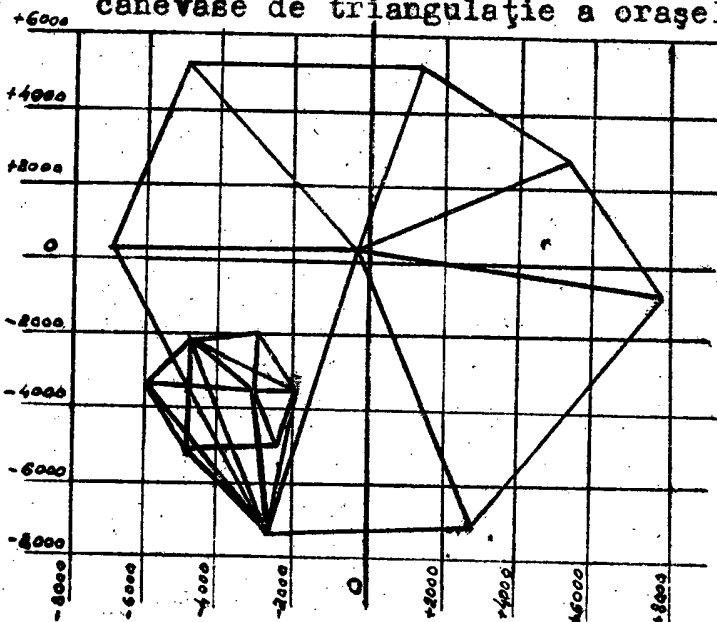


Fig. 249.

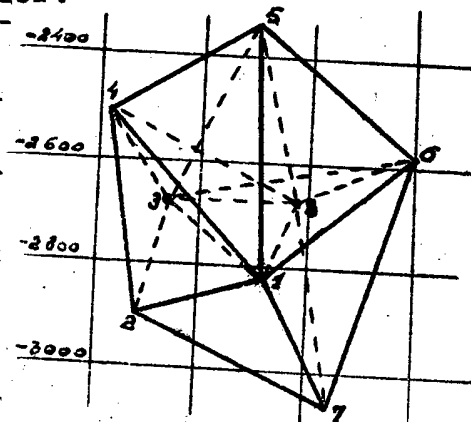


Fig. 250.

### - c) Triangulația în U.R.S.S.

În Rusia țaristă, triangulația ca metodă de ridicare a suprafețelor întinse, și-a primit începutul

in primele decenii ale sec. XIX, fiind întrebuințată la determinarea curburilor meridianelor și paralelelor, în partea ei europeană, după cum citează P.M. Orlov, prof. la Institutul din Moscova.

Însă din cauza imperfecțiunii instrumentelor de măsurare a unghiurilor și a lungimilor, utilizate în acea vreme, coordonatele punctelor triangulației de ord. I au fost eronat stabilite, ceea ce nu permitea în sec. XX încastrarea lucrărilor de topografie, la precizia cerută de împrejurări.

Datorită acestui fapt Administrația generală a ridicărilor și cartografiei a Comisariatului Poporului pentru afacerile Interne a U.R.S.S. întocmește și elaborează o serie întreagă de instrucțiuni pentru triangulație și poligonatie de diferite ordine, iar Administrația topografilor militari și Administrația generală geodezică începe lucrările pe teren și pînă în anul 1930, așa cum reiese din catalogul provizoriu a punctelor triangulației de ord. I, editat de către Biroul geodezic informativ al U.R.S.S. ridică, numai în partea europeană a U.R.S.S., 703 puncte de triangulație de ord. I, cari formează așa cum se vede în Fig. 251, o rețea de triunghiuri și patrulatere dispuse după direcția meridianelor sau după cea a paralelelor.

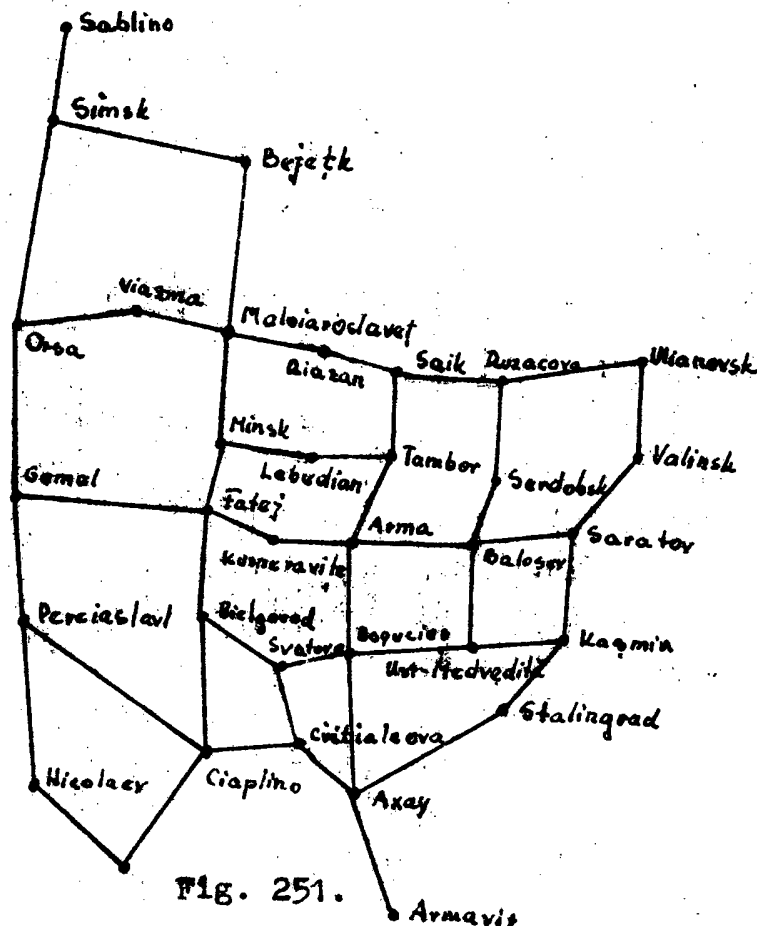


Fig. 251.

- 358 -

Pentru întreaga rețea au fost măsurate, prin metodele cele mai precise, cu trei fire de invar, 34 baze de joncțiune, în lungimea fiecare de 9 - 11 km, cu o precizie de  $1 : 1.000.000$ , iar de la aceste baze s-a trecut la calculul bazelor de triangulație în lungime de 25 - 40 km.

Măsurarea unghiurilor de triangulație s-a efectuat cu teodolitul mare universal de mare precizie, după metoda Schreiber, la precizie de  $\pm 0,8$ .

Ca puncte de plecare, pentru calculare coordonatelor geografice ale tuturor punctelor de triangulație de ord. I., au fost determinate prin măsurători și observațiuni astronomice, cari au durat mai mulți ani, coordonatele centrului sălii rotunde a observatorului din Pulcovo, legate de observatorul din Greenwich (considerat ca bază în calculul longitudinilor) și au fost stabilite pentru acest punct: latitudinea =  $59^{\circ} 46' 18''$  și longitudinea de la Greenwich =  $30^{\circ} 19' 38''$ .

Drept verificare pentru 43 puncte de triangulație, au fost stabilite coordonatele geografice (longitudinea, latitudinea și azimutul) în mod astronomic, puncte cari poartă denumirea de punctele lui Laplace.

Aceste puncte odată stabilite, au putut fi folosite ca bază de plecare în ridicările topografice executate în cadrul planurilor cincinale.

#### - d) Triangulația României.

Din Regulamentul (1933) pentru executarea lucrărilor de geodezie, desprindem următoarele:

Triangulația prin ordială a României constă din trei laturi dirijate după direcția meridianelor și două laturi dirijate după direcția paralelelor și anume:

- Lanțul meridian central (București) sprijinit pe bazele București, Brașov și Rădăuți.

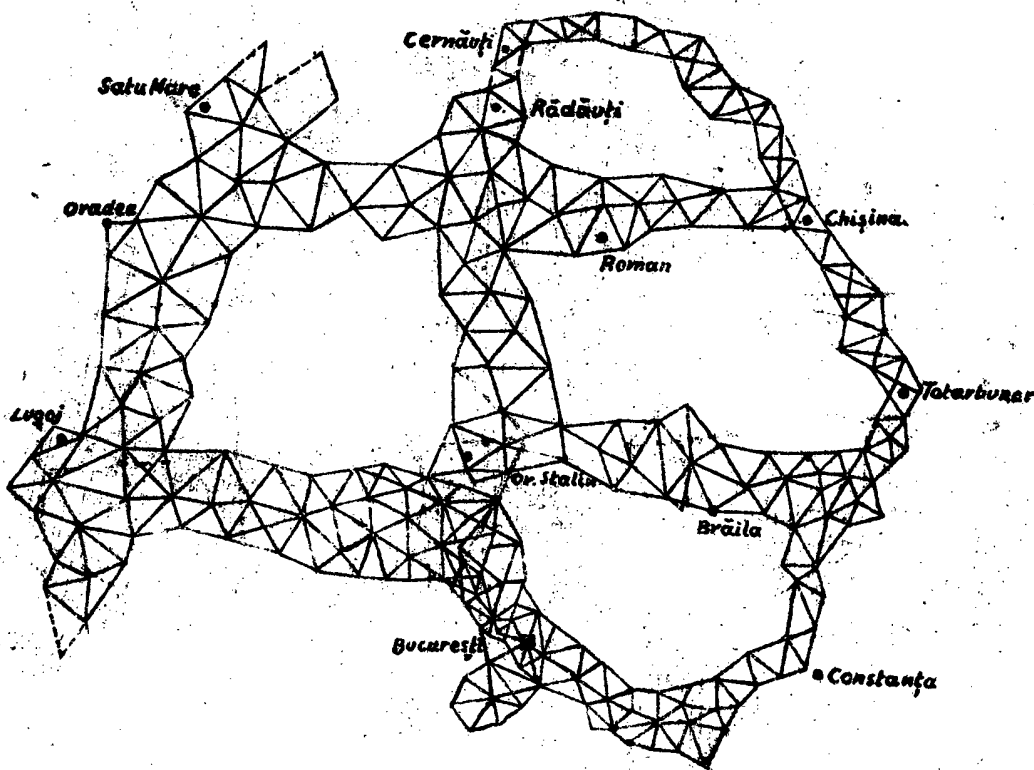
- Lanțul meridian de Est, sprijinit pe bazele Bazargic și Tatarbuniar și Chișinău în U.R.S.S.

- Lanțul de Vest, al Arcului de Meridian Internațional, sprijinit pe bazele Lugoj și Satu Mare.

- Lanțul paralel de Nord de  $46^{\circ} 30'$  sprijinit pe bazele Satu Mare, Roman.

- Lanțul paralel de Sud, de  $45^{\circ}$  sprijinit pe bazele Lugoj, Brașov și Brăila.

In afară de acestea se mai adaugă lanțurile care constituiesc legătura triangulației din țara noastră cu rețelele de triangulație ale țărilor vecine.





## CAPITOLUL VII.

### Calculul suprafețelor și detașări sau parcelări.

#### - 1. Calculul suprafețelor.

Calculul suprafețelor în topografie este un Capitol important, fiind că nu putem pătrunde în domeniul ei, fără a ne lovi de necesitatea de a cunoaște suprafața terenului în care se extind lucrările noastre.

De aceea, indiferent de specialitatea inginerului, care conduce ridicări topografice, deviza lui trebuie să fie "suprafață fixă între hotare fixe".

La calcularea suprafețelor pot fi în trebuință următoarele metode, a căror utilizare este în funcție de precizia cerută:

- Metode grafice,
- Metode numerice,
- Metode mecanice.

#### 1) Metode grafice.

Având planul unei porțiuni oarecare de teren, poate fi determinată suprafața lui în mod grafic, atât în cazul când terenul ar avea forma unui poligon oarecare, cât și în cazul că ar avea un contur limitat de o linie curbă.

#### a) Cazul când terenul are forma unui poligon oarecare.

Fie forma terenului cea prezentată în Fig. 253 - 254, pe care o avem reprezentată pe un plan, la scara respectivă.

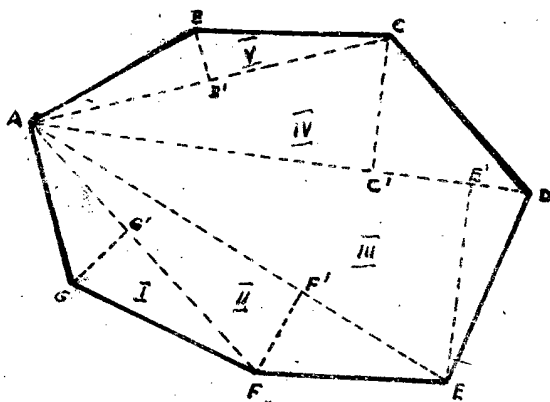


Fig. 253.

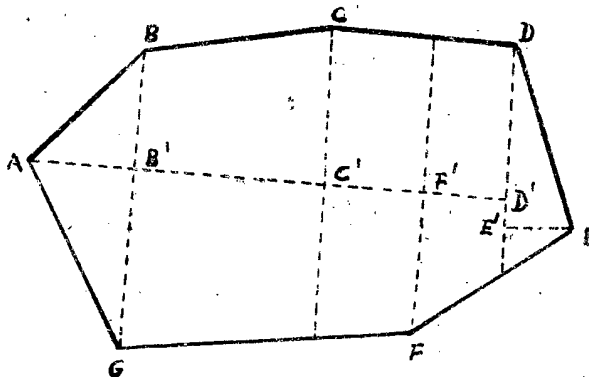


Fig. 254.

Pentru determinarea suprafeței acestui teren, în mod grafic putem folosi fie metoda arătată în Fig. 253, fie cea arătată în Fig. 254.

În Fig. 253 am divizat poligonul în cază, în mai multe triunghiuri (I. II. III. IV. V.) cu ajutorul scării de reducere a planului și cu dublu decimetru sau cu compasul se determină lungimea bazelor acestor triunghiuri, ca și înălțimea lor, elemente care odată stabilite, ne vor da suprafața fiecărui triunghi prin cunoscuta relația din Geometrie:

$$S = \frac{b \times h}{2}$$

Cunoscând suprafețele triunghiurilor se stabilește apoi suprafața totală a terenului.

În cazul din Fig. 254 am divizat suprafața poligonului în trapezi și triunghiuri, a căror suprafață se calculează după stabilirea, în mod similar ca în cazul precedent, a elementelor necesare, adică a bazelor și înălțimilor respective.

O altă metodă, mult uzitată prin faptul că ne scutește de a calcula multe suprafețe, este cea a transformării poligonului respectiv într-un triunghi de suprafață echivalentă, cazul din Fig. de mai jos, în care după problema cunoscută din Geometrie, se reduce poligonul ABCDEF la triunghiul B'C'D' de suprafață echivalentă.

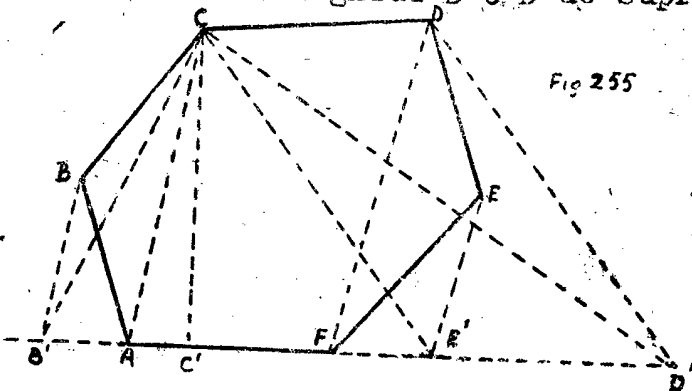


Fig. 255

Unind punctele A cu C se obține latura AC, iar din punctul B ducem o paralelă la AC până în B', obținem astfel triunghiul ACB, echivalent cu triunghiul ABC, ca având aceeași bază AC și aceeași înălțime.

In mod similar, inlocuim triunghiul DEF cu triunghiul DFE' și apoi triunghiul CDE' cu CD'E și am obținut triunghiul B'CD' echivalent cu poligonul nostru.

Acestui triunghi, după determinare, așa cum am arătat, a bazei B'D' a înălțimei CC' îi putem determina suprafața.

- b) Calculul suprafețelor delimitate de linii curbe.

Dacă linia ce mărginește suprafața este o linie curbă oarecare, pentru calculul suprafeței se va aplica una din următoarele metode:

- Metoda trapezelor
- Metoda lui Simpson
- Metoda lui Poncelet
- Metoda patratelor module.

- Metoda trapezelor.

Avind de calculat suprafața ABCD din Fig.256, se va diviza distanța AD în n părți egale și ridicind perpendicula-

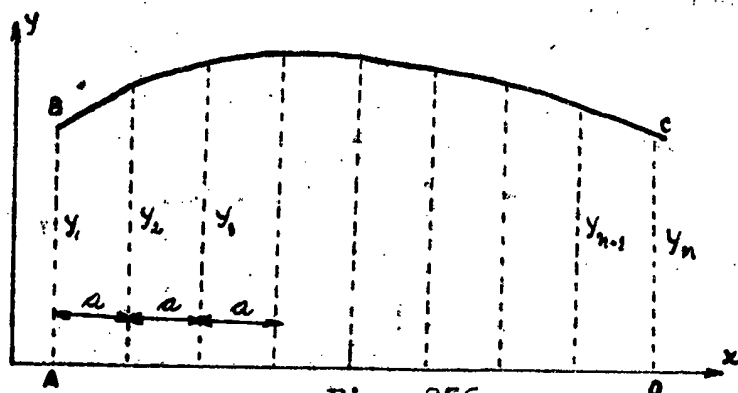


Fig. 256.

rele respective ( $y_1, y_2, \dots, y_n$ ) s-a împărțit suprafața într-un număr "n" de trapeze.

Suprafața unui trapez în parte, va fi:  
 $2 S_i = (Y_1 + Y_2) a.$

Iar suprafața întregii figuri este;

$$S = \frac{a}{2} [y_1 + y_n + 2(y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1})] = a \left( \frac{y_1 + y_n}{2} + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1} \right).$$

- Metoda Simpson.

Dacă în formula trapezului linia curbă a fost asimilată cu linia dreaptă, Simpson o substituie printr-un arc de parabolă, ajungind la relația de mai jos, pentru

suprafață care ne interesează:

$$S = \frac{a}{2} \cdot [y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \dots + y_{2n}) + y_{2n}]$$

Caz în care  $2^n a$ , reprezintă numărul total de perpendiculare.

- Metoda lui Poncelet.

Spre a calcula cu această metodă o suprafață carecure, împărțim distanța AD în părți egale, se duc perpendicularele  $Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  și se uneste vârful lui  $Y_0$  cu  $Y_1$ , apoi  $Y_1$  cu  $Y_2$ ,  $Y_2$  cu  $Y_3$  și așa mai departe formând astfel mai multe trapeze (Fig. 257) a căror suprafață totală este  $S'$ , iar suprafață totală, care ne interesează este  $S > S'$ .

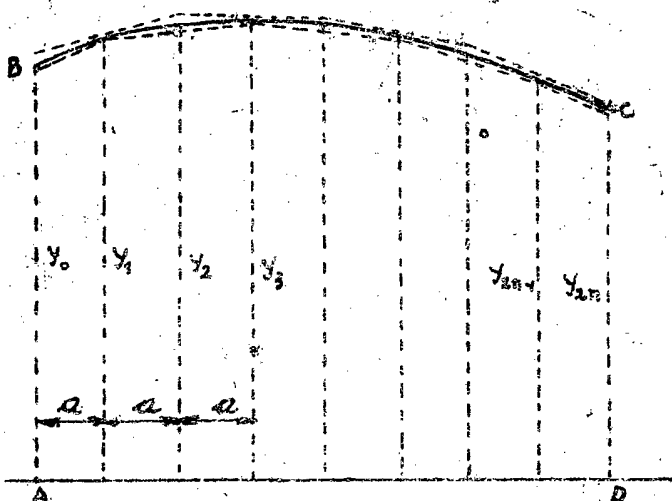


Fig. 257.

Ducând prin punctele de ordin Impar, tangente la curbă, vor fi formate alte trapeze, a căror suprafață  $S'' > S$ .

Deci suprafața care ne interesează este cuprinsă între suprafețele  $S'$  și  $S''$ .

$$S' < S < S''$$

Că valoarea probabilă, pentru  $S$  se ia:

$$S = \frac{S' + S''}{2}$$

comitându-se eroarea:

$$e = \frac{S'' - S'}{2}$$

Valorile suprafețelor  $S'$  și  $S''$  sînt:

$$S'_1 = \frac{a}{2} (y_0 + y_1)$$

$$S'_2 = a (y_1 + y_2)$$

...

$$S'_n = \frac{a}{2} (y_{n-1} + y_n)$$

$$S''_1 = a (y_0 + y_2)$$

$$S''_2 = a (y_2 + y_4)$$

...

$$S''_n = a (y_{2n-2} + y_{2n})$$

Însumînd și luînd media lor, se obține relația care ne dă suprafața:

$$S = a \left[ 2(y_2 + y_4 + y_6 + \dots + y_{2n}) + \frac{y_0 + y_{2n-1}}{2} + \frac{y_1 + y_{2n}}{2} \right]$$

Avantajul prezentat de această metodă constă în faptul că ne permite a cunoaște limita superioară a erorii comise în calcularea suprafeței

- Metoda patratelor (module).

Această metodă constă în a desena pe o bucată de hirtie de calc o serie de linii verticale și orizontale, echidistante și perpendiculare unele pe altele, formând astfel un cadrilaj, cu patratele de suprafață cunoscută.

Acest cadrilaj trebuie să fie însă format cu multă exactitate.

Dacă se alege de exemplu, scara 1 : 2500 și se formează cadrilajul, ca echidistanța dintre liniile verticale și dintre cele orizontale, să reprezinte 200 m, conturul, chenarul cadrilajului, cel mai obișnuit va fi de 50 cm x 64 cm, deci lungimea totală ce poate fi înglobată pe latura lui orizontală este de 1600 m, iar pe verticală 1250 m.

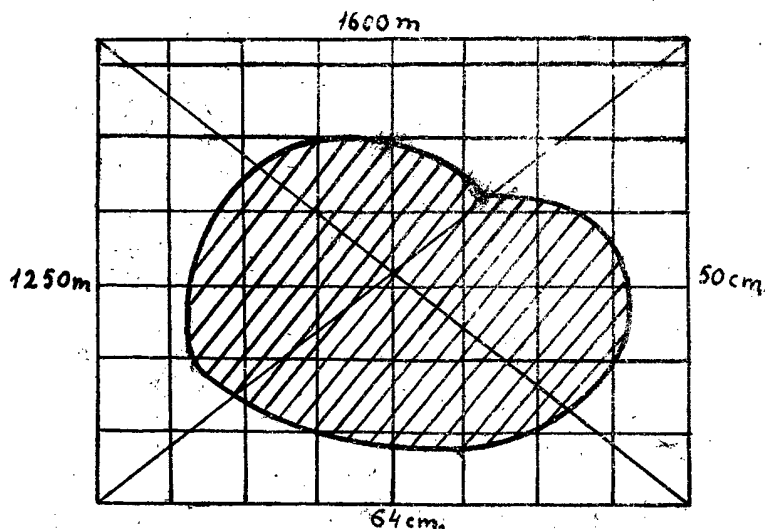


Fig. 258.

Cadrilajul este bine executat dacă cele două diagonale sînt egale și dacă vîrfurile patratelor sînt coliniare.

Pentru construirea, trasarea pe hirtie a caroiajului, constructorii ne pun la dispoziție rigle speciale, paralele între ele și articulate la capete.

Determinarea suprafeței care ne interesează, o facem așezînd hirtia de calc caroiață peste planul respectiv, bineînțeles ca

caroiajul trebuie executat la scara planului, se numără pătrățele întregi cuprinse în suprafață ce vom a măsura, iar cele intersectate de conturul suprafeței se calculează după regulile deja arătate.

Observațiune.

Observațiune.

Din cauza contracției hirtiei valoarea pe care am calculat-o pentru o suprafață sau o lungime și am transpus-o pe hirtie, cu timpul nu va

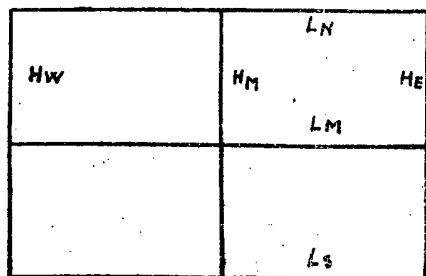


Fig. 259.

- 365 -

corespunde realității.

Pentru a pune în evidență eroarea datorită acestei cauze, să împărțim hîrtia, planul nostru, în patru părți, ducînd liniile cardinale prin mijlocul ei:

$L_N, L_M, L_S$  și  $H_W, H_M, H_E$ , (fig. 269).

Presupunem că valorile adevărate ale hîrtii, atunci cînd ea a fost întocmită, au fost  $L$  respective  $H$ , iar erorile pe cari le observăm în prezent după un timp oarecare dela întocmirea ei, sînt:

$$\begin{array}{ll} L - L_N = l_N & H - H_W = h_W \\ L - L_M = l_M & H - H_M = h_M \\ L - L_S = l_S & H - H_E = h_E \end{array}$$

Erorile mijlocii sînt:

$$l = \frac{l_N + 2l_M + l_S}{4}; \quad h = \frac{h_W + 2h_M + h_E}{4}$$

Suprafața reală a hîrtii care era:  $F = HL$ , în momentul de față a devenit:

$$F' = (H - h)(L - l) = H \cdot L - hL - lH + lh.$$

Deci eroarea de suprafață este:

$$\Delta F = hL + lH - lh.$$

Pentru a obține eroarea relativă pe unitatea de suprafață, împărțim relația noastră prin suprafața hîrtii și se obține:

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{h}{H} + \frac{l}{L} - \frac{l}{L} \cdot \frac{h}{H}$$

Această eroare în mod obișnuit este dată pe hectar:  $\xi = 10.000 \frac{\Delta F}{F}$

și expresia erorii devine acum:

$$\xi = 10.000 \left( \frac{l}{L} + \frac{h}{H} - \frac{l}{L} \cdot \frac{h}{H} \right).$$

Admițînd  $\frac{l}{L} = \frac{h}{H}$  ceea ce este aproape de realitate:

$$\xi = 10.000 \frac{l}{L} \left( 1 - \frac{l}{2L} \right) + 10.000 \frac{h}{H} \left( 1 - \frac{h}{2H} \right).$$

De această eroare trebuie să ținem cont atunci, cînd voim a determina de pe un plan vechi, suprafața unui teren.

## - 2. Metode numerice.

În metodele numerice putem utiliza fie relațiile cunoscute din geometrie pentru determinarea suprafeței unei forme geometrice carecare, fie coordonatele

virfurilor poligonului respectiv, după cum vom vedea.

Pentru primul caz, luând forma geometri-  
 că cea mai simplă, la care de altfel pot fi reduse toate po-  
 ligoanele și anume triunghiul oarecare, suprafața acestuia  
 este dată de cunoscuta relație:

$$2S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

unde "p" reprezintă perimetrul, iar a, b, c, cele trei la-  
 turi ale triunghiului.

Sau:  $2S = a \cdot b \cdot \sin \gamma = b \cdot c \cdot \sin \alpha = a \cdot c \cdot \sin \beta$ .

$\alpha, \beta, \gamma$  sînt unghiurile opuse laturilor a, b, c.

Și încă o relație ce poate fi întrebuițată:

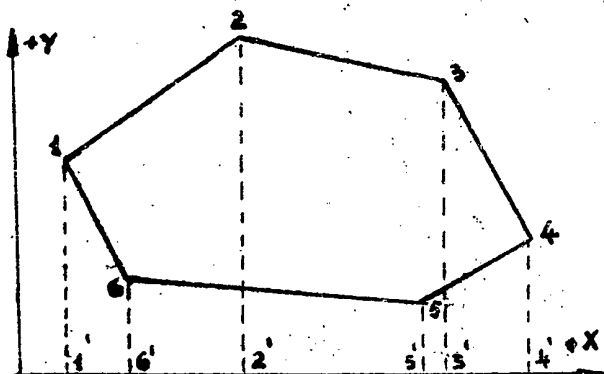
$$2S = a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$$

$h_a, h_b, h_c$ , sînt înălțimile triunghiului raportate la  
 bazele a, b, c.

Mult mai practic, mai simplu și mai  
 precis, poate fi determinată suprafața, cînd sînt cunoscute  
 coordonatele virfurilor poligonului respectiv, pentru cal-  
 cul putînd fi întrebuițate mașină de calculat.

Să presupunem că, executînd măsurăto-  
 rile, am reprezentat un teren, de forma unui poligon oarecare  
 pe un plan, raportînd coordonatele virfurilor poligonului  
 față de un sistem oarecare de axe de coordonate ale puncte-  
 ler 1, 2, 3, 4, 5, 6, din Fig. de mai jos și se cere să fie de-

terminată suprafața po-  
 ligonului (hașurată în  
 Fig.)



Urmînd un sens oarecare,  
 de exemplu pe cel al  
 mersului acelor ceasor-  
 micului, din figură ob-  
 servăm că suprafața po-  
 ligonului, luînd în con-  
 siderare trapezele for-  
 mate de coordonate și  
 abscisele punctelor, este

Fig. 260.

$$S = \frac{y_1 + y_2}{2} (x_2 - x_1) + \frac{y_2 + y_3}{2} (x_3 - x_2) + \frac{y_3 + y_4}{2} (x_4 - x_3) -$$

$$- \frac{y_4 + y_5}{2} (x_4 - x_5) - \frac{y_5 + y_6}{2} (x_5 - x_6) - \frac{(y_6 + y_1)}{2} (x_6 - x_1)$$

Efectuînd calculele și desfăcînd pa-  
 rantezele, se obține:

$$2S = y_1 x_2 - y_1 x_1 + y_2 x_2 - y_2 x_1 + y_2 x_3 - y_2 x_2 + y_3 x_3 - y_3 x_2 + y_3 x_4 -$$

$$- y_3 x_3 + y_4 x_4 - y_4 x_3 - y_4 x_4 + y_4 x_5 - y_5 x_4 + y_5 x_5 - y_5 x_5 + y_5 x_6 -$$

$$- y_6 x_5 + y_6 x_6 - y_6 x_6 + y_6 x_1 - y_1 x_6 + x_1 y_1$$

- 367 -

de unde :

$$2 S = y_1 x_2 - y_2 x_1 + y_2 x_3 - y_3 x_2 + y_3 x_4 - y_4 x_3 + y_4 x_5 - y_5 x_4 + y_5 x_6 - y_6 x_5 + y_6 x_1 - y_1 x_6.$$

Grupind termenii după Y;

$$2 S = y_1 (x_2 - x_6) + y_2 (x_3 - x_1) + y_3 (x_4 - x_2) + y_4 (x_5 - x_3) + y_5 (x_6 - x_4) + y_6 (x_1 - x_5).$$

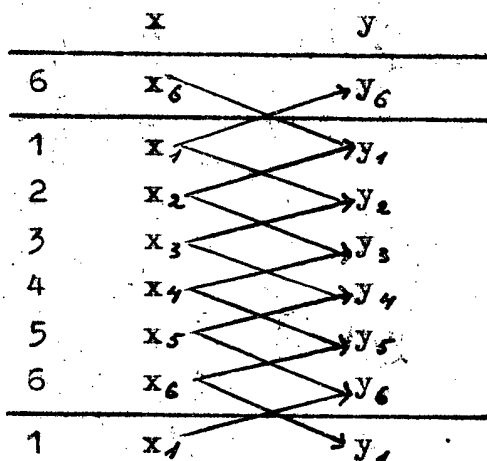
Această expresiune în mod general, poate fi scrisă sub forma;

$$2 S = \sum x_i (y_{i+1} - y_{i-1}).$$

Iar dacă se ordonează ecuația de mai sus după X;

$$2 S = \sum y_i (x_{i+1} - x_{i-1}).$$

Pentru calculul la mașină se face următoarea schemă:



adică se mai trece încă odată coordonatele lui 1 și 6.

### - 3. Metode mecanice.

Metodele descrise în paragrafele precedente, deși sînt precise, reclauă prea mult timp, de aceea mai ales cînd vom să facem evaluarea unei suprafețe, utilizăm metodele mecanice, adică sînt întrebunțate instrumente speciale, denumite planimetre, cu ajutorul cărora, în mod destul de exact și rapid putem stabili suprafața unui teren, oricare ar fi conturul lui.

Planimetrele sînt de mai multe sisteme și tipuri, vom descrie doar pe cele mai uzitate în practică.



- 368 -

- a) Planimetrul polar Amsler.

Principial acest planimetru este compus din două bare metalice, cari se pot mișca liber în jurul articulației J (Fig.261).

Prima bară de lungime fixă, este prevăzută la una din extremitățile sale, cu un ac E, care poartă denumirea de pol.

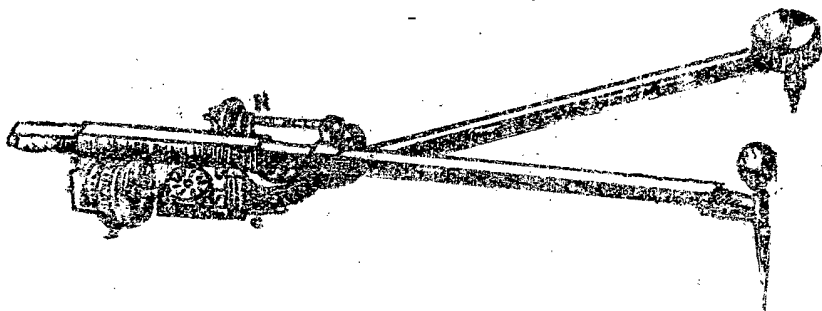


Fig. 261.

Acest ac în timpul operațiunii se înfige în hirtia planului, primind prin intermediul unei greutate ajutoare, o mai mare stabilitate.

Bara cea a 2-a, denumită bară motrice, este prevăzută

la una din extremități cu un vîrf F, cu ajutorul căruia este urmărit conturul, perimetrul, planului a căruia suprafață ne interesează.

Perpendicular pe planul acestei bare, la cealaltă extremitate a sa, se găsește o roțiță D, divizată în 100 părți egale, prevăzută fiind, această roțiță cu un vernier ce permite citiri de  $1/10$  dintr-o diviziune a roțiței D.

Roțița D se află în legătură, printr-un fus cu angrenaj, cu roțița orizontală G, divizată în 10 părți egale.

Bara motrice are o lungime variabilă, ea alunecînd într-o culisă, pe care se află gravate niște indexe, cari indică numărul generator, adică numărul cu care se va multiplica citirea de pe roțița D spre a obține suprafața respectivă.

Bara culisînd se fixează, cu ajutorul surubului micrometric M, în dreptul indexului corespunzător scării la care este întocmit planul de pe care măsurăm.

Modul de procedare, pentru determinarea unei suprafețe oarecare, cu acest planimetru, este următorul.

După ce se fixează pe o planșetă planul,

- 369 -

pe care avem raportată suprafața ce ne interesează, se aduce în coincidență indicele gravat pe culisă cu cel gravat pe bara metrică, indice care trebuie să fie corespunzător scării planului.

Fixăm planimetrul în așa fel, ca polul E să fie în afara perimetrului, iar vârful F să poată urmări conturul acestuia.

Dacă pe cele două rotițe D și G nu se citesc diviziunile zero, se pot roti aceste rotițe până când avem citirea zero, sau, în mod frecvent notăm citirea inițială, de exemplu 2473, unde prima cifră este citită pe rotița G, următoarele două (47) pe tamburul D, iar ultima cifră se citește cu ajutorul vernierului.

Marcăm punctul de plecare pe conturul suprafeței, urmărind apoi acest contur, cu vârful F până când am ajuns din nou în punctul de plecare și vom face o nouă citire, de exemplu 8739, la fel ca mai sus.

Suprafața închisă de conturul urmărit, este exprimată prin relația:  $S = c \times n$ , unde c reprezintă numărul constant generator, imprimat pe bara metrică, el fiind corespunzător scării planului, iar "n" este diferența dintre cele două citiri, în cazul nostru  $n = 8739 - 2473 = 6266$ .

Dacă scara la care este executat planul, ar fi 1 : 1000, în acest caz  $c = 10$  m.p. și suprafața  $S = 10 \times 6266 = 62660$  m.p.

Când polul nu poate fi fixat în afara perimetrului și sîntem nevoiți a-l fixa în interiorul perimetrului, la aflarea suprafeței avem următoarea deosebire față de primul caz și anume diferenței "n" determinate ca mai sus, îi adăugăm o constantă K, pe care o avem înscrisă deasupra barei metrică și în dreptul indexului.

Ca exemplu:

$$K = 23433, \text{ atunci}$$

$$S = 10 \times (23433 + 6266) = 10 \times 29699 = 296.990 \text{ m.p.}$$

Dăm mai jos un tablou cuprinzînd constantele aparatului polar Amaler pentru diferite scări ale planului precum și poziția barei metrică:

Scara planului	Poziția barei metriche	Valoarea lui C (cînd polul e exterior)	Valoarea lui C (cînd polul e interior)	Constanta K pentru polul interior	Obs.
1: 500	264,8	2 m.p.	8 m.p.	24658	
1: 1000	331,0	10 m.p.	10 m.p.	23433	
1: 1500	294,2	20 m.p.	8,8/9	23946	
1: 2000	165,5	20 m.p.	5	-	
1: 2500	211,9	40 m.p.	6,4	-	
1: 2880	159,5	40 m.p.	3125/6481	-	
1: 3000	147,1	40 m.p.	4,4/9	2480	
1: 5000	132,4	100 m.p.	4	-	

Principiul planimetrului Amsler.

Am arătat modul de funcționare și de servirea planimetrului polar Amsler.

Pentru a pune mai bine în evidență cele expuse, vom arăta principiul, teoria matematică a planimetrului, așa cum a fost dată de către Maurice Levy în "La statique Grafique". Dacă vârful E, polul planimetrului, este așezat în afara conturului (Fig. 262), a căruia suprafață vom să o stabilim, suprafața închisă de acest contur este echivalentă cu suprafața unui dreptunghi, care are drept bază lungimea barei

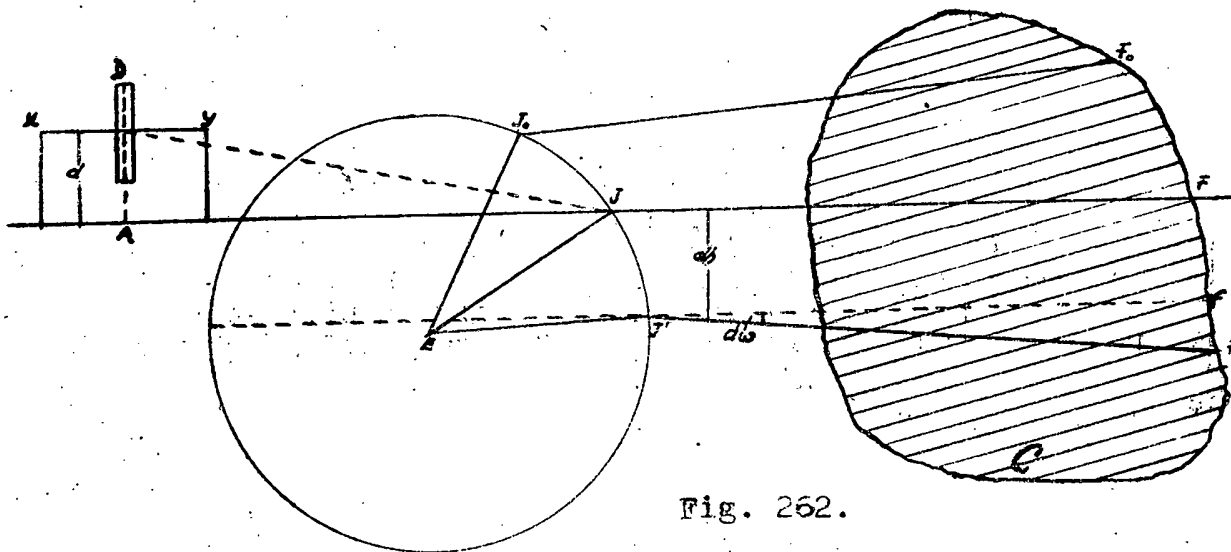


Fig. 262.

- 371 -

JF, iar ca înălțime lungimea arcului descris de ruleta D, al căreia ax de rotație este sau în axul barei JF sau paralel, cu acest ax.

Pentru a putea urmări conturul C în toată lungimea lui, cu stiletul F, trebuie ca polul E să fie așezat în apropierea acestui contur, ceea ce revine ca suma lungimilor celor două brațe ale aparatului EJ + JF să fie mai mare decât cea mai mare distanță de la punctul E la centrul C, dar în același timp și diferența JF - JE să fie mai mare decât cea mai scurtă distanță de la E la conturul C.

Spre a demonstra cele afirmate mai sus, adică, suprafața închisă de conturul C este echivalentă cu suprafața dreptunghiului cu baza egală cu lungimea barei JF și înălțimea egală cu lungimea arcului descris de ruleta, să stabilim relația care ne dă suprafața elementară JFF'J' descrisă prin deplasarea barei din poziția JF.

Observăm că poziția barei poate fi adusă din JF în JF' printr-o mișcare de translație, în virtutea căreia este descrisă suprafața elementară JFF' și printr-o mișcare de rotație în jurul punctului F, formând triunghiul F'F'F', a căreia suprafață adunată la suprafața paralelogramului JFF'J' ne dă suprafața elementară JFF'J'.

Suprafața paralelogramului, a căreia bază JF este constantă, de lungime  $l$  și înălțimea carecare  $dh$ , este dată de relația:

$$d S_1 = l \times dh.$$

Iar suprafața triunghiului F'F'F' este

$$d S_2 = \frac{1}{2} l^2 \cdot d\omega$$

Deci suprafața elementară, descrisă prin deplasarea barei JF este:

$$d S = d S_1 + d S_2 = l \cdot dh + \frac{1}{2} l^2 \cdot d\omega.$$

Suprafața totală a curbei va fi suma suprafețelor elementare  $d s$ , adică:

$$S = l \int dh + \frac{1}{2} l^2 \int d\omega.$$

Intrădeavăr, această relație ne dă suprafața închisă de conturul C, deoarece prin mișcarea stiletului pe conturul închis, bara JF nu întâlnește decât o singură dată punctele de pe contur situate în partea externă a acestuia, pe cînd punctele situate pe contur în partea acestuia, cuprinsă între polul E și punctele externe, sînt întîlnite de două ori, odată într-un sens și altă dată în sens contrar, ceea ce face ca suprafața cuprinsă între contur și polul E să fie măsurată de două ori în sensuri diferite. Așa că, luînd suma algebrică a suprafețelor elementare, se obține doar suprafața închisă de către conturul C.

- 372 -

In relația care ne dă suprafața,  
avem:

$$\int d\omega = \omega.$$

Unde  $\omega$  reprezintă unghiul cuprins între poziția inițială și cea finală a barei JF.

Ori acest unghi este nul, deoarece dreapta JF se întoarce exact în poziția inițială, așa că relația noastră primește o formă mai simplă:

$$S = l \int d h$$

Să examinăm acum care este deplasarea rotației D al căruia ax x y este paralel cu vergeaua JF, Fig. 172.

Triunghiul ABJ este invariabil, ca atare pentru translația din JF în J'F' a vergelei, ruleta va lua o poziție paralelă cu această dreaptă J'F', descriind în timpul rotațiunii sale un arc corespunzător unghiului

Această deplasare poate fi înlocuită cu alte două deplasări și anume una perpendiculară pe axa ruletei D și alta paralelă cu axa ei.

Construcția aparatului face ca în această a două deplasare ruleta să alunece fără rotire, învârtindu-se numai în mișcarea perpendiculară pe axul ei, ceea ce ne conduce la:  $d\omega = d h$  sau  $u = \int d h$

$$\text{Deci: } S = l \cdot u$$

Unde  $l$  reprezintă, cum am arătat, lungimea barei JF, iar  $u$  este lungimea arcului, descris de ruleta aparatului, ceea ce demonstrează esența delatului de început.

Pentru cazul când polul E ar fi așezat în interiorul conturului, lucrurile se schimbă și suprafața este mărită cu o constantă K, adică:

$$S = l u + K.$$

#### - b. Planimetrul polar Coradi.

In linii generale planimetrul Coradi este analog cu planimetrul polar Amsler, descris mai sus, (Fig. 263).

In construcția lui deosebită, între altele, următoarele caracteristici: este un model, un tip de

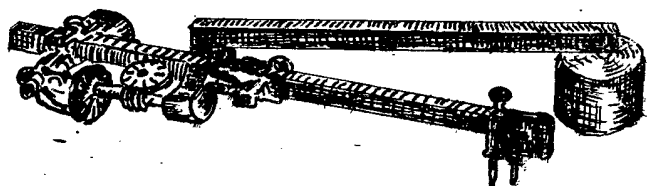


Fig. 263.

planimetru polar de precizie, cu disc rotativ, la care ruleta se mișcă nu pe un plan oarecare, ci pe suprafața bine determinată a discului.

Si încă o caracteristică, este un planimetru ce se rotește cu ușurință, al cărui disc rotativ este prevăzut cu o rotiță care se poate deplasa longitudinal.

## - B. Detașări de suprafețe sau parcelări.

Parcelarea este partea topografiei care se ocupă cu împărțirea terenurilor, ținând cont de anumite cerințe, pe cari caută să le satisfacă în condițiuni optime.

Parcelarea unei suprafețe înseamnă a diviza acea suprafață în mai multe suprafețe mai mici, a căror sumă totală să dea suprafața respectivă.

Aceste suprafețe mici poartă denumirea de parcele, iar când sînt atribuite, una sau mai multe parcele, unei aceleși persoane, formează ceea ce se numește un lot.

Planul unui teren oarecare, pe care sînt arătate toate parcelele se numește plan parcelar.

La executarea unei parcelări este necesar a fi avute în vedere o întreagă serie de principii practice, ceea ce cere ca să fie studiat cu multă minuțiozitate terenul la rața locului.

În cele ce urmează vor fi arătate toate cazurile de parcelări mai des întălnite în practică.

## - 2. Problema ajutătoare în parcelări.

### a). Determinarea punctelor pe segment.

Fiind cunoscute coordonatele punctelor A și B, se cere să se determine coordonatele punctelor

$M_1, M_2, \dots, M_n$  situate pe aliniamentul AB la distanță  $s_1, s_2, \dots, s_n$ , de unul din punctele cunoscute Fig. 264. Latura AB poate fi o linie de poligonatie.

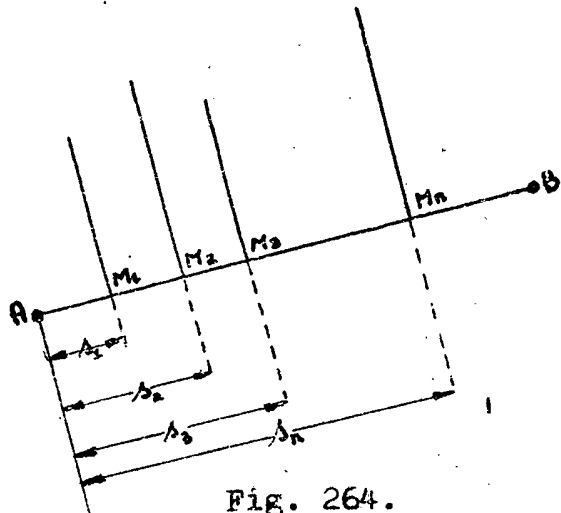


Fig. 264.

Distanțele  $s_1, s_2, \dots, s_n$  se măsoară.

Având coordonatele  $X_A, Y_A$  și  $X_B, Y_B$ , se află orientarea dreptei AB, adică  $\alpha_{AB}$  cu ajutorul relației:

$$\operatorname{tg} \alpha_{AB} = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} = \frac{\Delta Y_{AB}}{\Delta X_{AB}}$$

Și pentru control, relația  $\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha_{AB}) = \frac{\Delta X_{AB} + \Delta Y_{AB}}{\Delta X_{AB} - \Delta Y_{AB}}$

Coordonatele punctelor  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , se determină din relațiile:

$$(1) \quad \begin{aligned} X_1 &= X_A + s_{01} \cdot \cos \alpha_{AB} & Y_1 &= Y_A + s_{01} \cdot \sin \alpha_{AB} \\ X_2 &= X_A + s_{02} \cdot \cos \alpha_{AB} & Y_2 &= Y_A + s_{02} \cdot \sin \alpha_{AB} \\ &\vdots & &\vdots \\ X_n &= X_A + s_{0n} \cdot \cos \alpha_{AB} & Y_n &= Y_A + s_{0n} \cdot \sin \alpha_{AB} \end{aligned}$$

Se face o transformare a acestor formule, în sensul că se înlocuiește  $\cos \alpha_{AB}$  și  $\sin \alpha_{AB}$  cu:

$$\cos \alpha_{AB} = \frac{X_B - X_A}{\Delta_{AB}}, \quad \sin \alpha_{AB} = \frac{Y_B - Y_A}{\Delta_{AB}}$$

și relațiile cu ajutorul cărora calculăm coordonatele punctelor pe segment  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , vor fi:

$$(2) \quad \begin{aligned} X_1 &= X_A + s_1 \cdot \frac{X_B - X_A}{\Delta_{AB}} & Y_1 &= Y_A + s_1 \cdot \frac{Y_B - Y_A}{\Delta_{AB}} \\ X_2 &= X_A + s_2 \cdot \frac{X_B - X_A}{\Delta_{AB}} & Y_2 &= Y_A + s_2 \cdot \frac{Y_B - Y_A}{\Delta_{AB}} \\ &\vdots & &\vdots \\ X_n &= X_A + s_n \cdot \frac{X_B - X_A}{\Delta_{AB}} & Y_n &= Y_A + s_n \cdot \frac{Y_B - Y_A}{\Delta_{AB}} \end{aligned}$$

Dacă avem mai multe puncte pe segment, calculăm în primul rând rapoartele  $\frac{X_B - X_A}{\Delta_{AB}}$  și  $\frac{Y_B - Y_A}{\Delta_{AB}}$  pe care apoi, înmulțite cu distanțele respective  $s_1, s_2, \dots, s_n$ , le adăugăm coordonatelor punctului A și obținem coordonatele punctelor pe segment.

Dacă avem un singur punct pe segment,

- 375 -

practic, la mașina de calculat, întrebuințăm relația sub forma

$$x_1 = x_A + \frac{S_1}{S_{AB}} (x_B - x_A), \quad y_1 = y_A + \frac{S_1}{S_{AB}} (y_B - y_A).$$

Si ca atare în primul rînd calculăm raportul:

$$\gamma = \frac{S_1}{S_{AB}}$$

Relațiile, puse sub forma din sistemul (2) sînt cele utilizate cînd se efectuează calculul cu ajutorul mașinei de calculat, iar cele din sistemul (1) cînd lucrăm cu logaritmi sau valori naturale.

- b. Determinarea punctelor îndepărtate de segment cînd este cunoscută distanța dela acele puncte la segment.

Avînd coordonatele punctelor A și B se cere să se determine coordonatele punctului P, cînd cunoaștem distanțele  $S_1$  și  $h_1$  (Fig. 265).

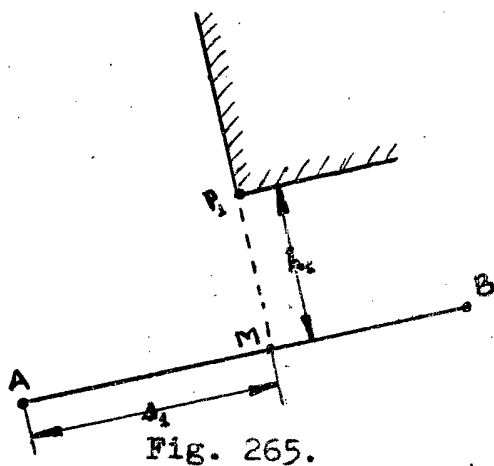


Fig. 265.

Conform celor stabilite în problema precedentă, coordonatele lui M sînt:

$$x_M = x_A + S_1 \cdot \cos \angle_{AB}$$

$$y_M = y_A + S_1 \cdot \sin \angle_{AB}$$

Iar coordonatele lui P:

$$x_P = x_M + h_1 \cdot \cos \angle_{M1}$$

$$y_P = y_M + h_1 \cdot \sin \angle_{M1}$$

Dar:  $\angle_{M1} = \angle_{AB} + 90^\circ$ , deci:

$$x_P = x_M + h_1 \cdot \cos (\angle_{AB} + 90^\circ)$$

$$y_P = y_M + h_1 \cdot \sin (\angle_{AB} + 90^\circ)$$

Sau sub o formă generală:

$$x_P = x_A + S_1 \cdot \cos \angle_{AB} \pm h_1 \cdot \sin \angle_{AB}$$

$$y_P = y_A + S_1 \cdot \sin \angle_{AB} \pm h_1 \cdot \cos \angle_{AB}$$

- c) Cazul cînd punctul P este depărtat de segment.

Cînd punctul P, din exemplul precedent este depărtat de aliniamentul AB este greu să stabilim pe  $h_1$ , în acest caz măsurăm lungimile a și b, iar distanța



↷ calculăm din coordonatele lui A și B, cu ajutorul relațiilor cunoscute:

$$\swarrow \frac{x_B - x_A}{\cos \angle AB} = \frac{y_B - y_A}{\sin \angle AB}$$

Pentru a rezolva problema, va trebui să determinăm pe h și am ajuns în situația precedentă.

Dacă:

$$h = \sqrt{a^2 - n^2} = \sqrt{b^2 - m^2}$$

Deci va trebui să calculăm segmentele m și n.

Din relația care ne dă pe h, avem:

$$a^2 - n^2 = b^2 - m^2$$

Sau:

$$(m - n)(m + n) = (b + a)(b - a)$$

$$(1) \quad m - n = \frac{(b + a)(b - a)}{m + n} = \frac{(b + a)(b - a)}{\swarrow}$$

$$m + n = \swarrow$$

Din aceste două relații deducem pe m și n și apoi aflăm valoarea lui h.

De aci încolo mersul problemei este ca în cazul precedent.

- d). Determinarea punctului de intersecție a două drepte.

Date coordonatele punctelor A, B, C, D, se cere a se determina coordonatele punctului J.

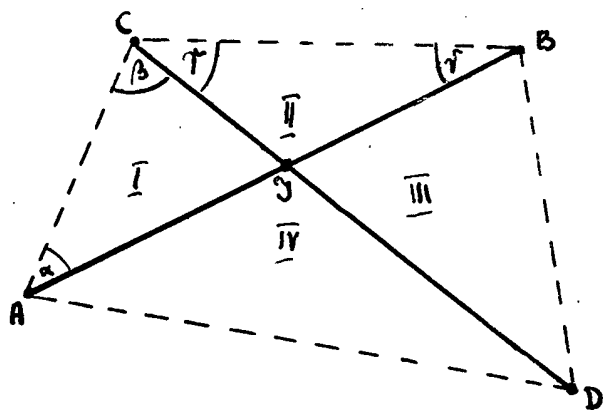


Fig. 267.

Sunt mai multe metode de calcul.

Metoda Nr. 1.

Având coordonatele punctelor A, B, C, D, se calculează orientarea  $\angle_{AB}$  și  $\angle_{AC}$ , prin diferența între aceste două orientări, deducem valoarea unghiului  $\alpha$ , apoi calculăm orientările  $\angle_{CA}$  și  $\angle_{CB}$  și din diferență se află unghiul  $\beta$ .

Calculăm și latura AC și am ajuns în situația intersecției înainte, deci putem determina din triunghiul 1 coordonatele lui J.

In mod analog din celelalte triunghiuri (II, III, IV).

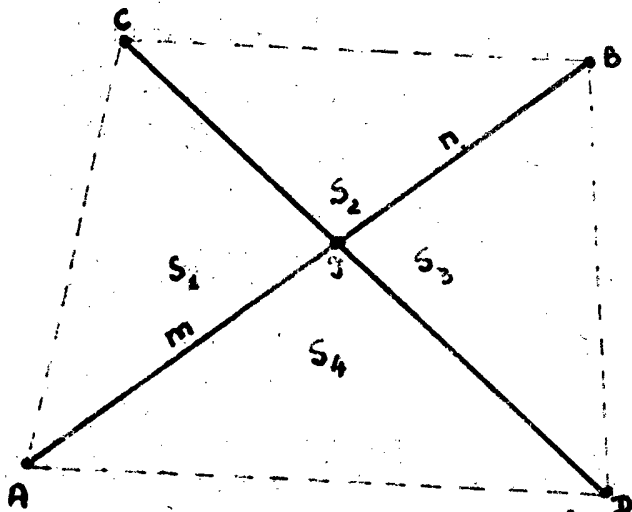


Fig. 268.

Metoda Nr.2.

Utilizată mai ales la calculul cu mașina.

Notînd:

AJ = m și BJ = n.

Conform celor stabilite

avem:

$$x_J = x_A + m \cos \angle AB = x_A + \frac{m(x_B - x_A)}{m+n}$$

$$y_J = y_A + m \sin \angle AB = y_A + \frac{m(y_B - y_A)}{m+n}$$

In aceste relații nu cunoaștem pe m și n.

Dar, notînd cu S<sub>1</sub>, suprafața triunghiului ACJ, cu S<sub>2</sub> suprafața triunghiului CJB, cu S<sub>3</sub> cea a triunghiului BJD și cu S<sub>4</sub> suprafața triunghiului DJA, observăm

că triunghiurile de suprafață S<sub>1</sub> și S<sub>2</sub> au aceeași înălțime iar bazele sînt m și n, deci:

$$\frac{m}{n} = \frac{S_1}{S_2}$$

In mod analog pentru suprafețele S<sub>3</sub> și S<sub>4</sub>

avem:

$$\frac{m}{n} = \frac{S_4}{S_3} \text{ deci: } \frac{m}{n} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{S_4}{S_3} = \frac{S_1 + S_4}{S_2 + S_3}$$

notînd:

$$S_1 + S_4 = S_A \text{ și } S_2 + S_3 = S_B$$

$$\frac{m}{n} = \frac{S_A}{S_B}$$

$$\text{sau } \frac{m}{m+n} = \frac{S_A}{S_A + S_B}$$

Dar: S<sub>A</sub> + S<sub>B</sub> = S (suprafața totală), deci:

$$\frac{m}{m+n} = \frac{S_A}{S}$$

Așa că raportul  $\frac{m}{m+n}$  de care avem nevoie

în relațiile cu cari se calculează coordonatele lui J, poate fi calculat, deoarece S<sub>A</sub> cît și S pot fi calculate cu ajutorul coordonatelor cunoscute ale punctelor A, B, C, D.

Așa că:

$$x_J = x_A + \frac{S_A}{S} (x_B - x_A)$$

$$y_J = y_A + \frac{S_A}{S} (y_B - y_A).$$

- e) Calculul capetelor de drum.

Cunoscând coordonatele punctului A, ca și orientările  $\beta_1$  și  $\beta_2$  se pune problema de a determina coordonatele punctului P situat la încrucișarea a două drepte de orientare  $\beta_1$  respective  $\beta_2$ , deci paralele cu primele și distanțate de acestea cu lățimile m și n conforma figu-  
rei:

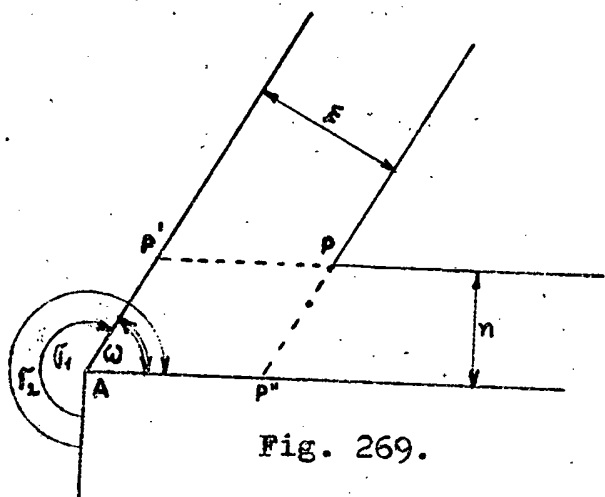


Fig. 269.

Observăm că:

$$x_p = x_A + AP' \cdot \cos \beta_1 + PP' \cdot \cos \beta_2$$

$$y_p = y_A + AP' \cdot \sin \beta_1 + PP' \cdot \sin \beta_2$$

Dar:

$$\omega = \beta_2 - \beta_1$$

Si:  $AP' = \frac{n}{\sin \omega}$ ,  $PP' = \frac{m}{\sin \omega}$

Deci:

$$x_p = x_A + \frac{n}{\sin \omega} \cos \beta_1 + \frac{m}{\sin \omega} \cos \beta_2$$

$$y_p = y_A + \frac{n}{\sin \omega} \sin \beta_1 + \frac{m}{\sin \omega} \sin \beta_2$$

In cazul cînd lățimile  $m = n = m_0$ , avem:

$$x_p = x_A + \frac{m_0}{\sin \omega} (\cos \beta_1 + \cos \beta_2) = x_A + \frac{m_0}{\sin \omega} \cdot 2 \cos \frac{\beta_2 - \beta_1}{2} \cdot \cos \frac{\beta_2 + \beta_1}{2}$$

$$= x_A + \frac{m_0}{2 \sin \frac{\omega}{2} \cdot \cos \frac{\omega}{2}} \cdot \cos \frac{\beta_2 + \beta_1}{2} \cdot \cos \frac{\omega}{2} = x_A + \frac{m_0}{\sin \frac{\omega}{2}} \cdot \cos \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$$

$$y_p = y_A + \frac{m_0}{\sin \omega} (\sin \beta_1 + \sin \beta_2) = y_A + \frac{m_0}{\sin \omega} \cdot 2 \sin \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \cdot \cos \frac{\beta_2 - \beta_1}{2}$$

$$= y_A + \frac{m_0}{2 \sin \frac{\omega}{2} \cdot \cos \frac{\omega}{2}} \cdot 2 \sin \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \cdot \cos \frac{\omega}{2} = y_A + \frac{m_0}{\sin \frac{\omega}{2}} \cdot \sin \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$$

Dar:  $\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$  reprezintă tocmai orienta-  
tarea bisectoarei, deci punctul P se găsește pe bisectoare.

- 3. Parcelarea printr-un punct dat.

Fiind date coordonatele punctelor unui poligon, putem calcula suprafața închisă de acest poligon, așa cum s-a stabilit deja, se cere ca din această suprafață  $S$  să fie detașată o suprafață  $S_1$  în așa fel, ca linia de detașare să treacă printr-un punct dat.

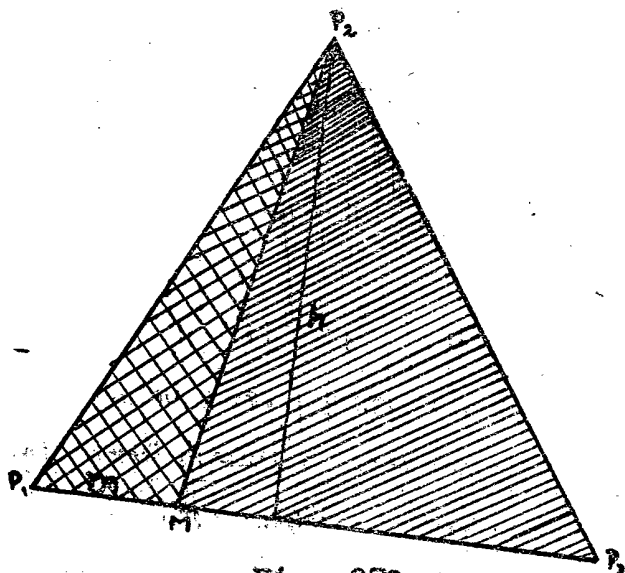


Fig. 270.

- a) Cazul când poligonul nostru este un triunghi din a cărui suprafață  $S$ , calculată cu ajutorul coordonatelor punctelor  $P_1, P_2, P_3$ , să fie detașată o suprafață dată  $S_1$  (dublu hașurată în figură), iar linia de detașare să treacă prin punctul  $P_1$ .

Problema în fond se reduce la determinarea punctului  $M$ , adică a coordonatelor acestuia  $X_M$  și  $Y_M$ , sau a distanței  $P_1M = m$ , deoarece:

$$2S = a_3 \cdot h, \quad a_3 \text{ fiind latura } P_2P_3.$$

$$\text{Dar: } h = \frac{2S}{a_3} \text{ unde atât } S \text{ cât și } a_3 \text{ pot fi calculate}$$

cu ajutorul lui  $P_1, P_2$  și  $P_3$ .

Deci:  $m = \frac{2S_1}{h}$ ,  $S_1$  este dat, iar  $h$  calculat din relația de mai sus, iar:

$$x_M = x_1 + m \cdot \cos \alpha_3; \quad y_M = y_1 + m \cdot \sin \alpha_3.$$

- b) În cazul general al unui poligon oarecare (Fig. 271), ale cărui puncte  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ , au coordonate cunoscute, deci putem calcula suprafața  $S$ , iar punctul  $A$  prin care trece linia de parcelare cunoscut și el.

Problema nu este deci aceeași ca cea din cazul triunghiului, deoarece putem calcula suprafața conturată de  $P_1, P_2, A, P_3$ , adică pe  $S''$ , dublu hașurată, ea și

suprafața triunghiului  $A P_5 P_6$  adică  $S_1''$  și suprafața  $S_1$  ce  
 trebuie detașată este:

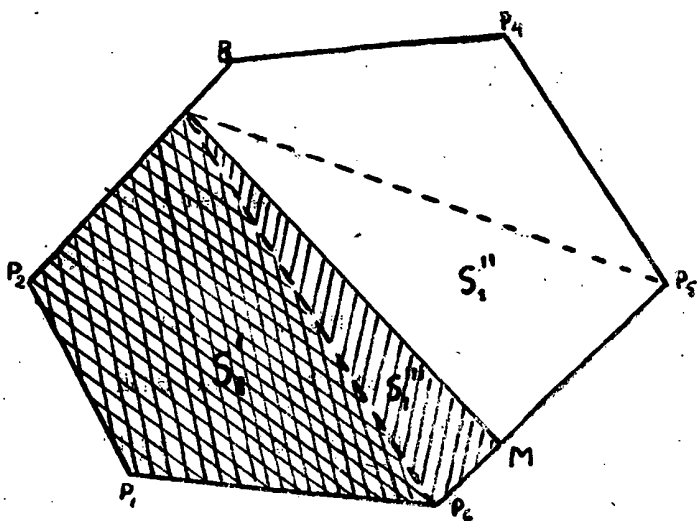


Fig. 271.

$S_1 > S_1'$  și  $S_1 < S_1' + S_1''$   
 va trebui ca din  $S_1'$   
 să detașăm doar suprafața  $S_1'''$  pentruca:  
 $S_1' + S_1''' = S_1$ .

Deci va trebui doar să  
 determinăm poziția  
 punctului M pe dreapta  
 $P_5 P_6$  în mod analog ca  
 în cazul triunghiului  
 care în cazul de față  
 este  $A P_5 P_6$ .

Exemplu numeric:

Date:  $P_1 \begin{cases} x_1 = 1368,24 \text{ m} \\ y_1 = 962,68 \text{ m} \end{cases}$   $P_2 \begin{cases} x_2 = 846,52 \text{ m} \\ y_2 = 1248,54 \text{ m} \end{cases}$   $P_3 \begin{cases} x_3 = 1439,65 \text{ m} \\ y_3 = 1536,43 \text{ m} \end{cases}$   
 $P_4 \begin{cases} x_4 = 2368,30 \text{ m} \\ y_4 = 1592,00 \text{ m} \end{cases}$   $P_5 \begin{cases} x_5 = 2400,00 \text{ m} \\ y_5 = 1000,00 \text{ m} \end{cases}$   $P_6 \begin{cases} x_6 = 924,36 \text{ m} \\ y_6 = 1563,42 \text{ m} \end{cases}$

Se cere să se detașeze o suprafață  
 de 25 ha. linia de parcelare trebuind să treacă prin punctul  
 A situat pe aliniamentul  $P_1 P_2$  la distanță de 100 m. de  
 punctul  $P_1$ .

Se calculează orientarea  $\alpha_{12}$  și se  
 găsește  $\alpha_{12} = 28^\circ 45' 47''$  iar  $\beta_{12} = 151^\circ 14' 13''$ .

Coordonatele punctului A, determinat  
 cu ajutorul relațiilor de mai jos, sînt:

$$x_A = x_1 + 100 \cdot \cos \alpha_{12} = 1280,58 \text{ m.}$$

$$y_A = y_1 + 100 \cdot \sin \alpha_{12} = 1010,80 \text{ m.}$$

Calculînd întreaga suprafață, la ma-  
 șina de calculat sau cu relațiile deja arătate, se găsește

$$S = 75 \text{ ha. } 3700,46 \text{ m.p.}$$

Dacă se calculează suprafața  $P_1 A P_4$   
 $P_5 P_6$  vedem că este mai mare ca suprafața ce trebuie să fie  
 detașată, de aceea vom calcula în primul rînd suprafața  
 $P_1 A P_5 P_6 = S_1$  și găsim că  $S_1 = 4 \text{ ha. } 9870,46 \text{ m.p.}$

După aceea va trebui să se calculeze suprafața triunghiului  $P_4P_5A = S_2$  din care va trebui apoi să fie detașată o suprafață,  $S_3 = 250.000,00 - 49.870 = 20 \text{ ha. } 129,54 \text{ m.p.}$

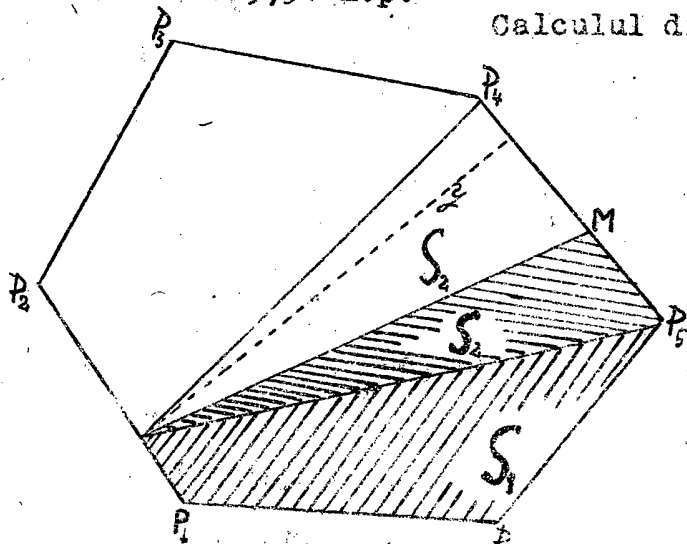


Fig. 272.

Calculul din coordonate suprafața  $S_2$  a triunghiului  $P_4P_5A$  se află:

$$S_2 = 331.177,14 \text{ m.p.}$$

Urmează calculul orientării:  $\alpha_{54}$

$$\text{tg } \alpha_{54} = \frac{y_4 - y_5}{x_4 - x_5}$$

$$\alpha_{54}' = 86^\circ 56' 06''$$

$$\alpha_{54} = 93^\circ 03' 54''$$

Latura  $P_3P_4 = s$  este:

$$s = \frac{y_4 - y_5}{\sin \alpha_{45}} = \frac{x_4 - x_5}{\cos \alpha_{54}} = 592,85 \text{ m.}$$

$$h = \frac{2 S_2}{s} = \frac{2 \times 331177,14}{592,85} = 1117,23$$

$$m = \frac{2 S_3}{h} = \frac{2 \times 200.129,54}{1117,23} = 358,26.$$

Având lungimea  $P_5M = m$ , poziția punctului M este determinată, iar coordonatele sale vor fi :

$$x_M = x_5 + m \cdot \cos \alpha_{54} = 2400,00 - 19,16 = 2380,84$$

$$y_M = y_5 + m \cdot \sin \alpha_{54} = 1000,00 - 357,75 = 1357,75.$$

- 4. Parcelarea paralelă.

a) Cazul suprafeței în formă de triunghi.

Fiind cunoscute coordonatele punctelor virfurilor triunghiului  $P_1P_2P_3$  ca și unghiurile  $\alpha, \beta, \gamma$ , Fig.273, pe cari le măsurăm, deci este cunoscută și suprafața totală a triunghiului, pe care o putem calcula, se pune problema de a detașa o suprafață  $S_1$  în așa fel, ca linia de detașare, de parcelare, MN să fie paralelă cu una din laturile triunghiului, de exemplu cu latura  $P_1P_2$ .

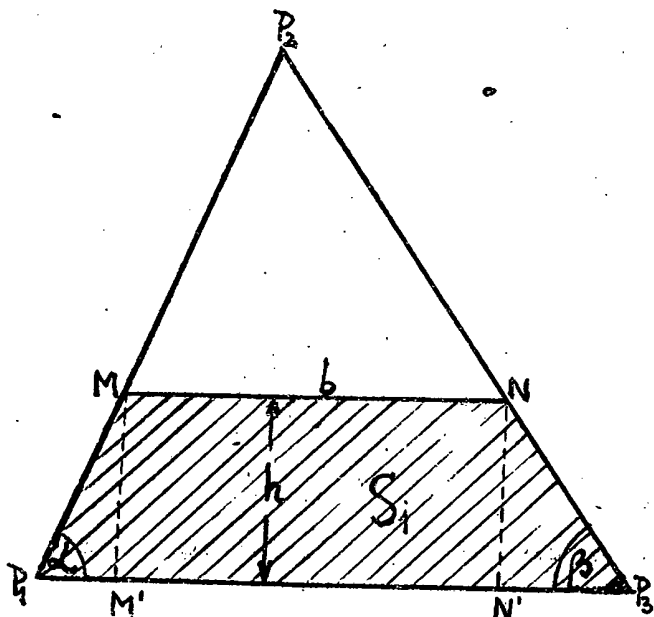


Fig. 273.

Problema este rezolvată atunci când poziția celor două puncte M și N este stabilită, sau când cunoaștem distanțele:

$$P_1M = l_1, \alpha \quad P_3N = l_3, \beta$$

Notînd:

$$P_1P_3 = B, \quad MN = b,$$

suprafața  $S_1$  (hașurată) pe care o cunoaștem, fiind dată, este :

$$(1) \quad 2 S_1 = (B + b) h,$$

În această relație latura  $P_1P_3 = B$ , poate fi calculată cu ajutorul coordonatelor, adică:

$$\operatorname{tg} \varphi_{13} = \frac{Y_3 - Y_1}{X_3 - X_1} \quad \text{ne dă orientarea } \varphi_{13}$$

Si :

$$B = \frac{Y_3 - Y_1}{\sin \varphi_{13}} = \frac{X_3 - X_1}{\cos \varphi_{13}} \quad \text{ne dă latura } B.$$

"b" și h.

Deci în relația (1) nu cunoaștem pe

Dar notînd:  $P_1M' = m, P_3N' = n$ , avem:

$$h_1 = \frac{m}{\operatorname{cotg} \alpha} = \frac{n}{\operatorname{cotg} \beta} = \frac{m + n}{\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta}$$

devine:

Însă:  $m + n = B - b$ , așa că relația

$$(2) \quad h = \frac{B - b}{\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta}$$

Iar relația (1) devine:

$$2 S_1 = \frac{(B+b)(B-b)}{\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta}; \quad 2 S_1 = \frac{B^2 - b^2}{\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta}$$

Sau :  $B^2 - b^2 = 2 S_1 (\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta)$ , de unde:

$$(3) \quad b = \sqrt{B^2 - 2 S_1 (\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta)}$$

calcula pe h.

Avînd pe "b" din relația (2) putem

Distanțele  $l_1, \alpha$  și  $l_3, \beta$  cari ne determină poziția punctelor M și N sînt acum ușor de calculat, din relațiile:

$$l_1, \alpha = \frac{h_1}{\sin \alpha},$$

$$l_3, \beta = \frac{h_1}{\sin \beta}$$

Cu aceasta problema este rezolvată și pot fi calculate chiar și coordonatele punctelor M și N, apoi orientarea  $\overline{MN}$  și deci lungimea MN, care pentru control va trebui să fie:  $\overline{MN} = b$ .

Dacă am mai voi să calculăm încă o detașare, a unei suprafețe  $S_2$ , putem calcula cu aceleași formule, determinând pe  $b_2$ , cu relația (3) în care în loc de  $S_1$  introduce pe  $S_2$  și după aceea determinăm pe  $h_2, l_{2\alpha}, l_{2\beta}$ .

În mod analog, se vor aplica formulele la calcularea de serii de laturi.

Dar putem calcula înlocuind pe B cu b în relația (3).

- b) Cazul general al parcelărilor paralele.

Având linia poligonală 1 - 2 - 3 - 4, se pune problema de a detașa o suprafață  $S_0 = S_1 + S_2 + S_3$  (figura 284), în așa fel ca laturile 1' - 2', 2' - 3' și 3' - 4' să fie paralele cu laturile 1 - 2, respectiv 2 - 3 și 3 - 4.

În fond, problema este cea din cazul triunghiului, doar generalizată.

Suprafața S este dată de relația:

$$2 S = ( B + b ) h.$$

Dar din cele arătate la detașarea paralelei în triunghi:

$$B - b = h(\cotg \alpha + \cotg \beta)$$

sau:

$$b = B - h(\cotg \alpha + \cotg \beta)$$

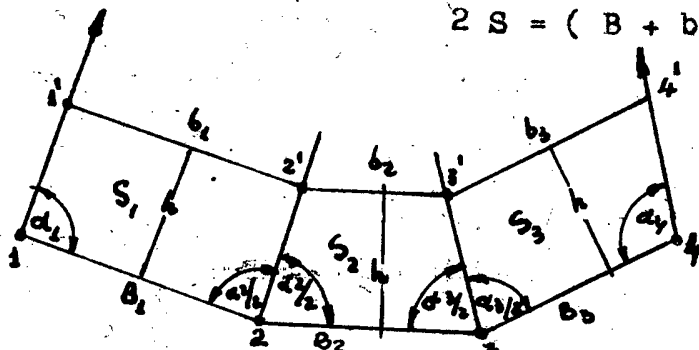


Fig. 274.

Deci:

$$2 S = [B + B - h(\cotg \alpha + \cotg \beta)] h = 2Bh - h^2(\cotg \alpha + \cotg \beta)$$

Din această formulă generală, suprafețele  $S_1, S_2, S_3$ , vor fi:

$$\begin{aligned} (1) \quad 2 S_1 &= 2 B_1 h - h^2(\cotg \alpha_1 + \cotg \frac{\alpha_2}{2}) \\ 2 S_2 &= 2 B_2 h - h^2(\cotg \frac{\alpha_2}{2} + \cotg \frac{\alpha_3}{2}) \\ 2 S_3 &= 2 B_3 h - h^2(\cotg \frac{\alpha_3}{2} + \cotg \alpha_4) \end{aligned}$$

Adunând relațiile (1):

$$2 \sum S = 2 h \sum B - h^2 \sum (\cotg \alpha + \cotg \beta)$$



- 384 -

Sau:  $2 S_0 = 2 h B_0 - h^2 \cdot K$

Adică o ecuație de gradul 2 în h.

$$h^2 - \frac{2 B_0}{K} h + \frac{2 S_0}{K} = 0.$$

Notînd:  $\frac{B_0}{K} = M$  și  $\frac{S_0}{K} = N$ , se obține o ecuație de gradul 2 simplificată:

$$h^2 - 2 M h + 2 N = 0 \quad h = M \pm \sqrt{M^2 - N}$$

Se va lua însă numai rădăcină, valoarea mai mică a lui h, adică:

$$h = M - \sqrt{M^2 - N}$$

Avînd determinat pe h, din relațiile (1) se deduc valorile lui  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ , precum și lungimile segmentelor:  $\overline{11}$ ,  $\overline{22}$ ,  $\overline{33}$ ,  $\overline{44}$ , cari ne vor rezolva apoi complet problema.

### O b s e r v a ț i u n e .

Oricare ar fi forma terenului, în care opera și oricum s-ar face parcelarea, ea se reduce, în ultima analiză, la unul din cazurile studiate.

### - 5. Parcelări economice.

Adesea ori problema parcelării sau detașării suprafețelor, ne poate fi pusă sub forma delicată, cerîndu-ne să ținem cont de calitatea solului, de bonitatea lui, trebuînd să detașăm suprafețe de valori egale, sau suprafețe de o anumită valoare.

Din punct de vedere al calității, se deosebesc 10 clase de soluri, clasa 1-a fiind de calitatea cea mai inferioară, iar clasa 10-a reprezintă solul cel mai fertil.

Gauzele cari determină calitatea solului fiind de domeniul Agrogeologiei, nu le vom mai enumera, menționăm doar faptul că înclinarea straturilor este cea care ne determină varietăți de soluri pe întinderi restrîse.

Desigur că valoarea sau prețul unității de suprafață a diferitelor clase de teren, ne este cunoscut sau în caz contrar poate fi calculat, ținînd seamă de productivitatea acestor clase de terenuri.

- 385 -

În ceea ce privește stabilirea claselor, problema este mai complicată decât ar părea, trebuind să fie executate sondaje în mai multe puncte de pe suprafața de teren respectivă.

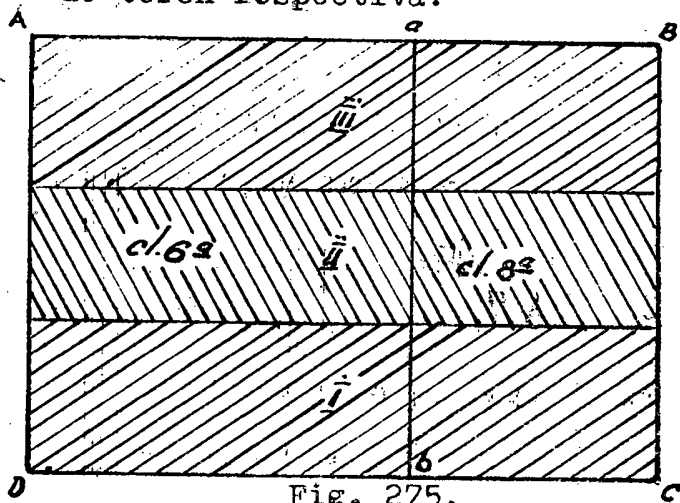


Fig. 275.

Să presupunem că avem de parcelat, de împărțit, o porțiune de teren, pe care o linie a b separă două calități diferite ale solului și anume porțiunea din stânga liniei a b este de clasa 6-a, iar cea din dreapta de clasa 8-a.

Să mai presupunem că linia a b este paralelă cu una din laturile perimetrului, de exemplu cu latura BC (Fig. 275), iar patrulaterul ABCD trebuie să fie divizat în trei părți egale ca valoare. Suprafața totală este:

$$f = f_6 + f_8$$

Unde  $f_6$  și  $f_8$  sînt suprafețele celor două clase de teren.

Notînd cu  $F_6$  suprafața ipotetică a clasei 6-a, pe care am obținut-o înmulțind suprafața reală,  $f_6$  cu coeficientul clasei:

$$F_6 = f_6 \times 6$$

Și conform aceluiași considerente:  $F_8 = f_8 \times 8$

Suprafața totală va fi:  $F = F_6 + F_8$

Dacă vom să obținem trei părți egale, nu avem decît să divizăm pe  $F$  cu 3 și avem cele trei părți I, II, III.

$$F_0 = \frac{F}{3} = \frac{f_6 \times 6}{3} + \frac{f_8 \times 8}{3}$$

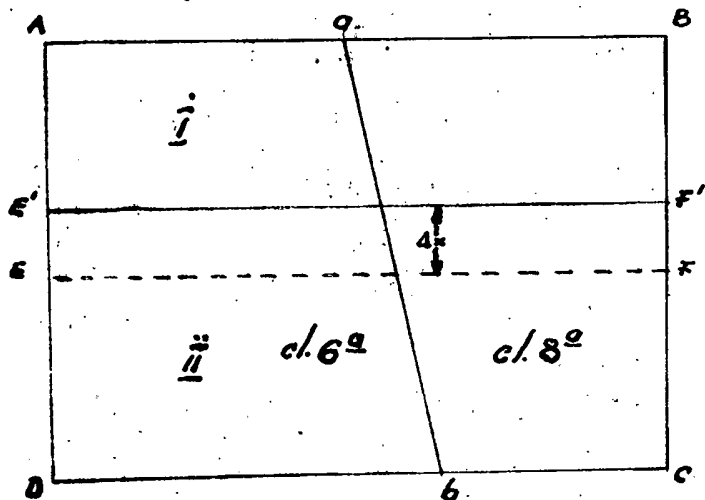
De multe ori însă linia de despărțire este neregulată.

În cazul acesta condiția pentru o justă parcelare este:

$$(1) f_6 + f_8 = f_1 + f_2$$

Partea stîngă fiind pentru parcela 1, iar cea din dreapta pentru parcela II.

În prima aproximație împărțim terenul printr-o dreaptă EF, care, fiind arbitrară coarctem



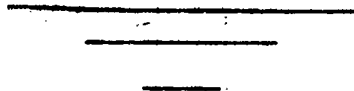
eroarea:  
 $\Delta = \Delta a \cdot 8 + \Delta b \cdot 6 = \Delta x (8 \cdot a + 6 \cdot b)$

Deci:

$$\Delta x = \frac{\Delta}{8 \cdot a + 6 \cdot b}$$

Care ne arată cu cât trebuie să deplasăm linia EF pentru a obține linia E'F' care ne satisface relația (1).

Fig. 276.



## C A P I T O L U L VIII.

### REDACTAREA PLANURILOR.

#### 1. Principii generale.

Ultima fază a lucrărilor topografice este raportarea datelor culese de pe teren pe hîrtie, adică raportarea și redactarea planului porțiunii de teren în care am operat.

A raporta un plan, înseamnă a desena pe hîrtie o figură geometrică asemenea figurilor semnalizate pe teren și apoi în acest schelet se reprezintă prin semne, alese convențional, denumite semne convenționale, toate detaliile terenului.

Reprezentarea punctelor ridicate se face în mod foarte simplu și ușor dacă se cunosc coordonatele acestor puncte față de un sistem de axe de coordonate.

Ca atare va trebui să se aleagă sistemul de axe de coordonate în care se determină coordonatele tuturor punctelor ridicate, așa cum s-a văzut.

În general, sistemul de axe de coordonate, utilizat în topografie, este sistemul de axe de coordonate rectangulare, avînd în sistemul cadastral axa ordonatelor paralelă cu direcția meridianului magnetic, iar în sistemul sudic axa absciselor este paralelă cu direcția meridianului și avînd sensul pozitiv spre Sud.

Foarte rar pot fi luate sisteme de axe de coordonate oblice, iar pentru ridicările detaliilor sînt, cel mai adesea, întrebuintate coordonatele polare, în care se măsoară un unghi și o distanță.

Redactarea planului, la nevoie, se completează cu profile în diferite direcțiuni, profile longitudinale și transversale ale drumurilor.

Redactarea planului necesită următoarele faze de lucru:

- a) Pregătirea hîrtiei sau a unui alt material (pînză de exemplu), în vederea desenării planului.

- b) Transpunerea pe hîrtia pregătită a tuturor datelor întălnite pe teren, obținute în urma lucrărilor executate.

Realizarea acestei transpuneri se face prin semnele convenționale.

- 388 -

- 2. Scări și precizia raportărilor.

Caracteristica cea mai deosebită a planului este scara la care este reprezentată porțiunea de teren respectivă.

Scara este raportul între lungimea reprezentată pe plan și adevărata ei valoare de pe teren.

O scară se reprezintă printr-o fracție ordinară de forma:  $\frac{1}{N}$  ceea ce arată că unei unități de pe plan îi corespunde în realitate, pe teren, N unități.

De exemplu scara  $\frac{1}{50000}$  arată că o unitate de lungime de pe teren este micșorată pe plan de 50.000 ori.

Cu alte cuvinte, o lungime măsurată pe hartă trebuie să fie înmulțită cu 50.000 pentru a obține adevărata ei valoare.

Se obișnuiește să se arate scara și sub forma:

$$\frac{1}{50.000} = \frac{1}{5.10}$$

Când N este mare, avem scară mică, fiindcă adevăratele mărimi sînt micșorate mult, iar în cazul cînd N este mic, scara este mare, fiindcă adevăratele mărimi ale lungimilor suferă o reducere relativ mai mică.

De exemplu 1 : 500 este scara mică, pe cîtă vreme 1 : 5.000.000 este scara mare.

După mărimea lor putem clasifica scările și deci planurile în:

- |                    |             |               |
|--------------------|-------------|---------------|
| - scări cadastrale | 1 : 1000    | - 1 : 5000    |
| - " topografice    | 1 : 5000    | - 1 : 100000  |
| - " aeriografice   | 1 : 100000  | - 1 : 1500000 |
| - " geografice     | mai mari de | 1 : 500000    |

În ridicările topografice cele mai uzitate scări sînt:

- Pentru terenurile de construit clădiri 1:100 sau 1:200,
- Pentru ridicări miniere 1 : 1000
- Pentru căi de comunicații 1 : 2000
- Pentru plan de ansamblu 1:5000 sau 1 : 10000
- Pentru planuri topografice 1:20000 sau 1 : 50000.

- 389 -

În afară de scările numerice se mai utilizează și așa numitele scări grafice, cari arată pe plan lungimea ce este reprezentată, cari de obicei însoțesc orice plan, prezentînd avantajul că și scara se deformează, se contractă, împreună cu planul, deci ne dă în orice moment adevărata valoare a mărimilor reprezentate în plan.

Aproximația sau precizia unui plan depinde de scara la care este redactat planul respectiv și de eroarea grafică pe care o comitem.

Ochiul nostru nu poate distinge lungimi mai mici de 0,2 mm.

Deci aproximația planului este valoarea mărimii reprezentate, la scara respectivă, de acești 0,2 mm.

Avînd scara  $\frac{1}{N}$ , putem scrie că:

$$\frac{1}{N} = \frac{L}{L} = \frac{0,2 \text{ mm}}{L} = \frac{0,0002}{L}$$

Deci  $L = 0,0002 N$ , este aproximația planului.

Adică eroarea, sau aproximația planului, este cu atît mai mare, cu cît scara, la care este întocmit acel plan, este mai mare.

### - 3. Aparatele utilizate la desenarea planurilor

În raportarea planurilor utilizăm: planșeta, dublu decimetru, rigla de calcul, echerile, raportul, compasul, coordinatograful, șabloane pentru cîrbe, florare.

Hîrtia, pe care urmează să fie raportat planul, se fixează de planșetă, cu ajutorul picnezelor sau a unei paste de lipit.

Planșeta, confecționată din lemn de teiu, trebuie să fie perfect plană cu marginile dispuse cu exactitate de  $90^\circ$  una față de alta.

Dublul decimetru sau triplu-decimetru, se întrebunțează pentru a transpune lungimile, reduse la scara dată pe plan.

Pentru a fi bune, ele trebuie să fie drepte și suficient de groase spre a nu se încovoia cu timpul, iar marginile gradate trebuie verificate întotdeauna ca să nu prezinte linie sinuoasă ci una dreaptă.

Diviziunile să fie perfect vizibile

- 390 -

Cu triplu-decimetru putem reduce ușor lungimile la scara: 1:10, 1:100, 1: 1000, 1: 10000, 1: 100000,  
 Sau: 2:10, 2:100, 2: 1000, 2: 10000, 2: 100000 și în fine:  
 5:10, 5:100, 5: 1000, 5: 10000, 5: 100000.

Rigla de calcul, deasemenea se poate întrebuința cu succes la reducerea lungimilor la scara:

4:10, 4:100, 4: 1000, 4: 10000,  
 8:10, 8:100, 8: 1000, 8: 10000.

Echerele, de două feluri ( $45^\circ$  și  $60^\circ$ ), precum și teul, ne dau posibilitatea de a trasa linii paralele, perpendiculare sau sub unghiurile de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  și din combinarea acestora de  $75^\circ$ ,  $105^\circ$ .

Cu ajutorul raportorului se transpun unghiurile măsurate sau calculate.

Raportoarele cele mai simple sînt din metal sau celuloid.

Sînt însă și raportoare metalice, mai complicate, cu alidate metalice, prevăzute cu verniere, putînd transpune cu ele unghiurile la precizie de 1 minut.

Nu mai facem descrierea acestor instrumente, enumerate doar, precum nici a șabloanelor sau florărilor folosite la trasarea liniilor curbe, socotînd aceasta ca firi de prisos.

Coordinatigraful se va descrie la paragraful următor.

#### 4. Metode de raportarea planurilor.

După modul cum am executat ridicările pe teren, va trebui să ne alegem și metoda de raportare a planurilor.

##### a) Raportarea planurilor ridicate prin măsurarea lungimilor.

La măsurarea directă a lungimilor s-au arătat cazuri și probleme cari se pot rezolva prin măsurarea lungimilor cu panglica, de care ne putem servi chiar și la raportarea planului.

Măsurînd pe teren o lungime AB și avînd mărimea ei, se ia pentru această lungime o lungime A'B'.

- 391 -

corespunzătoare scării ce am adoptat și o trecem pe hirtie (Fig.277).

Din punctul  $B'$  se măsoară distanța  $B'b'$  corespunzătoare unei distanțe măsurate pe teren ( $Bb$ ).

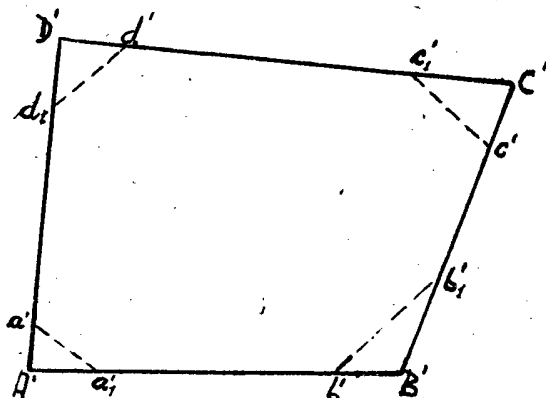


Fig. 277.

Apoi se ia în compas  $B'b'$  corespunzător lui  $Bb$ , măsurat și se descrie un arc de cerc din punctul  $B'$  ca centru, iar din  $b'$  ca centru se descrie cercul de rază  $b'b'$  și obținem punctul  $b$  care se găsește pe aliniamentul  $BC$ .

Reducem la scară lungimea  $BC$  și avem pe hirtie punctul  $C$ .

Procedind analog, din aproape în aproape, până la punctul de pornire  $A$  se obține planul terenului ridicat.

#### - b. Raportarea planurilor ridicate prin abscise și ordonate.

Când ridicarea terenului s-a executat prin metode absciselor și ordonatelor, cu ajutorul echerului cu prisme, raportarea este foarte simplă, trasăm pe hirtie aliniamentul  $AB$  redus la scară, pe care îl considerăm ca axă  $XX$  și pe el se măsoară, evident la scară, lungimea absciselor care ne determină, pe aliniamentul  $AB$ , o serie de puncte, din cari ridicând perpendiculare, de lungime corespunzătoare ordonatelor de pe teren, obținem toate punctele poligonului respectiv.

#### - c. Raportarea planurilor ridicate cu teodolitul și panglica.

Dacă pe teren am măsurat cu teodolitul, sau un alt aparat goniometric, toate unghiurile, iar cu panglica am măsurat toate laturile, în acest caz trasăm pe hirtie în primul rând un aliniament, redus la scară, măsurăm cu raportorul unghiurile și putem trasa celelalte



- 392 -

aliniaente, pe cari, reducându-le la scară, obținem finalmente planul terenului.

- d. Raportarea planurilor prin metoda  
coordonatelor.

Metoda operațiilor cu determinarea coordonatelor punctelor ne dă posibilitate de a redacta planul cu maximum de ușurință și precizie.

Una din metodele cele mai lesnicioase utilizată în redactarea planurilor când avem calculate coordonatele punctelor, este cea în care se întrebuintează hîrtia milimetrică, sau o hîrtie cadrilată.

În această metodă este necesar ca în primul rînd să pregătim hîrtia, desenînd o rețea de axe de coordonate, la scara impusă ori aleasă de noi.

Pentru această operațiune pe hîrtia fixată pe planșetă trasăm, cu ajutorul riglei, o linie dreaptă în apropierea unei margini a hîrtiei.

Pe linia trasată se fixează două puncte  $a$  și  $b$  la distanță care ar cuprinde un număr întreg de patrulatere coordonatografice.

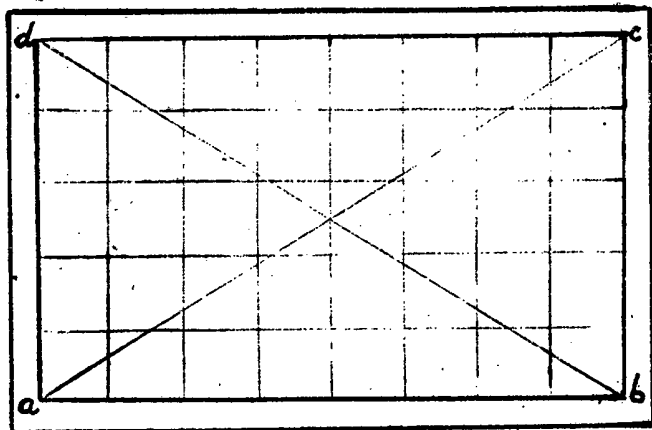


Fig. 278.

Măsurarea acestei drepte se face cu un etalon cît mai lung pentru eliminarea greșelilor cari ar putea fi făcute, utilizînd un etalon scurt.

Din cele două capete ale lungimei măsurate se ridică apoi cîte o perpendiculară.

Se fixează pe perpendiculare valorile  $ac = bd$ , care ar cuprinde la rîndul lor un număr de patrulatere.

Se unesc punctele  $d$  și  $c$  trebuînd ca dreptele  $ab$ ,  $dc$ , precum și diagonalele  $ac$  și  $bd$  să fie egale.

În caz contrar am avea un paralelogram și vom căuta să îndreptăm greșala, pînă cînd condițiunile impuse sînt îndeplinite.

După ce cadrul este terminat, se procedează la fixarea definitivă a punctelor  $a, b, c$  și  $d$  și apoi

- 393 -

se împart laturile  $ab$ ,  $bc$ ,  $cd$  și  $ad$  în numărul întreg de lungimi corespunzătoare laturilor patrulaterelor coordinatografice și se completează rețeaua.

Această operație se face cu precizie mai mare dacă se întrebunțează rigle metalice și echere metalice cu verniere.

Aceste instrumente poartă denumirea de rigle de compensație.

Vernierele acestor rigle ne dau posibilitatea de a fixa pe hîrtie cu o aproximație de 1:50 dintr-un milimetru.

În cazul cînd fixarea punctelor ne este cerută la o precizie maximă, nu mai pot fi folosite nici riglele de compensație, în aceste împrejurări utilizăm niște instrumente care se numesc coordinatografe.

Cel mai uzitat coordinatograf este coordinatograful lui Coradi (Fig. 279).

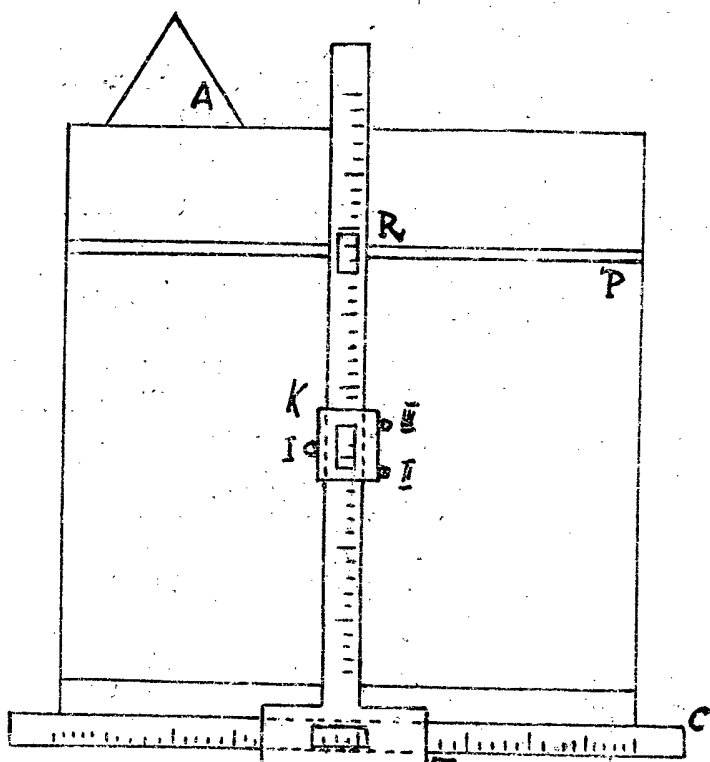


Fig. 279.

El se compune dintr-o planșetă de lemn de tei (P) la o muchie a căreia este fixată corniera C cu o renură în linie dreaptă.

În această renură se deplasează un dispozitiv în formă de teu (T) al cărui picior prevăzut cu un rulou (R) se mișcă pe rigla S (dețasabilă) așezată pe planșetă.

Piciorul teului se deplasează perfect perpendicular pe corniera C, iar în lungul lui T se deplasează un cursor K prevăzut cu trei creioane I, II, III,

Atît deplasarea întregului dispozitiv pe corniera C, cît și a cursorului K pe T se poate efectua cu precizie pînă la 1:100 dintr-un milimetru, aceasta putîndu-se realiza cu ajutorul unor roți țigădate.

Pe lățimea liberă a planșetei mai există un apendice A care permite așezarea hîrtiei în orice poziție.

Se înțelege dela sine că atât poziția punctelor de importanță mare cât și cadrulajul, se execută cu instrumentul descris mai sus, cu mult mai repede și cu mult mai precis decât procedând rudimentar, așa cum am expus în cadrul acestui capitol, este mai precis chiar decât dacă s-ar lucra cu rigle de compensație.

#### - 5. Semne convenționale.

Reprezentarea pe plan a detaliilor se face cu ajutorul semnelor convenționale.

În alegerea și utilizarea semnelor convenționale, trebuie să ne călăuzim de următoarele principii

- a) Semnele convenționale trebuie să deștepte ideea detaliilor ce reprezintă.

- b) Să fie executate la scară după normele fixate de graficele cari poartă denumirea de diapazoane de semne convenționale.

- c) Semnele convenționale să fie distincte chiar dacă harta nu este executată în mai multe culori.

Grija de căpetenie a executorului unui plan este exactitatea redării terenului pe plan.

Ori există cazuri când această precizie trebuie subordonată plasticității sau bunului gust.

De exemplu, lățimea unei căi ferate maximum de 1,64 m, reprezentată la scara 1 : 10000, ar reveni ca să fie trasată printr-o linie de grosime  $1:64 : 10000 = 0,000164$  m, adică 0,164 mm.

Ori valoarea minimă, perceptibilă cu ochiul liber, este de 0,2 mm.

Deci, în planul nostru, traseul căii ferate ar trebui să dispară, însă valoarea acestui detaliu este așa de mare, încât se va trece peste cerințele exactității și se desenează prin semnele convenționale.

Planul, sau harta unei porțiuni de teren, trebuie ca să ne dea ideea cât mai precisă despre configurația, accidentele și particularitățile terenului, pentru a putea proiecta, pe baza acestei hărți, construcții de căi de comunicații sau alte lucrări de ordin public.

- 395 -

Exploatarea miniere, in dezvoltarea lor de astăzi, nici nu pot fi concepute fără un plan al terenului în care există zăcămintele, fiindcă în felul acesta putem ști precis până unde s-a extins exploatarea sau ce e de făcut în viitor.

La redactarea unui plan trebuie deci să se combine exactitatea cu bunul gust, pentru a avea un plan utilizabil și mai mult sau mai puțin executat artistic.

Aceasta se realizează prin alegerea cit mai adecvată a semnelor convenționale, pe cari le putem clasifica în:

- a) Semne convenționale pentru planimetrie,
- b) " " " nivelment,
- c) " " " scriere și desen.

Laturile triangulației sau poligonațiilor sînt liniile ajutatoare, pe care se ridică toate detaliile, ele nu se trasează în tuș, și după ridicarea detaliilor se șterg.

Numai în cazuri speciale, ele pot fi trasate în tuș.

Dăm mai jos un tablou cu cîteva semne convenționale mai importante, atrăgînd atențiunea că la întocmirea planurilor va trebui utilizat catalogul cu semne convenționale dat de către Cadastrul român.

#### - 6. Detaliile nivelmentului și reprezentarea lor.

După executarea nivelmentului, operațiune care se va trata în partea de Altimetrie, urmează să fie făcută și reprezentarea nivelmentului, care va trebui să ne dea posibilitatea de:

- a) A găsi pe hartă sau plan altitudinea unui punct oarecare.
- b) De a găsi și exprima panta unui teren.
- c) De a scoate în relief terenul.

Cele mai uzitate și cele mai precise semne convenționale ale nivelmentului sînt curbele de nivel

Pentru a scoate în relief terenul, se întrebuintează hașurile ori

Curbele de nivel sînt normale, adică

- 396 -

trasate echidistant și anume din sută în sută de metri, deasupra nivelului mării.

Curbe de nivel ajutătoare, întrebuințate când terenul este foarte accidentat și se trasează prin linii punctate, linii întrerupte sau prin linii pline dar subțiri.

Hașurile, inventate de Lehman, sînt bazate pe următorul principiu: dacă o porțiune de teren e iluminată de raze verticale, cu cît unghiul  $\alpha$  de înclinare a terenului AC, este mai mare, cu atît este mai slab iluminată.

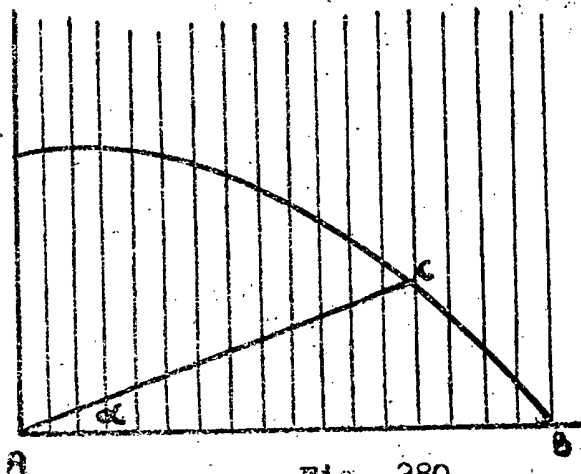


Fig. 280.

De aceea grosimea hașurilor trebuie să fie invers proporțională cu cantitatea de lumină căzută pe o pantă, iar direcția pantei este indicată de direcția hașurilor.

Lehman propune ca grosimea hașurilor să fie în acelaș raport cu spațiul dintre hașure, ca și unghiul de cea mai mare pantă cu complimentul lui pînă la  $45^\circ$ .

Din punct de vedere practic, s-a ajuns la 8 categorii de hașuri, adică:

- pentru înclinări de $5^\circ$	raportul între hașuri și spațiul dintre hașure este de	5:40 = 1 : 8
- pentru înclinări de $10^\circ$	" "	10:35 = 2 : 7
- " "	de $15^\circ$ "	15:30 = 1 : 2
- " "	de $20^\circ$ "	20:25 = 4 : 5
- " "	de $25^\circ$ "	25:20 = 5 : 4
- " "	de $30^\circ$ "	30:15 = 2 : 1
- " "	de $35^\circ$ "	35:10 = 7 : 2
- " "	de $40^\circ$ "	40: 5 = 8 : 1.

Pentru ca direcția hașurilor să indice direcția pantei, hașurile trebuie să fie perpendiculare pe curba de nivel.

În practică se duc mai multe curbe de nivel cu creionul, se trasează hașurile impuse de panta terenului și în așa fel ca hașura să nu fie mai lungă

- 397 -

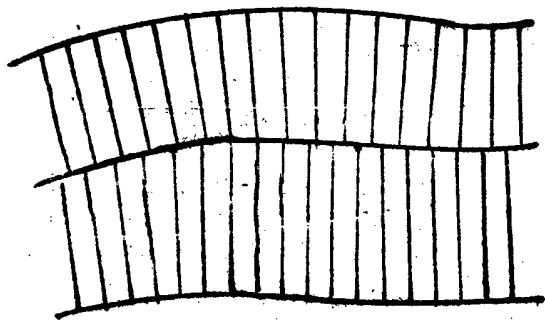


Fig. 281.

decît spațiul dintre cele două curbe de nivel vecine.

Al doilea rînd de hașuri se trag exact în mijlocul spațiului din rîndul precedent ș.a.m.d.

După ce această operațiune s-a terminat, se șterg curbele de nivel.

Inconvenientele hașurilor sînt următoarele:

- a) Atît desemnarea cît și aprecierea pantelor prin hașuri este un lucru pur individual.
- b) În prezentarea terenului prin hașuri primează partea artistică.

Cu harta în hașuri putem rezolva probleme impuse de împrejurări, de exemplu, determinarea pantelor, căutarea pantei, etc.

c) Prin felul cum sînt clasificate hașurile, reese că pantele variază prin salturi din  $5^\circ$  în  $5^\circ$ .

### Reproducerea planurilor.

Harta executată cu ajutorul planșetei are întotdeauna o scară mai mare, de aceea pentru a reda cît mai multe detalii, se reproduc după hîrțile originale, niște hîrți uzuale la scară mai mică.

Pentru a reproduce harta la o scară micșorată, pe un plan de ansamblu, se fixează o rețea de coordonate și apoi fiecare porțiune se transpune la locul său.

Ca regulă: la reproducerea planurilor cu micșorarea scării, detaliile de mică importanță se reduc, iar contururile complicate ale suprafețelor, șoselelor, râurilor, etc. se simplifică, reducînd din sinuozitățile mai mici, pentru a sublinia pe cele mari.

De multe ori nevoile tehnice impun reproducerea unei hîrți la o scară mai mare decît o avem.

În fine reproducerea hîrții se poate face la aceeași scară la care este desenat originalul.

- 398 -

In reproducerea planului sau hărții fără modificare a scării, putem utiliza metode mecanice sau metode manuale.

In cazul metodelor manuale putem reproduce planul pe hirtie de calc sau pânză transparentă sau pe o hirtie chiar mată, utilizând geamul și desemnind contra luminei.

Mai putem reproduce exact după original prin împingerea cu un ac fie a punctelor caracteristice de pe originalul hărții, punind în prealabil sub el o coală de hirtie destinată copiei.

Metode mecanice și chimice de reproducus sînt: fotografierea originalului în mărime  $1 \times 1$ , reproducerea cu hirtie ozalid, etc.

Dacă se cere reproducerea planului cu midificarea scării, putem efectua prin modificarea liniară sau de suprafață.

In primul caz toate liniile copiei trebuie să fie în acelaș raport, mai mic sau mai mare, cu liniile respective de pe original.

Cînd se cere ca suprafața hărții să fie de  $n$  ori mai mare sau mai mică decît a originalului, raportul suprafețelor trebuie să fie egal cu raportul lungimilor la patrat.

Reproducerea se poate face sau în mod geometric sau mecanic cu ajutorul unui instrument carecure.

In primul caz originalul este împărțit în dreptunghiuri și reducem distanțele la scara voită.

Amplificarea planului, adică reproducerea lui la o scară mai mare, așa cum am arătat, se soldează întotdeauna cu greșeli mari, uneori intolerabile, cari rezultă prin amplificarea greșelilor grafice comise în timpul executării planului.

Greșelile cresc în acelaș raport în care mărim copia față de original.

De aceea la amplificarea planului se recomandă nu reproducerea, ci executarea unui nou original la scara dorită, conform datelor numerice obținute în urma ridicărilor pe teren.

Instrumentele cu care putem reproduce la altă scară originalul, sînt:

- a) diagrame,
- b) compasul proporțional, și
- c) pantograful.

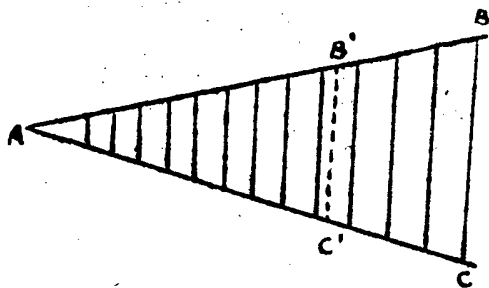


Fig. 282.

- a) Diagrama se compune dintr-un triunghi ABC ale cărui laturi BC și AC sînt în raportul  $m : n$ .

Latura AC este divizată în mai multe părți printr-un număr de linii paralele cu BC.

Ca să începem o dreaptă de pe original, în raportul dat  $m : n$  se așază pe unul din capetele ei vârful A al triunghiului ABC și latura AC în lungul acelei drepte.

Dreapta B'C' dusă la cel de al doilea capăt al dreptei de pe original va fi lungimea redusă în proporția  $m : n$  a dreptei de pe original.

teii de pe original.

Desigur că diagramele se construiesc în raportul  $m : n$  dorit.

- b) Compasul proporțional se compune din două vergele identice de forma celor arătate în Fig. 283.

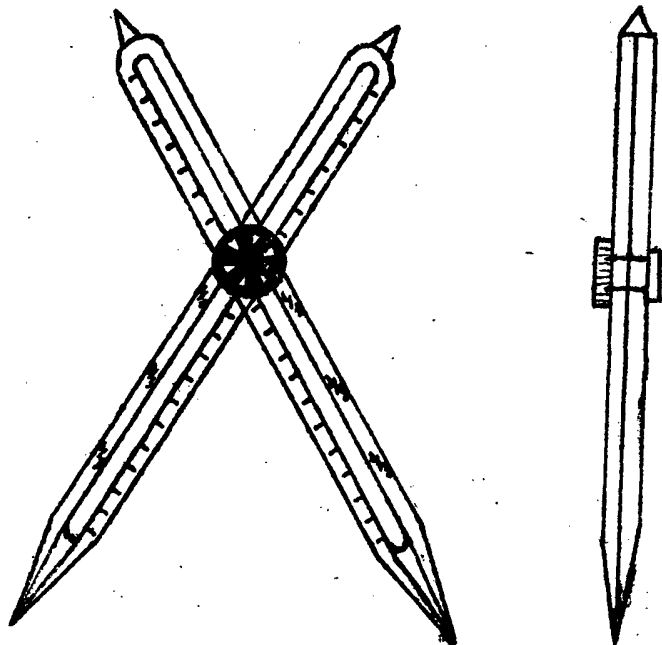


Fig. 283.

În corpul lor există câte o renură care permite fixarea după necesitate a șurubului și în jurul căruia pot fi rotite picioarele compasului.

Capetele picioarelor sînt prevăzute cu câte un vîrf ascuțit, necesar pentru marcarea punctelor, iar marginele picioarelor sînt marcate cu scară pentru citirea raportului între deschiderile AB și ab.

Principiul și întrebuințarea compasului este bazată pe următoarele considerente:

două drepte concurente Aa și Bb formează două triunghiuri ABC și aCb, asemenea, în care  $AC = BC$



și  $Ca = Cb$ .

Așa că:  $\frac{CB}{Cb} = \frac{CA}{Ca}$  iar  $\frac{Ca}{CA} = \frac{ab}{AB} = \frac{n}{m}$

Schimbând C cu C' vom avea:

$$\frac{C'a'}{C'A'} = \frac{a'b}{A'B} = \frac{n'}{m'}$$

Din cele expuse rezultă că trebuie să știm punctul, de pe rețeaua picioarelor unde putem plasa, după voința noastră, axul de concurență a proiectoarelor spre a ne da raportul necesar.

Punctele acestea sînt marcate pe compasul proporțional, arătînd raportul pe care îl obținem.

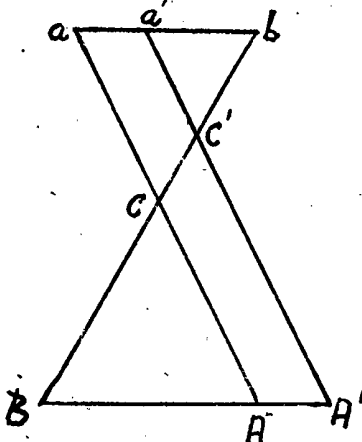


Fig. 284.

- c. Pantograful.

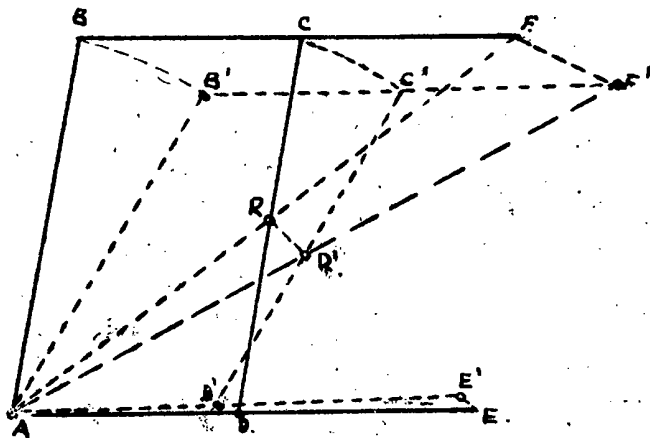


Fig. 285.

În principiu se compune din patru bare metalice gradate, cari formează un paralelogram ABCD, barele AD și BC avînd prelungirile pînă în E, respectiv F.

Paralelogramul este articulată în punctele A, B, C și D.

Punctul A este fix și se numește pelul pantografului.

Laturile AB, BC, CD, CE, DE sînt rigide și în orice poziție latura CD este paralelă cu AB și BC este paralelă cu BC'.

În punctul E este un știft, iar în R se fixează

un creion.

Dacă cu știftul din F se urmărește o linie FF', deplasînd brațul BF pe această linie, cum punctul A este fix și articulațiile amintite permit această mișcare, paralelogramul va lua forma AB'C'D'E'F', iar R vine în R'.

Pe de altă parte poziția lui R este aleasă în așa fel încât A, R și F sînt coliniare.

Triunghiurile ABF și RCF sînt asemenea și deci:

$$(1) \frac{AB}{RC} = \frac{BF}{CF} = \frac{AF}{RF}$$

Dacă schimbăm în poziția a doua avem:

$$(2) \frac{AB'}{R'C'} = \frac{B'F'}{C'F'} = \frac{AF'}{RF'}$$

În prima relație avînd:  $AB=AB'$ ,  $BF=B'F'$ ,  
 $RC=R'C'$  și  $CF=C'F'$ , se obține:

$$(3) \frac{AB'}{R'C'} = \frac{B'F'}{C'F'} = \frac{AF}{RF}$$

tă:

$$\frac{AF}{RF} = \frac{AF'}{RF'}$$

Cu alte cuvinte știftul F și creionul din R după deplasare rămîn coliniare cu polul A, ceea ce ne arată în acelaș timp că triunghiurile AFF și ARR sînt asemenea și avem raportul:

$$\frac{FF'}{RR'} = \frac{AF}{FR}$$

Ca atare cu ajutorul pantografului pot fi desenate figuri asemenea, în raportul pe care îl veia, ales prin deplasarea brațului CD pe AE și BF.

Pantografele moderne sînt fabricate sau cu rulouri în toate articulațiile dispozitivului sau suspendat pentru ca masa de desen să fie atinsă numai de știftul cu care urmărim desenul original și de creionul cu care se execută copia.

### Fotografierea planurilor.

Metoda cea mai exactă, ce poate fi întrebuintată în reproducerea planurilor, desigur că este fotografierea, însă este operațiunea care cere o anumită pregătire în această direcție.

- 402 -

P A R T E A     I I I .A L T I M E T R I E     S A U     N I V E L M E N T

## CAP. I.

G e n e r a l i t a t i1) Considerații generale.

Altimetria sau Nivelmentul este partea din Topografie care se ocupă cu determinarea relațiilor de înălțime, cari există între diferite puncte ale terenului, precum și cu reprezentarea în plan a reliefului terenului în care operăm.

Așa, după cum bine este cunoscut, punctele de pe teren, unele față de altele, în plan vertical, se găsesc, unele mai sus, iar altele mai jos.

Pentru a putea stabili relațiile de înălțime, cari există între puncte, în mod analog cu cele arătate în planimetrie și Altimetrie se ia un plan de comparație, convenabil ales, astfel ca întreaga suprafață a terenului să fie deasupra acestui plan, față de care determinăm înălțimea punctelor.

În general, drept plan de comparație este luat nivelul mării.

În această privință trebuie făcută remarcă următoare: în Ardeal planul de comparație ales este suprafața mării Adriatice, iar pentru restul țării s-a ales nivelul mării Negre.

Ori cum principiul vaselor comunicante nu este cu strictă respectare de mări și oceane, existând diferențe între nivelul mării Negre și cel al mării Adriatice, va trebui să se țină cont de acest lucru, atunci când ar fi cazul.

Se numește diferență de nivel relativă între două puncte, distanța pe verticală între cele două

plane orizontale cari trec prin punctele respective; iar distanța pe verticală între planul orizontal ce trece printr-un punct oarecare și planul de comparație, se numește diferență de nivel absolută.

De exemplu, în figura de mai jos punctul A fiind considerat la nivelul planului de comparație (nivelul mării), diferența relativă între punctul 1 și punctul B este  $h_{1B}$  iar diferența de nivel absolută sau cota de nivel absolută, cum se obișnuiește a se spune, a punctului B este  $H_{AB}$ .

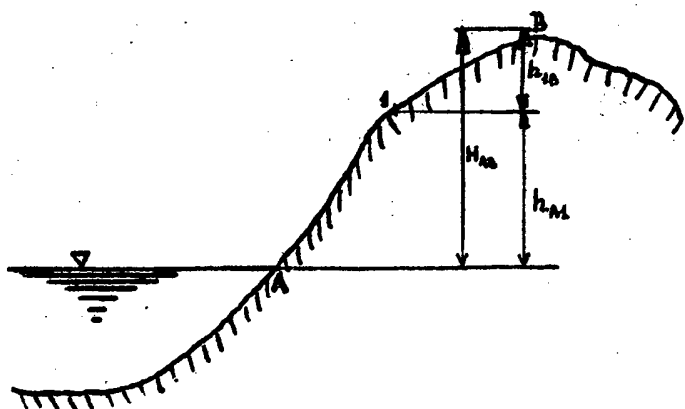


Fig. 286.

Dacă ne este cunoscută cota absolută a unui punct, precum și diferența de nivel, sau cota relativă, a unui alt punct, putem determina și cota absolută a acestui punct.

De exemplu, cunoscând cota absolută a punctului B, pe  $H_{AB}$  și diferența de nivel  $h_{1B}$ , cota absolută a punctului 1 este  $H_{A1} = H_{AB} - h_{1B}$ .

În mod identic, cunoscând cotele absolute a două puncte putem afla și diferența de nivel.

Din cele arătate se poate cu ușurință deduce că avem puncte a căror cotă absolută este pozitivă, adică ele se găsesc deasupra nivelului mării sau oceanului, înșă ca plan de comparație, iar alte puncte pot avea cotă absolut negativă, adică se găsesc mai jos ca nivelul planului de comparație.

În primul caz în topografie se spune că avem cotă de nivel, iar în geografie se numește altitudine, pe cînd în cazul din urmă avem așa numite cote batimetrice, cote de adîncime sau simplu adîncime.

Este necesar să facem următoarea observațiune: planul de comparație trebuie să aibă o cotă permanent aceeași, adică o cotă constantă.

Ori planul de comparație, alca de noi, suprafața mării nu este liniștită, nu respectă cu strictețe aceeași condițiune, ca stare să fi condusă a creșea că datele obținute în urma unor măsurători rigidoase și de durată, să nu mai fie aceleași cu cele pe cari le-am obținut într-o altă măsurătoare, cînd ca punct de plecare am avea același plan de comparație.

- 404 -

Pentru înălțurarea acestor deficiențe nivelul mării, a planului nostru de comparație, este măsurat zilnic, timp de cel puțin un an de zile, înscriindu-se pe o diagramă toate înălțimile sau cotele lui și apoi în măsurătorile topografice se ia media acestor cote.

## - 2) Principii fundamentale și definiții.

Principiul pe care ne bazăm în executarea unui nivelment, adică în stabilirea diferenței de nivel între două puncte, este de a duce prin cele două puncte plane orizontale sau paralele planului de comparație și de a măsura distanța pe verticală între aceste două plane.

După cum se va vedea, în cele ce urmează, problema nu este tocmai așa de simplă, fiind nevoie să se țină cont și de alte elemente, cum ar fi raza de curbura a pământului și refracția luminii.

Odată determinată diferența de nivel între puncte, stabilind deci cota absolută a punctelor care au fost ridicate și raportându-le pe plan cu arătarea în dreptul lor a cotelor respective, se obține ceea ce se numește un plan cotat.

Dacă însă pe plan nu sînt indicate cotele punctelor, ci sînt reprezentate curbele de nivel, în acest caz avem un plan cu curbe de nivel.

Curbele de nivel, nu sînt altceva decît locul geometric al punctelor de aceeași cotă, deci punctele de pe teren găsite în același plan orizontal.

În reprezentarea grafică a terenului curbele de nivel sînt luate la distanțe egale, cu alte cuvinte sînt echidistante, pentru a scoate în evidență particularitățile porțiunii ridicate.

## - 3) Nivelul adevărat și nivel aparent, eroare de sfericitate și de refracție.

Diferența de nivel absolută sau nivel adevărat al unui punct, este nivelul luat în comparație cu nivelul mării liniștite, adică cu al sferei pământului, pe cînd nivel aparent este considerat în raport cu

planul tangent la sfera care trece prin punctul nostru.

In figură nivelul adevărat ar fi cel în raport cu suprafața curbă MN, iar cel aparent față de planul tangent M'N'.

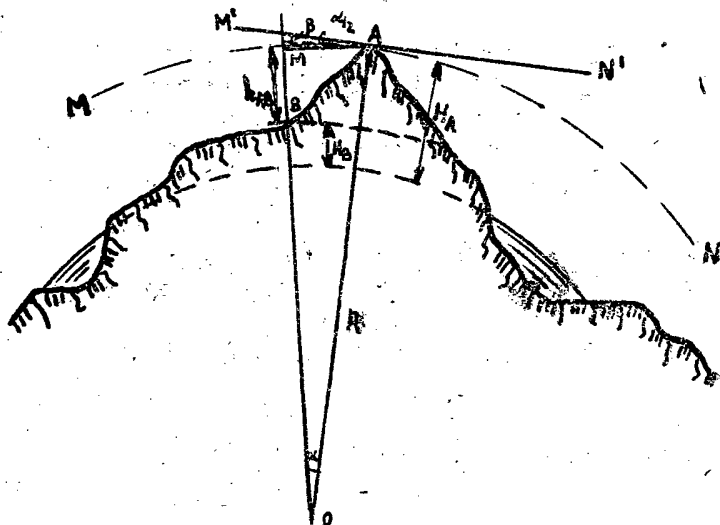


Fig. 287.

Să vedem care este eroarea ce comitem luînd în considerare planul tangent, adică nivelul aparent și nu pe cel adevărat.

Sau, mai bine zis, avînd două puncte A și B de cotă absolută  $H_A$  și  $H_B$ , ne propunem să determinăm diferența de nivel între aceste două puncte ( $h_{AB}$ ).

Diferența de nivel pe care am avea-o luînd nivelul aparent M'N' este  $\overline{BM'}$ , pe care o citim noi pe o miră așezată în punctul B, iar în punctul A avînd așezat instrumentul de nivelat, pe cînd diferența de nivel obținută considerînd nivelul adevărat, este  $\overline{BM}$ .

Broarea aceasta:  $\overline{BM'} - \overline{BM} = e$ , datorită sfericității pămîntului, se numește eroare de sfericitate.

Evident că în cazul cînd avem de a face cu suprafețe mici, planul aparent se confundă cu nivelul adevărat și eroarea de sfericitate este neglijabilă, așa cum de altfel se și petrec lucrurile în Topografie unde operăm pe întinderi relativ mici.

In figură, notînd distanța  $OA = R$  (raza pămîntului) și  $AM = D$ , distanța dintre punctele A și B redusă la orizont, din triunghiul OAM, unghiul  $\alpha$  fiind un unghi mic, putem scrie:  $\alpha = \frac{D}{R}$

Inșă unghiul  $\angle MAM' = \frac{\alpha}{2}$  și deci din triunghiul  $MAM'$  avem, bazați pe aceleași considerente ca mai sus  $\frac{\alpha}{2} = \frac{MM'}{D} = \frac{e}{D}$

$$\text{Deci: } \alpha = D \frac{\alpha}{2} = \frac{D^2}{2R}$$

Ca atare, dacă pe miră am avea o citire  $L$  (în dreptul lui M), diferența de nivel între punctele A și B este:

$$h_{AB} = L - e = L - \frac{D^2}{2R}$$

In afară de această eroare, datorită sfericității pământului, ținând seama și de faptul că straturile de aer ale atmosferei refractă razele de lumină pornite de la instrumentul de nivelat, mai intervine și așa numită eroare de refracție.

Intr-adevăr, datorită acestui fapt raza de lumină nu apare în linie dreaptă și pe mira așezată în punctul B nu mai citim gradațiunea  $\angle$  ci o altă gradațiune  $\angle'$ , diferența aceasta ( $\angle - \angle'$ ) se numește eroarea de refracție și este notată cu "r". Iar unghiul de refracție în figură este notat cu B.

In urma a numeroase cercetări s-a dedus că unghiul de refracție este:  $\beta = K \frac{\alpha}{2}$  unde K este un coeficient de refracție, a cărui valoare este:  $K = 0,1306$ .

Așa că:  $\alpha = D K \frac{\alpha}{2}$   
 Sau înlocuind pe  $\frac{\alpha}{2}$  prin  $\frac{\alpha}{2} =$   
 $= \frac{D}{2R}$ , se obține:  $\alpha = K \frac{D^2}{2R}$

Din cele expuse rezultă că adevărata valoare a diferenței de nivel între cele două puncte este:

$$h_{AB} = \angle' - (a - \alpha) = \angle' - \left( \frac{D^2}{2R} - K \frac{D^2}{2R} \right)$$

In rezumat, corecția pe care o aducem va trebui să fie:

$$\mu = c - \alpha = \frac{D^2}{2R} - K \frac{D^2}{2R} = \frac{D^2}{2R} (1 - K).$$

Această corecție, în funcție de distanță D, ținând cont de valorile:  $K = 0,1306$  și  $R = 6371$  km, este:  $\mu = 0,0000000683 D^2$ .

Ceeace reprezintă corecția ce trebuie adusă tuturor măsurătorilor noastre de nivelment.

Se dau și diferite tabele cari au calculată această corecție pentru toate distanțele:

D	Corecțiuni		$\mu = c - \alpha$	D	Corecțiuni		$\mu = c - \alpha$
	e	r			e	r	
m	m	m	m	m	m	m	m
60	0,0002	0,0000	0,0002	300	0,0071	0,0009	0,0062
80	5	1	1	350	95	13	83
100	8	1	7	400	126	16	110
120	11	1	10	450	159	21	138
140	15	2	13	500	196	26	170
160	20	3	17	550	237	31	206
180	25	3	22	600	283	37	246
200	31	4	27	700	385	50	335
220	38	5	33	800	500	70	430
240	45	6	39	900	640	80	560
260	53	7	46	1000	780	100	680
280	62	8	54				

- 407 -

- 4) Marcarea punctelor de nivelment.

La ridicarea planimetrică a terenurilor am văzut că punctele erau marcate, în diferite feluri spre a fi deosebite unul de altul, întrebuințând în acest scop țărugi, berne, etc., iar semnalizarea lor se făcea prin jaloane, balize, piramide, etc.

Vizarea punctului topografic în acest caz se făcea de fapt pe verticala aceluși punct, adică puteau fi vizate o înfinitate de puncte.

În cazul nivelmentului poziția punctului trebuie să fie strict localizată la suprafața terenului.

Dacă punctele topografice din terenul în care operăm, au un caracter temporar, atunci marcarea lor se poate face simplu prin aceiași țărugi, pe cari i-am întrebuințat și la planimetrie, cu deosebirea că ei trebuiesc bine bătuți în pământ și la capăt am bătut un cui, a cărui suprafață să fie la nivelul suprafeței terenului.

Desigur că în cazurile, când nu ni se cere precizie prea mare, nu se mai face marcarea punctelor pentru nivelment, ci așezăm instrumentele de semnalizare, ni-rele, direct pe teren.

Când punctele au un caracter permanent, puncte mai importante, în acest caz pot fi utilizate unul din modurile de marcarea arătate mai jos.

De obicei punctele de nivelment, cari au un caracter permanent, sînt fixate în locuri ferite, ca de exemplu la clădiri.

În zidul clădirii, la o distanță dela suprafața terenului de cca. 40 cm este introdusă o țevă de fier, Fig. 288, iar punctul de nivelment este dat nu de centrul acestei țevi, ci de partea ei superioară.

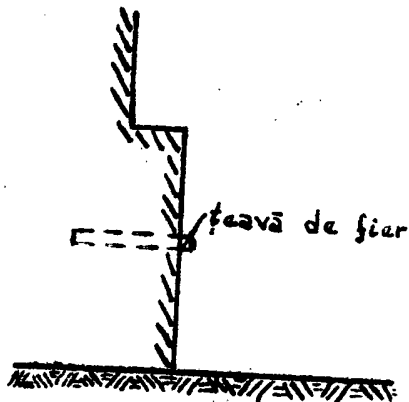


Fig. 288.

De multe ori în locul acestei țevi se bate un cui mai puternic.

Cel mai adesea însă în locul țevii avea o rondelă, încastrată în zid cu un bulon.

Pe fața ei din afară se află scrisă cota punctului.

Punctul topografic este considerat ca fiind suprafața unui mic eșind, la partea superioară a rondelii, notat în figură cu litera a.



- 408 -



Fig. 289.

Alteori punctele de nivelment sînt marcate prin plăci, încastrate în zidărie.

Pentru nivelmentul general al țării sînt întrebuițate în totdeauna rondo-  
le pe care se arată numărul punctului  
și cota lui.

## CAPITOLUL II.

### APARATELE DE NIVELMENT.

Pentru executarea nivelmentului avem nevoie de următoarea aparatură: miră sau lată de nivelat și instrument pentru nivelment.

În cadrul acestui Capitol se vor descrie toate instrumentele cari pot fi utilizate în operațiunile de nivelment.

#### A. Mirele.

##### 1. Mire parlante.

Mirele parlante, sau vorbitoare, nu sînt altceva decît simple rigle sau late de lemn, confecționate de diferite secțiuni, după fabrica constructoare și anume, dreptunghiulare, pătrate, triunghiulare, etc., cari poartă pe una din fețe gradațiunile, în mod obișnuit din cm în cm, iar pentru măsurătorile de precizie mare, cînd ne servim de instrumente cu lunete puternice, aceste gradațiuni pot fi din 2 în 2 mm.

- 409 -

Pentru deosebirea cu ușurință a gradațiilor, sînt întrebuintate culori diferite, cum ar fi culorile: roșu, cu alb, negru cu alb, sau chiar toate aceste trei culori pe același miră.

Desigur însă că în acest caz o combinație de culori este la un grup de diviziuni și cealaltă combinație pentru alt grup.

Lungimea mirelor variază între 2 m și 4 m.

Sînt însă și mire mai înalte, de exemplu de 9 m.

Ca material de construcție, pentru mirele cele mai bune, spre a nu primi deformațiuni, este: lemnul de anin, de pin, sau molift, iar mirele de precizie mare sînt confecționate din invar.

Se mai fabrică mire ușoare din benzi de metal sau din pînză, aceste benzi fiind apoi atașate la un jalon.

În mină, mira nu poate fi mai lungă de 2,25 m și deoarece punctele topografice sînt fixate, în mod obișnuit, în tavanul galeriilor, ele sînt prevăzute, la unul din capete, cu un cîrlig, cu ajutorul cărui pot fi suspendate de tavan în timpul operațiilor de nivelment.

Spre a obține rezultate precise, mira trebuie ținută vertical, ceea ce în lucrările de importanță secundară se poate asigura din ochi sau cu ajutorul unui fir cu plumb așezat în spatele mirei.

În cazul operațiilor de precizie mare, ținerea mirelor în poziție verticală, în tot timpul cît durează citirea pe ea, se asigură cu o nivelă cu bulă de aer, fixată pe miră, sau pentru o precizie și mai mare, mira poate fi prevăzută cu 2 vergele - basteane.

În figura de mai jos pot fi văzute mai multe feluri de construcții de mire.

Trebue să mai amintim că mirele pot fi construite dintr-o singură bucată sau din două, ori chiar mai multe bucăți, articulate și avînd un mâner pentru ușurință în transportul lor.

Și în fine alte mire sînt telescopice, adică sînt confecționate din două bucăți, dintre cari una culisează în cealaltă.

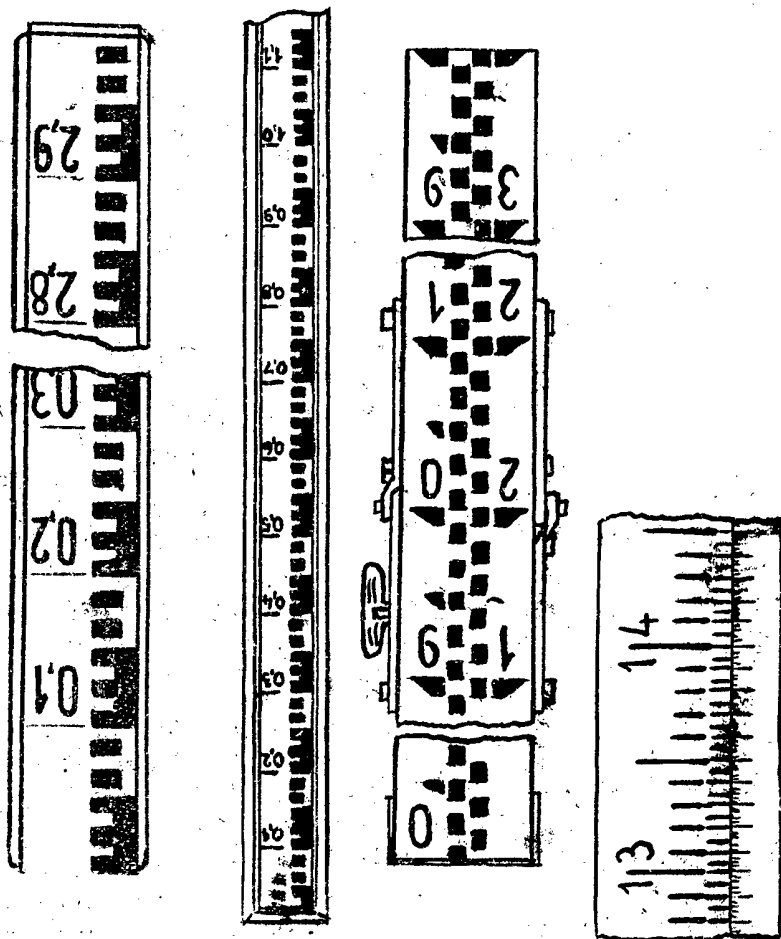


Fig. 290.

- 2. Mire cu disc.

In practică se mai întâlnesc mire cu disc, cari, așa cum se pot vedea și în figură, se compun dintr-o bară pe care culisează un disc, împărțit în patru părți egale, vopsite în culori: negru și alb.

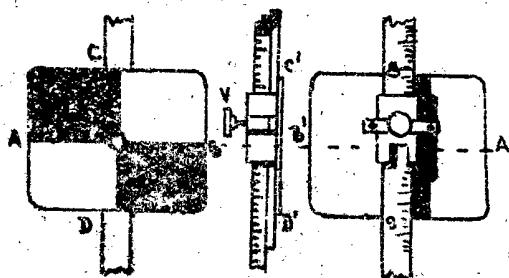


Fig. 291.

Bara este gradată, cu diviziunile din cm în cm.

In spatele discului se află un vernier, solidar legat de disc, cu care, deplasându-se împreună, permite a citi subdiviziunile centimetrului. Operatorul semnalizează și cere ajutorului, de la miră, ridicarea sau coborîrea discului

și în momentul cînd intersecția liniilor colorate ale discului coincide cu firele reticulare, ajutorul face citirea pe miră.

Este de la sine înțeles că operațiunile cu astfel de mire sînt însoțite de erori, cari sînt nelămurabile din cauză că nu poate fi realizată o perfectă înțelegere între operator și ajutor, fapt care dă naștere tendinței generale, de a se înlocui mirsile cu disc prin mire parlante.

În cazul mirelor parlante, rolul purtătorului de miră se rezumă strict la fixarea mirei deasupra punctului indicat și ținerea ei în poziție verticală, urmînd ca operatorul să vizeze, cu instrumentul, mira și să facă citirile respective.

- B. N i v e l e l e .

Instrumentele de nivelat, servind la măsurarea diferenței de nivel între două puncte, trebuie să permită a duce prin acele puncte un plan orizontal, denumit plan nivelitic, față de care facem măsurătorile noastre.

Aceste planuri nivelitice se pot determina în mai multe moduri, ceea ce de altfel servește ca bază în clasificarea instrumentelor de nivelat, putîndu-le clasifica în :

- Instrumente de nivelat cu vase comunicante (hidrostatice)
- " " " cu nivele cu bulă de aer
- " " " pendulare.

- 1. Instrumentele de nivelat hidrostatice.

Cele mai simple instrumente, cu ajutorul cărora se poate realiza un plan orizontal, sînt nivelele cu apă sau hidrostatice, bazate pe principiul vaselor comunicante.

Ele se compun din doi cilindri de sticlă, legați printr-un tub orizontal.

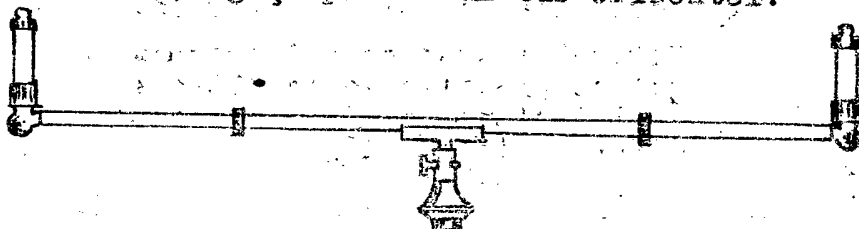


Fig. 292.

Deci se toarnă apă în instrument, aceasta va determina, prin suprafața liberă din cele două vase,

- 412 -

un plan orizontal.

Operatorul, așezat la o distanță de cca. un metru departe de instrument, vizează cele două suprafețe libere ale lichidului și în dreptul lor face citirea pe miră.

Instrumentul are o lungime de cca. 1,20 m.

Desavantajele nivelei cu apă constau în faptul că lichidul este influențat de vânt și nedă o suprafață ondulată, oscilând încet și în afară de aceasta, lucrând cu ochiul liber raza de acțiune a instrumentului este redusă.

Ca o îmbunătățire a acestui instrument de nivelat, o variantă a lui, este construcția în formă de tor.

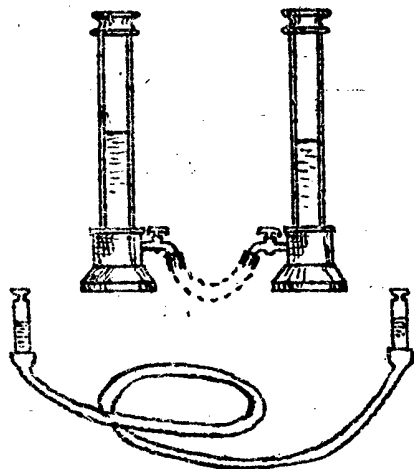


Fig. 294.

Pînă la un nivel oarecare torul este umplut cu lichidul, care în baza principiului vaselor comunicante, ne determină un plan orizontal OH de care ne servim în comparațiile noastre.

Mai există și o altă formă a instrumentului de nivelat bazat pe acelaș principiu.

Instrumentul diferă de cele precedente, doar prin aceea că în locul tubului orizontal rigid este întrebuințat un tub de cauciuc, în lungime de 10-15 și chiar 25 m.

Vasele cilindrice dela capetele instrumentului sînt gradate, așa încît diferența de nivel se poate citi direct pe sticla gradată.

Toate aceste instrumente nu ce o manipulare grea și pot fi întrebuințate cu succes în plantații și chiar în mină, unde operațiunea cu instrumente cu lunetă este destul de dificilă.

Ultimul aparat este întrebuințat cu predilecție de către mecanici, atunci cînd au de făcut diferite instalații.

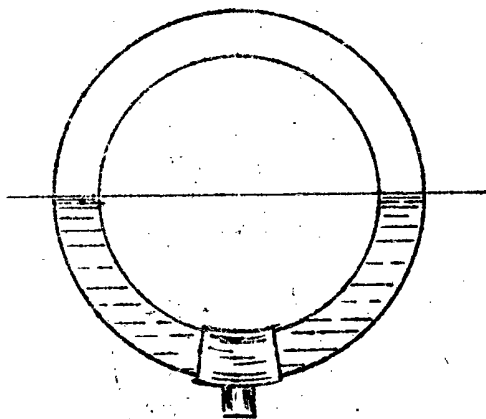


Fig. 293



## - 2. Nivele cu pinule.

Instrumentul de nivelat cu bulă de aer pot fi instrumente cu pinule și instrumente cu lunete.

Nivela cu pinule constă dintr-un dispozitiv de calaj, o pinulă obiectiv, una ocular și nivelă cu bulă de aer.

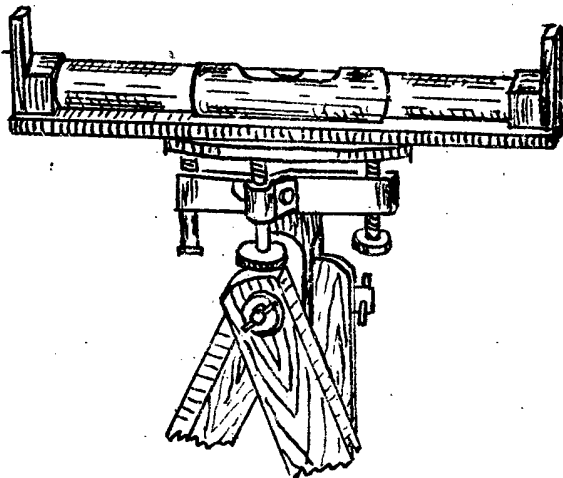


Fig. 295 .

Pinula ocular prezintă ferestruica îngustă, prin care privim firul orizontal, plasat în ferestruica pinulei obiectiv.

Citirea se face atunci când bula de aer, rectificată, se găsește între repere.

De aci rezultă condițiunea de bună funcționare a instrumentului și anume:

tangenta la marca libelei trebuie să fie paralelă cu planul de viză determinat de orificiul îngust al ocularului și firul reticular orizontal al pinulei obiectiv.

## Verificarea și rectificarea nivelei cu pinule.

Înainte de întrebuințarea nivelei, ca de altfel a oricărui alt instrument, se face verificarea și rectificarea ei.

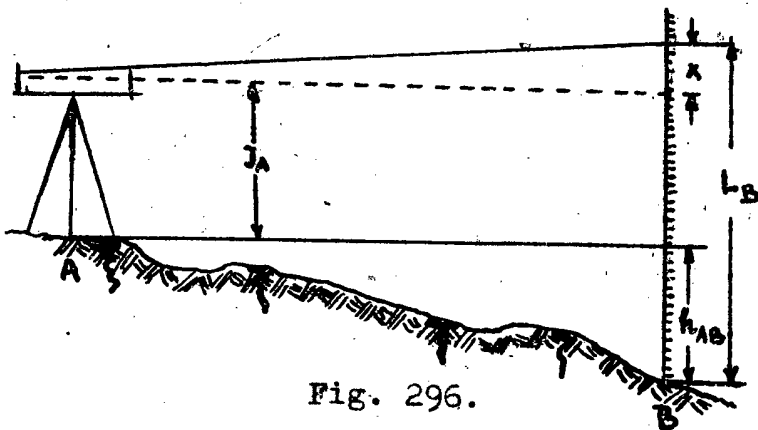


Fig. 296.

Să presupunem că instrumentul s-ar găsi în stație în punctul A (Fig. 296) și citind pe mira plasată în punctul B găsim citirea  $L_B$  care ar fi afectată de eroarea  $x$ .

Cu notațiile din figură, unde  $J_A$  reprezintă înălțimea aparatului, adevărată valoare a diferenței de nivel între

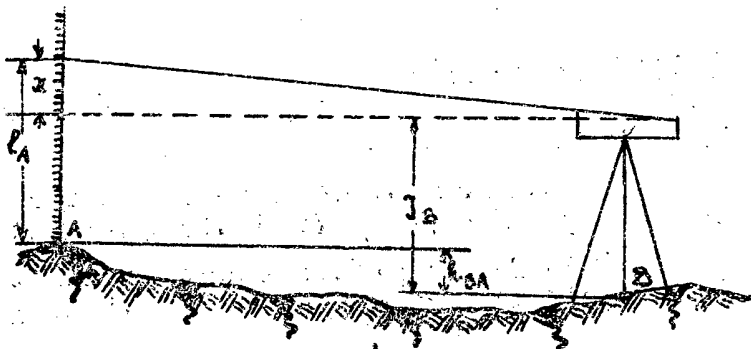


Fig. 297.

punctele A și B este  $h_{AB}$  care de pe figură vedem că este:

$$h_{AB} = (L_B - x) - J_A$$

Făcînd stație în punctul B, se păstrează aceeași eroare  $x$ , citînd pe mira ținută în punctul A, citimea  $l_A$  înălțimea aparatului fiind acum  $J_B$ .

Diferența de nivel dintre B și A, adică  $h_{AB}$  din Fig. 297, este:  $h_{AB} = (L_B - x) - J_B$

Dar cum:  $h_{AB} + h_{BA} = 0$ ,

$$(L_B - x) - J_B + (l_A - x) - J_A = 0$$

Regrupînd termenii se obține:

$$(L_B - x) + (l_A - x) - (J_A + J_B) = 0$$

de unde:

$$x = \frac{L_A + l_A}{2} - \frac{J_A + J_B}{2} = \frac{(L_B - J_A) + (l_A - J_B)}{2}$$

În acest mod am obținut valoarea lui  $x$  și am făcut verificarea instrumentului.

Dacă  $x$  era zero, nivela era rectificată în caz contrar se îndreaptă, aparatul fiind în punctul de stație B, pinula către diviziunea  $l_A - x$ , de pe mira din punctul A și rectificăm libela cu bulă de aer în așa fel, încît în această poziție libela să fie între repere,

Corecțiunea se face din acel șurub  $\sigma$  de care am vorbit atunci cînd s-a studiat problema verificării și rectificării libelei.

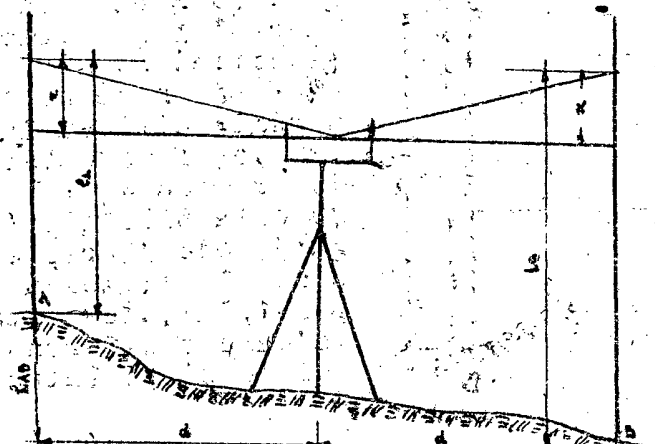


Fig. 298.

Aceasta a fost cazul rectificării nivelei cînd se face rectificarea și în alt mod și anume pentru cazul cînd se face stație la mijloc (Fig. 298).

În acest caz eroarea  $x$  se păstrează fiind aceeași atît cînd citim pe  $L_B$  cît și la citirea lui  $l_A$ .

Diferența de nivel  $h_{AB}$  este:

$$h_{AB} = (L_B - x) - (l_A - x) = L_B - l_A$$

Cu alte cuvinte eroarea instrumentului nu influențează

tează asupra diferenței de nivel.

Pentru rectificarea instrumentului, cunoscând diferența de nivel  $h_{AB}$ , determinată, făcând stație la mijloc, se mută nivela în punctul A sau în B și citim  $L_B$  măsurăm înălțimea aparatului și  $h_{AB}$  ar trebui să fie egal cu  $(L_B - J_A)$  din cauza erorii însă avem:

$$h_{AB} - L_B + J_A = 2x.$$

Acum fiind determinată eroarea  $x$ , rectificarea se face ca în cazul precedent, adică se îndreaptă pinulele spre citirea  $L_B - x$  și se aduce bila între repere de la șurubul  $\rho$  al libelei.

### - 3) Instrumente de nivelat cu lunetă fixă.

Instrumentele de nivelat cu lunetă se pot clasifica în mai multe categorii:

- Instrumente de nivelat cu lunetă fixă,
- " " " " " " ce poate fi scoasă de pe furci și întoarsă cap la cap.
- Instrumente de nivel cu lunetă mobilă, care se poate roti în jurul axei sale și cu nivela reversibilă.
- Instrumente de nivelat universale.

Desigur că sînt o serie întreagă de lunete cari fac parte dintr-una din aceste categorii, avînd anumite caracteristici ce depind de fabrica constructoare.

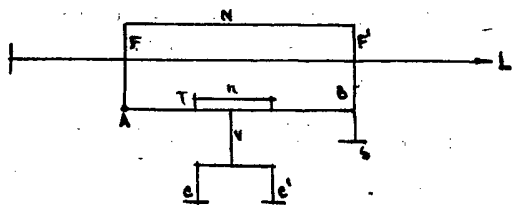


Fig. 299.

Între instrumentele de nivelat cu lunetă fixă se va descrie doar nivela Starke și Kammerer, de construcție foarte simplă, constînd dintr-un dispozitiv de calaj  $CC'$ , care poartă axul vertical  $V$ .

La capătul superior al axului  $V$  este prinsă o traversă  $T$  pe care se găsește libela  $n$ .

Traversa  $T$  în unele cazuri este prevăzută cu cerc gradat orizontal, avînd posibilitatea de a se roti în jurul axului vertical, poate servi la măsurarea unghiurilor orizontale.

În afară de cele arătate, nivela are două furci  $F$  și  $F'$  cari susțin o lunetă ( $L$ ) fixă.



- 416 -

Cele două furci sînt rezemate pe traversa T și anume furca F articulată în punctul A, iar furca în B este terminată cu șurubul S, numit șurub de elevație.

Capetele superioare ale furcilor FF' susțin o libelă nivelitică N.

Pentru o bună funcționare a nivelei trebuie să se satisfacă următoarele condiții:

- a) Tangenta libelei nivelitice N să fie perpendiculară pe axul V.
- b) Firele reticulare ale lunetei să fie perpendiculare.
- c) Axul optic al lunetei să fie paralel cu tangenta libelei nivelitice.

Pentru satisfacerea condiției prime ca tangenta libelei nivelitice să fie perpendiculară pe axul vertical, uneori chiar fabrica constructoare stabilește poziția furcii F' în care tangenta libelei este perpendiculară la axul vertical al instrumentului, arătînd aceasta printr-o liniuță gravată pe șurubul de elevație.

Așa că în acest caz nu am avea decât, simplu, de a pune în coincidență linia de pe șurubul de elevație cu traversa instrumentului.

În cazul cînd fabrica constructoare nu arată acest lucru, sau dacă se ține seamă că și fabrica poate să fie stabilit greșit poziția aceasta, atunci se așează luneta în dreptul unui șurub de calaj și se aduce bucla între repere cu ajutorul șuruburilor de calaj.

Se rotește apoi luneta cu  $180^\circ$  și dacă există o deviere a bulei de aer, se corectează jumătate din deviere din șurubul de elevație și cealaltă jumătate din șurubul  $\sigma$  al libelei nivelitice.

Rectificarea pentru condiția a doua se face vizînd un punct oarecare și prin zîndu-l pe firul orizontal hh al plăcii reticulare.

Plînbînd luneta la dreapta și la stînga se observă dacă punctul se găsește în permanență sau nu pe firul reticular.

În caz contrar se potriveste placa reticulară în așa fel, încît neorizantalitatea firului reticular să dispară.

Cea de a treia condiție este realizată în mod analog prin rectificarea identică cu cea descrisă la nivelele cu pinule, întrebunțînd unul din cele două procedee.

Punerea în stație a nivelei este similară cu cea a teodolitului, iar modul de întrebuințare, sumar, ar fi: după punerea lunetei în stație, se vizează mira având grijă ca luneta să fie orizontală, ceea ce se realizează cu ajutorul șurubului de elevație, prin care, aducând libela nivelatrice între repere, luneta este orizontală.

- 4. Instrumentele de nivelat cu lunetă ce poate fi scoasă de pe furci și pusă cap la cap.

**Schematic, un instrument de nivelat cu lunetă, ce poate fi scoasă de pe furci și pusă cap la cap, este reprezentat în Fig. 300, el fiind compus din: un dispozitiv de calaj ( $S_1, S_2, S_3$ ) cu fusul vertical V.**

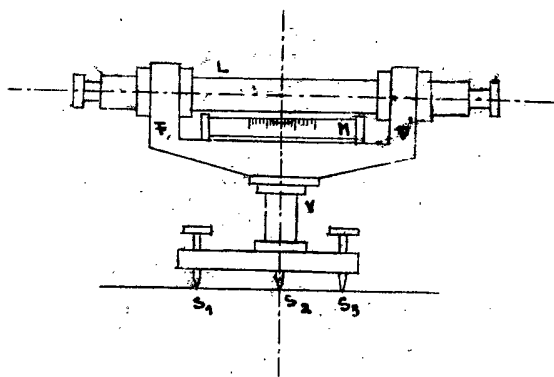


Fig. 300.

Furcile FF' sînt solidar legate cu traversa făcînd corp comun.

Traversa are posibilitate de rotație în jurul axului vertical V.

Particularitatea nivelelor arătate în figură constă în aceea că luneta este fixată în furcă cu o bară B care este prinsă de furcă prin șuruburi.

La nevoie însă luneta se poate scoate de pe fur-

ci și întoarce cap la cap sau slăbind șuruburile, luneta se poate roti și în jurul axei sale geometrice, adică poate fi rotită cu  $180^\circ$ .

Verificarea și rectificarea acestei nivele se face în scopul satisfacerii condițiilor de bună funcționare, ceea ce se asigură cînd:

- a) Libela cu bulă de aer N este reglată.
- b) Axul geometric al lunetei să fie perpendicular pe axul vertical.

- 418 -

- c) Axul geometric să coincidă cu axul optic.
- d) Firul reticular hh să fie orizontal.
- e) Reazemele lunetei să fie verificate.

Verificarea și rectificarea libelei este identică cu cea arătată la teodolit.

În ceea ce privește condiția 2-a, se procedează în modul următor:

Cu ajutorul șuruburilor de calaj, așa cum se știe, se pune instrumentul în stație și apoi se vizează un punct.

Se ridică luneta de pe furci, având grijă a nu o roti în jurul axei sale, apoi întorcem furcile și se așează luneta din nou.

Dacă punctul nu mai este la încrucișarea firelor reticulare, avem imediat certitudinea că axul geometric al lunetei nu este perpendicular pe axul vertical

Rectificarea se face luând jumătate din abatere, îndreptînd spre aceasta luneta prin mijlocirea șuruburilor dela furcă, dela turioane, cum a fost în cazul teodolitului.

Condiția ca axul geometric să fie paralel cu cel se asigură astfel: se vizează un punct, se rotește luneta în jurul axei sale cu  $180^{\circ}$ .

Dacă punctul vizat nu este la încrucișarea firelor reticulare, avem eroare, abaterea fiind dublul erorii.

Eliminarea erorii se face modificînd poziția plăcii reticulare, în mod identic ca la eroarea de colimație a teodolitului, din șuruburile ei.

Condiția ca firul hh să fie orizontal, este comun tuturor instrumentelor cu lunetă și s-a văzut cum se realizează.

Verificarea reazemelor lunetei se face spre a se constata dacă sînt egale sau nu, în caz negativ aparatul se trimite la atelier pentru reparație, sau dacă lucrăm cu el, se fac operațiile cu luneta direct și cu luneta cap la cap, luînd în totdeauna media citirilor.

În Fig. 301 se poate vedea instrumentul de nivelat arătat schematic în Fig. 300.

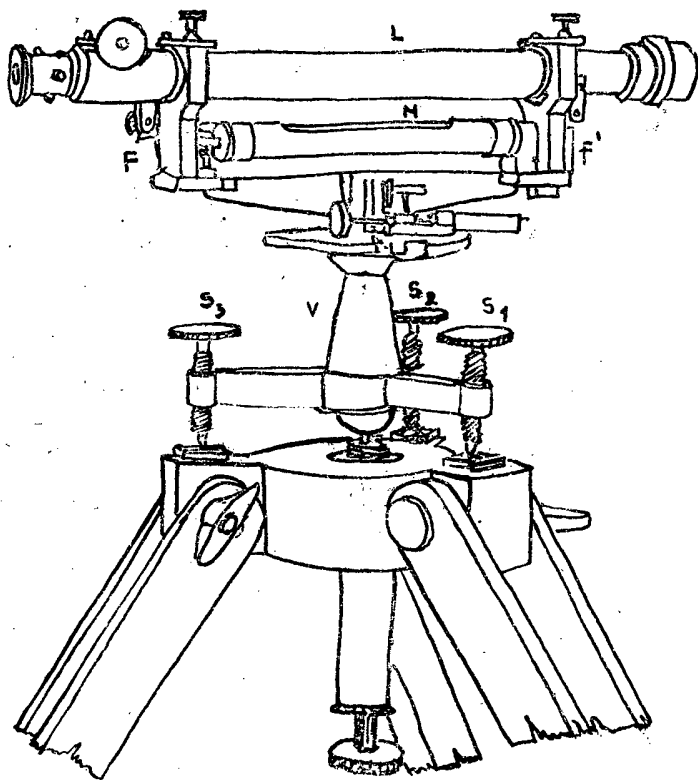


Fig. 301.

- 5. Instrumentele de nivelat cu lunetă mobilă ce se poate roti în jurul axei sale geometrice.

Aceste instrumente sînt denumite și nivele cu bulă independentă, pentru faptul că libela nivelatrice nu este fixată de aparat, ci se așează călare pe lunetă în timpul lucrului, ceea ce permite ca libela să poată fi întoarsă cap la cap, ori de cîte ori voin, fără ca luneta să fie deplasată din poziția ei. În mod schematic este arătat un astfel de instrument în Fig. 302, unde  $S_1, S_2, S_3$  sînt cele trei șuruburi ale dispozitivului de calaj.

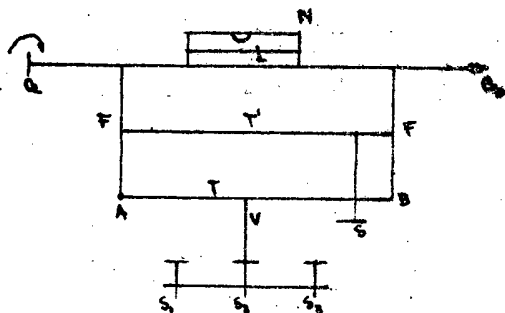


Fig. 302.

Furcile  $F$  și  $F'$ , spre deosebire de cazul precedent, nu sînt legate direct de traversa  $T$ , ce este solidară cu axul vertical  $C$ , ci legate solidar, între ele prin traversa  $T'$  și în complexul lor pot fi rotite în jurul

- 420 -

punctului de articulație A cu ajutorul șurubului de reglare sau elevație S.

Prin acest sistem de construcție se realizează orizontalizarea celor două reazine ale lunetei pe furci, fără a fi necesară întoarcerea cap la cap a lunetei.

În afară de cele arătate, caracteristic, acestor instrumente ca și de altfel a instrumentelor moderne, este faptul că luneta se poate roti în jurul axului ei geometric.

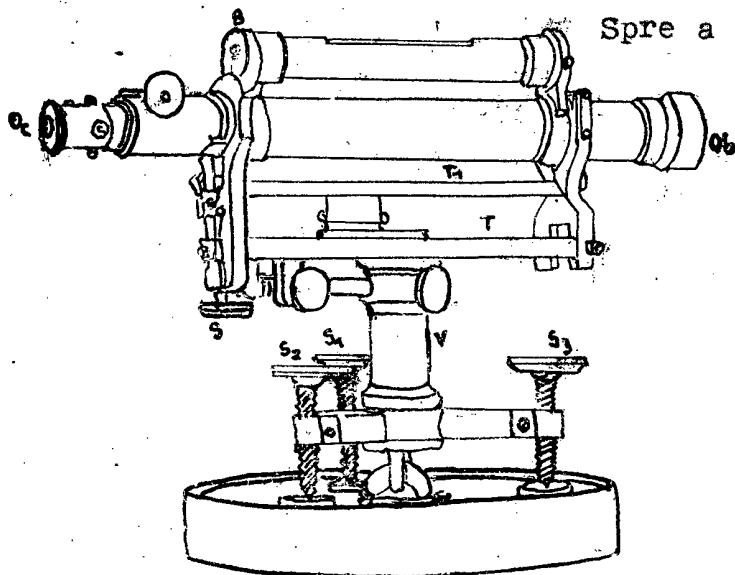


Fig. 303.

Spre a se putea vedea mai clar modul de construcție, ca și manipulara nivelelor cu lunetă mobilă în Fig. 303 este arătat un astfel de aparat, iar notațiile sînt identice cu cele din Fig. 302.

Rectificarea instrumentelor de nivelat cu lunetă mobilă se face în două etape și anume:

- a) Aducerea în coincidență a axului optic cu axul geometric.

Știind, așa cum s-a mai amintit, că axul optic este cel format de intersecția firelor reticulare și centrul lentilei obiectivului, iar axul geometric este format de centrul lentilei obiectiv și centrul lentilei ocular.

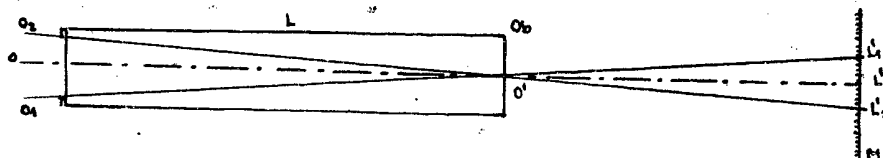


Fig. 304.

Să vedem cum verificăm dacă cele două axe (optic și geometric) coincid sau nu și cum facem rectificarea în cazul când nu coincid.

Pentru aceasta se așează, nivela în stație într-un punct oarecare, iar într-un alt punct o miră M.

Cu notațiile din figură, unde  $OO'$  este axul geometric al lunetei L, iar  $O_1O_2$  este axul optic, iar  $O_1$  este ocularul și  $O_2$  obiectivul, observăm că, atunci, când axul optic nu coincide cu axul geometric, noi operând cu axul optic, citim pe miră în loc de citirea L citirea  $L'$ .

Rotind acum luneta cu  $180^\circ$  în jurul axului ei, firele reticulare vor ajunge din poziția  $O_1$  în poziția  $O_2$  și se va citi pe miră M o altă citire  $L_2$ .

De exemplu, se presupunem că prin citire a dat:

$L' = 1,264$  m, iar citirea a doua:  $L_2 = 1,256$ .

Luând media acestor două citiri, se va obține tocmai citirea L ce trebuia să fie făcută dacă cele două axe erau în coincidență.

Pentru a elimina eroarea de ne-coincidență a celor două axe, se mișcă firele reticulare, recte placa firelor reticulare, din șuruburile ei, până când pe miră se citește  $L'$ , adică:  $\frac{1,264 + 1,256}{2} = 1,260 = L'$  și în acel moment am realizat ca axul geometric să fie în coincidență cu axul optic.

Urmează acum etapa doua a rectificării:

- b) Axul optic al lunetei să fie orizontal, atunci când bula de aer a libelei este între repere.

Deși axul optic este în coincidență cu axul geometric totuși este posibil ca libela să fie între repere, iar axul optic să nu fie orizontal, cazul din Fig. 305, poziția I.

Rotind acum luneta cu  $180^\circ$  se ajunge la poziția II (în figură punctat), când pe miră se face citirea  $L_2$ . Dacă axul optic era orizontal, când libela a

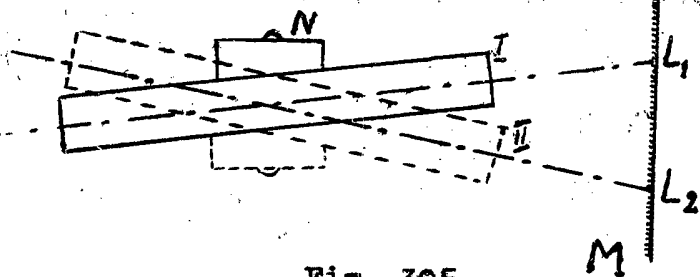


Fig. 305.

fost adusă între repere, după întoarcerea cu  $180^\circ$  a lunetei  
am fi citit pe miră aceeași gradată  $L_1$  și nu citirea  $L_2$ .

Atât în poziția I cit și în poziția II libela este adusă între repere cu ajutorul șurubului de elevație (Fig. 302).

Pentru rectificare se face media celor două citiri  $L_1$  și  $L_2$  și se va obține media lor:

$$L_0 = \frac{L_1 + L_2}{2}.$$

Se mișcă șurubul de elevație, în poziția II a aparatului, până în momentul în care pe miră facem citirea  $L_0$  (media celor două citiri) și apoi cu ajutorul șurubului al libelei rectificăm libela și realizăm ca atunci, când libela este cu bula de aer între repere axul optic să fie orizontal.

În afară de cele amintite, am avea de făcut rectificarea libelei nivelatrice, apoi firele reticulare hh să fie orizontale și perpendiculare cu firele vv, ceea ce se face analog cu cele deja arătate.

## - 6. Instrumente de nivelat universale.

Aceste instrumente, cari pot, la rândul lor fi clasificate într-o întreagă serie de instrumente, după felul de construcție al lunetei, astăzi nu sînt întrebuintate, locul lor fiind luat de teodolit și în special de teodolitele moderne Zeiss și Wild.

Ca principală caracteristică a lor, ceea ce le atrage și denumirea de instrumente universale o constituie faptul că sînt prevăzute cu cercuri verticale, adică permit și măsurarea unghiurilor verticale, deci putem executa mai multe feluri de nivelment cu ele.

Instrumentele de nivelat universale, devenind oarecum perimate, nu mai este cazul să insistăm asupra lor și de aceea nici nu se vor descrie, se va arăta în schimb, ceea ce este mai important, modul cum se execută nivelmentul cu teodolitul, cari sînt verificările și rectificările teodolitului necesare în vederea executării nivelmentului.

Dela început trebuie arătat că într-un fel se face rectificarea teodolitului prevăzut cu nivelă reversibilă și în altfel cea a teodolitului prevăzut cu nivelă universală.

Deci deosebim două cazuri, cînd teodolitul are libelă nereversibilă și cînd are libelă

reversabilă.

Pentru ambele cazuri se vor arăta doar rectificările ce trebuie făcute, încolo nivelmentul executându-se ca cel cu instrumentele de nivelat.

- a) Când teodolitul are libelă nereversibilă.

Știm că pentru a putea face nivelment cu teodolitul, este necesar ca atunci, când la cercul vertical se citește  $0^\circ$  sau la aparatele moderne  $100$  grade centesimale, luneta trebuie să fie orizontală.

Pentru acest lucru rectificarea aparatului se face în modul următor: în primul rând facem rectificarea cercului vertical, adică se vizează un punct cu luneta și se citește unghiul vertical, apoi dând luneta peste cap, vizăm același punct și citim din nou unghiul vertical.

În cazul că nu coincid cele două citiri, adică avem diferențe între prima și a doua citire, se face media acestor citiri și mișcăm șurubul micrometric de la vernierele cercului vertical, până când apare la cercul vertical media celor două citiri, cercul vertical fiind astfel rectificat.

Acum mișcând luneta până când la cercul vertical citim zero grade sau  $100$  grade, cum am mai amintit, se ajunge în poziția în care luneta trebuie să fie orizontală.

Ca atare se va strânge șurubul de fixare al lunetei și din șurubul libelei nereversibile o aducem pe aceasta să fie între repere și teodolitul a ajuns în acest caz în situația de a se prezenta ca un instrument de nivelat cu lunetă fixă și urmează să-i fie făcută rectificarea, așa cum procedam în cazul instrumentelor de nivelat cu lunetă fixă, făcând ca axul optic al lunetei să fie paralel cu tangenta libelei nereversibile, ceea ce știm că se obține prin efectuarea nivelmentului de la capăt între două puncte (A și B, Fig. 296,) alternativ dintr-un punct și din celălalt, ceea ce conduce apoi la eliminarea erorii  $x$ , a cărei valoare am arătat că este

$$x = \frac{(L_2 - J_A) + (L_1 - J_B)}{2}$$

Având pe  $x$ , se fixează luneta la citirea  $L_1 - x$  și rectificăm libela ca ea în această situație să fie între repere și aparatul este rectificat.

- b) Cazul când teodolitul are libelă reversibilă.

Acum rectificarea lui se face



- 424 -

similar ca în cazul instrumentelor de nivelat cu lunetă mobilă, adică având libela cu bula de aer între repere se vizează pe miră, dăm luneta peste cap și vizăm din nou mira.

Media celor două citiri ne arată poziția la care citire luneta este orizontală.

Se aduce luneta ca să arate citi-medi și apoi rectificăm libela, aducându-o între repere și aparatul este rectificat, putând acum executa cu el nivelment.

### - 7) Nivelă Zeiss.

Instrumentul de nivelat cel mai perfect este fără îndoială nivelul Zeiss, care față de instrumentele descrise în cadrul acestui Capitol prezintă, din punct de vedere al construcției, mai multe deosebiri.

Însă cea mai caracteristică parte a nivelului Zeiss o constituie libela cu prisme, bazată pe principiul arătat la descrierea teodolitului Zeiss.

După cum am arătat deja, precizia nivelmentului este strins legată de aducerea bulei de aer între repere.

Ori la instrumentele descrise pînă aci, aducerea bulei între repere era apreciată de către operator cu ochiul liber, fapt care constituia o importantă sursă de erori.

Dacă am lua un exemplu, am putea cu ușurință să ne dăm seama de acest lucru.

Intr-adevăr, admitînd că la nivelmentul de precizie, unghiul  $\mu$ , corespunzător unei diviziuni de pe nivelă este de  $10''$ , o diviziune avînd în mod obișnuit 2 mm.

Comițînd asupra poziției bulei o eroare  $\frac{1}{4}\mu$ , urmează că eroarea ce se transmite citirii pe mira, așezată de exemplu la distanța de 100 m, va fi:

$$\epsilon = \frac{\frac{1}{4} \times 100.000}{100} = \frac{2.5 \times 100.000}{206.265} = 1,2 \text{ mm}$$

Cu alte cuvinte, la distanța de 100 m comitem o eroare de  $\pm 1,2$  mm, ceea ce ar reveni la 1 km 12 mm.

Dar ținînd seama de faptul că în nivelmentul de ordin superior eroarea admisibilă, așa cum se va vedea, este cu mult mai mică decît 12 mm la 1 km (în nivelmentul de ord. III eroarea admisibilă este de  $\pm 7$  mm pe km), urmează că eroarea primită de noi, în presupunerea că am

- 425 -

putea comite o eroare datorită deplasării bulei de aer numai cu  $1/4$  din diviziunea nivelului, adică  $0,5$  mm, ceea ce este foarte posibil la aprecierea cu ochiul liber, ne dă o eroare inadmisibilă.

Această eroare la nivelul Zeiss este simțitor redusă, ajungând la precizie de  $1/100$  din diviziunea în care este marcată mira.

Bula de aer la libela Zeiss, așa cum s-a arătat la descrierea acestei libele, printr-un sistem de prisme cu reflexie, permite aprecierea mai exactă a momentului când ea se găsește între repere.

Atunci când bula de aer se găsește între repere, cele două sferturi ale bulei vor fi văzute ca în Fig. 306, iar când bula nu este între repere, cele două sferturi se vor vedea ca în Fig. 306.

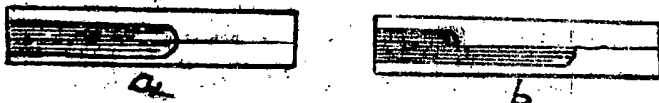


Fig. 306.

Adică în cazul că bula este între repere, cele două sferturi fac un corp comun.

O altă îmbunătățire adusă nivelului Zeiss îl constituie faptul că această nivelă, spre deosebire de cele anterioare, nu mai are furcile pe cari le aveau celelalte instrumente, furci cari constituiau o sursă de erori.

Rolul acestor furci la nivelul Zeiss îl are un manșon (M Fig. 307) în care este introdusă luneta.

Dispoziția adoptată este reprezentată schematic în Fig. 307.

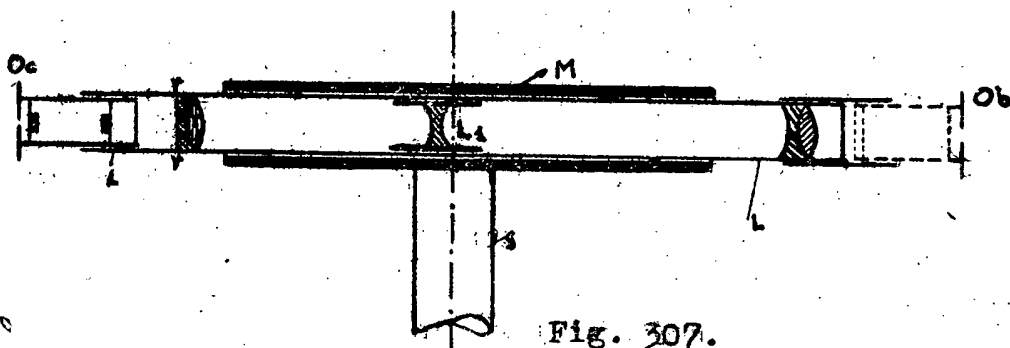
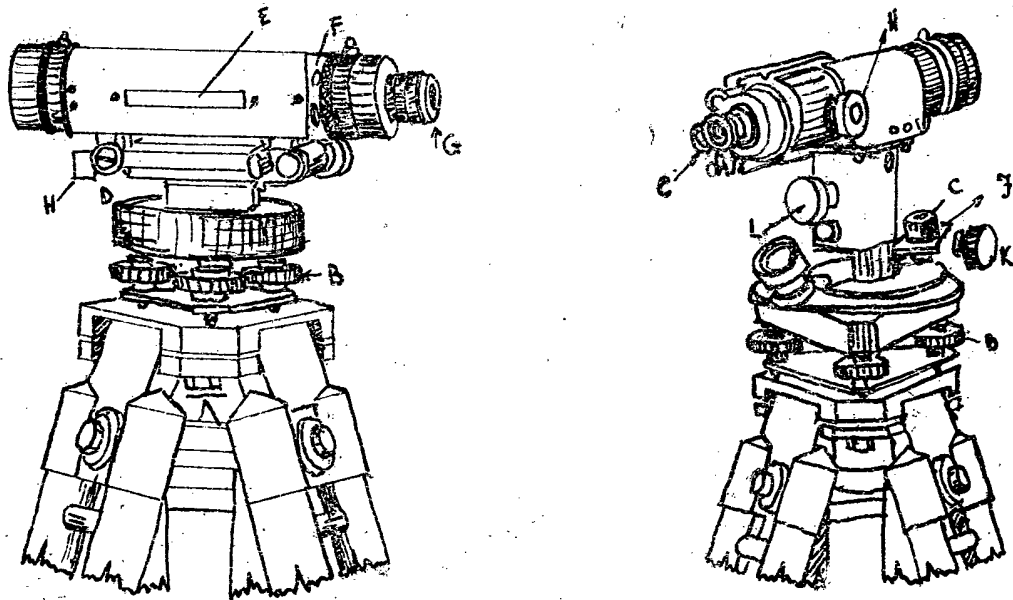


Fig. 307.

unde LL reprezintă luneta, M manșonul, rr reticul care este format din două lentile pe a căror suprafață plană sînt gravate firele reticulare, Oc este ocularul lentilei și Ob obiectivul ei, S reprezintă suportul lunetei, care este solidat legat de manșonul M.

Acest suport joacă rolul axului vertical al instrumentului. Instrumentul, grație faptului că manșonul este solidar cu suportul S, se prezintă sub forma unui T rigid. Sumar se va face descrierea nivelei Zeiss reprezentată în Fig. 308 a și 308 b.



a - fără cerc orizontal. b - cu cerc orizontal  
Fig. 308.

În această figură avem: A șurub de strângere; B cele 3 șuruburi de calaj al căror rol este identic cu al tuturor instrumentelor descrise până acum; C libelă sferică; D oglindă cu care se poate urmări aducerea bulei de aer între repere; E ferestruică pentru observarea directă a libelei nivelatrice; F reprezintă o lupă cu ajutorul căreia, în afară de oglinda D, se observă cu precizie aducerea bulei de aer între repere în concordanță cu cele amintite la libelele sistemului Zeiss. Ocularul G identic ca la teodolit, prevăzut cu indicator pentru dioptrii (potrivire pentru ochiul operatorului); H este șurubul de culisare al lentilei divergente L, din Fig. 307; J șurubul de presiune, cu același rol ca al șurubului de presiune de la teodolit și în mod analog șurubul micrometric al mișcării orizontale K.

Șurubul de elevație L servește aceluiași scop ca la nivelele descrise până aici. Șuruburile pentru rectificarea libelei nivelatrice și a libelei sferice, notate cu P în Capitolul în care au fost descrise libelele, sînt notate în Fig. 307 cu literile M și N.

Să vedem acum cum se face verificarea și rectificarea nivelei Zeiss, ceea ce ne va conduce la a vedea cum se lucrează pe teren cu o astfel de nivelă.

În primul rînd se așează aparatul în stație, solid, după ce în prealabil s-a făcut verificarea și rectificarea libelei sferice, în mod analog ca la instru-

mentele de măsurat unghiuri, ca la teodolite, făcând ca bula de aer a libelei să fie între repere pe direcția a două șuruburi de calaj și pe direcția cap la cap decalată față de prima cu  $180^\circ$ . După aceea se așează pe teren, la o distanță de cca. 50 m de aparat, în poziție perfect verticală, o miră.

Apoi având libela nivelatrice la stînga lunetei, se vizează mira, avînd grije ca bula de aer să fie adusă între repere cu ajutorul șurubului de elevație (L) și se citește pe miră. Aceasta este poziția I-a a aparatului.

Se rotește luneta în manșonul M cu  $180^\circ$  în jurul axului ei de simetrie, aducînd bula de aer a libelei nivelatrice, care acum se va găsi la dreapta lunetei, la fel ca în cazul precedent între repere, tot cu șurubul de elevație L. În aceasta a doua poziție a aparatului se face din nou citire pe miră.

Media aritmetică a acestor două citiri ne va da citirea ce trebuie făcută pentru ca axul geometric al lunetei să fie în coincidență cu axul optic al ei, așa cum s-a arătat la nivelele cu lunetă mobilă.

Dacă însă se scoate ocularul și pe obiectiv se pune o lentilă specială, în acest caz lucrurile se vor petrece ca și cum am avea în locul ocularului obiectiv și invers obiectivul devine ocular. Se ajunge astfel la poziția III-a, ce poate fi considerată identică cu luneta peste cap. Vizăm și acum mira, făcînd a treia citire.

În sfârșit, o ultimă fază, a IV-a, se întoarce luneta în manșonul ei cu  $180^\circ$ , la fel ca în poziția II-a, bula de aer se aduce între repere cu șurubul de elevație L, apoi se citește pe miră citirea 4-a. Media valorilor citite pe miră în cele patru poziții este complet lipsită de eroare.

Avînd această medie, reșanem aparatul în poziția I-a, adică libela nivelatrice să fie la stînga lunetei, se manevrează din șurubul de elevație L, pînă cînd se citește pe miră valoarea lipsită de eroare, adică media celor patru citiri de mai sus.

Acum dacă libela nivelatrice nu are bula de aer între repere, se mișcă din șurubul M al acestei libele, pînă cînd bula este între repere și aparatul este rectificat.

Odată rectificarea făcută, urmează ca la fiecare citire pe miră, aparatul fiind pus în stație, se va aduce doar cu șurubul de elevație bula de aer a libelei nivelatrice între repere și se face citirea la încrucișarea firelor reticulare.

- 428 -

In rezumat, pentru rectificarea nivelei Zeiss cu lunetă mobilă, ce poate fi rotită în jurul axei sale geometrice, avem următoarele faze:

- I libela între repere, la stînga lunetei, citim pe miră  $a_1$ ,
  - II libela între repere, la dreapta lunetei, prin rotirea lunetei în jurul axului ei, citirea  $a_2$ ,
  - III inversarea ocularului cu obiectivul, citirea  $a_3$ ,
  - IV din poziția III se rotește luneta în jurul axului ei, se face citirea  $a_4$ .
- Revenirea la poziția I-a, schimbînd ocularul și luînd lentila specială, iar cu șurubul de elevație aducem luneta pînă cînd la intersecția firelor reticulare facem citirea:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}$$

și se aduce cu șurubul M bula libelei între repere.

Atunci cînd se execută nivelment de precizie, se face citirea cu luneta în poziție I și în poziția II.

Celelalte două poziții III și IV servesc numai pentru rectificarea aparatului.

In cele arătate mai sus s-a descris rectificarea nivelei Zeiss cu lunetă mobilă.

Nivela Zeiss cu lunetă fixă, este analogă cu a celorlalte instrumente de nivelat cu lunetă fixă.

Trebuie să amintim că, pentru citirea foarte exactă pe miră, sînt nivele Zeiss, cărora li se poate adapta în fața obiectivului o lamă rotundă de cristal, cu fațele perfect paralele, care permite ca razele de lumină perpendiculare pe fața ei, să o străbată fără deviație, pe cît timp o rază înclinată va suferi la trecerea prin această lamă o deviație, ce este funcție de înclinarea ei, iar după ce a trecut prin lamă, își continuă drumul paralel cu cel inițial, însă deplasat conform refracției suferite.

Cu alte cuvinte, să presupunem că în operațiunile noastre am observat că firul reticular al lunetei nu ne arată o diviziune întreagă de pe miră, ci se găsește cuprinsă în spațiul dintre două diviziuni.

Dacă am lucra cu instrumentele vechi acest spațiu, așa cum am obișnuit pînă acum, l-am fi estimat, cu aproximație, din ochi.

- 429 -

Cu nivela Zeiss putem însă determina în mod mecanic, precis, acest spațiu, prin întrebuintarea lamei-cristal.

Intr-adevăr punând în fața obiectivului lama-cristal, a cărei înclinare o comandăm cu un buton special, căutam ca margina diviziunii tăiate de fir să vină în coincidență cu firul reticular.

Știind că la un tur complet al butonului, cu ajutorul lamei se poate deplasa o diviziune întreagă de pe miră.

În cazul că trebuie estimată doar o fracțiune din ea, se va căuta diviziunea de pe buton, care este citită în momentul când se obține contactul dintre marginea diviziunii de pe miră cu firul reticular.

Butonul având 50 diviziuni, iar cu ochiul liber se poate aprecia jumătatea de diviziune de pe acest buton, urmează că precizia cu care putem citi pe miră este de  $1/100$  dintr-o diviziune a mirei.

Un exemplu numeric va lămurii mai complet această problemă.

Pe miră avem marcate diviziunile din cm în cm.

Să presupunem că citim 1,46 m, însă firul reticular este cuprins între 1,46 și 1,47; nu este exact pe diviziunea 1,46.

În acest caz se așează în fața obiectivului lama-cristal, rotim butonul, până în momentul când diviziunea 1,46 de pe miră, o vedem exact pe intersecția firilor reticulare; și citim de exemplu pe butonul special 42 diviziuni, citim rotim butonul pentru a aduce diviziunea 1,46 a mirei în coincidență cu firul reticular.

Însemnează că citirea exactă pe miră este:  $1,46 \text{ m} + \frac{42}{50} \text{ cm} = 1,4684 \text{ m}$ .

Ca date constructive, nivela Zeiss

C are:

Puterea de mărire a lentilei.....	de 25 ori
Diametrul obiectivului.....	" 30 mm
Distanța minimă de vizare.....	1,90 m
Unghiul de vizare.....	1,8°
Lungimea lunetei.....	190 mm
Mărima unei gradațiuni a libelei nivelatrice.....	30" / 2 mm
Cea a unei gradațiuni a libelei sferice.....	10' / 2 mm
Înălțimea instrumentului.....	120 mm
Greutatea instrumentului.....	2 kg.

- 430 -

- 8. Instrumente de nivelat expeditive.

Acestea sînt instrumente uşoare, cari permit executarea unor operaţiuni rapide şi se întredobîndu-şî bînţesc cu deosebire în cazul cînd precizia cerută nu est prea mare.

Sînt o mulţime de fabrici constructoare, cari au dat tipuri diferite, amintim doar că între cele mai bune şi mai des utilizate sînt: Nivelat construită, în Uniunea Sovietică, aşa denumită N.T, nivelat Iaşu, nivelat Neuhofer şi Soha.

Si acestor nivele le lipsesc furcile înlocuite cu un suport asemănător cu cel al nivelat Zeiss, care joacă rolul axului vertical.

Apoi o caracteristică esenţiala a acestor instrumente este că şurubul de elevaţie le imprimă o mişcare de rotaţie în jurul unui punct plasat pe mijlocul lunetei, ceea ce ne permite a considera că aceste instrumente au mişcare de elevaţie compensată.

La cele mai multe (libela N.T. şi Neuhofer şi Soha) libela nivelatrice este plasată în partea stîngă a lunetei, iar aducerea bulei aer între repere poate fi observată într-o oglindă.

Unele din aceste instrumente sînt prevăzute şi cu cercuri gradate orizontale, ceea ce ne dă posibilitatea de a executa şi nivelment radial.

O b s e r v a   i u n e .

În cadrul Capitolului următor, se va arăta modul de lucru cu instrumentele de nivelat, adecvate metodei de nivelment respective.

- 431 -

### CAP. III.

#### METODELE DE NIVELMENT.

În Capitolul precedent, tratînd despre instrumentele cele mai uzitate în nivelment, s-a arătat și modul cum se determină diferența de nivel între două puncte.

Urmează ca în prezentul Capitol să fie descrise diferitele metode utilizate în scopul determinării diferențelor de nivel între punctele din regiunea unde operăm, arătînd metodele cele mai indicate pentru diferitele cazuri ce pot fi întîlnite în practica operațiunilor, precum și cazul cînd sînt indicate a fi întrebuintate.

Enumerînd metodele de nivelment, deosebit:

- Nivelment geometric,
- Nivelment trigonometric,
- Nivelment tachimetric,
- Nivelment barometric.

#### - A) NIVELMENTUL GEOMETRIC.

Nivelmentul geometric este acela la care linia de viză este orizontală, sau mai bine zis luna instrumentului de nivelat este orizontală în timpul operațiunii de citire pe miră.

De aci se poate cu ușurință deduce că nivelmentul geometric poate fi cu folos întrebuintat în cazul terenurilor neaccidentate.

După modul de executare avem nivelment geometric dela capăt și nivelment geometric dela mijloc.

#### 1) Nivelmentul geometric dela capăt.

Avînd un aliniament oarecare, de exemplu axul unei șosele, ne punem problema de a determina



- 432 -

cota fiecărui punct de schimbare de pantă de pe acest aliniament, care poate fi drept sau frînt.

Se pornește cu nivelmentul dintr-un punct (A) de cotă cunoscută, adică dela capătul aliniamentului nostru.

Făcînd stație cu instrumentul de nivelat în punctul A de cotă cunoscută, Fig. 309, aparatul fiind rectificat, conform celor arătate la descrierea instrumentelor de nivelat și avînd luneta orizontală, se dă viză către mira (M), plasată vertical în punctul 1, făcînd pe această miră citirea  $L_1$ .

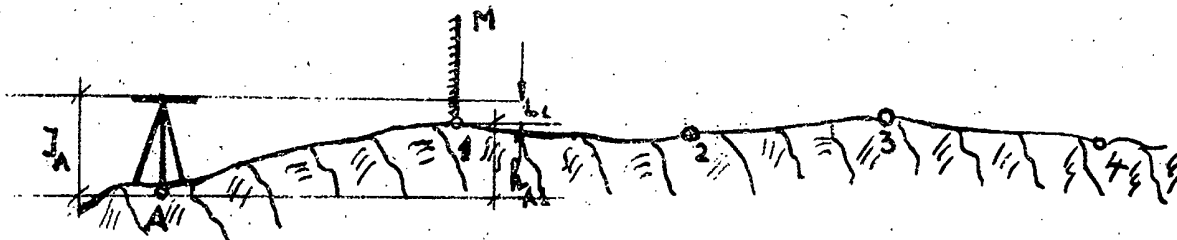


Fig. 309.

Din figură se observă că diferența de nivel între punctul A și punctul 1, notată cu  $h_{A1}$  este:

$$h_{A1} = J_A - L_1$$

Unde  $J_A$  reprezintă înălțimea aparatului în punctul A, iar  $L_1$ , așa cum am amintit, citirea pe mira din punctul A.

Dar:  $h_{A1} = J_A - L_1 = -(L_1 - J_A)$ .

Așa că putem scrie, generalizînd, că:  $h_{A1} = L_1 - J_A$ .

După aceea se face stație cu nivela în punctul 1, măsurînd înălțimea instrumentului în acest punct ( $J_1$ ) și citim pe mira plasată în punctul 2, adică  $L_2$ .

Diferența de nivel între punctele 1 și 2 este:  $h_{12} = L_2 - J_2$ .

Precedînd analog, adică făcînd stație cu nivela, succesiv, în fiecare punct, aflăm diferențele de nivel între două puncte vecine.

Ținînd însă seama de semnele pe care le au diferențele de nivel, se poate scrie:

$$h_{A2} = h_{A1} + h_{12}$$

Sau:  $h_{A2} = h_{A1} + h_{12} + \dots + h_{n-1,n} = \sum h$ .

Si putem, ca atare, determina diferența de nivel între oricare punct de pe aliniamentul în cauză.

- 433 -

Ori, cunoscând cota absolută a punctului A, pe  $H_A$ , pot fi calculate cotele tuturor celorlalte puncte:

$$H_1 = H_A + h_{A1}; \quad H_2 = H_1 + h_{12}, \text{ etc.}$$

Ca inconvenient, de remarcat este, că în fiecare punct de stație sîntem nevoiți a măsura înălțimea aparatului, fapt pentru care, practic, metoda nivelmentului geometric dela capăt are importanță redusă și se va în-trebuința nivelmentul geometric dela mijloc ori de cîte ori puteam aplica nivelmentul geometric.

- 2) Nivelment geometric dela mijloc.

Avînd un aliniament, similar cu cel luat pentru nivelmentul geometric dela capăt, ne propunem ca și în acel caz de a găsi cota fiecărui punct de pe aliniamentul nostru.

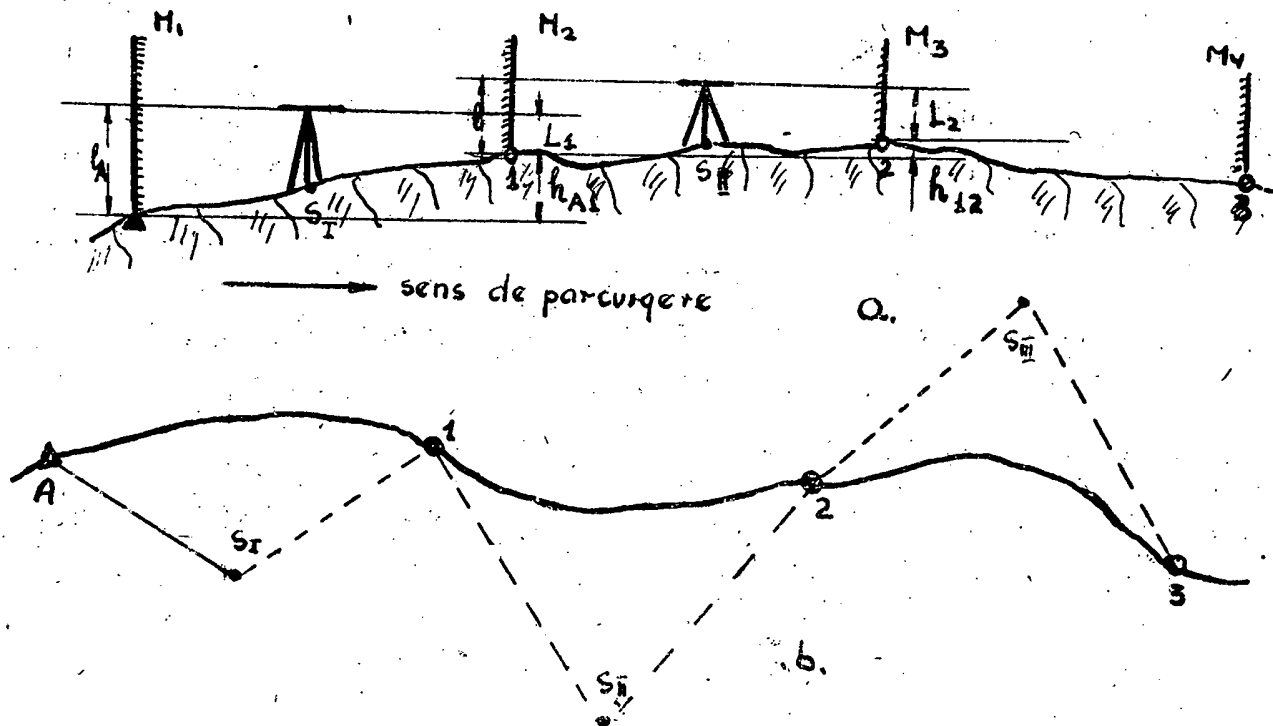


Fig. 310.

- 434 -

În loc de a face stație în punctul A și apoi în celelalte puncte ale aliniamentului nostru, a căror cotă ne interesează, se face stație între punctele a căror cotă o căutăm și anume în punctele  $S_I, S_{II}, S_{III}$ , etc, situate la mijlocul distanței dintre puncte.

Aceste puncte de stație, după cum se observă în figura 310 b, nu este necesar a fi alese chiar pe aliniamentul nostru, ci pot fi luate deoparte sau de cealaltă parte a aliniamentului, după cum terenul ne permite, însă în așa fel, ca distanțele, pînă la punctele între care se găsește, să fie cît de apropiat egale.

Deterită faptul că punctele de stație sînt făcute la mijlocul distanței dintre punctele noastre, metoda poartă numele de nivelment geometric de la mijloc.

Făcînd stație cu nivela în punctul  $S_I$ , se aduce după cum se știe, luneta orizontală, după ce în prealabil a fost efectuată rectificarea aparatului.

În punctele A și 1 avînd plasată, vertical, o miră, se dă viză, în primul rînd, către punctul A, adică o viză înapoi, spre punctul de unde pornim și a căruia cotă o cunoaștem, avînd însă grijă ca luneta să fie adusă orizontală cu șurubul de elevație al instrumentului.

Pe mira plasată în punctul A se face citirea  $L_A$ .

După aceea se vizează mira  $M_1$  din punctul 1, luneta fiind la fel în poziție orizontală și se citește pe această miră citirea  $L_1$ .

Diferența de nivel  $h_{A1}$  între punctele A și 1 este:

$$h_{A1} = L_1 - L_A.$$

Mutăm aparatul în punctul de stație  $S''$  (Fig 310), care arată în plan vertical mersul operațiilor, iar 310 b în plan orizontal.

După punerea în stație a aparatului se dă viză către mira din punctul 1, deci viză înapoi, ținînd seama de sensul în care parcurgem aliniamentul nostru.

Se face, pe această miră, citirea  $L_1$  cu luneta orizontală.

Apoi vizînd mira din punctul 2 se citește  $L_2$ .

Diferența de nivel este:

$$h_{12} = L_2 - L_1.$$

În mod analog se continuă lucrul pînă la punctul final, avînd grijă ca luneta, atunci cînd vizăm, să fie orizontală, realizînd aceasta cu șurubul de elevație al nivelei.

- 435 -

$$\text{Deci: } h_{A1} = L_1 - l_A$$

$$h_{12} = L_2 - l_1$$

$$h_{23} = L_3 - l_2$$

$$\text{Dar: } h_{nA} = \sum h = \sum (L + l) = \sum L - \sum l$$

### - 3). Precizia nivelmentului geometric.

Precizia nivelmentului depinde de determinarea precisă a înălțimilor de pe miră.

Erorile ce pot fi comise la această determinare își pot avea sursa în : neorizantalizarea vizei citirea inexactă pe miră și neverticalitatea mirei.

Să vedem îndeaproape repercurșiunea acestor surse de erori.

#### a) Neorizantalizarea liniei de viză sau

axul optic al lunetei nu este orizontal, ci ar fi înclinat cu un unghi  $\alpha$  (Fig. 311).

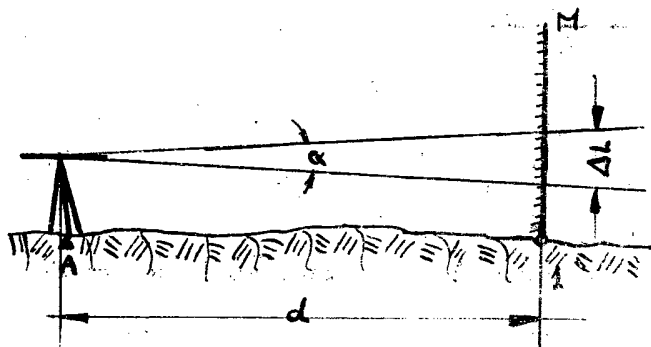


Fig. 311.

Desigur că acest unghi  $\alpha$  este foarte mic, ca valoare, ținând seama de faptul că orizantalizarea lunetei o face cu libela cu bulă de aer eroarea ce comitem la neorizantalizare ar putea fi 1/2 dintr-o diviziune a libelei, ori unghiul la centru, corespunzător unei diviziuni de pe libelă, notat de noi cu  $\mu$  diferă de la libelă la libelă, cu cât aparatul este mai precis, cu atât acest unghi  $\mu$  este mai mic el putând avea la aparatele obișnuite 10", iar

la cele de precizie 5" sau merge chiar pînă la 2", deo valoarea unghiului  $\alpha$  ar fi în jurul lui 5".

Datorită neorizantalizării liniei de viză, adică unghiului  $\alpha$  se comite la citirea pe miră eroarea  $\Delta L$  (Fig. 311), care este, unghiul  $\alpha$  fiind mic, :

- 436 -

Ca mărime, această eroare  $\Delta L$ , pentru  $\alpha = 5''$  și la o distanță  $d = 50$  m, ar avea valoarea:

$$\Delta L = \frac{5'' \cdot 50 \cdot 000}{206265} = 1,2 \text{ mm.}$$

Ori se observă că eroarea  $\Delta L$  crește proporțional cu distanța, așa că se atrage atenția ca luneta să fie precis orizontalizată, adică bula de aer să fie cu precizie între repere, aceasta cu deosebire în cazul nivelmentului de precizie.

-b) Citirea inexactă pe miră se datorește exclusiv neatenției operatorului, de aceea se recomandă foarte multă atenție la citiri și mai ales exercițiu cât mai mult.

Eroarea aceasta poate fi pozitivă sau negativă, după cum operatorul a citit mai mult sau mai puțin.

-c) Neverticalitatea mirei, ne dă în permanență o eroare pozitivă, spre deosebire de celelalte două erorile de neorizantalizarea vizei și cea de necitire exactă, cari pot fi pozitive sau negative.

Fie unghiul de inclinare al mirei  $\omega$  (Fig. 312), eroarea  $\Delta L$  ce comitem, datorită acestui fapt este

Dacă  $L'$  este citirea făcută pe mira înclinată și  $L$  citirea ce trebuia să o facem dacă mira era așezată perfect vertical,

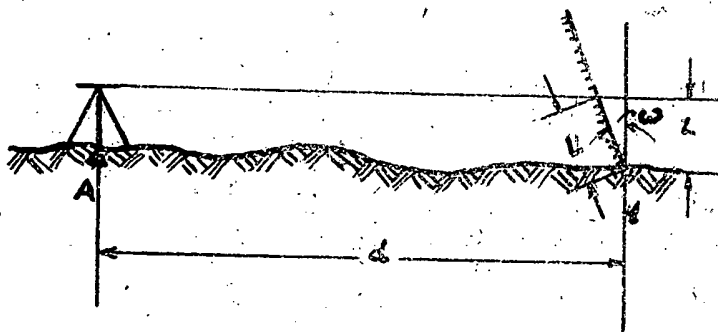


Fig. 312.

$$\begin{aligned} \Delta L &= L' - L \\ \text{Deci:} \\ \Delta L &= L' - L' \cos \omega = \\ &= L' (1 - \cos \omega) \\ \text{Dar:} \\ \cos \omega &= 1 - \frac{\omega^2}{2} + \dots - 1 + \frac{\omega^2}{2} \\ \Delta L &= L' \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\omega^2}{2} \right) \right] = \\ &= L' \frac{\omega^2}{2} \end{aligned}$$

Unde unghiul  $\omega$  este exprimat în radiani.

- d) Eroarea totală.

Notând cu  $\alpha$  eroarea datorită neorizantalizării axului xx, adică a neorizantalizării vizei.

Pentru citirea inexactă pe miră eroarea B

- 437 -

Eroarea de neverticalitatea mirei cu  $\lambda$ .

Deoarece primele două pot fi pozitive sau negative, pe cât timp ultima, eroarea de neverticalitate a mirei, nu poate fi decât pozitivă, eroarea totală  $\varphi$  exprimată în unghiu, este:

$$\varphi = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \lambda.$$

Repercursiunea acestei erori asupra diferenței de nivel, adică asupra citirii pe miră, observând Fig. 313 este:

$$\Delta L = d \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

Unghiul  $\varphi$  fiind mic,  $\operatorname{tg}$  se poate înlocui cu arcul și relația noastră va fi:

$$\Delta L = d \cdot \frac{\varphi''}{\rho''}$$

Dacă împărțim prin  $d$ :

$$\frac{\Delta L}{d} = \frac{\varphi''}{\rho''}$$

Raportul  $\frac{\Delta L}{d} = \mu$  se numește eroare mijlocie a înălțimii de miră pentru unitatea de lungime sau eroare unitară care ne indică precizia de vizare.

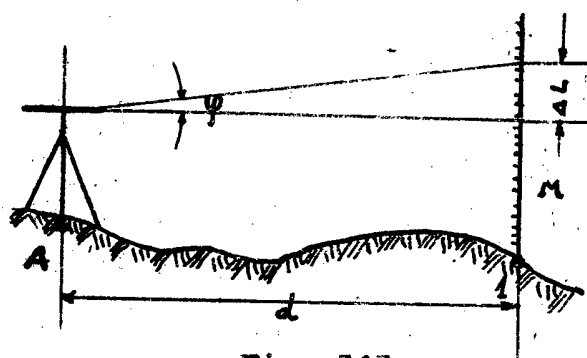


Fig. 313.

Ca o consecință a celor stabilite pînă aci se recomandă, ca sfaturi practice, în timpul operațiilor, pentru evitarea sau măcar diminuarea erorilor în nivelment, următoarele: atenție deosebită la poziția bulei între repere, adică la orizontalizarea vizei (în cazul cînd precizia cerută în nivelmentul ce executăm, este mare, se vor utiliza aparate cu libelă sistem Zeiss, la care aducere bulei de aer între repere se face mai exact), deosebită grijă la citirile pe miră, partătorul de miră să fie mereu atent de a ține mira în poziție verticală, cînd se cere precizie, se vor întrebuiți mire prevăzute cu libelă cu bulă de aer pentru asigurarea verticalității mirei.

În ceea ce privește plasarea mirei deasupra punctului, pe terenuri slabe, afinare, interpunerea între capătul mirei și teren a unei plăci este indispensabilă.

După așezarea în stație a instrumentului, operatorul trebuie să umble în jurul lui cu cea mai mare precauție.

Între orele 10 - 15, mai ales timpul căldurilor mari și după o perioadă ploioasă, cînd

- 438 -

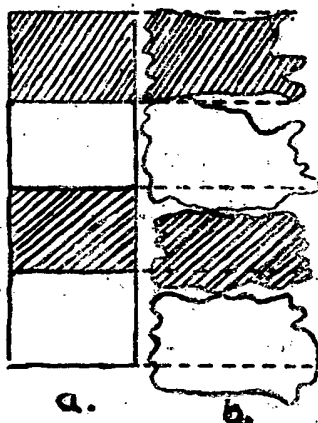


Fig. 314.

atmosfera este în vibrație, se vor suspenda lucrările pe teren, deoarece din cauza vibrației atmosferice diviziunile de pe miră se văd deformatе ca în Fig. 314 b, în loc de a fi văzute clar ca în Fig. 314 a, așa că o estimare atât precisă este imposibilă.

Din această cauză, timpul cel mai favorabil pentru ridicări este dimineața, din momentul când se face ziua până la orele 10 și d.n. dela orele 15 până când se întunecă.

- 4) Precizia nivelmentului geometric dela capăt și a nivelmentului geometric dela mijloc.

Din cele stabilite la precizia nivelmentului geometric, putem vedea care este precizia în cazul nivelmentului geometric dela mijloc și care este cea a nivelmentului dela capăt.

- a) Precizia nivelmentului dela capăt.

În cazul nivelmentului dela capăt, se stabilit că diferența de nivel  $h_{A1}$  este:

$h_{A1} = L - J$ , unde  $L$  reprezintă citirea pe miră, iar  $J$  înălțimea instrumentului.

Asupra lui  $L$  și  $J$ , comițind erorile  $\Delta L$  și  $\Delta J$ , eroarea comisă asupra diferenței de nivel  $h_{A1}$  va fi:

$$\Delta h_{A1} = \sqrt{\Delta L^2 + \Delta J^2}$$

Aceasta desigur pentru o singură măsurătoare.

Dacă am face nivelment între punctele  $A$  și  $B$ , depărtate între ele, fiind nevoiți să staționăm în mai multe puncte intermediare, diferența de nivel:  $h_{AB} = [L] - [J]$ , așa cum am văzut la nivelmentul geometric dela capăt.

Presupunând că distanțele dintre punctele de stație și cele de viză ar fi  $d_1, d_2, d_3, d_4, \dots, d_n$  și că aceste distanțe sînt egale, adică:  $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n = d$

- 439 -

în acest caz distanța între A și B este:  $D = n d$ .

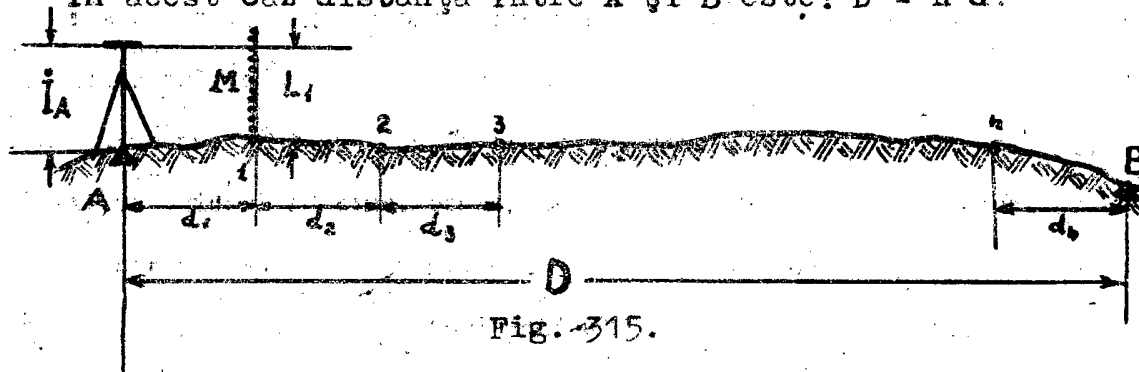


Fig. 315.

În acest caz eroarea de care este afectată diferența de nivel dintre puncte A, B este dată de relația:

$$\Delta h_{AB} = \sqrt{n \cdot \Delta L^2 + n \cdot \Delta J^2} = \sqrt{n(\Delta L^2 + \Delta J^2)}$$

Însă:  $n = \frac{D}{d}$ , deci:

$$\Delta h_{AB} = \sqrt{\frac{D}{d} (\Delta L^2 + \Delta J^2)}$$

Eroarea  $\Delta J$  poate fi pusă sub formă  $\Delta J = K \cdot \Delta L$  și se obține:

$$\Delta h_{AB} = \sqrt{\frac{D}{d} (1 + K^2) \cdot \Delta L^2} = \frac{\Delta L}{d} \sqrt{D \cdot d (1 + K^2)}$$

Unde:  $\frac{\Delta L}{d} = \mu$  reprezintă eroarea de citire pe unitatea de lungime, deci:

$$\Delta h_{AB} = \mu \sqrt{D \cdot d (1 + K^2)}$$

Această ultimă relație ne spune că, eroarea este în funcție de distanța totală D de nivelat, ca și de lungimea unei laturi din nivelment.

Notînd:  $\Delta L = d \cdot \text{tg } \alpha$  și înlocuind în relația:

$$\Delta h_{AB} = \frac{\Delta L}{d} \sqrt{D \cdot d (1 + K^2)} = \text{tg } \alpha \sqrt{d(1 + K^2)} \sqrt{D}$$

Pentru simplificare se notează  $K_1 = \text{tg } \alpha \sqrt{d(1 + K^2)}$  și se obține:

$$\Delta h_{AB} = K_1 \cdot \sqrt{D}$$

#### - b) Precizia nivelmentului dela mijloc.

Pentru nivelmentul dela mijloc am scris diferența de nivel, între două puncte vecine, ca fiind:

$$h_{A1} = L_1 - l_A$$



În această relație  $L$  reprezintă viza înainte, iar  $l$  viza înapoi.

Iar diferența de nivel între punctul de pornire  $A$  și punctul de sosire  $B$ , este:

$$h_{AB} = [L] - [l]$$

Dacă  $L_1$  și  $l_1$  sînt afectate de erorile  $\pm \Delta L$  și respectiv  $\pm \Delta l_1$ , atunci eroarea de nivelment va fi:

$$\Delta h_{A1} = \sqrt{\Delta L_1^2 + \Delta l_1^2}$$

$$\Delta h_{A2} = \sqrt{\Delta L_2^2 + \Delta l_2^2}, \quad \Delta h_{A3} = \sqrt{\Delta L_3^2 + \Delta l_3^2}, \text{ etc.}$$

Pe cînd eroarea diferenței de nivel între punctele extreme  $A, B$  va fi:

$$\Delta h_{AB} = \sqrt{[\Delta L]^2 + [\Delta l]^2}$$

Dacă se presupune că  $\Delta L_1 = \Delta L_2 = \dots$

$$\Delta L_n = \Delta l_1 = \Delta l_2 = \dots = \Delta l_n$$

$$\Delta h_{AB} = \sqrt{[\Delta L]^2 + [\Delta l]^2} = \sqrt{n(\Delta L^2 + \Delta l^2)} = \sqrt{2n\Delta L^2} = \Delta L\sqrt{2n}$$

Conform schiței Fig. 316 distanța între punctele extreme  $A, B$ ,

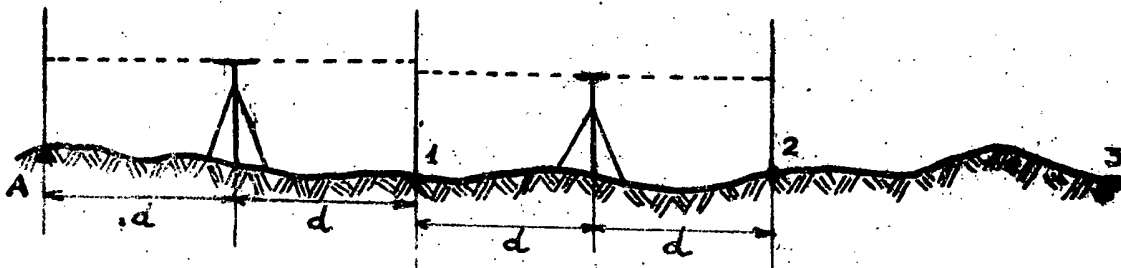


Fig. 316.

considerînd că distanțele între punctele  $A_1 = 12 = \dots = n B$ , avem:  $D = 2n d$  sau  $n = \frac{D}{2d}$

$$\text{Așa că: } \Delta h_{AB} = \Delta L \sqrt{\frac{D}{d}} = \frac{\Delta L}{d} \sqrt{d \cdot D}$$

Conform celor arătate:  $\frac{\Delta L}{d} = \mu$  deci:  $\Delta h_{AB} = \mu \sqrt{d \cdot D}$

Notăm  $K_2 = \mu \sqrt{d}$  și atunci  $\Delta h_{AB} = K_2 \sqrt{D}$ .

După cum se observă în ambele cazuri, atât la nivelmentul geometric de la mijloc, cât și la nivelmentul geometric de la capăt, eroarea medie pentru aceeași distanță de vizare este direct proporțională cu rădăcina patrată din distanța totală de nivelment.

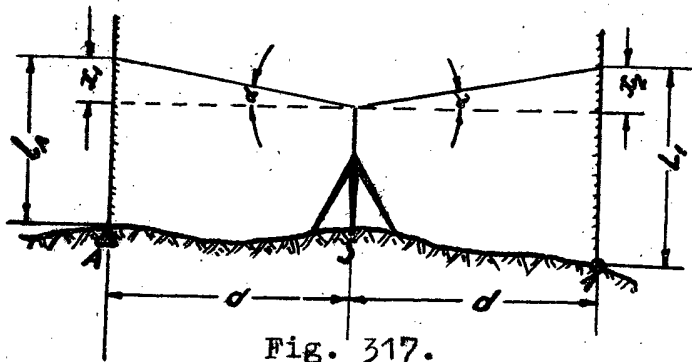
- 441 -

#### 4) Avantajele nivelmentului geometric dela mijloc.

In afară de inconvenientul arătat la nivelmentul dela capăt, adică necesitatea de a se măsura în fiecare stație înălțimea aparatului, nivelmentul geometric <sup>dela mijloc</sup> prezintă și următoarele avantaje; se elimină eventualele erori de instrument, cad corecțiunile datorite sfericității pământului și refracției.

- a) Eliminarea erorilor instrumentale și cele de punere în stație.

Din cauza erorilor instrumentale, sau din cauza erorii de punere în stație, aparatul fiind în stație



la mijlocul distanței dintre punctele A și B, dând viză înapoi către punctul A, libela nivelatrice se avînd bula între repere, adusă cu ajutorul șurubului de elevație, datorită erorii apare unghiul  $\alpha$  și noi vom face citirea înapoi  $L_1$  afectată de eroarea  $x_1$ .

Vizînd apoi mira din punctul B, eroarea instrumentală își păstrează valoarea, avînd tot unghiul  $\alpha$ , care nu va afecta citirea înainte  $L_2$  cu eroarea  $x_2$ .

Diferența de nivel  $h_{AB} = L_2 - L_1$  nu mai este afectată de nici o eroare, distanțele dela punctul de stație la punctele vizate fiind egale și erorile  $x_1 = x_2$ .

- b) Eliminarea corecțiilor de sfericitate și refracție.

Pentru motivul că aceste corecții afectează în valoare egală citirea înapoi ( $L_1$ ) și citirea înainte ( $L_2$ ), așa cum s-a văzut în capitolele respective, diferența de nivel nu este afectată de nici o eroare.

In urma acestor considerațiuni, adică în nivelmentul geometric dela mijloc, nu este necesară măsurarea greoaie a înălțimii instrumentelor, se înlătură erorile

instrumentale ca și corecția de sfericitate, cu ușurință putem afirma că nivelmentul geometric dela mijloc este cel mai precis, fapt pentru care în țările mai dezvoltate se va aplica de preferință nivelmentul geometric dela mijloc.

- 5. Nivelmentul geometric dela mijloc cu puncte intermediare.

În majoritatea cazurilor în afară de punctele extreme ale fiecărui panou, sîntem nevoiți a nivela odată cu ele și alte puncte intermediare.

Cu alte cuvinte, în afară de nivellarea punctelor extreme ale panourilor A, 1, 2, 3, ..... se vor nivela și punctele  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ;  $b_1, b_2, \dots, b_n$ ;  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ , etc. (Fig. 318).

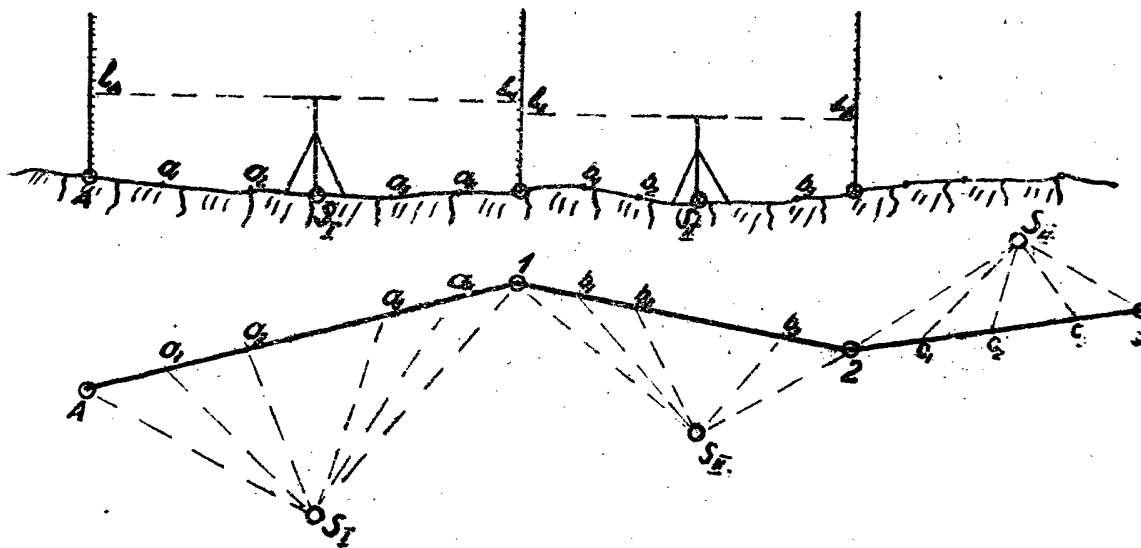


Fig. 318.

Așa cum am arătat, punctele de stație pot fi alese în afară aliniamentului panoului respectiv, condiția cerută fiind doar ca distanțele la punctele extreme să fie egale.

- 6. Protecțiile nivelmentului geometric dela mijloc și calculul acestor.

Rezultatul măsurărilor topografice se

se înscriu în carnetul de câmp, în tablouri, cari poartă denumirea de protocoale.

Cele pentru nivelment se numesc protocoale de nivelment.

Formatul lor poate fi de diferite feluri, recomandăm însă pe cel de mai jos, fiind cel mai indicat, deoarece cotele absolute ale punctelor sînt cu uşurinţă deduse.

Referindu-ne la nivelmentul geometric dela mijloc cu puncte intermediare, tratat mai sus, cu aceleaşi notaţii arătate în Fig. 318 şi luînd pentru citirile pe miră date numerice, considerînd că nivelmentul a fost executat între punctele A şi B de cotă absolută cunoscută, adică  $H_A$  şi  $H_B$  cunoscute, avînd valorile, de exemplu:

$$H_A = 90,000 \text{ m, iar}$$

$$H_B = 91,200 \text{ m,}$$

protocolul acestui nivelment ar fi cel arătat mai jos.

Completearea acestui protocol se face astfel:

Avînd nivela în staţie în punctul  $S_2$ , se dă o viză înapoi către punctul A şi se citeşte pe miră  $L_3$ , care se notează în rubrica 3, în cazul nostru această citire a fost luată egală cu 1,252 m.

Cunoscînd, din măsurători anterioare cota absolută a punctului A ca fiind 90,000 m, se poate deduce cota orizontului, sau cota liniei de viză, adăugînd la cota punctului A citirea înapoi  $L_3$ , adică  $90,000 + 1,252 = 91,252$ , ceea ce se poate urmări pe Fig. 319.

Avînd acum cota orizontului cunoscută, este foarte simplu de a afla cota absolută a tuturor punctelor vizate din staţia  $S_2$ .

Intr-adevăr, citind pentru punctele intermediare pe miră, de exemplu 0,914 m pentru punctul  $a_1$ , apoi 0,929 m pentru punctul  $a_2$ , etc., scăzînd aceste citiri din cota orizontului, care este trecută în rubrica 6, se deduce cota lor absolută.

In mod analog, vizînd punctul 1 se face pe miră citirea  $L_1$ , ce se înregistrează în coloana 5, avînd cota orizontului cunoscută, se află cota absolută a punctului 1, în cazul nostru ea este  $91,252 - 0,998 = 90,254$ .

P u n c t		Citiri pe miră m			C o t a			Dis- tanța înfr. puncte (S) Km	obs.
Sta- ție	Vi- ză	îna- poi m	mij- loc m	înain- te m	erizon- tului m	abso- lută m	com- pen- sată m		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$S_I$	A	1,252	-	-	91,252	90.000	90.000	$S_{I1} =$ 2 Km	
	$a_1$	-	0,914	-		90.338			
	$a_2$	-	0,929	-		90.323			
	$a_3$	-	0,870	-		90.382			
	$a_4$	-	0,990	-		90,262			
	1	-	-	0,998		90,254	90,264		
$S_{II}$	1	1,364	-	-	91,618	90,254	90,264	$S_{I2} =$ 1 Km	
	$b_1$	-	1,132	-		90,486			
	$b_2$	-	1,066	-		90,552			
	$b_3$	-	1,208	-		90,410			
	2	-	-	0,896		90,722			
$S_{III}$	2	1,675	-	-	92,397	90,722	90,737	$S_{28} =$ 3 Km	
	$c_1$	-	1,428	-		90,969			
	$c_2$	-	1,392	-		91,005			
	$c_3$	-	1,820	-		90,577			
	B	-	-	1,227		91,170	91,200		

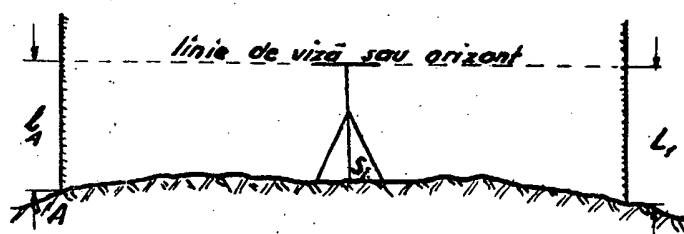


FIG. 319 .

Se mută instrumentul în punctul de stație  $S_{II}$ , cu luneta orizontală, se citește pe mira așezată în punctul 1, este citirea înapoi  $L_1$ , care în cazul nostru este 1,364 m și cum se cunoaște cota absolută a acestui punct (90,254 m), adăugăm la ea citirea înapoi și aflăm cota orizontului în punctul de stație  $S_{II}$ , care în exemplul luat, este:  $90,254 + 1,364 = 91,618$ .

Din cota orizontului, în mod similar ca în punctul de stație  $S_I$ , scăzând citirile respective din punctele intermediare  $b_1, b_2, b_3$ , ca și citirea înainte făcută în punctul 2, se găsesc cotele absolute ale acestor puncte.

Se procedează identic și în celelalte puncte de stație pînă se ajunge la punctul B.

În rezumat, la cota absolută cunoscută, adăugăm citirea înapoi făcută în acel punct și se găsește cota orizontului, din care scăzând citirea înainte, sau citirea de la mijloc pentru punctele intermediare, se află cota acestor puncte.

Terminând operațiunea, se ajunge la o cotă absolută pentru punctul B diferită de cota lui absolută cunoscută din măsurători anterioare.

În exemplul nostru am ajuns în urma măsurătorilor la cota 91,180 m pentru punctul B, diferită de cota lui absolută ce ne-a fost dată (cunoscută) care era 91,200 m.

Această diferență  $91,200 - 91,170 = 0,030$  m, reprezintă eroarea, care știm din cele arătate la precizia nivelmentului, că este direct proporțională cu distanța.

Din acest motiv la compensarea cotelor absolute, problema asupra căreia se va insista în altă parte, va trebui să ținem cont de distanță.

Să presupunem că distanțele:  $S_{12} = 2$  km,  $S_{23} = 1$  km și  $S_{2B} = 3$  km, în acest caz eroarea pe unitate va fi:

$$\frac{30 \text{ mm}}{[S]} = \frac{30}{6} = 5 \text{ mm/km, pe care va trebui,}$$

după ce am multiplicat-o cu distanța respectivă, să o adăugăm, în cazul nostru, în cazul general se adaugă sau se scade după cum eroarea este în minus sau în plus cotei absolute a punctului respectiv, pentru a avea cota absolută adevărată, compensată, a aceluși punct, pe care o trecem în coloana 8-a a protocolului.

Și atunci cota punctului 1 va fi  $90,254 + (0,005 \times 2) = 90,264$ , cea a punctului 2 este  $90,722 + [0,005 (2+1)] = 90,737$  și cota absolută a punctului B este  $91,170 + [0,005 (2+1+3)] = 91,170 + (0,005 \times [S]) = 91,170 + 0,030 = 91,200$ , adică exact cota absolută cunos-

- 446 -

cută a acestui punct.

- B. Nivelment trigonometric.

În terenurile unde pantele sînt foarte repezi, adică diferențele de nivel sînt foarte mari, cum este cazul în regiunile muntoase, cînd între vîrfurile muntelui și un punct situat la poalele lui, poate fi diferență de nivel de ordinul sutelor de metri, este imposibil să putem aplica nivelmentul geometric, nedispunînd de mire de așa lungime spre a putea face vize cu luneta orizontală.

În aceste cazuri se va întrebuiți nivelmentul trigonometric, care se numește astfel, fiind bazat pe rezolvarea în mod trigonometric a triunghiurilor dreptunghice, după cum se va vedea în cele ce urmează.

Deși nivelmentul trigonometric este mai puțin precis ca nivelmentul geometric, totuși este singura metodă ce poate fi întrebuițată în regiunile muntoase, cînd distanțele sînt mari.

Ca metode de nivelment trigonometric deosebit:

- Nivelment trigonometric dela capăt,
- Nivelment trigonometric dela mijloc și
- Nivelment trigonometric cînd nu se cunoaște distanța între punctele a căror diferență de nivel voia să o măsurăm.

- 1. Nivelment trigonometric dela capăt.

Dacă voim să aflăm diferența de nivel între două puncte A și B, (această diferență de nivel fiind mare) și se cunoaște în urma măsurărilor de planimetrie (din triangulație) distanța între cele două puncte, se întrebuițează metoda nivelmentului trigonometric dela capăt procedîndu-se în modul următor: într-unul din punctele, de exemplu în punctul A (Fig. 320 a și 320 b) se așază instrumentul în stație și cu luneta înclinată se vizează mira (M) plasată vertical în punctul B, făcîndu-se pe această miră citirea L.

În acelaș timp măsurăm și unghiul  $\alpha$ , precum și înălțimea J a instrumentului.

- 447 -

Deoarece este necesar să măsurăm unghiul vertical  $\alpha$ , trebuie ca instrumentul ce întrebuințăm, să aibe cerc vertical, pentru a putea avea acest unghi  $\alpha$ .

Din acest motiv la nivelmentul trigonometric se întrebuințează teodolitul.

Referindu-ne la Fig. 320, unde avem (în Fig. 320 a) cazul când punctul de stație este mai înalt ca punctul spre care vizăm și (Fig. 320 b), cazul când punctul în care staționăm, este mai jos ca punctul de viză, distanța între puncte A și B adică D este cunoscută, cum am

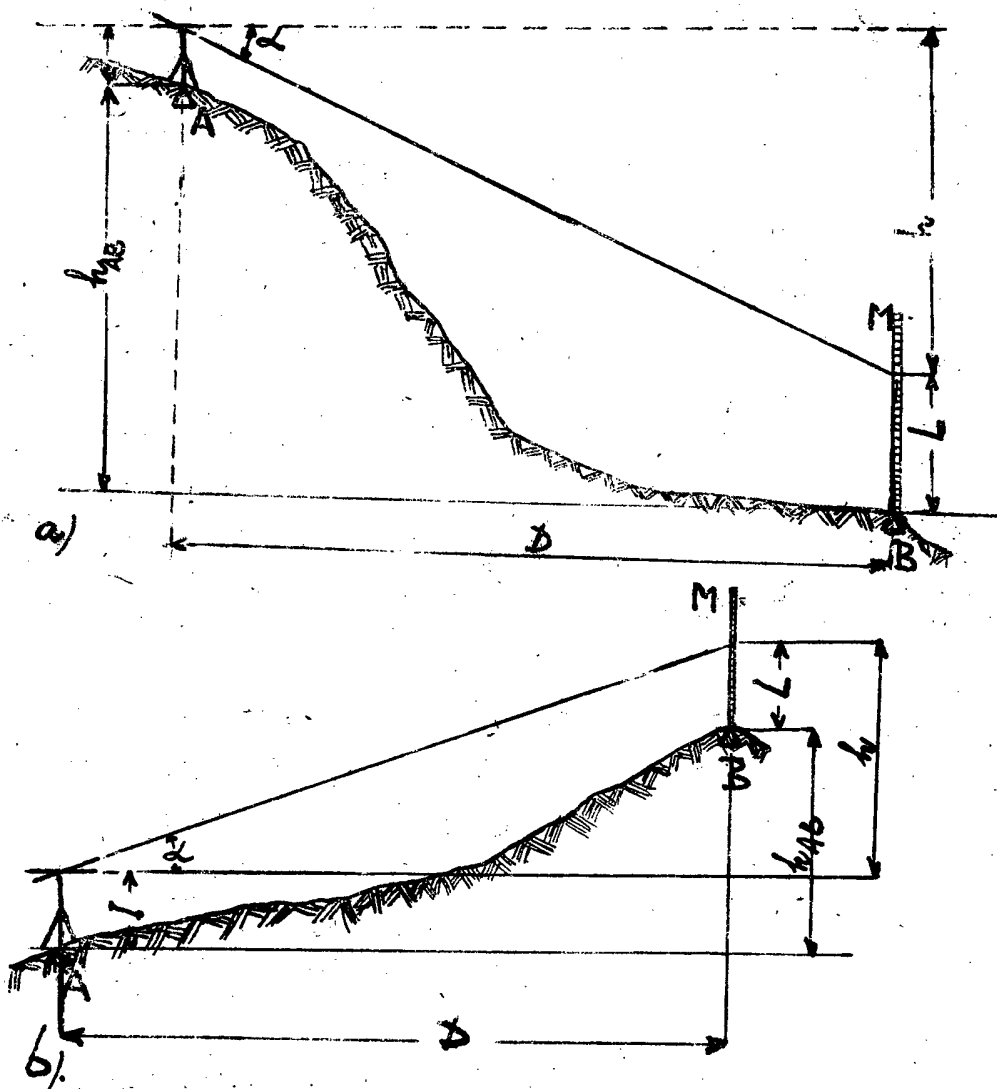


Fig. 320.

specificat deja, se observă că pentru primul caz avea diferența de nivel  $h_{AB} = h + L - J$ . În care L este cunoscută, fiind citită pe miră, la fel J care a fost măsurat.



- 448 -

Dar:  $h = D \cdot \operatorname{tg} \alpha$

Deci:  $h_{AB} = D \operatorname{tg} \alpha + L - J$

În cazul al doilea (Fig. 320 b):

$h_{AB} = h - L + J = D \operatorname{tg} \alpha - L + J$ .

Generalizând, se poate scrie:

$h_{AB} = D \operatorname{tg} \alpha \pm (L - J)$ .

Este necesar să anintim că în cazul când distanța  $D$  este mare, se va adăuga și corecția datorită refracției și sfericității pământului, pe care am arătat-o la început și care este:

$$\mu = \frac{(1 - K)}{2R} D^2$$

Unde  $K$  reprezintă un coeficient care are valoarea, pentru țara noastră,  $K = 0,1306$ ;  $D$  este distanța, iar  $R$  raza pământului.

Așa că relația care ne dă diferența de nivel va fi:

$$h_{AB} = D \operatorname{tg} \alpha \pm (L - J) + \frac{(1 - K) D^2}{2R}$$

Pentru a ne putea da seama cum intervine în calculele noastre eroarea de sfericitate și refracție și motivul pentru care o introducem în calcule, să reluăm problema sfericității pământului și a refracției și să vedem ce influență au ele asupra măsurătorilor și în ce măsură sînt eronate măsurătorile noastre.

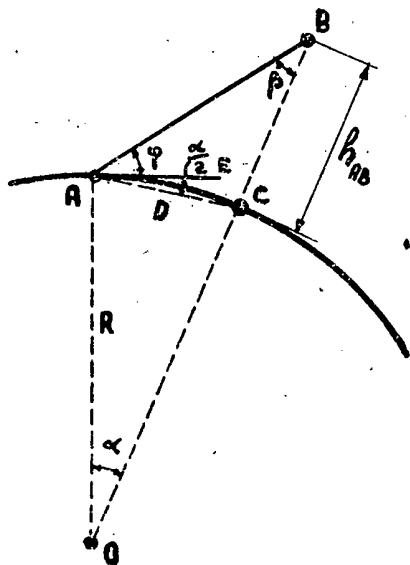


Fig. 321.

#### - a) Sfericitatea pământului

Avînd un punct  $A$  de cotă absolută dată, cunoscută, și vînd să determinăm cota unui al doilea punct  $B$  aflate la distanța mare de punctul  $A$ , la distanța  $D$ , care, așa cum observăm pe Fig. 321, este o porțiune  $AC$  de pe globul pământului cu raza în  $O$ , noi în calculele noastre introducem distanța  $D = \widehat{AC}$  în locul arcului  $\widehat{AC}$ .

Notînd cu  $\alpha$  unghiul la centru, format de razele  $OA$  și  $OB$ , raza orizontului în punctul  $A$

- 449 -

este tangenta în acel punct, sau normala la verticala locului, la OA.

Ca atare, dacă staționăm în punctul A și vizăm punctul B, noi măsurăm unghiul vertical  $\varphi$  iar unghiul dintre AE și AC este tocmai jumătatea unghiului la centru  $\alpha$ .

Desigur că raza orizontului AE fiind aproape de AC, unghiul  $\alpha$  fiind mic, rezultă că putem lua în calcule distanța D în loc de arcul AC, aceasta însă va influența întrucitva rezultatul măsurătorilor noastre, așa cum se va vedea mai jos.

Cu notațiile din figură putem scrie din triunghiul ABC, relația:

$$\frac{h_{AB}}{\sin\left(\varphi + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{D}{\sin B} \text{ însă:}$$

$$B = 180^\circ - (\alpha + \varphi + 90^\circ) = 90^\circ - (\alpha + \varphi)$$

$$\text{Deci: } \frac{h_{AB}}{D} = \frac{\sin\left(\varphi + \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos(\varphi + \alpha)} \text{ De unde: } h_{AB} = D \frac{\sin\left(\varphi + \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos(\varphi + \alpha)}$$

Desvoltând în serie Taylor pe

$\sin\left(\varphi + \frac{\alpha}{2}\right)$  și  $\cos(\varphi + \alpha)$  avem:

$$\sin\left(\varphi + \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\varphi + \frac{\alpha}{2} \cos\varphi - \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{2!} \sin\varphi - \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3}{3!} \cos\varphi + \dots$$

$$\cos(\varphi + \alpha) = \cos\varphi - \alpha \sin\varphi - \frac{\alpha^2}{2!} \cos\varphi + \frac{\alpha^3}{3!} \sin\varphi + \dots$$

Spre a avea o formulă simplificată și cum ultimii termeni sînt foarte mici, se neglijează și luăm numai primii doi termeni, pentru sinus și un singur termen pentru cosinus și se obține:

$$h_{AB} = D \frac{\sin\varphi + \frac{\alpha}{2} \cos\varphi}{\cos\varphi} = D \operatorname{tg}\varphi + D \frac{\alpha}{2}$$

Al doilea termen al relației de mai sus este datorit sfericității pămîntului și constituie eroarea de sfericitate, care dacă se înlocuiește acum arcul prin coarde D, ne conduce la relația stabilită deja:

$$\alpha = \frac{D}{R}$$

$$\therefore h_{AB} = D \operatorname{tg}\varphi + \frac{D^2}{2R}$$

Astfel am obținut diferența de nivel între A și B, ținînd cont și de eroarea de sfericitate.

- 450 -

- b) Refracția atmosferică:

Stim că straturile de aer cari sînt deasupra pămîntului au densitate diferită, ceea ce face ca raza vizuală ce pornește din punctul A, unde staționăm, cu teodolitul, cunoscînd cota acestui punct, către punctul A, a cărui cotă vom să o determinăm, este deviată de fiecare strat de aer ce întîlnește, ceea ce îi va da în ultima analiză aspectul unui arc de curbă AEB, arătat în Fig. 322.

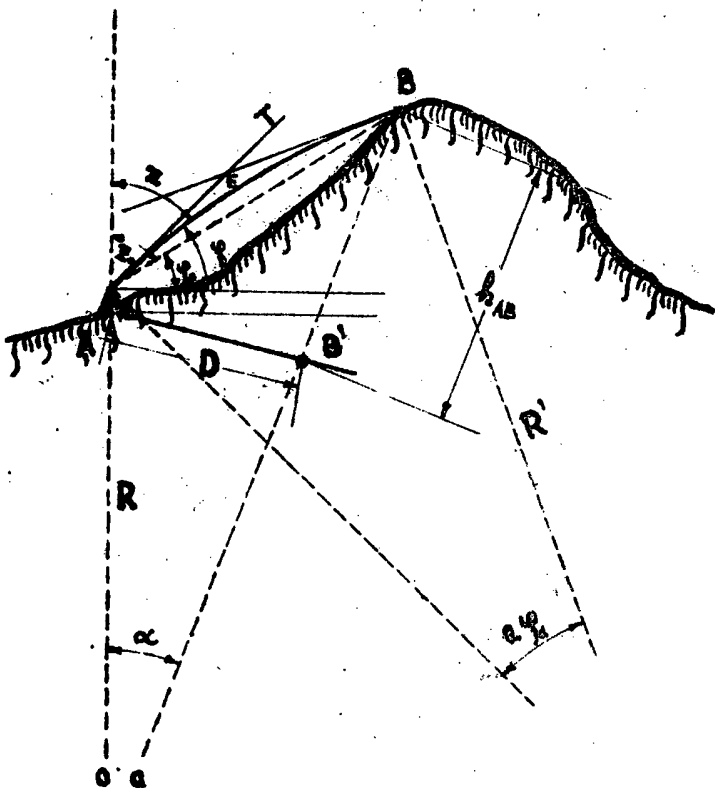


Fig. 322.

Aceasta fiind stabilită urmează că observatorul din punctul A va vedea punctul B după ultima rază ajunsă la ochiul său în A, adică după tangenta la curba AEB, după AT.

Deci noi în loc să măsurăm unghiul real  $\alpha_0$ , care ne-ar da apoi diferența de nivel dintre A și B neafectată de eroarea datorită refracției atmosferei, măsurăm unghiul  $\alpha$ , cu care apoi ne facem calculele respective.

De aci provine acum eroarea de refracție, care atunci, cînd punctele sînt depărtate, nu mai poate fi neglijată. Aceiași influență o va avea refracția și în cazul cînd aparatul ne dă un unghiul vertical  $\alpha$  ci unghiul zenital.

Noi măsurăm în acest caz unghiul Z în loc de  $Z_0$ .

Referindu-ne la Fig. 322 să vedem valoarea pe care o poate primi eroarea de refracție și deci cum găsim adevărata valoare a diferenței de nivel  $h_{AB}$ .

Notăm:  $\alpha - \alpha_0 = \alpha_1$  care este unghiul de refracție.

- 451 -

Pentru rezolvarea problemei se poate considera, cu aproximație,  $AB$ , ca fiind un arc de cerc de rază  $R'$ .

Dar în punctul  $B$  raza vizuală spre  $A$  va fi la fel refractată cu unghiul  $\varphi_1$ .

Deci razele  $R'$  în punctele  $A$  și  $B$  vor forma un unghi  $2\varphi$ , la fel cum înainte arătam că unghiul dintre  $AE$  și  $AC$  este  $(\frac{\alpha}{2})$  jumătatea unghiului la centru.

Prin aproximație, în limite practice, putem scrie că  $D = R\alpha$ , întrucât arcul  $AB$  se apropie de coarda  $AB$  și la fel  $AB = R' \cdot 2\varphi$ .

Cum însă între  $R$  și  $R'$  există un raport constant

$$\frac{R}{R'} = K, \text{ avem:}$$

$$R\alpha = KR'\alpha, \text{ dar } R\alpha = R' \cdot 2\varphi$$

$$\text{Deci: } KR'\alpha = 2\varphi, R'$$

$$\text{De unde: } \varphi = \frac{K\alpha}{2}$$

$$\text{Însă: } \alpha = \frac{D}{R} \text{ așa că: } \varphi = \frac{KD}{2R}$$

Cum însă valoarea unghiului măsurat de noi este mai mare, pe noi interesându-ne unghiul  $\varphi_0$ , rezultă cu datele de mai sus că:

$$\varphi_0 = \varphi - \varphi_1 = \varphi - \frac{KD}{2R}$$

Și acum înglobând erorile de sfericitate și refracție, adică introducând pe  $\varphi_0$  în locul lui  $\varphi$  în relația care dădea pe  $h_{AB}$  când s-a ținut cont de sfericitate, rezultă:

$$h_{AB} = D \operatorname{tg} \varphi + \frac{D^2}{2R}$$

$$h_{AB} = D \operatorname{tg} \varphi_0 + \frac{D^2}{2R} = D \operatorname{tg} \left( \varphi - \frac{KD}{2R} \right) + \frac{D^2}{2R}$$

Desvoltând în serie pe  $\operatorname{tg} \left( \varphi - \frac{KD}{2R} \right)$  și luând numai primii doi termeni, se ajunge la relația dedusă de noi:

$$h_{AB} = D \operatorname{tg} \varphi + \frac{(1-K)}{2R} D^2$$

Relație care acum ține cont de sfericitate și de refracția luminii.

Ca o problemă inversă, observăm că, dacă se cunoaște  $h_{AB}, D, \alpha, R, L$  și  $J$ , putem calcula coeficientul de refracție al luminii  $K$  pentru diferite regiuni.

- 452 -

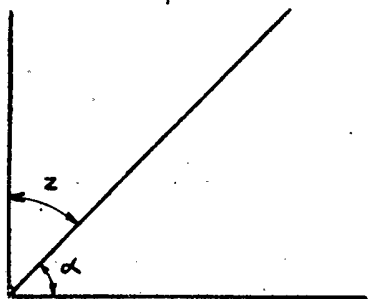


Fig. 323.

La măsurarea unghiului vertical  $\alpha$  se va avea în vedere că multe teodolite în loc să ne arate unghiul  $\alpha$ , care ne interesează pe noi, ne dau unghiul zenital  $Z$ , pe care îl citim.

Ca atare va trebui să se cunoască acest lucru pentru a nu greși la calcularea diferenței de nivel.

De multe ori în locul mirei (latei) putem întrebuința o miră cu disc.

Se așează discul pe miră la o înălțime voită, de exemplu 2 m și vizând cu luneta mijlocul discului, se măsoară doar unghiul vertical  $\alpha$ , fără a se mai face citirea pe miră ( $L$ ) pe care acum o cunoaștem.

Relația pentru diferența de nivel  $h_{AB}$  rămâne aceeași. Ca avantaj ar fi că, nemaifăcând citire pe miră, se măsoară cu mai mare precizie  $L$ .

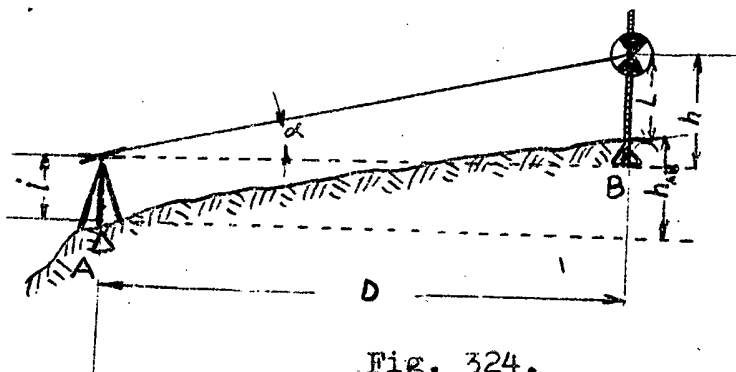


Fig. 324.

## - 2. Nivelment trigonometric dela mijloc.

În mod analog ca la nivelmentul geometric și nivelmentul trigonometric, poate fi executat făcând stație cu instrumentul de nivelat la mijlocul distanței dintre punctele a căror diferență de nivel o căutăm.

Referindu-ne la Fig. 325, în care punctele a căror diferență de nivel, vom să o măsurăm, sînt punctele A și B, iar punctul de stație este între cele două puncte în S.

Distanțele  $D_1$  și  $D_2$  fiind cunoscute, se vizează mirele plasate în puncte A și B, făcînd citirile  $L_A$  și  $L_B$  și la cercul vertical se citesc unghiurile  $\alpha$  și  $\beta$ .

Cu notațiile din figură, diferența de nivel între punctul de stație S și cele două puncte A, B, este:

- 453 -

$$h_{AS} = h_A + L_A - J; \quad h_{SB} = h_B + L_B - J$$

Dar:  $h_A = D_1 \operatorname{tg} \alpha; \quad h_B = D_2 \operatorname{tg} \beta.$

Deci:  $h_{AS} = D_1 \operatorname{tg} \alpha + L_A - J; \quad h_{SB} = D_2 \operatorname{tg} \beta + L_B - J.$

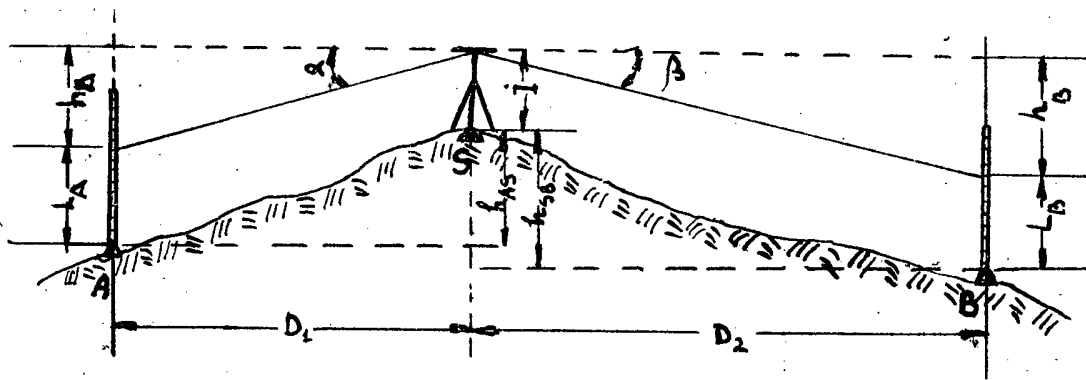


Fig. 325.

Diferența de nivel ce vom să determinăm ( $h_{AB}$ ) este

$$h_{AB} = h_{SB} - h_{AS} = (D_2 \operatorname{tg} \beta + L_B - J) - (D_1 \operatorname{tg} \alpha + L_A - J)$$

sau:

$$h_{AB} = (D_2 \operatorname{tg} \beta + L_B) - (D_1 \operatorname{tg} \alpha + L_A).$$

Această ultimă relație ne arată că nu este necesar să fie măsurată înălțimea aparatului în punctul de stație, deoarece ea nu mai intră în relația care ne dă diferența de nivel căutată, ca atare se elimină una din sursele de erori și se poate afirma că și nivelmentul trigonometric dela mijloc este mai precis ca nivelmentul trigonometric dela capăt, după cum nivelmentul geometric dela mijloc era mai precis ca cel dela capăt.

Desigur că și în nivelmentul trigonometric dela mijloc se pot întrebuița mire cu disc în loc de mirele obișnuite, întrebuițarea acestora din urmă în nivelmentul trigonometric este limitată din cauza distanțelor mari ce există între punctul de stație și miră.

### - 3) Nivelmentul trigonometric când nu se cunoaște distanța.

În cazul nivelmentului trigonometric dela capăt sau dela mijloc, când distanțele care intervin în relațiile din cari calculăm diferența de nivel, nu

sînt cunoscute, este necesar să se dea cîte două vize, în loc de una singură, cum procedăm mai sus.

În acest caz operațiunea de nivelment se execută astfel:

- a) În cazul nivelmentului dela capăt.

Aparatul fiind pus în stație în punctul A, se vizează mira plasată vertical în punctul B de două ori și anume: la prima vizare se va citi pe miră  $L_1$ , și se măsoară unghiul vertical  $\alpha$ , iar la viza a doua se

va citi pe miră  $L_2$  iar la cercul vertical se obține unghiul  $\beta$ .

Conform notațiilor din Fig. 326 avem:

$$(1) \begin{cases} h = D \operatorname{tg} \beta \\ h - L = D \operatorname{tg} \alpha \end{cases}$$

Scăzînd aceste relații, rezultă:

$$L = D (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha)$$

Sau:

$$D = \frac{L}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}$$

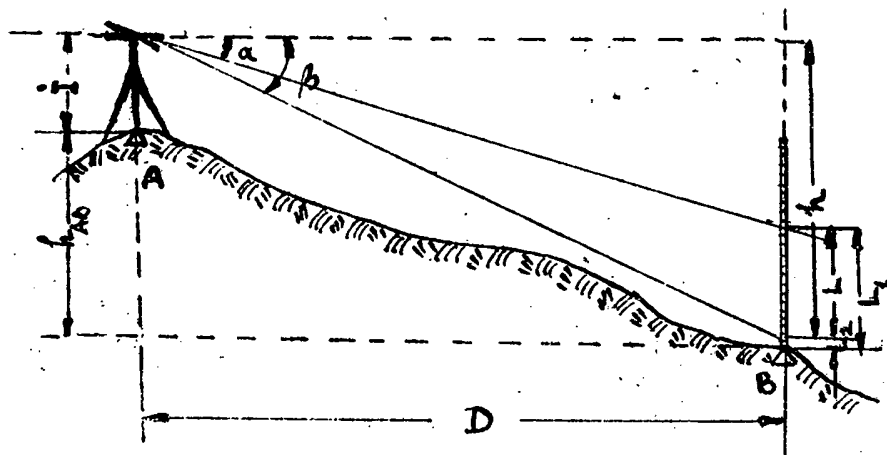


Fig. 326.

În această ultimă relație, din care se calculează distanța  $D$ , citimea dela numărător  $L$ , reprezintă diferența dintre cele două citiri pe miră:  $L = L_1 - L_2$ .

Avînd distanța  $D$  din relația (1), se calculează  $h$ , iar diferența de nivel:

$$h_{AB} = h + L_2 - J = h + (L_2 - J).$$

Generalizînd, se poate scrie:

$$h_{AB} = h \pm (L_2 - J).$$

Se poate observa că semnul plus se ia cînd punctul de stație este mai înalt, iar semnul minus cînd punctul vizat este mai înalt.

- b) În cazul nivelmentului dela mijloc cu 2 vize.

Pentru nivelmentul trigonometric dela mijloc, aparatul se plasează în punctul de stație S,

intre cele două puncte A, B, în care se ține mira în poziție perfect verticală și se dau două vize, analog ca în cazul anterior, adică la prima viză către punctul A citim pe miră pe

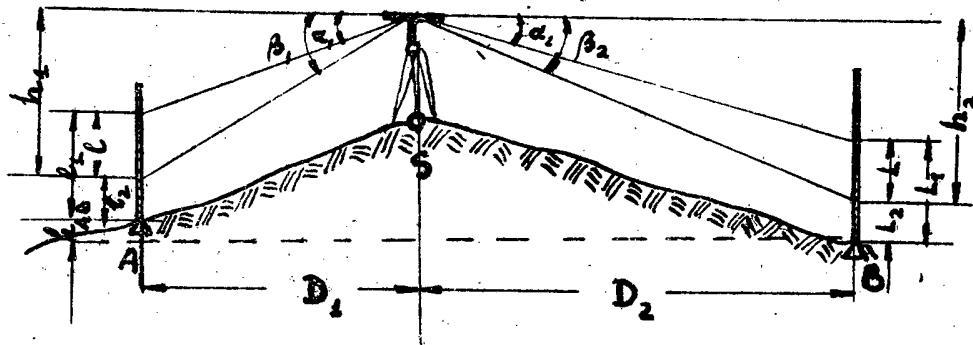


Fig. 327.

$l_1$ , și măsurăm unghiul  $\alpha_1$ , iar la a doua vizare citim pe miră  $l_2$  și măsurăm unghiul  $\beta_1$ .

Se dă apoi alte două vize spre punctul B și citim pe mira la prima viză pe  $L_1$ , iar la cea de a doua viză pe  $L_2$ , măsurând în același timp unghiurile  $\alpha_2$  și  $\beta_2$ .

Din figură observăm că:

$$(1) \quad \begin{aligned} h_1 &= D_1 \operatorname{tg} \beta_1, & h_2 &= D_2 \operatorname{tg} \beta_2 \\ h_1 - l_1 &= D_1 \operatorname{tg} \alpha_1, & h_2 - L_2 &= D_2 \operatorname{tg} \alpha_2 \end{aligned}$$

Scăzând aceste relații una din alta, obținem:

$$l = D_1 (\operatorname{tg} \beta_1 - \operatorname{tg} \alpha_1), \quad L = D_2 (\operatorname{tg} \beta_2 - \operatorname{tg} \alpha_2)$$

$$\text{Deci: } D_1 = \frac{l}{\operatorname{tg} \beta_1 - \operatorname{tg} \alpha_1}, \quad D_2 = \frac{L}{\operatorname{tg} \beta_2 - \operatorname{tg} \alpha_2}$$

Având distanțele  $D_1$  și  $D_2$  din relația (1), se deduce  $h_1$  și analog  $h_2$ .

Diferența de nivel:

$$h_{AB} = (h_2 + L_2) - (h_1 + l_1)$$

Sau înlocuind pe  $h_1$  și  $h_2$ :

$$h_{AB} = \left( \frac{L \operatorname{tg} \beta_2}{\operatorname{tg} \beta_2 - \operatorname{tg} \alpha_2} + L_2 \right) - \left( \frac{l \operatorname{tg} \beta_1}{\operatorname{tg} \beta_1 - \operatorname{tg} \alpha_1} + l_1 \right)$$

În care:  $L = L_1 - L_2$  și  $l = l_1 - l_2$ .



- 456 -

- 4. Precizia nivelmentului trigonometric.

Din relațiile cari dau diferențe de nivel, putem vedea că exactitatea nivelmentului trigonometric, în afară de sursele de erori existente în cazul nivelmentului geometric, adică citirea inexactă pe miră și neverticalitatea mirei, mai este afectată încă o sursă de erori și anume măsurarea unghiului vertical ( $\alpha, \beta$ ), ca atare, nivelmentul trigonometric este mai puțin precis ca cel geometric.

Intr-adevăr, o eroare oricât de mică la măsurarea unghiurilor, se traduce prin erori apreciabile asupra diferenței de nivel și asupra distanței.

De aceea, ori de câte ori este posibil, terenul permite, se va aplica metoda nivelmentului geometric.

- 5. Determinarea (calcularea) cotelor absolute.

Prin nivelmentul trigonometric măsurăm diferența de nivel între două puncte, așa cum s-a arătat.

Dacă am avea de făcut nivelment trigonometric între punctele A și B, de cotă absolută ( $H_A$  și  $H_B$  cunoscută, se măsoară diferențele de nivel  $h_{A1}, h_{12}, h_{23}, \dots, h_{nB}$ , pentru a se obține cotele absolute ale punctelor intermediare 1, 2, 3,  $\dots, n$ , se va adăuga la cota absolută a punctului A, adică la  $H_A$ , diferența de nivel  $h_{A1}$  și obținem cota absolută  $H_1$ , apoi la aceasta pe  $h_{12}$  pentru a avea cota absolută  $H_2$  a punctului 2 ș.a.m.d.

Dacă se ajunge la o cotă absolută  $H_n$  diferită de  $H_B$  cunoscut se face compensarea în mod analog ca la nivelmentul geometric.

O b s e r v a Ț i u n e.

Executarea nivelmentului trigonometric implică instrumente cu cerc vertical pentru a putea măsura unghiurile verticale.

În nivelmentul trigonometric pe distanțe lungi este necesar a se aduce corecția de refracție și sfericitate, cum s-a arătat.

- 457 -

- C. NIVELMENT tachimetric.

După cum s-a văzut în Cap. măsurarea indirectă a distanțelor, pentru ridicări expeditivă, mai ales în regiunile muntoase, se întrebuintează metode tachimetrice, cari pot fi folosite și pentru determinarea diferențelor de nivel.

În cadrul Capitolului amintit, se arată principiul care stă la baza măsurătorilor tachimetrice și care în ultima analiză consta, simplu, în rezolvarea unui triunghi isocel, atunci când se cunoaște una din laturile sale și unghiul opus ei.

Latura cunoscută rezultă în urma citirei pe o miră gradată, această citire fiind făcută în dreptul celor două fire tachimetrice (stadimetrice) ale lunetei aparatului.

Tot atunci se arată și precizia măsurătorilor tachimetrice și se deducea că măsurătorile indirecte, optice, practice, pot fi utilizate cu succes, numai când este vorba de distanțe relativ mici, datorită faptului că acțiunea aparatelor tachimetrice este limitată și ca distanță maximă, peste care nu putem trece fără a risca să obținem erori mari, este distanța de 250 m.

În cele ce urmează, se va arăta doar aplicabilitatea măsurătorilor optice în nivelment, precum și diferitele metode utilizate în acest scop ca și domeniul lor de aplicare.

- 1) Nivelment tachimetric cu mira verticală și luneta orizontală.

Referindu-ne la Fig. 328, unde în punctul A, de cotă absolută cunoscută, s-a făcut stație cu un tachimetru sau cu un teodolit, a cărui placă reticulară a lunetei are și fire tachimetrice, se vizează, cu luneta orizontală mira (M) plasată vertical în punctul B, a căruia cotă absolută ne interesează.

Plasarea mirei deasupra punctului B, perfect vertical, se realizează cu ajutorul libelei cu buclă de aer, atașată mirei gradate.

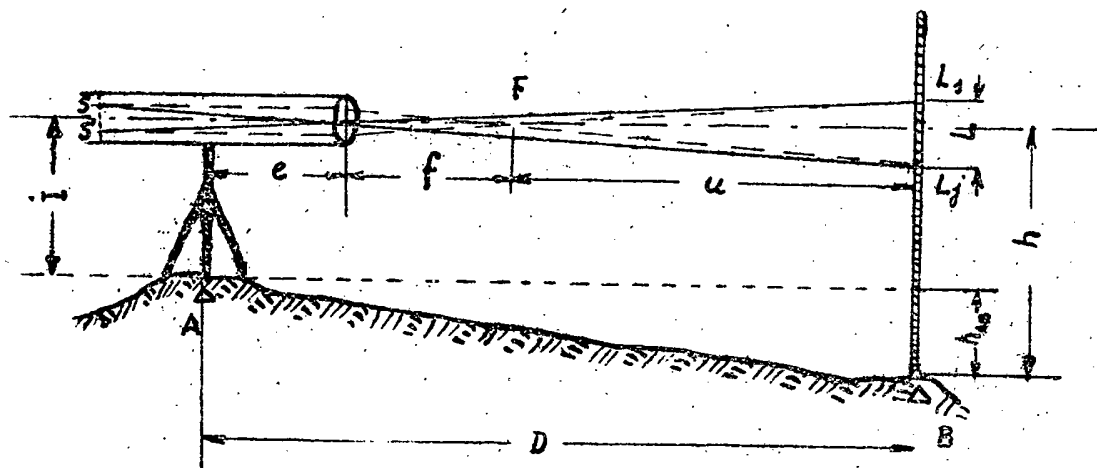


Fig. 328.

• Diferența de nivel:  $h_{AB} = h - J$ .

Dar  $h$  este citit la firul reticular de mijloc și am ajuns la nivelul geometric dela capăt.

Însă cel mai adesea, viza nu poate fi dată orizontal și atunci, cum se va vedea mai jos, pentru a determina diferența de nivel,  $h$  este necesar să fie cunoscută  $J$ , adică diferența între cele două citiri pe mîră (una în dreptul firului stadimetric de sus și alta în dreptul celui de jos).

Distanta după cum știm este:

$$D = e + f + u \quad \text{sau} \quad D = K_1 + K_2$$

unde  $K_1$  și  $K_2$  sînt constantele aparatului, cari la aparatele moderne au valorile:

$$K_1 = 100, \quad K_2 = 0.$$

## - 2) Nivelment tachimetric cu mîră verticală și viză înclinată.

Este metoda cea mai frecvent utilizată datorită faptului că vizele cel mai adesea ori nu pot fi făcute orizontal.

În acest caz, vizînd mîra din punctul B (Fig. 329), se vor face citirile  $L_1$  la firul de sus și  $L_2$  la firul de jos, iar la cercul vertical se obține

- 459 -

unghiul  $\gamma$ .

Observând notațiile din figură:

$$h_{AD} = h + J - v.$$

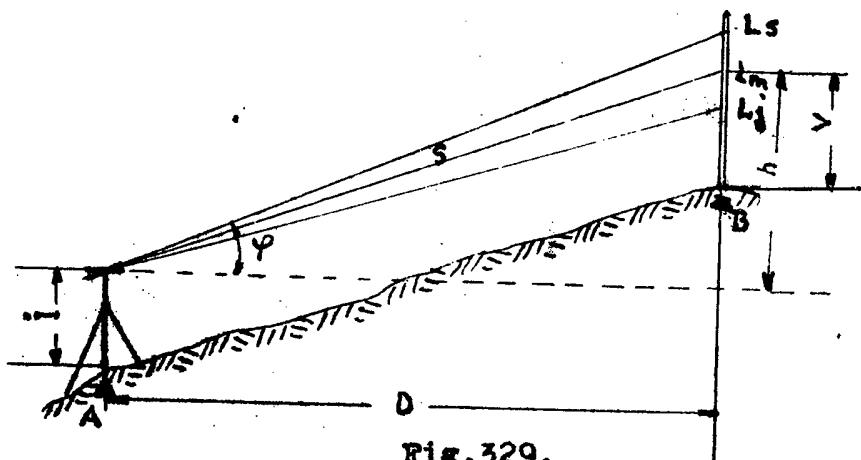


Fig. 329.

Dar:

$$h = S \cdot \sin \gamma$$

Și după cele stabilite la tachimetrie:

$$S = K_1 L \cos \gamma + K_2$$

$$D = K_1 L \cos^2 \gamma + K_1 \cos \gamma$$

Așa că:

$$h = K_1 L \cos \gamma \sin \gamma + K_2 \sin \gamma$$

$$\text{Unde: } L = L_s - L_j$$

iar  $v = L_m$ , adică citirea pe miră în dreptul firului din mij-

loc.

Relația care dă pe  $h$ , în cazul cînd unghiul  $\gamma = 0$ , se reduce la  $h = K_2$  și se ajunge la o relație pentru  $h_{AD}$  identică cu cea arătată în cazul cînd luneta este orizontală.

Elementele  $D$  și  $h$  se numesc elemente tachimetrice.

La pag. 460 se dă un exemplu de protocol tachimetric.

Coloanele 1, 2, 3, 4, 5, 9 se completează în protocolul de mai jos, pe teren, cu citirile făcute, iar coloanele pentru elementele tachimetrice, fie că se calculează, fie că se găsesc în tabelele tachimetrice,

De exemplu, în cazul nostru, să presupunem că, avînd aparatul în stație în punctul de triangulație  $A$ , se vizează punctul de poligonalație 1 și citim în dreptul firului de sus 2,742 m, la firul de jos 1,942 m iar pentru firul de mijloc 2,342 m, în același timp s-a citit la cercul vertical unghiul  $\gamma = 108^\circ 00'$  (adică unghiul vertical este dat în sistemul centesimal).

După aceea se vizează punctul 2, măsurînd unghiul orizontal  $\alpha_1 = 25^\circ 30'$ , unghiul vertical  $\gamma_2$  și se fac citirile pe miră în dreptul celor trei fire reticulare horizontale.

La fel pentru celelalte puncte.

Protocolul tachimetric.

Cel mai uzitat protocol pentru măsurătorile tachimetrice este cel indicat mai jos.

Punct		Unghiul		Citiri pe miră	Elemente tachimetrice			Observ.
De stație	De viză	ori-zontal $\alpha$	verti-cal $\gamma$		D*	h**	H	
1.	2	3	4	5	6	7	8	9
AA	O <sub>1</sub>		$\gamma = 108^{\circ}00'$	fir sus = 2,742 fir mijl. = 2,342 fir jos = 1,942	D <sub>1</sub> = 78,7	h <sub>1</sub> = 9,941	H <sub>1</sub> = 80,059	
	O <sub>2</sub>	$\alpha_1 = 25^{\circ}30'$	$\gamma = 116^{\circ}30'$	sus = 2,600 mijloc = 2,300 jos = 2,000	D <sub>2</sub> = 54,1	h <sub>2</sub> = 14,17	H <sub>2</sub> = 75,83	
	O <sub>3</sub>	$\alpha_2 = 60^{\circ}20'$	$\gamma = 118^{\circ}30'$	sus = 2,460 mijloc = 1,860 jos = 1,260	D <sub>3</sub> = 109,70	h <sub>3</sub> = 33,56	H <sub>3</sub> = 56,44	

\* D = 100 L, cos $\gamma$

\* h = 100 L<sub>1</sub> cos $\gamma$  sin $\gamma$

Urmează apoi calculul elementelor tachimetrice D, h și H ( H este cota absolută a punctelor).

Aceste elemente se vor putea căuta în tabele tachimetrice sau pot fi calculate.

a) Aflarea elementelor tachimetrice în tabele.

Spre a vedea cum sînt găsite elementele tachimetrice în tabele, se arată mai jos cum sînt întocmite aceste tabele, luînd fila pentru cazul nostru, adică pentru  $\gamma_1 = 108^{\circ}00'$ .

- 461 -

Având unghiul vertical  $\gamma_1 = 108^{\circ}00'$ , se caută în tabelele fila pentru acest unghi (cazul din tablou), care este același și pentru unghiul suplimentar: ( $92^{\circ}00'$ ) și cum diferența între citirile de pe miră la firul de sus și la cel de jos este:

$$2,752 - 1,942 = 0,8 \text{ m.}$$

Constantele aparatului fiind:

$$K_1 = 100 \text{ și } K_2 = 0$$

ține 80 m.

Se multiplică  $L = 0,8 \text{ m}$  cu 100 și se ob-

găsește 1,3 m.

În tabele în dreptul distanței 80 m se

Deci distanța  $D = 80 - 1,3 = 78,7 \text{ m}$ , pe care o inseriem în coloana 6.

Pentru a găsi valoarea lui  $h_1$ , în tabele în dreptul distanței orizontale 78 se găsește 9,85 m, iar pentru distanța orizontală 79, în tabele, se află 9,98, deci pentru distanța  $D_1 = 78,7 \text{ m}$ ,  $h_1 = -(9,85 + 0,091) = -9,941 \text{ m}$ , pe care o trecem în protocol în coloana 7.

$$\text{Iar: } H_1 = H_2 + h_1$$

$$\text{Dacă: } H_2 = 90,00 \text{ m, } H_1 = 80,059.$$

În mod analog pentru  $D_2, h_2, H_2$  se caută în tabele la unghiul vertical  $\gamma_2 = 116^{\circ}30'$  pentru diferența  $L = 0,6$  și se va găsi:

$$D_2 = 60 - 3,9 = 54,1 \text{ m,}$$

$$h_2 = -14,17 \text{ m,}$$

$$H_2 = 75,83 \text{ m.}$$

La unghiul  $\gamma_3 = 118^{\circ}00'$  și

$$L = 2,460 - 1,260 = 1,20$$

$$D_3 = 120 - 10,3 = 109,7 \text{ m,}$$

$$h_3 = -33,56 \text{ m,}$$

$$H_3 = 56,44 \text{ m.}$$

Intrebuințind tabelele, elementele tachimetrice,  $D$  și  $h$  se vor determina cu precizie, și în mod rapid, ele fiind întocmite pentru distanțe maximum de 300 m până la care măsurătorile optice dau rezultate acceptabile.

Unghiul vertical 108° 00' 92° 00' 1metru = 0,12633		Elementele de deducere a numărului generator pentru obținerea distanței orizontale.											
		40m	42	60m	69	110m	17	160m	25	210m	33	260m	41
20	0,3	90	1,1	120	1,9	170	2,7	220	3,5	270	4,2	320	4,9
30	0,5	80	1,3	130	2,0	180	2,8	230	3,6	280	4,4	330	5,1
40	0,6	90	1,4	140	2,2	190	3,0	240	3,8	290	4,6	340	5,3
50	0,8	100	1,6	150	2,4	200	3,1	250	3,9	300	4,7	350	5,5
Dist. oriz. totală	Înălțimea	Dist. oriz.	Înălțimea	Dist. oriz.	Înălțimea	Dist. oriz.	Înălțimea	Dist. oriz.	Înălțimea	Dist. oriz.	Înălțimea	Dist. oriz.	Înălțimea
21	2,85	61	7,71	101	12,76	141	17,81	181	22,87	221	27,92	261	32,97
2	78	2	83	2	12,89	2	17,94	2	22,99	2	28,05	2	33,10
3	2,91	3	7,98	3	13,01	3	18,07	3	23,12	3	28,17	3	33,22
4	3,03	4	8,09	4	14	4	19	4	24	4	30	4	35
5	16	5	21	5	26	5	32	5	37	5	42	5	48
6	28	6	34	6	39	6	44	6	50	6	55	6	60
7	41	7	46	7	52	7	57	7	62	7	68	7	73
8	54	8	59	8	64	8	70	8	75	8	80	8	86
9	66	9	72	9	77	9	82	9	88	9	93	9	99
30	79	70	84	110	13,90	150	18,95	190	24,00	230	29,06	270	34,11
1	3,91	1	8,97	1	14,02	1	19,08	1	24	1	29	1	34
2	4,04	2	9,10	2	15	2	20	2	26	2	31	2	36
3	17	3	22	3	28	3	33	3	38	3	43	3	49
4	30	4	35	4	40	4	45	4	51	4	56	4	61
5	42	5	47	5	53	5	58	5	63	5	69	5	74
6	55	6	60	6	65	6	71	6	76	6	81	6	87
7	67	7	73	7	78	7	83	7	89	7	94	7	99
8	80	8	85	8	91	8	96	8	101	8	107	8	112
9	93	9	98	9	103	9	109	9	114	9	119	9	125
40	5,05	30	10,11	120	18	160	21	200	27	240	32	280	37
60	7,53	100	12,63	140	17,69	180	22,74	220	27,79	260	32,85	300	37,90

- 463 -

- p) Aflarea elementelor tachimetrice prin calcul.

Elementele tachimetrice  $D$  și  $h$  pot fi și calculate, cunoscând relațiile

$$D = K_1 L \cos^2 \gamma + K_2 \cos \gamma$$

$$h = K_1 L \cos \gamma \sin \gamma + K_2 \sin \gamma$$

Constantele  $K_1$ ,  $K_2$ , cum s-a amintit, se găsesc înscrise pe capacul cutiei fiecărui instrument de tachimetrie.

Să calculăm aceste elemente pentru cazul nostru ( $D, h$ ), considerând, ca în cazul precedent:

$$K_1 = 100 \text{ și } K_2 = 0$$

$$(1) D_1 = 100 L \cos^2 \gamma, \quad h = 100 L \cos \gamma \sin \gamma$$

Introducând valorile din exemplul nostru  $\gamma = 108^\circ 00'$  și  $L = 0,8$  și din tabelele se scot valorile naturale pentru  $\cos^2 \gamma$  și  $\sin \gamma$ .

Sînt însă tabele de valori naturale care dau și pe  $\cos^2 \gamma$  precum și produsul  $\cos \gamma \sin \gamma$ .

În aceste tabele:

$$\cos^2 108^\circ = 0,578217$$

$$\cos 108^\circ \cdot \sin 108^\circ = -0,124345.$$

Introducînd aceste valori în relațiile (1):

$$D_1 = 100 \times 0,8 \times 0,984291 = 78,743.$$

$$h_1 = - (100 \times 0,8 \times 0,124345) = -9,947.$$

Comparînd aceste rezultate cu cele deduse din tabelele tachimetrice, vedem că ele concordă pînă la precizie de cm.

Observații:

Unghiurile orizontale  $\alpha_1, \alpha_2$  au fost măsurate pentru punctele 2 și 3, cunoscînd aceste unghiuri și distanțele respective  $D_1$  și  $D_2$ , să poată, fi precis determinate.

- 3) Nivelmentul tachimetric cu viză înclinată și mira perpendiculară pe axul optic al lunetei.

Această metodă, pentru determinarea



- 464 -

distanței, a fost tratată în vol. I la pag. 232, unde am stabilit că:

$$(1) D = K_1 L \cos \gamma + K_2 \cos \gamma + \overline{BM} \sin \gamma$$

Unde  $K_1, K_2$  și  $L$  au același semnificație ca în cazurile anterioare,  $K_1$  și  $K_2$  fiind constantele aparatului, aflate înscrise pe cutia aparatului, iar  $L$  diferența între citirile de sus și de jos, iar  $\overline{BM}$  citirea pe nira la firul din mijloc.

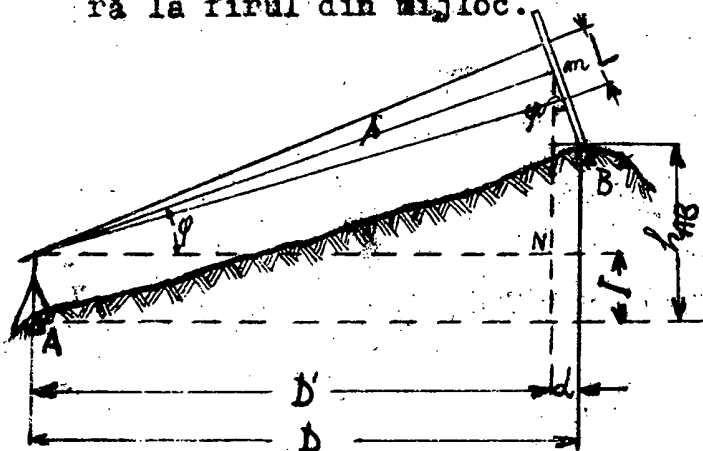


Fig. 330.

Din Fig. 330 diferența de nivel:

$$h_{AB} = \overline{MN} + J - \overline{MP}$$

Însă:

$$\overline{MN} = S \cdot \sin \gamma$$

$$S = K_1 L + K_2$$

$$\therefore \overline{MN} = (K_1 L + K_2) \sin \gamma$$

$J$  = înălțimea aparatului,

$$\overline{MP} = \overline{MB} \cdot \cos \gamma$$

Așa că relația pentru diferența de nivel  $h_{AB}$  va fi:

$$(2) h_{AB} = K_1 L \sin \gamma + K_2 \sin \gamma - \overline{MB} \cos \gamma + J$$

Când constantele  $K_1 = 100$  și  $K_2 = 0$ , cele două relații devin:

$$D = 100 L \cos \gamma + \overline{BM} \sin \gamma$$

$$h = 100 L \sin \gamma - \overline{BM} \cos \gamma + J$$

Cum am amintit și în vol. I., operațiunea de așezare a mirei în poziție perpendiculară pe linia de viză fiind foarte greoaie, această metodă este foarte puțin uzitată.

Ca protocol de vize poate fi întrebuintat cel indicat în cazul măsurătorilor tachimetrice, cu observațiunea că pentru calculul elementelor tachimetrice  $D, h$ , se vor utiliza relațiile corespunzătoare.

#### - D. Nivelment barometric.

##### 1) Principii de bază.

Cu toate că precizia nivelmentului barometric este cu mult inferioară preciziei nivelmentului geometric și chiar a celei date de nivelmentul trigonometric sau tachimetric, totuși el este încă întrebuintat, cu

deosebire în cercetările de recunoaștere, în studiul antepreectelor, pentru lucrări geologice sau în ascensiuni.

Principiul care stă la baza nivelmentului barometric, cunoscut din fizică, este că presiunea atmosferică variază în raport cu altitudinea, adică dacă la nivelul mării presiunea atmosferică este de 760 mm coloană mercur, cu cât urcăm în sus în atmosferă, cu atât presiunea scade.

Dar cum presiunea mai este în funcție de o serie întreagă de factori, urmează că și diferența de nivel, în afară de faptul că este o funcție de presiunea din cele două puncte, a căror diferență de nivel o căutăm, să fie funcție de temperatură, latitudine sau accelerația gravitației, umiditate.

Cu alte cuvinte, căutând diferența de nivel dintre punctele A și B (Fig. 331), va trebui să avem presiunile  $P_A$ ,  $P_B$ , în cele două puncte, apoi temperaturile

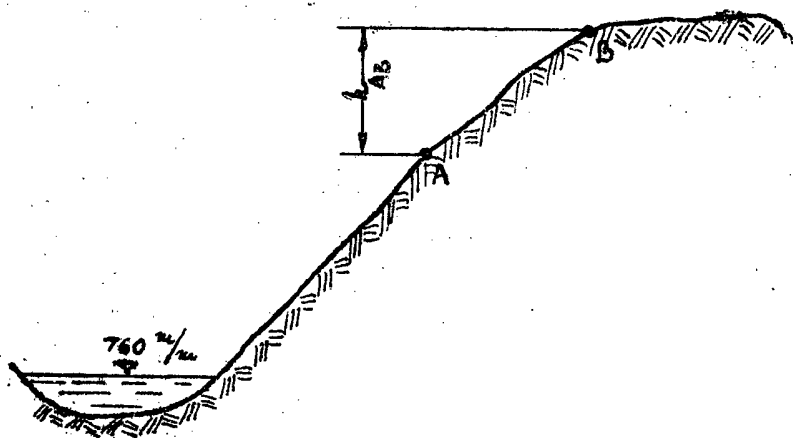


Fig. 331.

$t_A$ ,  $t_B$ , latitudinea  $\varphi$ , precum și umiditatea  $a_A$ ,  $a_B$  iar  $h_{AB}$  va fi:

$$h_{AB} = \varphi (P_A P_B t_A t_B \varphi a_A a_B).$$

Pentru măsurarea diferenței de nivel, pe cale barometrică, sînt utilizate barometrele cu mercur sau barometrele metalice, denumite aneroid.

#### - a) Barometrele cu mercur.

Tipul barometrelor cu mercur, întrebuintate la măsurarea altitudinilor, este barometrul lui Fortin, a căruia descriere și mod de întrebuintare nu mai este cazul a fi arătate, fiind cunoscute și găsite în orice tratat de Fizică.

Se reamintește doar că atunci, cînd se fac observații, cu aceste barometre, este necesar ca fața mercurului din cuvetă să fie în contact cu vârful indexului de fildeș, pentru ca înălțimea coloanei de mercur

- 466 -

să fie măsurată în totdeauna dela acelaș reper fix.

Citirea înălțimei coloanei de mercur se face cu ajutorul vernierului, obținând o precizie de 1 : 20 dintr-un milimetru.

Inasă barometrele ne dau numai presiunile, ori conform relației de forță redusă, va trebui să fie măsurate și temperaturile în punctele respective, pentru a putea determina diferențele de nivel.

Ca o dificultate de seamă se remarcă faptul că în timpul măsurătorilor barometrice pot interveni variațiuni barometrice, datorită stării atmosferice din timpul operațiunilor, așa că de aceste variațiuni va trebui să se țină seama în calculele ulterioare, efectuate pentru determinarea diferenței de nivel, altitudinii.

De acela cel mai indicat mijloc este de a observa barometrul în acelaș timp, în cele două puncte.

#### - b) Barometre metalice (aneroide).

Deși precizia barometrelor metalice, zise aneroide, este mai mică decât cea a barometrelor cu mercur, totuși, datorită faptului că întrebuințarea lor este mult mai comodă, ele se construiesc și au o întrebuințare, în nivelment, mai mare ca barometrele cu mercur.

Principiul pe care se bazează aneroidele este mărirea volumului unui gaz, închis într-o cutie metalică, sub acțiunea presiunii atmosferice.

Pereții acestei cutii, schematic reprezentată în Fig. 332 sînt construiți din tablă ondulată pentru a se mări suprafața de acțiune a aerului din atmosferă, cutia are formă circulară

Un arătător stă în legătură cu vavul din fundurile cutiei și prin mișcarea lui ne indică pe un cadran variația de presiune.

Gradațiunile de pe cadranul aneroidului sînt trasate prin comparație cu barometrul cu mercur.

Sînt unele aneroide cari, pe lângă gradațiunile cari indică presiunea atmosferică, mai

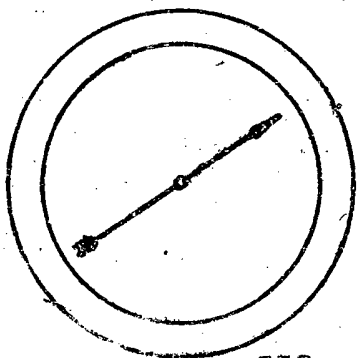
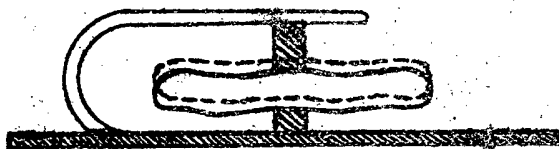


Fig. 332.

au și o rondă gradată, pe care sînt trecute, deodreptul, înălțimile deasupra nivelului mării și citirea acestora este foarte simplă, nu avem decît să mișcăm rîndea pentru a aduce ca zero al gradației ei să fie în dreptul presiunii ce domine în acel moment la nivelul mării, pentru ca indicatorul să ne arate altitudinea locului în care facem stație, adică se obține cota absolută a aceluia punct.

Aceste aneroide sînt însă mai puțin precise și pentru a ajunge la precizia maximă, ce poate fi obținută în nivelmentul barometric, este necesar să se recurgă la calcule, destul de migăloase și complicate, pentru a aduce diferitele corecțiuni.

#### CAP. IV.

### CATEGORII DE NIVELMENT SI COMPENSAREA NIVELMENTULUI.

#### A. Categoriile de nivelment.

După importanța pe care o atribuim nivelmentului, se pot deosebi nivelmente de ordinul I, II, III și IV.

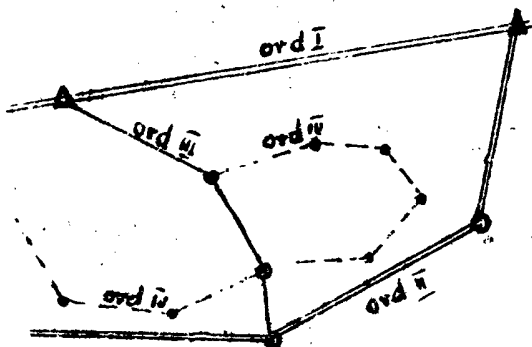


Fig. 333.

Nivelmentul de ordinul I  
răspunde triangulației de  
ordinul I, adică latura, sau dis-  
tanța de nivelment este de  
peste 40 km.

Nivelmentul de ordinul II  
stă în legătură cu triangu-  
lația de ordinul II, deci  
distanțele de nivelat sînt  
de 10 - 20 km.

Nivelmentul de ordinul III  
este cel care leagă puncte  
de nivelmentul de ordinul I  
de cel de ordinul II, iar ni-  
velmentul de ordinul IV  
parțese de la cel de ordinul  
III și rămîn suspendate

- 468 -

după cum se vede în Fig.333, se mai numește acesta și nivelment de ultimul detaliu.

Potrivit ordinului de nivelment, precizia cerută în astfel de operațiuni, variază după caz.

Precizia de nivelment, sau condiția de precizie, se exprimă în eroarea pe km.

Nivelmentul de precizie trebuie să fie executat în două sensuri: la ducere și la întoarcere.

Diferența între cele două valori obținute trebuie să fie între limitele admisibile, în toleranțele ce sînt reprezentate în tabloul ce urmează.

Categoria de nivelment	Eroarea admisă pe km	Caracteristica instrum. de nivelment	
		Puterea (V) de mărire a lunetei	Unghiul ( $\gamma$ ) corespunzător unui pas al bulei de aer
Nivelment ord. I	$f_n < 1,5 \text{ mm/km}$	30 ~ 40	4" ~ 6"
" " II	$f_n = 2 \text{ mm}$	30 ~ 40	4" ~ 6"
" " III	$f_n = 7 \text{ mm}$	20 ~ 30	6" ~ 15"
" " IV	$f_n = 15 \text{ mm}$	20 ~ 30	6" ~ 15"
" longitudinal	$f_n = 10-20 \text{ mm}$	10 ~ 20	15" ~ 30"
" transversal și pt curbe de nivel	$f_n > 20 \text{ mm}$	10 ~ 20	15" ~ 30"

În acest tablou  $f_n$  reprezintă eroarea nivelitică pe un km, iar  $\gamma$  este unghiul la centru, corespunzător unei diviziuni (unui pas) de pe libela cu bulă de aer, diviziune a cărei mărime este de 1 - 2 mm.

#### - B. Compensarea nivelmentului.

Ca în toate măsurătorile topografice și la nivelment va trebui să se facă compensarea, adică trebuie ca erorile, inerente măsurătorilor, să fie compensate,

în așa fel, ca să fie satisfăcute anumite condițiuni inițial impuse.

Compensarea nivelmentului depinde de modul cum a fost executat nivelmentul, așa că se pot distinge următoarele feluri de compensări ale nivelmentului:

- Compensarea nivelmentului dublu,
- Compensarea poligoanelor nivelitice,
- Compensarea nivelmentului între puncte de cotă cunoscută și
- Compensarea rețelelor nivelitice.

Desigur că prima operațiune după executarea nivelmentului, printr-una din metodele arătate (nivelment geometric, trigonometric, tachimetric, barometric) având culese datele în protocolul respectiv, este compensarea nivelmentului, efectuată în concordanță cu modul cum a fost executat nivelmentul, printr-unul din nodurile indicate și a căror tratare separată se face în cele ce urmează.

- 1) Compensarea nivelmentului dublu.

Cînd se pune problema de a executa un nivelment între două puncte oarecare A și B, puncte a căror poziție în plan o cunoaștem, ele fiind puncte de triangulație de un ordin oarecare, însă nu cunoaștem cota absolută a lor, deci va trebui să determinăm noi diferența de nivel între aceste puncte, adică, utilizînd notațiile anterioare, ni se cere a determina pe  $h_{AB}$ .

Aceste puncte pot fi la distanțe foarte mari, după ordinul triangulației respective, de aceea se vor lua și puncte intermediare 1, 2, ..... n, adică executăm o așa numită poligonatie nivelitică, după cum se arată în Fig. 334.

Însă, neavînd cotele punctelor extreme A și B, caz în care avem control, va trebui ca nivelmentul să fie executat dublu, adică odată la dus, pornind din A spre B și a doua oară la întors, pornind din B către A.

Această operație dublă poate fi executată fie în același traseu, adică la ducere am mers pe traseul A, 1, 2, 3, 4, 5, B, iar la întors venim din B către A, trecînd tot prin punctele 5, 4, 3, 2, 1, A, sau poate fi

- 470 -

executat pe un alt traseu, la ducere prin A, 1, 2, 4, 5, B, iar la înapoiere prin B, 5', 4', 3', 2', 1', A. (Fig. 334).

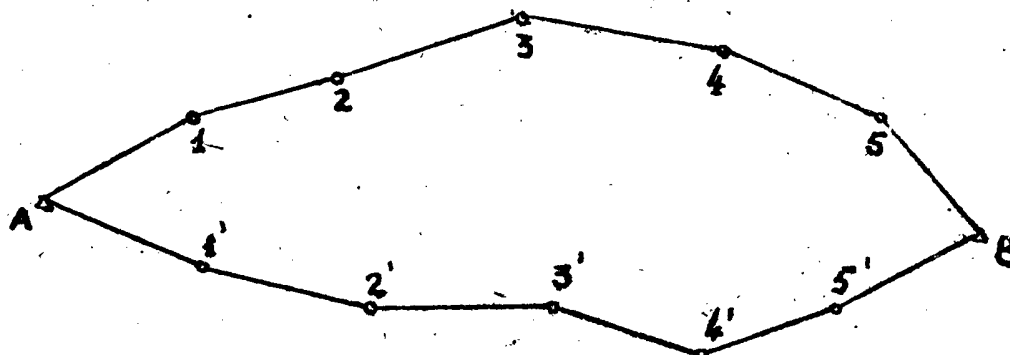


Fig. 334.

Numărul acesta de puncte intermediare poate fi un număr oarecare, în funcție de distanța dintre cele două puncte extreme și de situația terenului.

Să vedem cum facem compensările în acest caz.

Dacă la ducere am găsit pentru diferența de nivel dintre punctele A, B, o valoare  $h_1$ , iar la înapoiere o altă valoare  $h_2$ , atunci adevărata valoare a diferenței de nivel  $h_{AB}$  este media aritmetică a diferențelor de nivel  $h_1$ ,  $h_2$ , rezultate în urma măsurătorilor, adică:

$$h_{AB} = \frac{h_1 + h_2}{2}$$

Dar se impune o condiție și anume trebuie ca diferența între  $h_1$  și  $h_2$ , măsurate unul la ducere și altul la înapoiere, să fie în limitele admisibile, arătate în tabloul anterior, în caz contrar măsurătorile noastre au fost afectate nu numai de erori, ci chiar de greșeli și va trebui să fie executate din nou, până când  $d = h_1 - h_2$  să fie în cadrul toleranțelor.

În ceea ce privește proteculul de nivelment, ce se completează în timpul măsurătorilor, de exemplu cel arătat pentru nivelmentul geometric, de care ne folosim apoi pentru determinarea diferenței de nivel  $h_{AB}$  va fi exact cel amintit, cu deosebirea că, necunoscând cota absolută a punctului A și B, nu se vor mai calcula aceste cote absolute, ci luând pentru punctul A o cotă arbitrară, zero, sau orice altă valoare, vom calcula cote arbitrare pentru toate punctele pentru a ajunge la cota arbitrară a punctului B.

Din diferența dintre aceste două cote arbitrare ale lui A și B, va rezulta apoi  $h_1$ , la ducere și  $h_2$  la înapoiere.

Dacă nivelmentul a fost executat și la ducere și la înapoiere pe același traseu, atunci pentru diferențele de nivel ale punctelor intermediare, vor fi luate, analog ca pentru  $h_{AB}$  media diferențelor de nivel stabilite în cele două măsurători.

Un caz de altfel destul de frecvent este când cunoaștem cota absolută a punctului A, adică  $H_A$  și se cere cota absolută a punctului B.

În acest caz se va executa nivelmentul dublu, absolut identic cum s-a arătat căutînd pe :

$$h_{AB} = \frac{h_1 + h_2}{2}$$

cu aceiași condiții ca  $d = h_1 - h_2$ , să fie în limita admisă, apoi se va determina cota absolută a punctului B, știînd că:  $H_B = H_A + h_{AB}$ .

De altfel acesta este cazul celor mai multe operațiuni, deoarece se va determina cota absolută a punctului A din triangulația noastră, pornind de la o cotă cunoscută și apoi cu acest punct determinăm cotele celorlalte puncte de triangulație.

- 2) Compensarea nivelmentului între puncte de cote cunoscute.

Cunoscînd cotele absolute ale punctelor extreme A, B, adică  $H_A$  și  $H_B$ , se cere să se determine cotele absolute ale punctelor intermediare din poligonuța nivelitică ( $H_1, H_2, H_3, \dots$ ), sau diferențele de nivel  $h_{12}, h_{23}, h_{34}, \dots$ .

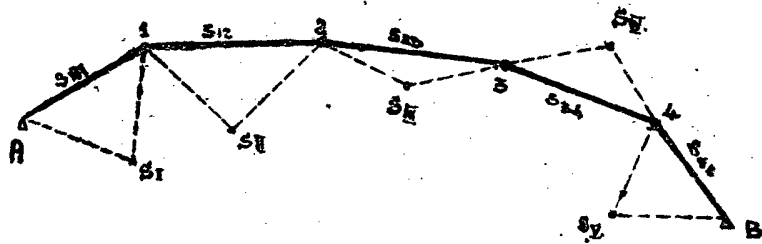


Fig. 335.

După cum se va vedea, problema prezintă aspecte deosebite, adică într-un fel se face compensarea în cazul când voia să determinăm cotele absolute ( $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$ ) și în alt mod se compensează cînd se determină diferențele de nivel ( $h_{12}, h_{23}, h_{34}, \dots, h_{n-1,n}$ ).



- 472 -

In cazul poligonației nivelitice din Fig. de mai sus, cunoaștem cotele absolute  $H_A$  și  $H_B$  și să presupunem că acestea ar fi :

$$H_A = 90,000 \text{ m, iar } H_B = 91,200,$$

vom determina cotele absolute ale punctelor intermediare ( $H_1, H_2, H_3, H_4$ ).

Pornind din punctul A, presupunind că s-ar face nivelment geometric dela mijloc, am staționa alternativ cu aparatul în punctele  $S_I, S_{II}, S_{III}, S_{IV}, S_V$ , făcând vizele înapoi și înainte, ca la nivelmentul geometric arătat, desigur citirile făcute pe miră, se vor înregistra în protocolul de nivelment.

In mod intenționat pentru punctele A și B au fost luate cotele absolute date și în protocolul indicat pentru nivelmentul geometric dela mijloc, pentru a se vedea cum au fost efectuate în acel protocol compensările.

Iată, pentru ușurință, să formăm protocolul pentru poligonația nivelitică din figură, fără a mai trece și puncte intermediare între A și 1, 1 și 2, etc.

Punct	Citiri pe miră			C o t a			Dis- tanța
	Sta- ție	Vi- za	în apoi mij- loc	în ain- te	ori- zonta- lui	- absolu- tă $H_i$	
$S_I$	A	1,252	-	-	91,252	90,000	S = 2 km
	1	-	-	0,998		90,254	
$S_{II}$	1	1,364	-	-	91,618	90,254	S = 3 km
	2	-	-	0,896		90,722	
$S_{III}$	2	1,675	-	-	92,397	90,722	S = 4 km
	3	-	-	1,624		90,773	
$S_{IV}$	3	1,746	-	-	92,519	90,773	S = 2 km
	4	-	-	1,616		90,903	
$S_V$	4	1,629	-	-	92,532	90,903	S = 1 km
	B	-	-	1,392		91,140	

- 473 -

Ajungînd în punctul B, am găsit o cotă absolută  $H'_B = 91,140$ , diferită de cota absolută, cunoscută:  $H_B = 91,200$ .

Însă atunci, cînd s-a tratat problema preciziei nivelmentului, s-a arătat că eroarea ce se comite la nivelment este în funcție de distanța pe care nivelăm și care în cazul nostru este  $S_{A1} + S_{12} + S_{23} + S_{34} + S_{4B} = [S]$  adică distanța pe care a urmat-o traseul nostru și nu distanța în linie dreaptă dintre punctele A, B.

De aceea această eroare va fi repartizată cotelor absolute, găsite pentru punctele intermediare, în funcție de distanța de la punctul A, de la care am pornit cu nivelmentul, pînă la punctul respectiv.

In cazul nostru eroarea găsită pentru  $H_B$  este:  $H'_A - H'_B = 91,200 - 91,140 = 0,060$  m.

Dacă această diferență, pentru distanța parcursă  $[S]$ , nu este în limitele admisibile, nivelmentul va fi reluat de la început.

Cum însă distanțele  $S_{A1} = 2$  km,  $S_{12} = 3$  km,  $S_{23} = 4$  km,  $S_{34} = 2$  km și  $S_{4B} = 1$  km, adică:  $[S] = 12$  km, înseamnă că eroarea noastră, pe km, este:

$$\frac{60 \text{ mm}}{12 \text{ km}} = 5 \text{ mm/km},$$

ceea ce este admisibil pentru nivelmentul de ord. III și IV, pe care l-am executat noi și ca atare pot fi efectuate compensările.

Conform celor expuse ar urma ca:

$$H_1 = H'_1 + \frac{60}{[S]} \cdot S_{A1} = 90,251 + (0,005 \times 2) = 90,264$$

$$H_2 = H'_2 + \frac{60}{[S]} (S_{A1} + S_{12}) = 90,722 + (0,005 \times 5) = 90,747$$

$$H_3 = H'_3 + \frac{60}{[S]} (S_{A1} + S_{12} + S_{23}) = 90,773 + (0,005 \times 9) = 90,818$$

$$H_4 = H'_4 + \frac{60}{[S]} (S_{A1} + S_{12} + S_{23} + S_{34}) = 90,903 + (0,005 \times 11) = 90,958$$

$$H_B = H'_B + \frac{60}{[S]} (S_{A1} + S_{12} + S_{23} + S_{34} + S_{4B}) = 91,140 + (0,005 \times 12) = 91,200.$$

Să găsim astfel tocmai cota cunoscută a punctului B, deci compensarea a fost bine efectuată.

Să vedem cum se petrec lucrurile cînd determinăm diferențele de nivel  $h_{A1}, h_{12}, h_{23}, \dots, h_{4B}$  cunoscînd cotele absolute  $H_A$  și  $H_B$ , deci și diferența de nivel  $h_{AB} = H_A - H_B$ .

Este evident că suma diferențelor de nivel  $h_{A1}, h_{12}, h_{23}, \dots, h_{nB}$  trebuie să fie egală cu  $h_{AB}$  așa cum am amintit, adică:

$$(h_{A1}) + (h_{12}) + (h_{23}) + \dots + (h_{nB}) = h_{AB}$$

Am trecut în paranteze aceste diferențe de nivel pentru a arăta că ele reprezintă adevăratele diferențe de nivel și nu diferențele de nivel măsurate de noi și care sînt afectate de erori.

Tocmai că din cauza că operațiunile noastre sînt lovite de erori, rezultă că:

$$h_{A1} + h_{12} + h_{23} + \dots + h_{nB} \neq h_{AB}$$

Adică: (1)  $h_{A1} + h_{12} + h_{23} + \dots + h_{nB} - h_{AB} = W$  în loc de a avea:

$$(2) (h_{A1}) + (h_{12}) + (h_{23}) + \dots + (h_{nB}) - h_{AB} = 0$$

Ceace reprezintă chiar relația de condiție inițială pentru compensarea nivelmentului (diferențelor de nivel) între două puncte cunoscute.

Ca urmare:

$$\left\{ \begin{aligned} (h_{A1}) &= h_{A1} + v_1 \\ (h_{12}) &= h_{12} + v_2 \\ (h_{23}) &= h_{23} + v_3 \\ &\vdots \\ (h_{nB}) &= h_{nB} + v_n \end{aligned} \right.$$

Ceace ar reveni la a spune că adevăratele diferențe de nivel sînt egale cu diferențele de nivel măsurate, cărora li-se adaugă o eroare  $v$  corespunzătoare.

Dacă se înlocuiesc aceste valori în ecuația (1), ținînd seama și de relația (2), se obține:

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + W = 0$$

Aceasta, considerînd, din motive de simetrie, semnul lui  $W$  fiind negativ.

Avînd o singură ecuație de condiție, conform celor arătate în cadrul Cap. erorilor, avem o singură ecuație în  $K$ :

$$\left[ \frac{aa}{p} \right] K + W = 0$$

Deci:

$$(3) K = - \frac{W}{\left[ \frac{aa}{p} \right]} \text{ sau } K = - \frac{W}{S}$$

În această relație  $p$  este un coeficient de pondere, de greutate, care este:  $p = \frac{1}{S}$  sau:

$$p_1 = \frac{1}{S_{A1}} ; p_2 = \frac{1}{S_{12}} ; \dots ; p_n = \frac{1}{S_{nB}}$$

- 475 -

Având pe  $K$  iar  $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = 1$ , știm că:

$$v_1 = \frac{a_1}{p_1} \cdot K_1 = - \frac{W}{[S]} \cdot S_{A1}$$

$$v_2 = \frac{a_2}{p_2} \cdot K_2 = - \frac{W}{[S]} \cdot S_{12}$$

⋮

$$v_n = \frac{a_n}{p_n} \cdot K_n = - \frac{W}{[S]} \cdot S_{n.B.}$$

Ca atare, la diferențele de nivel măsurate, se va adăuga eroarea pe km, multiplicată numai cu distanța dintre cele două puncte și nu cu distanța de la punctul de pornire.

Spre a pune mai bine în evidență acest lucru, să ne referim la poligonă nivelitică, pentru care avem trecute datele măsurătorilor în protocol.

Diferențele de nivel măsurate ar fi:

$$h_{A1} = H'_1 - H_A = 90,254 - 90,000 = 0,254 \text{ m,}$$

$$h_{12} = H'_2 - H'_1 = 90,722 - 90,254 = 0,468 \text{ m,}$$

$$h_{23} = H'_3 - H'_2 = 90,773 - 90,722 = 0,051 \text{ m,}$$

$$h_{34} = H'_4 - H'_3 = 90,903 - 90,773 = 0,130 \text{ m,}$$

$$h_{48} = H'_B - H'_4 = 91,140 - 90,903 = 0,237 \text{ m,}$$

$$h_{AB} = 1,140 \text{ m.}$$

Iar:  $h'_{AB} = H'_B - H_A = 91,140 - 90,000 = 1,140 \text{ m.}$

Adică, tocmai suma diferențelor de nivel măsurate.

Însă:  $h_{AB} = H_B - H_A = 91,200 - 90,000 = 1,200 \text{ m.}$

Pentru compensare se va adăuga fiecărei diferențe de nivel măsurate eroarea:

$$\frac{W}{[S]} = \frac{H_B - H'_B}{[S]} = \frac{60 \text{ mm}}{12 \text{ km}} = 0,005 \text{ m/km,}$$

multiplicată cu distanța respectivă și vom avea:

$$(h_{A1}) = h_{1A} + \frac{W}{[S]} \cdot S_{A1} = 0,254 + (0,005 \times 2) = 0,264$$

$$(h_{12}) = h_{12} + \frac{W}{[S]} \cdot S_{12} = 0,468 + (0,005 \times 3) = 0,483$$

$$(h_{23}) = h_{23} + \frac{W}{[S]} \cdot S_{23} = 0,051 + (0,005 \times 4) = 0,071$$

$$(h_{34}) = h_{34} + \frac{W}{[S]} \cdot S_{34} = 0,130 + (0,005 \times 2) = 0,140$$

$$(h_{48}) = h_{48} + \frac{W}{[S]} \cdot S_{48} = 0,237 + (0,005 \times 1) = 0,242$$

Din însumarea acestor rezultă:  $h_{AB} = 1,200$

- a) Compensarea cotelor absolute conform relației:

$$H_1 = H'_1 + \frac{W}{[S]} \cdot S_{A1}$$

$$H_2 = H'_2 + \frac{W}{[S]} \cdot (S_{12} + S_{A1})$$

$$\vdots$$

$$H_B = H'_B + \frac{W}{[S]} \cdot (S_{A1} + S_{12} + S_{23} + \dots + S_{nB})$$

- b) Compensarea diferențelor de nivel, conform relațiilor:

$$(h_{A1}) = h_{A1} + \frac{W}{[S]} \cdot S_{A1}$$

$$(h_{12}) = h_{12} + \frac{W}{[S]} \cdot S_{12}$$

$$\vdots$$

$$(h_{nB}) = h_{nB} + \frac{W}{[S]} \cdot S_{nB}$$

3) Compensarea poligoanelor nivelitice.

Această problemă este un caz particular al poligonatiilor nivelitice arătate, adică am avea un punct A și n puncte intermediare, poligonatia pornind din punctul A se va închide în același punct (Fig.336).

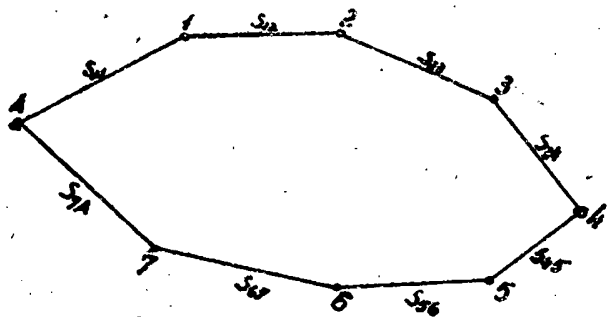


Fig. 336.

În acest caz va trebui ca, nivelind pe traseul A, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, A, să găsim pentru punctul A aceeași cotă, în caz contrar dacă am găsi un  $H'_A \neq H_A$  (cunoscut) va trebui ca diferența

$$\frac{H_A - H'_A}{[S]}$$

să fie în limitele admisibile, iar compensarea cotelor punctelor intermediare se va face așa cum s-a arătat:

$$H_1 = H'_1 + \frac{H_A - H'_A}{[S]} \cdot S_{A1}$$

$$H_2 = H'_2 + \frac{H_A - H'_A}{[S]} \cdot (S_{A1} + S_{12})$$

$$H_3 = H'_3 + \frac{H_A - H'_A}{[S]} \cdot (S_{A1} + S_{12} + S_{23})$$

$$\vdots$$

- 477 -

$$H_7 = H_7' + \frac{H_A - H_A'}{[S]} \cdot (S_{A1} + S_{12} + \dots + S_{nA})$$

$$H_A = H_A' + \frac{H_A - H_A'}{[S]} \cdot [S]$$

va trebui ca: Pentru compensarea diferențelor de nivel

$$(1) \quad (h_{A1}) + (h_{12}) + \dots + (h_{nA}) = 0$$

Adică nu mai intervine diferența de nivel  $h_{A1}$ , care este zero.

Însă, deoarece diferențele măsurate:

$$(2) \quad h_{A1} + h_{12} + h_{23} + \dots + h_{nA} = W$$

Adică avem o eroare  $W$ .

Știind că:

$$(3) \quad \begin{cases} (h_{A1}) = h_{A1} + v_{A1} \\ (h_{12}) = h_{12} + v_{12} \\ \vdots \\ (h_{nA}) = h_{nA} + v_{nA} \end{cases}$$

Însușind aceste diferențe de nivel și ținând seama de relațiile (1) în care s-a arătat că suma diferențelor de nivel adevărate este nulă, precum și din relația (2) unde sînt diferențele de nivel măsurate, se obține:

$$v_{A1} + v_{12} + v_{23} + \dots + v_{nA} + W = 0$$

Adică avem o singură ecuație de condiție, așa că:

$$\left[ \frac{aa}{P} \right] K_1 + W = 0$$

Dar fiindcă:

$$\left[ \frac{aa}{P} \right] = [S] = P \text{ (perimetrul)}$$

$$[S] K_1 + W = 0$$

Erorile în cazul nostru vor fi:

$$v_{A1} = K_1 S_{A1} = -\frac{W}{[S]} \cdot S_{A1}$$

$$v_{12} = K_1 S_{12} = -\frac{W}{[S]} \cdot S_{12}$$

$$\vdots$$

$$v_{nA} = K_1 S_{nA} = -\frac{W}{[S]} \cdot S_{nA}$$

Adică aceeași relație ca și cum am fi avut două puncte de cotă cunoscută.

#### - 4) Compensarea rețelelor nivelitice.

##### a) Triangulația nivelitică.

Cînd într-o regiune întinsă, avem mai multe

puncte, de exemplu cazul din Fig. 337 (al unei triangulații nivelitice), unde avem 4 puncte (A, B, C, D), când între aceste puncte este o distanță mare de ordinul km, prin poligonatiile nivelitice, asemănătoare cu cele tratate mai sus, au fost stabilite diferențele de nivel  $h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6$ .

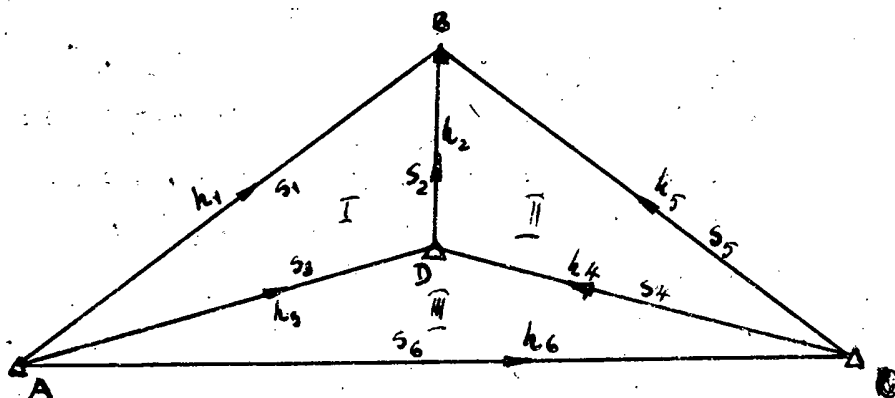


Fig 337.

Adică, între punctele A, B, de exemplu, pentru a stabili diferența de nivel  $h_7$ , a trebuit să se execute o poligonatie nivelitică, după care prin compensări de

felul celor arătate, să se deducă această diferență de nivel ( $h_7$ ).

În mod analog, prin poligonatiile nivelitice și compensări, au fost determinate și celelalte diferențe de nivel ( $h_2, h_3, h_4, h_5, h_6$ ).

În figură săgețile indică direcțiunea în care panta urcă.

Având aceste diferențe de nivel, în triangulația nivelitică, adică în rețeaua noastră nivelitică din Fig. 337 ele trebuiesc să satisfacă anumite condițiuni

de relația: Numărul acestor condițiuni este dat

$$r = 1 - p + 1.$$

În această relație,  $r$  reprezintă numărul de ecuații, 1 numărul laturilor nivelitice și  $p$  numărul de puncte.

Pentru cazul nostru am avea:

$$1 = 6; \quad p = 4.$$

$$\text{Deci: } r = 1 - p + 1 = 6 - 4 + 1 = 3.$$

Adică numărul ecuațiilor de condiție este egal cu 3.

Într-adevăr, ținând seama de sensul indicat de săgeți, din triunghiul ABD se poate scrie:

$$\left. \begin{aligned} (h_1) - (h_2) - (h_3) &= 0. \\ \text{La fel din triunghiul BDC:} \\ (h_2) + (h_4) - (h_5) &= 0. \end{aligned} \right\} (1)$$

- 479 -

Si din triunghiul: ADC:

$$(h_3) - (h_4) - (h_6) = 0$$

In aceste trei ecuații de condiții au fost luate în paranteză diferențele de nivel, spre a se arăta că numai adevăratele valori ale acestor diferențe de nivel satisfac ecuațiile, pe cînd diferențele stabilite în urma măsurărilor (prin poligonatii nivelitice compensate chiar) nu satisfac aceste relații, ci avem:

$$(2) \begin{cases} h_1 - h_2 - h_3 = W_1 \\ h_2 - h_4 - h_5 = W_2 \\ h_3 - h_4 - h_6 = W_3 \end{cases}$$

Cu alte cuvinte:

$$(3) \begin{cases} (h_1) = h_1 + v_1 \\ (h_2) = h_2 + v_2 \\ \vdots \\ (h_6) = h_6 + v_6 \end{cases}$$

Introducînd aceste valori în relațiile (1) și ținînd seama de relațiile (2), se obțin următoarele trei relații:

$$(4) \begin{cases} v_1 - v_2 - v_3 + W_1 = 0 \\ v_2 + v_4 - v_5 + W_2 = 0 \\ v_3 - v_4 - v_6 + W_3 = 0 \end{cases}$$

Însă în nivelment eroarea este în funcție de distanță, cu cît distanța este mai mare, cu atît și eroarea este mai mare, așa că sîntem nevoiți a ține cont de acest lucru, adică de precizia măsurărilor și deci în relațiile lui Gauss în K vor fi introduși coeficienți de pondere sau greutate, (p).

Ecuatiile lui Gauss în K vor fi:

$$(5) \begin{cases} \left[ \frac{aa}{p} \right] K_1 + \left[ \frac{ab}{p} \right] K_2 + \left[ \frac{ac}{p} \right] K_3 + W_1 = 0 \\ \left[ \frac{ba}{p} \right] K_1 + \left[ \frac{bb}{p} \right] K_2 + \left[ \frac{bc}{p} \right] K_3 + W_2 = 0 \\ \left[ \frac{ca}{p} \right] K_1 + \left[ \frac{cb}{p} \right] K_2 + \left[ \frac{cc}{p} \right] K_3 + W_3 = 0 \end{cases}$$

Relații în care știm că a reprezintă coeficienții primei ecuații din sistemul (4), b coeficienții ecuației a doua și c sînt coeficienții ultimei ecuații din acelaș sistem.

Din relațiile (5) rezultă coeficienții K, iar apoi erorile:



$$\begin{aligned}
 v_1 &= \frac{a_1}{p_1} K_1 + \frac{b_1}{p_1} K_2 + \frac{c_1}{p_1} K_3 \\
 v_2 &= \frac{a_2}{p_2} K_1 + \frac{b_2}{p_2} K_2 + \frac{c_2}{p_2} K_3 \\
 &\vdots \\
 v_6 &= \frac{a_6}{p_6} K_1 + \frac{b_6}{p_6} K_2 + \frac{c_6}{p_6} K_3
 \end{aligned}$$

Coeficienții de pondere am spus că sînt  $p = \frac{1}{S}$ , adică:  
 $p = \frac{1}{S_1}$ ,  $p = \frac{1}{S_2}$ , ...,  $p_6 = \frac{1}{S_6}$  sau invers proporționali  
 cu distanțele respective, arătate și în Fig. 337.

Odată aflate valorile erorilor  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_6$  pot fi făcute compensările, adică aflate adevăratele valori ale diferențelor de nivel; adăugînd aceste erori la diferențele de nivel cunoscute ( $h_1, h_2, h_3, \dots, h_6$ ) așa cum am stabilit în relațiile (3).

Observare.

Prin analizarea relațiilor lui Gauss în  $K$ , putem ajunge la a scrie în mod direct aceste ecuații, numai după figură, după rețeaua noastră nivelitică.

Relațiile în  $K$  sînt:

$$\begin{aligned}
 \left[ \frac{aa}{p} \right] K_1 + \left[ \frac{ab}{p} \right] K_2 + \left[ \frac{ac}{p} \right] K_3 + W_1 &= 0 \\
 \left[ \frac{ba}{p} \right] K_1 + \left[ \frac{bb}{p} \right] K_2 + \left[ \frac{bc}{p} \right] K_3 + W_2 &= 0 \\
 \left[ \frac{ca}{p} \right] K_1 + \left[ \frac{cb}{p} \right] K_2 + \left[ \frac{cc}{p} \right] K_3 + W_3 &= 0
 \end{aligned}$$

Am arătat că  $p_1 = \frac{1}{S_1}$ ,  $p_2 = \frac{1}{S_2}$ , ...,  $p_6 = \frac{1}{S_6}$ .

Să vedem cari sînt coeficienții lui  $K$  în aceste relații, știind, din relațiile (4) de mai sus, că:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 1; & a_2 &= -1; & a_3 &= -1; & a_4 &= a_5 = a_6 = 0 \\
 b_2 &= 1; & b_4 &= 1; & b_5 &= -1; & b_1 &= b_3 = b_6 = 0 \\
 c_3 &= 1; & c_6 &= 1; & c_6 &= -1; & c_1 &= c_2 = c_5 = 0
 \end{aligned}$$

Așa că:

$$\begin{aligned}
 \left[ \frac{aa}{p} \right] &= \frac{a_1^2}{p_1} + \frac{a_2^2}{p_2} + \frac{a_3^2}{p_3} + \dots + \frac{a_6^2}{p_6} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} \\
 \left[ \frac{ab}{p} \right] &= \frac{a_1 b_1}{p_1} + \frac{a_2 b_2}{p_2} + \frac{a_3 b_3}{p_3} + \dots + \frac{a_6 b_6}{p_6} = \frac{1}{p_2} \\
 \left[ \frac{ac}{p} \right] &= \frac{a_1 c_1}{p_1} + \frac{a_2 c_2}{p_2} + \frac{a_3 c_3}{p_3} + \dots + \frac{a_6 c_6}{p_6} = \frac{1}{p_3}
 \end{aligned}$$

Aceștia ar fi coeficienții primei ecuații, în care, înlocuind valorile lui  $p$  cu cele arătate, se deduce:

$$\left(\frac{aa}{p}\right) = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = S_1 + S_2 + S_3 = S^I \text{ (perimetrul triunghiului I)}$$

$$\left(\frac{ab}{p}\right) = \frac{1}{p_2} = S_2$$

$$\left(\frac{ac}{p}\right) = \frac{1}{p_3} = S_3$$

Si avem prima ecuație în  $K$  :

$$S^I K_1 - S_2 K_2 - S_3 K_3 + W_1 = 0.$$

In mod analog găsim pentru celelalte două ecuații coeficienții lui  $K$ , așa că sistemul nostru în  $K$ , va fi:

$$S^I K_1 - S_2 K_2 - S_3 K_3 + W_1 = 0$$

$$- S_2 K_1 + S^{II} K_2 - S_4 K_3 + W_2 = 0$$

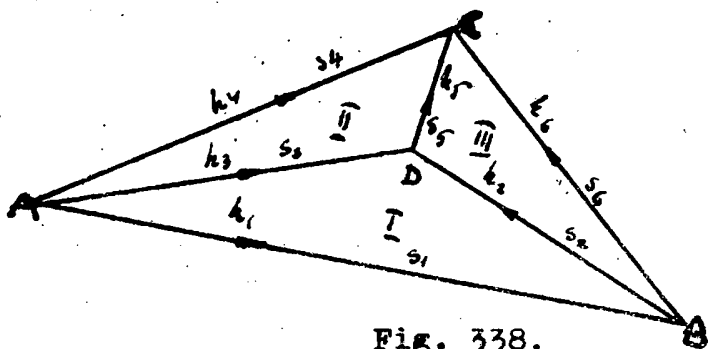
$$- S_3 K_1 - S_4 K_2 + S^{III} K_3 + W_3 = 0.$$

In aceste relații observăm că din triunghiul I (Fig. 337), se poate scrie prima relație în care: coeficientul lui  $K_1$  este perimetrul aceluia triunghi, coeficientul lui  $K_2$  cu semn minus este latura comună dintre triunghiul I și II, adică  $S_2$ , iar coeficientul lui  $K_3$  este latura  $S_3$  comună triunghiului I și III, luată cu semn minus.

La fel pentru ecuația 2-a, pentru  $K_2$  avem coeficient perimetrul triunghiului II pe  $S^{II}$ , iar pentru  $K_1$  latura comună cu triunghiul I cu semn minus și pentru  $K_3$  latura comună cu triunghiul III la fel cu semnul minus.

Analog pentru ecuația 3-a.

Exemplu numeric:



- $h_1 = 14,876 \text{ m}$ ,
- $h_2 = 10,847 \text{ m}$ ,
- $h_3 = 25,714 \text{ m}$ ,
- $h_4 = 86,809 \text{ m}$ ,
- $h_5 = 61,075 \text{ m}$ ,
- $h_6 = 71,952 \text{ m}$

- $S_1 = 15,0 \text{ km}$
- $S_2 = 14,2 \text{ km}$
- $S_3 = 18,7 \text{ km}$
- $S_4 = 34,8 \text{ km}$
- $S_5 = 24,5 \text{ km}$
- $S_6 = 20,4 \text{ km}$

Fig. 338.

$$\begin{aligned}
 - (h_1) + (h_2) + (h_3) &= \theta & -h_1 - h_2 + h_3 &= W_1 \\
 - (h_3) + (h_4) - (h_5) &= \theta & -h_3 + h_4 - h_5 &= W_2 \\
 (h_2) + (h_5) - (h_6) &= \theta & h_2 + h_5 - h_6 &= W_3.
 \end{aligned}$$

Sau:

$$\begin{aligned}
 14,876 - 10,847 + 25,714 &= W_1 = - 9 \text{ mm} \\
 25,714 + 36,809 - 61,074 &= W_2 = + 21 \text{ mm} \\
 10,847 + 61,074 - 71,952 &= W_3 = - 31 \text{ mm}.
 \end{aligned}$$

Relațiile în V și K:

$$(1) \begin{cases} -V_1 - V_2 + V_3 + W_1 = \theta \\ V_3 + V_4 - V_5 + W_2 = \theta \\ V_2 + V_5 - V_6 + W_3 = \theta \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \begin{bmatrix} aa \\ p \end{bmatrix} K_1 + \begin{bmatrix} ab \\ p \end{bmatrix} K_2 + \begin{bmatrix} ac \\ p \end{bmatrix} K_3 + W_1 = \theta \\ \begin{bmatrix} ba \\ p \end{bmatrix} K_1 + \begin{bmatrix} bb \\ p \end{bmatrix} K_2 + \begin{bmatrix} bc \\ p \end{bmatrix} K_3 + W_2 = \theta \\ \begin{bmatrix} ca \\ p \end{bmatrix} K_1 + \begin{bmatrix} cb \\ p \end{bmatrix} K_2 + \begin{bmatrix} cc \\ p \end{bmatrix} K_3 + W_3 = \theta \end{cases}$$

Se formează tablourile pentru aflarea coeficienților lui K așa cum se proceda în calculul erorilor

	a	b	c	S	Pro- ba	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{p}$ aa	$\frac{1}{p}$ ab	$\frac{1}{p}$ ac	$\frac{1}{p}$ a S	Pro- ba
1	-1	0	0	1	0	15,0	15,0	0	0	-15,0	0
2	-1	0	1	0	0	14,2	14,2	0	-14,2	0	0
3	1	-1	0	0	0	18,7	18,7	-18,7	0	0	0
4	0	1	0	-1	0	34,8	0	0	0	0	0
5	0	-1	1	0	0	24,5	0	0	0	0	0
6	0	0	-1	1	0	20,4	0	0	0	0	0
[ ]	-1	-1	1	1	0		47,9	-18,7	-14,2	-15,0	0

ba	bb	bc	bs	Pro- ba	ca	cb	cc	cs	Pro- ba
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-14,2	0	14,2	0	0
18,7	18,7	0	0	0	0	0	0	0	0
0	34,8	0	-34,8	0	0	0	0	0	0
0	24,5	-24,5	0	0	0	-24,5	24,5	0	0
0	0	0	0	0	0	0	20,4	-20,4	0
-18,7	78,0	-24,5	-34,8	0	-14,2	-24,5	59,1	20,4	0

- 483 -

Având coeficienții determinați, ecuațiile lui Gauss în K vor deveni:

$$(3) \quad \begin{aligned} 47,9 K_1 - 18,7 K_2 - 14,2 K_3 - 9 &= 0 \\ - 18,7 K_1 + 78,0 K_2 - 24,5 K_3 + 21 &= 0 \\ - 14,2 K_1 - 24,5 K_2 + 59,1 K_3 - 31 &= 0 \end{aligned}$$

Observăm că aceste ecuații puteau fi scrise direct, sub forma arătată:

$$(4) \quad \begin{cases} S^I K_1 - s_2 K_2 - s_3 K_3 - 9 = 0 \\ - s_3 K_1 + S^{II} K_2 - s_5 K_3 + 21 = 0 \\ - s_2 K_1 - s_5 K_2 + S^{III} K_3 - 31 = 0 \end{cases}$$

În care ecuații coeficienții lui K vor fi

$$S^I = s_1 + s_2 + s_3 = 15,0 + 14,2 + 18,7 = 47,9$$

$$s_3 = 18,7; \quad s_2 = 14,2$$

$$S^{II} = s_3 + s_4 + s_5 = 18,7 + 34,8 + 24,5 = 78,0$$

$$s_3 = 18,7; \quad s_5 = 24,5$$

$$S^{III} = s_2 + s_5 + s_6 = 14,2 + 24,5 + 20,4 = 59,1$$

$$s_2 = 14,2; \quad s_5 = 24,5.$$

Introducând acești coeficienți în sistemul (4) se vor obține aceleași ecuații ca în sistemul (3).

Rezolvând sistemul de 3 ecuații cu 3 necunoscute ( $K_1, K_2, K_3$ ), se obține:

$$K_1 = 0,3793, \quad K_2 = 0,0173, \quad K_3 = 0,6228$$

Iar erorile  $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6$ , vor fi determinate din următoarele relații:

$$V_1 = \frac{a_1}{p_1} K_1 + \frac{b_1}{p_1} K_2 + \frac{c_1}{p_1} K_3 = -15 K_1 + 0 K_2 + 0 K_3 = - 5,69 \text{ mm}$$

$$V_2 = \frac{a_2}{p_2} K_1 + \frac{b_2}{p_2} K_2 + \frac{c_2}{p_2} K_3 = -14,2 K_1 + 0 K_2 + 14,2 K_3 = + 3,46 \text{ mm}$$

$$V_3 = \frac{a_3}{p_3} K_1 + \frac{b_3}{p_3} K_2 + \frac{c_3}{p_3} K_3 = 18,7 K_1 - 18,7 K_2 + 0 K_3 = + 6,77 \text{ mm}$$

$$V_4 = \frac{a_4}{p_4} K_1 + \frac{b_4}{p_4} K_2 + \frac{c_4}{p_4} K_3 = 0 K_1 + 34,8 K_2 + 0 K_3 = + 0,60 \text{ mm}$$

$$V_5 = \frac{a_5}{p_5} K_1 + \frac{b_5}{p_5} K_2 + \frac{c_5}{p_5} K_3 = 0 K_1 - 24,5 K_2 + 24,5 K_3 = + 14,83 \text{ mm}$$

$$V_6 = \frac{a_6}{p_6} K_1 + \frac{b_6}{p_6} K_2 + \frac{c_6}{p_6} K_3 = 0 K_1 + 0 K_2 - 20,4 K_3 = - 12,71 \text{ mm}$$

Valorile diferențelor de nivel compensate sînt:

$$(h_1) = h_1 + V_1 = 14,876 - 0,00569 = 14,8703$$

$$(h_2) = h_2 + V_2 = 10,847 + 0,00346 = 10,8505$$

$$(h_3) = h_3 + V_3 = 25,714 + 0,00677 = 25,7208$$

$$(h_4) = h_4 + V_4 = 86,809 + 0,00600 = 86,8096$$

- 484 -

$$(h_5) = h_5 + V_5 = 61,074 + 0,01483 = 61,0888$$

$$(h_6) = h_6 + V_6 = 71,952 - 0,01271 = 71,9393$$

Observațiune.

În cazul studiat, pentru a putea ajunge, prin coeficienții determinați în tablou, la aceleași ecuații, ca pentru cazul când ele se scriu în mod direct, este necesar a se lua ecuațiile de condiție, inițiale, în modul următor:

- Prima ecuație:  $-(h_1) - (h_2) + (h_3) = 0$   
adică pornind în sens invers, pentru prima diferență de nivel de cum arată sensul de urcare a pantei.

- Ecuația doua:  $-(h_3) + (h_4) - (h_5) = 0$ ,  
adică se ia diferența de nivel  $(h_3)$  în sensul invers decât în prima ecuație.

Analog ecuația 3-a va avea diferența  $(h_1)$  de sens diferit ca în prima ecuație, așa că ecuația aceasta va fi:  $(h_1) + (h_5) - (h_6) = 0$ .

Desigur că ecuațiile pot fi scrise luat în oricare sens vom, însă în acest caz nu ajungem la aceleași ecuații ca cele scrise direct, ele diferind doar în ceea ce privește semnele coeficienților necunoscutelor  $K_1, K_2, K_3$ .

- b) Compensarea unei rețele nivelitice oarecare.

Pentru o rețea oarecare, cazul din figura alăturată, numărul ecuațiilor de condiție se stabilesc tot cu relația cunoscută:

$$r = 1 - p + 1 = 10 - 8 + 1 = 3.$$

Ecuațiile lui Gauss în  $K$ , în număr de 3, scrise direct din cele trei poligoane nivelitice, vor fi:

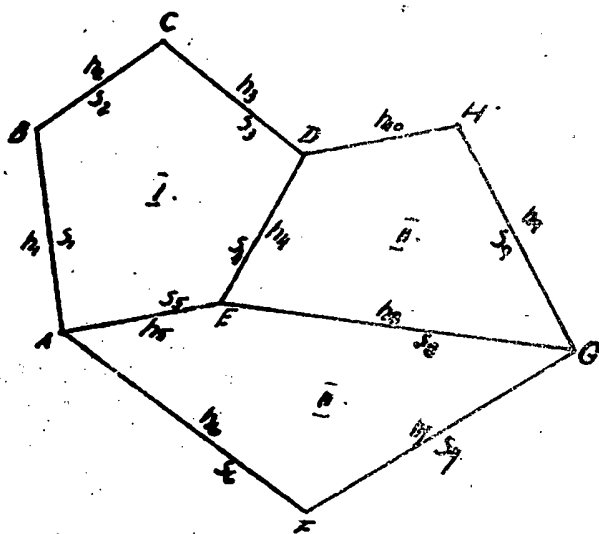


Fig. 339.

$$\begin{aligned} S^I K_1 - s_1 k_2 - s_5 k_3 + W_1 &= 0 \\ -s_2 k_1 + S^{II} K_2 - s_3 k_3 + W_2 &= 0 \\ -s_4 k_1 - s_6 k_2 + S^{III} K_3 + W_3 &= 0 \end{aligned}$$

Prin rezolvarea acestor ecuații rezultă valorile lui  $K_1, K_2, K_3$ , care introduse în sistemul următor, vor fi obținute erorile  $V_1, V_2, \dots, V_{10}$

$$V_1 = a_1 s_1 k_1 + b_1 s_2 k_2 + c_1 s_3 k_3$$

$$V_2 = a_2 s_1 k_1 + b_2 s_2 k_2 + c_2 s_3 k_3$$

⋮

$$V_{10} = a_{10} s_{10} k_1 + b_{10} s_{10} k_2 + c_{10} s_{10} k_3$$

Iar diferențele de nivel compensate

sînt:  $(h_1) = h_1 + V_1$      $(h_2) = h_2 + V_2$ ; .....  $(h_{10}) = h_{10} + V_{10}$

Exemplu numeric.

Spre a vedea, mai ales, cum se face rezolvarea unui sistem de mai multe ecuații, s-a luat un exemplu în care avem 6 ecuații.

Se cere compensarea rețelei nivelitice reprezentată în figura de mai jos și cu datele cuprinse în tablou. În rețeaua nivelitică avem 13 laturi și 8 puncte.

Numărul ecuațiilor de condiții:

$$r = 1 - p + 1 = 13 - 8 + 1 = 6$$

Adică 6 ecuații de condiții pe cari le scriem din cele 6 figuri geometrice ale rețelei, conform săgeților indicatoare de pantă.

$$\begin{aligned} - (h_1) - (h_2) + (h_3) + (h_4) &= 0 \\ (h_1) + (h_5) - (h_6) &= 0 \\ (h_6) + (h_7) - (h_8) &= 0 \\ - (h_3) - (h_7) + (h_9) - (h_{10}) &= 0 \\ (h_{10}) - (h_{11}) - (h_{12}) &= 0 \\ - (h_4) + (h_{12}) + (h_{13}) &= 0 \end{aligned}$$

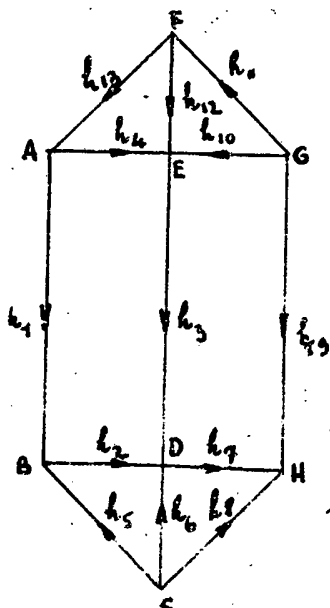


Fig. 340.

În tabloul cu datele se vor trece acestea astfel ca să putem determina erorile  $W_1, W_2, W_3, \dots$

.....  $W_6$ .  
Ecuațiile în  $K$ , scrise direct, se arată pe contrapagină.

- 486 -

Poli- gon.	Latu- ra	Distan- ța în km	h în mm		Eroare de închidere
			+	-	
I	AB	$S_1 = 4$		160	$W_1 = - 5$
	BD	$S_2 = 1$		320	
	DE	$S_3 = 2$	165		
	EA	$S_4 = 3$	310		
II	BD	$S_2 = 1$	320		$W_2 = - 6$
	BC	$S_5 = 3$	270		
	CD	$S_6 = 2$		596	
III	CD	$S_6 = 2$	596		$W_3 = + 4$
	DH	$S_7 = 2$	220		
	HC	$S_8 = 3$		812	
IV	DE	$S_3 = 2$		165	$W_4 = - 6$
	DH	$S_7 = 2$		220	
	GH	$S_9 = 4$	789		
	GE	$S_{10} = 3$		410	
V	GE	$S_{10} = 3$	410		$W_5 = + 1$
	EF	$S_{12} = 2$		240	
	FG	$S_{11} = 4$		169	
VI	EA	$S_4 = 3$		310	$W_6 = + 6$
	FE	$S_{12} = 2$	240		
	AF	$S_{13} = 5$	76		

- 487 -

Ecuatiile în K, scrise direct:

$$\begin{aligned}
 & S^I K_1 - s_1 k_2 - s_3 k_4 - s_4 k_6 + W_1 = 0 \\
 & - s_2 k_1 + S^{II} k_2 - s_6 k_3 + W_2 = 0 \\
 & - s_6 k_2 + S^{III} k_3 - s_7 k_4 + W_3 = 0 \\
 (1) \quad & - S^{IV} K_5 - s_3 k_1 - s_2 k_3 + S^{VI} k_4 + W_4 = 0 \\
 & - s_{10} k_4 + S^V k_5 - s_{12} k_6 + W_5 = 0 \\
 & - s_4 k_1 - s_{12} k_5 + S^{VII} k_6 + W_6 = 0
 \end{aligned}$$

In acest sistem, înlocuind valorile coeficienților necunoscute, se obține:

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & 10 k_1 - k_2 - 2k_4 - 3 k_6 - 5 = 0 \\
 & - k_1 + 6 k_2 - 2 k_3 - 6 = 0 \\
 & - 2k_1 + 7 k_3 - 2 k_4 + 4 = 0 \\
 & - 3k_5 - 2 k_1 - 2 k_3 + 11k_4 - 6 = 0 \\
 & - 3k_4 + 9 k_5 - 2 k_6 + 1 = 0 \\
 & - 3k_1 - 2 k_5 + 10 k_6 + 6 = 0
 \end{aligned}$$

Acest sistem de 6 ecuații cu șase necunoscute, poate fi rezolvat prin mai multe metode.

- a) Rezolvarea prin aproximații succesive sau regula falsei.

Înainte de a trece la rezolvarea sistemului de ecuații din exemplul nostru, să vedem sumar, în ce constă această metodă.

Pentru aceasta să luăm un sistem cu 3 ecuații cu 3 necunoscute.

$$(1) \quad \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z - \sigma_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z - \sigma_2 = 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z - \sigma_3 = 0 \end{cases}$$

In acest sistem putem înlocui necunoscutele

$$\begin{aligned}
 x &= x_0 + x' \\
 y &= y_0 + y' \\
 z &= z_0 + z'
 \end{aligned}$$

Valorile  $x_0, y_0, z_0$ , se obțin, luând:

$$x_0 = \frac{\sigma_1}{a_1}; \quad y_0 = \frac{\sigma_2}{b_2}; \quad z_0 = \frac{\sigma_3}{c_3}$$

Cu aceste valori sistemul (1) devine:



$$\begin{aligned}
 a_1(x_0 + x') + b_1(y_0 + y') + c_1(z_0 + z') - \sigma_1 &= a_1x' + b_1y' + c_1z' - l_1 = \theta \\
 a_2(x_0 + x') + b_2(y_0 + y') + c_2(z_0 + z') - \sigma_2 &= a_2x' + b_2y' + c_2z' - l_2 = \theta \\
 a_3(x_0 + x') + b_3(y_0 + y') + c_3(z_0 + z') - \sigma_3 &= a_3x' + b_3y' + c_3z' - l_3 = \theta
 \end{aligned}$$

In care:

$$\begin{aligned}
 l_1 &= \sigma_1 - (a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0) \\
 l_2 &= \sigma_2 - (a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0) \\
 l_3 &= \sigma_3 - (a_3x_0 + b_3y_0 + c_3z_0)
 \end{aligned}$$

In acest mod se ajunge la un alt sistem in care necunoscutele au valori mai mici ca in sistemul initial (1).

Aven adică sistemul:

$$(3) \begin{cases} a_1x' + b_1y' + c_1z' - l_1 = \theta \\ a_2x' + b_2y' + c_2z' - l_2 = \theta \\ a_3x' + b_3y' + c_3z' - l_3 = \theta \end{cases} \quad \text{In care: } \begin{matrix} l_1 < \sigma_1 \\ l_2 < \sigma_2 \\ l_3 < \sigma_3. \end{matrix}$$

După aceea se înlocuește la fel ca mai sus

$$x' = x'_0 + x''; \quad y' = y'_0 + y''; \quad z' = z'_0 + z''$$

și obținem un alt sistem.

Precedind analog pînă cînd am obținut valori pentru necunoscute cari să satisfacă sistemul ultima și ne cunoscutele vor avea valorile:

$$\begin{aligned}
 x &= x_0 + x'_0 + x''_0 + x'''_0 + x''''_0 + x''''''_0 + \dots \\
 y &= y_0 + y'_0 + y''_0 + y'''_0 + y''''_0 + y''''''_0 + \dots \\
 z &= z_0 + z'_0 + z''_0 + z'''_0 + z''''_0 + z''''''_0 + \dots
 \end{aligned}$$

Pentru rezolvarea cu ușurință, prin metoda falsei, a sistemului din exemplul nostru, să ne înscrinem într-un tabel coeficienții lui K, din cele 6 ecuații.

Ecuația	Coeficienții necunoscutelor							Proba	W'		W''		W'''	
	K <sub>1</sub>	K <sub>2</sub>	K <sub>3</sub>	K <sub>4</sub>	K <sub>5</sub>	K <sub>6</sub>	l		+	-	+	-	+	-
1	10	-1	0	-2	0	-3	-4	0	5		0,2		0,33	
2	-1	6	-2	0	0	0	-3	0	6	0,5			0,72	
3	0	-2	7	-2	0	0	-3	0	4		2,5		0,24	
4	-2	0	-2	11	-3	0	-4	0	6		0,2		0,38	
5	0	0	0	-3	9	-2	-4	0	1		0,2		0,34	
6	-3	0	0	0	-2	10	-5	0	6		1,3		1,80	

In coloana in care este trecut W sînt arătate erorile de inchidere  $W_1, W_2, W_3, \dots, W_6$ .

In urma primei aproximatii gasim pentru  $K_1, K_2, K_3, \dots, K_6$  valorile din primul rind, din dreptul lui  $K_1$  din tabloul urmator, pe care le-am dedus, pentru  $K_2$  din ecuatia 1-a, in care au fost anulați ceilalți termeni, pentru  $K_3$  din ecuatia 2-a și am obținut:

$$K_1' = \frac{5}{10} = 0,5; \quad K_2' = \frac{6}{6} = 1; \quad K_3' = -\frac{4}{7}; \quad K_4' = \frac{6}{11};$$

$$K_5' = \frac{-1}{9}; \quad K_6' = \frac{-6}{10}$$

	1	2	3	4	5	6	Reducere
$K'$	0,5	1	-0,5	0,5	-0,1	-0,6	I-a
$K''$	0,02	-0,1	0,3	0,02	0,02	0,13	II-a
$K'''$	0,033	0,12	0,03	0,06	0,03	0,18	III-a
$K'+K''+K'''$	0,553	1,02	0,17	0,58	-0,05	-0,39	
-	-	-	-	-	-	-	
-	-	-	-	-	-	-	
$K$	+0,61	+1,08	-0,08	+0,65	+0,01	-0,41	

Insa acum aceste valori multiplicam cu coeficientii din primul rind și se obține o altă eroare de inchidere W

Procedăm analog pentru  $K''$  :

$$K_1'' = \frac{0,2}{40}; \quad K_2'' = -\frac{0,5}{6}; \quad K_3'' = \frac{2,5}{7}$$

$$K_4'' = \frac{0,2}{11}; \quad K_5'' = \frac{0,2}{9}; \quad K_6'' = \frac{1,3}{10}$$

Multiplicăm acum acești coeficienți cu cei din primul rind, obținem valorile erorii de inchidere  $W''$  după reducerea 2-a, apoi la fel pentru reducerea 3-a.

Dacă am continua, s-ar ajunge la valorile lui  $K$  din ultimul rind.

Ca observație, este necesar să știm că această metodă se întrebuintează atunci cînd un

- 490 -

din coeficienții necunoscutelor este mult mai mare ca ceilalți.

Cînd coeficienții au valori apropiate, metoda poate fi aplicată, însă trebuie efectuate o serie mare de reduceri, pînă ce se ajunge la anularea ecuațiilor.

- b) Metoda de reducere a lui Gauss.

Rezolvarea sistemului se poate efectua, cu mai multă precizie și ușurință, prin metoda de reducere, arătată în Cap. calculul erorilor.

Se va arăta acum cazul general de rezolvare, dînd pentru aceasta și tabloul cu reducerile ce trebuie executate:

Luînd cazul general, cînd coeficienții necunoscutelor pot fi oarecari, adică, nu sînt simetrici, pentru un sistem de 6 ecuații cu 6 necunoscute:

$$(1) \begin{cases} a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 + d_1 k_4 + e_1 k_5 + f_1 k_6 + l_1 = 0 \\ a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3 + d_2 k_4 + e_2 k_5 + f_2 k_6 + l_2 = 0 \\ a_3 k_1 + b_3 k_2 + c_3 k_3 + d_3 k_4 + e_3 k_5 + f_3 k_6 + l_3 = 0 \\ a_4 k_1 + b_4 k_2 + c_4 k_3 + d_4 k_4 + e_4 k_5 + f_4 k_6 + l_4 = 0 \\ a_5 k_1 + b_5 k_2 + c_5 k_3 + d_5 k_4 + e_5 k_5 + f_5 k_6 + l_5 = 0 \\ a_6 k_1 + b_6 k_2 + c_6 k_3 + d_6 k_4 + e_6 k_5 + f_6 k_6 + l_6 = 0 \end{cases}$$

Dacă din prima ecuație se deduce  $k_1$  în funcție de celelalte necunoscute și înlocuim în celelalte 5 ecuații, se va obține un sistem de 5 ecuații cu 5 necunoscute, care va avea coeficienții necunoscutelor ca în sistemul (2).

$$(2) \begin{cases} b'_2 k_2 + c'_2 k_3 + d'_2 k_4 + e'_2 k_5 + f'_2 k_6 + l'_2 = 0 \\ b'_3 k_2 + c'_3 k_3 + d'_3 k_4 + e'_3 k_5 + f'_3 k_6 + l'_3 = 0 \\ b'_4 k_2 + c'_4 k_3 + d'_4 k_4 + e'_4 k_5 + f'_4 k_6 + l'_4 = 0 \\ b'_5 k_2 + c'_5 k_3 + d'_5 k_4 + e'_5 k_5 + f'_5 k_6 + l'_5 = 0 \\ b'_6 k_2 + c'_6 k_3 + d'_6 k_4 + e'_6 k_5 + f'_6 k_6 + l'_6 = 0 \end{cases}$$

Toți acești coeficienți se va arăta în tabloul ce va urma, cum se determină.

Din prima ecuație se va găsi una din necunoscute în funcție de celelalte și înlocuind în următoarele 4 ecuații, se ajunge la un sistem de 4 ecuații cu 4 necunoscute.

$$(3) \begin{cases} c_3 k_3 + d_3 k_4 + e_3 k_5 + f_3 k_6 + l_3 = 0 \\ c_4 k_3 + d_4 k_4 + e_4 k_5 + f_4 k_6 + l_4 = 0 \\ c_5 k_3 + d_5 k_4 + e_5 k_5 + f_5 k_6 + l_5 = 0 \\ c_6 k_3 + d_6 k_4 + e_6 k_5 + f_6 k_6 + l_6 = 0 \end{cases}$$

De la acest sistem, analog la un sistem de 3 ecuații:

$$(4) \begin{cases} d_4 k_4 + e_4 k_5 + f_4 k_6 = 0 \\ d_5 k_4 + e_5 k_5 + f_5 k_6 = 0 \\ d_6 k_4 + e_6 k_5 + f_6 k_6 = 0 \end{cases}$$

Apoi la sistemul de 2 ecuații:

$$(5) \begin{cases} a_5 k_5 + f_5 k_6 + l_5 = 0 \\ a_6 k_5 + f_6 k_6 + l_6 = 0 \end{cases}$$

Si în fine la o singură ecuație cu o necunoscută:

$$(6) f_6 k_6 + l_6 = 0$$

Din ecuația 6 se determină  $k_6$ , înlocuind apoi în sistemul (5), obținem și pe  $k_5$ , apoi în sistemul (4) într-o singură ecuație și se obține  $k_4$  ș.a.m.d., din sistemul (1) va rezulta și ultima necunoscută  $k_1$ .

Pentru calcularea coeficienților acestor ecuații, se dă următorul tablou, în care se introduc coeficienții din exemplul numeric luat.

Sistem	Ecuația	a	b	c	d	e	f	l	S	Proba
(1)	1	$a_1 = 10$	$b_1 = -1$	$c_1 = 0$	$d_1 = -2$	$e_1 = 0$	$f_1 = -3$	$l_1 = -5$	$S_1 = 1$	0
	2	$a_2 = -1$ $-a_2 = +1$	$b_2 = 6$ $-\frac{a_2 b_1}{a_1} = 0,6$	$c_2 = -2$ $-\frac{a_2 c_1}{a_1} = 0$	$d_2 = 0$ $-\frac{a_2 d_1}{a_1} = 0$	$e_2 = 0$ $-\frac{a_2 e_1}{a_1} = 0$	$f_2 = 0$ $-\frac{a_2 f_1}{a_1} = 0,9$	$l_2 = -6$ $-\frac{a_2 l_1}{a_1} = -0,9$	$S_2 = 3$ $-\frac{a_2 S_1}{a_1} = 0,1$	0
	3	$a_3 = 0$ $-a_3 = 0$	$b_3 = -2$ $-\frac{a_3 b_1}{a_1} = 0$	$c_3 = 7$ $-\frac{a_3 c_1}{a_1} = 0$	$d_3 = -2$ $-\frac{a_3 d_1}{a_1} = 0$	$e_3 = 0$ $-\frac{a_3 e_1}{a_1} = 0$	$f_3 = 0$ $-\frac{a_3 f_1}{a_1} = 0$	$l_3 = 4$ $-\frac{a_3 l_1}{a_1} = 0$	$S_3 = -7$ $-\frac{a_3 S_1}{a_1} = 0$	0
	4	$a_4 = -2$ $-a_4 = +2$	$b_4 = 0$ $-\frac{a_4 b_1}{a_1} = -0,2$	$c_4 = -2$ $-\frac{a_4 c_1}{a_1} = 0$	$d_4 = 11$ $-\frac{a_4 d_1}{a_1} = 0,2$	$e_4 = -5$ $-\frac{a_4 e_1}{a_1} = 0$	$f_4 = 0$ $-\frac{a_4 f_1}{a_1} = 0,9$	$l_4 = 6$ $-\frac{a_4 l_1}{a_1} = 0,9$	$S_4 = 4$ $-\frac{a_4 S_1}{a_1} = 0,2$	0
	5	$a_5 = 0$ $-a_5 = 0$	$b_5 = 0$ $-\frac{a_5 b_1}{a_1} = 0$	$c_5 = 0$ $-\frac{a_5 c_1}{a_1} = 0$	$d_5 = -3$ $-\frac{a_5 d_1}{a_1} = 0$	$e_5 = 9$ $-\frac{a_5 e_1}{a_1} = 0$	$f_5 = -2$ $-\frac{a_5 f_1}{a_1} = 0$	$l_5 = 1$ $-\frac{a_5 l_1}{a_1} = 0$	$S_5 = -5$ $-\frac{a_5 S_1}{a_1} = 0$	0
	6	$a_6 = -3$ $-a_6 = +3$	$b_6 = 0$ $-\frac{a_6 b_1}{a_1} = 0$	$c_6 = 0$ $-\frac{a_6 c_1}{a_1} = 0$	$d_6 = 0$ $-\frac{a_6 d_1}{a_1} = 0$	$e_6 = -2$ $-\frac{a_6 e_1}{a_1} = 0$	$f_6 = 10$ $-\frac{a_6 f_1}{a_1} = 0,9$	$l_6 = 6$ $-\frac{a_6 l_1}{a_1} = 0,9$	$S_6 = -11$ $-\frac{a_6 S_1}{a_1} = 0,2$	0

Sistem	Ecu- fia	b'	c'	d'	e'	f'	l'	s'	Pro- ba
	2	$b'_2 = 59$	$c'_2 = -2$	$d'_2 = -0,2$	$e'_2 = 0$	$f'_2 = -0,3$	$l'_2 = -6,5$	$s'_2 = 3,1$	$\theta$
	3	$b'_3 = -2$ $-b'_3 = 2$	$c'_3 = 7$ $-b'_3 c'_2 =$ $b'_2 - 0,678$	$d'_3 = -2$ $-b'_3 d'_2 =$ $b'_2 - 0,067$	$e'_3 = 0$ $-b'_2 e'_2 = 0$ $b'_2$	$f'_3 = 0$ $-b'_3 f'_2 =$ $b'_2 - 0,102$	$l'_3 = 4$ $-b'_3 l'_2 =$ $b'_2 - 2,204$	$s'_3 = 7$ $-b'_3 s'_2 =$ $b'_2 - 1,051$	$\theta$
(2)	4	$b'_4 = -0,2$ $-b'_4 = +0,2$	$c'_4 = -2$ $-b'_4 c'_2 =$ $b'_2 - 0,068$	$d'_4 = 10,5$ $-b'_4 d'_2 =$ $b'_2 - 0,007$	$e'_4 = -5$ $-b'_4 e'_2 = 0$ $b'_2$	$f'_4 = 0,6$ $-b'_4 f'_2 =$ $b'_2 - 0,014$	$l'_4 = -7$ $-b'_4 l'_2 =$ $b'_2 - 0,224$	$s'_4 = -4,2$ $-b'_4 s'_2 =$ $b'_2 - 0,105$	$\theta$
	5	$b'_5 = 0$ $-b'_5 = 0$	$c'_5 = 0$ $-b'_5 c'_2 = 0$ $b'_2$	$d'_5 = 3$ $-b'_5 d'_2 = 0$ $b'_2$	$e'_5 = 9$ $-b'_5 e'_2 = 0$ $b'_2$	$f'_5 = -2$ $-b'_5 f'_2 = 0$ $b'_2$	$l'_5 = 1$ $-b'_5 l'_2 = 0$ $b'_2$	$s'_5 = -5$ $-b'_5 s'_2 = 0$ $b'_2$	$\theta$
	6	$b'_6 = -0,3$ $-b'_6 = +0,3$	$c'_6 = 0$ $-b'_6 c'_2 =$ $b'_2 - 0,102$	$d'_6 = -0,6$ $-b'_6 d'_2 =$ $b'_2 - 0,010$	$e'_6 = -2$ $-b'_6 e'_2 = 0$ $b'_2$	$f'_6 = 9,1$ $-b'_6 f'_2 =$ $b'_2 - 0,010$	$l'_6 = 4,5$ $-b'_6 l'_2 =$ $b'_2 - 0,330$	$s'_6 = -10,7$ $-b'_6 s'_2 =$ $b'_2 - 0,158$	$\theta$
Sistem	Ecu- fia		c''	d''	e''	f''	l''	s''	Pro- ba
	3		$c''_3 = 6,322$	$d''_3 = -2,067$	$e''_3 = 0$	$f''_3 = -0,102$	$l''_3 = 1,716$	$s''_3 = -5,949$	$\theta$
(3)	4		$c''_4 = -2,067$ $-c''_4 = +2,067$	$d''_4 = 10,593$ $-c''_4 d''_3 =$ $c''_3 - 0,676$	$e''_4 = -5,00$ $-c''_4 e''_3 = 0$ $c''_3$	$f''_4 = 0,011$ $-c''_4 f''_3 =$ $c''_3 - 0,033$	$l''_4 = 7,220$ $-c''_4 l''_3 =$ $c''_3 - 0,587$	$s''_4 = 4,305$ $-c''_4 s''_3 =$ $c''_3 - 1,945$	$\theta$
	5		$c''_5 = 0$ $-c''_5 = 0$	$d''_5 = -3$ $-c''_5 d''_3 = 0$ $c''_3$	$e''_5 = 9$ $-c''_5 e''_3 = 0$ $c''_3$	$f''_5 = -2$ $-c''_5 f''_3 = 0$ $c''_3$	$l''_5 = 1$ $-c''_5 l''_3 = 0$ $c''_3$	$s''_5 = -5$ $-c''_5 s''_3 = 0$ $c''_3$	$\theta$
	6		$c''_6 = -0,102$ $-c''_6 = +0,102$	$d''_6 = -0,610$ $-c''_6 d''_3 =$ $c''_3 - 0,034$	$e''_6 = -2,00$ $-c''_6 e''_3 = 0$ $c''_3$	$f''_6 = 9,084$ $-c''_6 f''_3 =$ $c''_3 - 0,002$	$l''_6 = 4,170$ $-c''_6 l''_3 =$ $c''_3 - 0,028$	$s''_6 = -10,521$ $-c''_6 s''_3 =$ $c''_3 - 0,085$	$\theta$
Sistem	Ecu- fia			d'''	e'''	f'''	l'''	s'''	Pro- ba
	4			$d'''_4 = 9,917$	$e'''_4 = -5,00$	$f'''_4 = -0,644$	$l'''_4 = -6,633$	$s'''_4 = 2,360$	$\theta$
(4)	5			$d'''_5 = -3$ $-d'''_5 = 3$	$e'''_5 = 9$ $-d'''_5 e'''_4 =$ $d'''_4 - 1,513$	$f'''_5 = -2$ $-d'''_5 f'''_4 =$ $d'''_4 - 0,195$	$l'''_5 = 1$ $-d'''_5 l'''_4 =$ $d'''_4 - 2,006$	$s'''_5 = -5,0$ $-d'''_5 s'''_4 =$ $d'''_4 - 0,714$	$\theta$
	6			$d'''_6 = -0,64$ $-d'''_6 = 0,644$	$e'''_6 = -2,00$ $-d'''_6 e'''_4 =$ $d'''_4 - 0,324$	$f'''_6 = 9,083$ $-d'''_6 f'''_4 =$ $d'''_4 - 0,042$	$l'''_6 = 4,198$ $-d'''_6 l'''_4 =$ $d'''_4 - 0,471$	$s'''_6 = -10,537$ $-d'''_6 s'''_4 =$ $d'''_4 - 0,153$	$\theta$
Sistem	Ecu- fia				e <sup>iv</sup>	f <sup>iv</sup>	l <sup>iv</sup>	s <sup>iv</sup>	Pro- ba
(5)	5				$e^{iv}_5 = 7,487$	$f^{iv}_5 = -2,195$	$l^{iv}_5 = -1,005$	$s^{iv}_5 = -4,286$	$\theta$
	6				$e^{iv}_6 = -2,324$ $e^{iv}_6 = 2,324$	$f^{iv}_6 = 9,041$ $-a^{iv}_6 f^{iv}_5 =$ $a^{iv}_6 - 682$	$l^{iv}_6 = 3,767$ $-e^{iv}_6 l^{iv}_5 =$ $a^{iv}_6 - 0,342$	$s^{iv}_6 = -10,484$ $-a^{iv}_6 s^{iv}_5 =$ $a^{iv}_6 - 1330$	$\theta$
Sistem	Ecu- fia					f <sup>v</sup>	l <sup>v</sup>	s <sup>v</sup>	Pro- ba
(6)						$f^v_6 = 8,359$	$l^v_6 = 3,455$	$s^v_6 = 11,214$	$\theta$

Din cele 6 sisteme pot acum, avind coeficienții, să fie deduse necunoscutele pornind dela sistemul 6.

$$K_6 = - \frac{p_6^k}{f_6} = - \frac{3,455}{8,359} = - 0,413$$

$$K_5 = - \frac{e_5^k + f_6 K_6}{e_5^k} = - \frac{-1,006 / -2,195 / / -0,413 /}{7,487} = + 0,013$$

$$K_4 = - \frac{e_4^k + f_4^k K_5 + f_4^k K_6 + l_4^k}{d_4} = - \frac{-5 / / 0,013 / + / -0,644 / / -0,413 /}{9,917} - \frac{6,633}{9,917} = + 0,648$$

$$K_3 = - \frac{d_3^k K_4 + e_3^k K_5 + f_3^k K_6 + l_3^k}{d_3} = - \frac{(-2,067)(0,648) + 0 + (-0,102)(0,413) + 1,797}{6,322} - 0,078$$

$$K_2 = - \frac{c_2^k K_3 + d_2^k K_4 + e_2^k K_5 + f_2^k K_6 + l_2^k}{d_2} = - \frac{(-2)(-0,078) + (-0,2)(0,648) + 0 + (-0,3)(-0,413) + 5}{5,9} = + 1,076$$

$$K_1 = - \frac{b_1^k K_2 + c_1^k K_3 + d_1^k K_4 + e_1^k K_5 + f_1^k K_6 + l_1^k}{d_1} = - \frac{(-1)(1,076) + 0 + (-2)(0,648) + 0 + (-3)(-0,413) - 5}{10} = + 0,613$$

Comparind rezultatul cu cel obținut prin metoda falsei, se observă identitatea lor.

Odată sistemul de ecuații in K rezolvat, urmează calcularea erorilor V<sub>1</sub>, V<sub>2</sub>, V<sub>3</sub>, .....V<sub>6</sub> și apoi compensarea diferențelor de nivel.

$$V_1 = \frac{a_1}{p_1} k_1 + \frac{b_1}{p_1} k_2 + \frac{c_1}{2 p_1} k_3 + \frac{d_1}{p_1} k_4 + \frac{e_1}{p_1} k_5 + \frac{f_1}{p_1} k_6 = - k, s, = -0,61,4 = - 2,44$$

$$V_2 = \frac{a_2^2}{p_2^2} k_1 + \frac{b_2^2}{p_2^2} k_2 + \frac{c_2^2}{p_2^2} k_3 + \frac{d_2^2}{p_2^2} k_4 + \frac{e_2^2}{p_2^2} k_5 + \frac{f_2^2}{p_2^2} k_6 = /-k+k/ s_2 = \dots = 0,46$$

$$V_3 = \dots = /k-k/ s_3 = \dots = -0,06$$

$$V_4 = \dots = /k_1 - k_6 / s_4 = \dots = 3,09$$

$$V_5 = \dots = k_2 s_5 = \dots = 3,24$$

$$V_6 = \dots = /-k_2 k_3 / s_6 = \dots = -2,32$$

$$V_7 = \dots = /+k_3 - k_4 / s_7 = \dots = -1,46$$

$$V_8 = \dots = -k_3 s_8 = \dots = 0,24$$

$$V_9 = \dots = -k_4 s_9 = \dots = 2,60$$

$$V_{10} = \dots = /-k_4 k_5 / s_{10} = \dots = -1,92$$

$$V_{11} = \dots = -k_5 s_{11} = \dots = -0,04$$

$$V_{12} = \dots = /-k_5 + k_6 / s_{12} = \dots = -0,84$$

$$V_{13} = \dots = k_6 s_{13} = \dots = -2,05$$

- 494 -

Rezultatul compensărilor diferențelor de nivel, efectuate conform relațiilor de mai jos, poate fi văzut în tabloul următor.

$$(h_1) = h_1 + V_1$$

$$(h_2) = h_2 + V_2$$

$$(h_3) = h_3 + V_3$$

Pe- li- gon	La- tu- ra	Dis- tan- ța în km	h în mm. valori măsurate		Erea rea de în- chide- re W	h în mm. valori compensate		Eroarea de închidere W după compen- sare
			+	-		+	-	
I	AB	$S_1=4$		160	$W_1 = -5$		157,56	$W_1 = +0,01$
	BD	$S_2=1$		320			320,45	
	DE	$S_3=2$	165			164,94		
	EA	$S_4=3$	310			313,09		
II	BD	$S_2=1$	320		$W_2 = -6$	320,46		$W_2 = +0,02$
	BC	$S_2=3$	270			273,24		
	CD	$S_2=2$		596			593,68	
III	CD	$S_2=2$	596		$W_3 = +4$	593,68		$W_3 = -0,02$
	DH	$S_2=2$	220			218,54		
	HC	$S_2=3$		812			812,24	
IV	DE	$S_2=2$		165	$W_4 = 6$		164,94	$W_4 = +0,04$
	DH	$S_2=2$		220			218,54	
	GH	$S_2=4$	789			791,60		
	GE	$S_2=3$		410			408,08	
V	GE	$S_2=3$	410		$W_5 = +1$	408,08		$W_5 = -0,06$
	BF	$S_2=2$		240			239,18	
	FG	$S_2=4$		169			168,96	
VI	AE	$S_2=3$		310	$W_6 = +6$		313,09	$W_6 = +0,04$
	EF	$S_2=2$	240			239,18		
	AF	$S_2=5$	76			73,95		

- 5) Rețele nivelitice practic întâlnite.

Este necesar să fie făcută următoarea  
remarcă: rețelele nivelitice studiate aveau o formă geome-  
trică, adică erau formate din poligoane regulate sau nere-  
gulate, însă în toate cazurile, ele aveau laturile drepte.

Practic însă, aceste laturi nu sînt linii drepte, ci niște linii poligonale, frînte, iar lungimea laturii respective, cînd este formată rețeaua și urmează compensarea, este luată acea linie poligonală, adică lungimea parcursă de nivelment pentru determinarea diferenței de nivel între punctele extreme.

De aceea, în poligonul II din exemplul numeric de mai sus, se observă că latura  $S_3 = S_2 + S_6 = 3$  km, ceea ce ne arată în mod evident că rețeaua aceasta nu are laturi drepte așa cum s-a arătat în figură, ci este considerată ca distanță aceea care a fost parcursă în urma nivelmentului respectiv.

În figura ce urmează, pot fi văzute cazuri reale, întîlnite în practica operațiilor de nivelment.

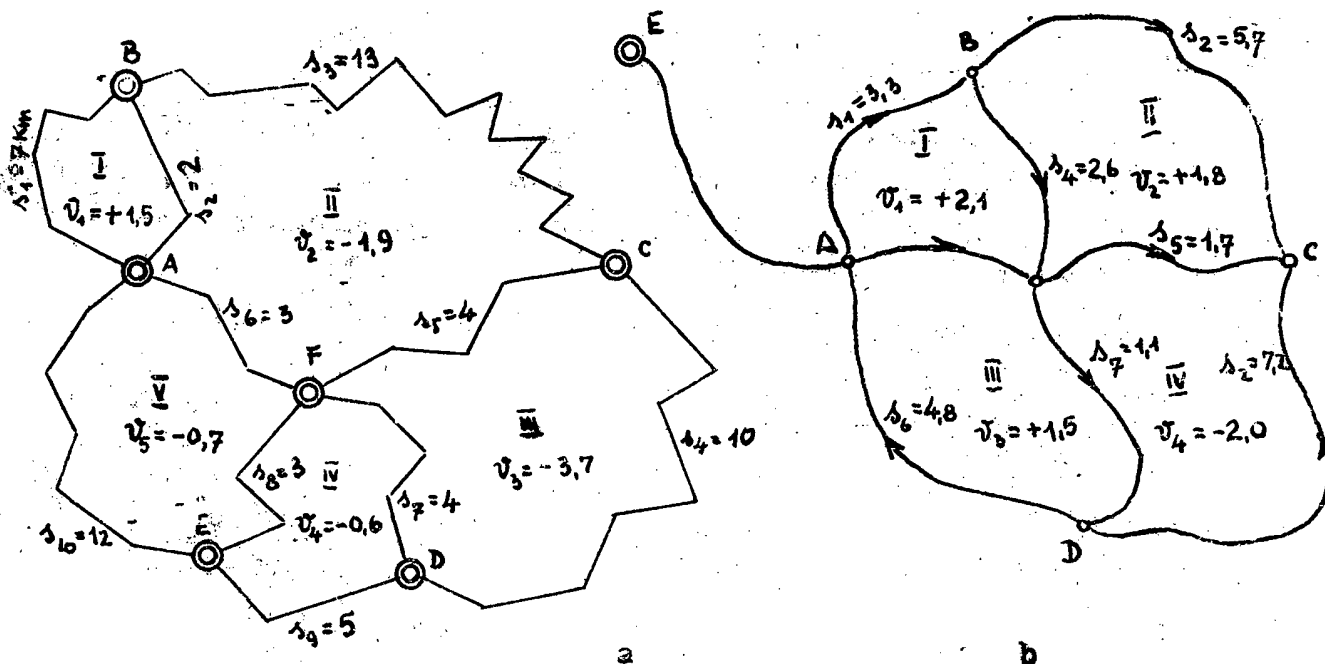


Fig. 341.

Cu datele de mai sus ecuațiile în K, scri se direct, sînt:  
 - pentru rețeaua nivelitică Fig. 341 a:

Poligon. I	+9 K	-2 K <sub>2</sub>				+1,5	= 0
" II	-2 K	+22 K <sub>2</sub>	-4 K <sub>3</sub>		-3 K <sub>5</sub>	-1,9	= 0
" III		-4 K <sub>2</sub>	+18 K <sub>3</sub>	-4 K <sub>4</sub>		-3,7	= 0
" IV			4 K <sub>3</sub>	+12 K <sub>4</sub>	-3 K <sub>5</sub>	-0,6	= 0
" V		3 K <sub>1</sub>		-3 K <sub>4</sub>	+18 K <sub>5</sub>	-0,7	= 0



- pentru rețeaua Fig.341 b :

Poligon:	I	+10 k <sub>1</sub>	- 2,6 k <sub>2</sub>	- 4,1 k <sub>3</sub>	+2,1	= 0
"	II	-2,6 k <sub>1</sub>	+ 10 k <sub>2</sub>		- 1,7 k <sub>4</sub>	+1,8 = 0
"	III	-4,1 k <sub>1</sub>		+ 10 k <sub>3</sub>	-1,1 k <sub>4</sub>	+1,5 = 0
"	IV		- 1,7 k <sub>2</sub>	- 1,1 k <sub>3</sub>	10 k <sub>4</sub>	-2,0 = 0

Oceace am spus despre rețelele nivelitice, este valabil și pentru triangulația nivelitică.

Așa ca exemplu, pentru triangulația nivelitică studiată deja și reprezentată sub formă de poligon cu laturi drepte în Fig.342 a, am putea avea cazul din Fig.342 b în care latura AB de exemplu, ar fi o linie poligonală, ce ar urmări o șosea aflată între cele două puncte, latura BC, ar putea urmări o linie ferată, iar latura AC urmărește, de exemplu, cursul unui riu.

La fel laturile AD, BD, CD pot urmări trasee diferite.

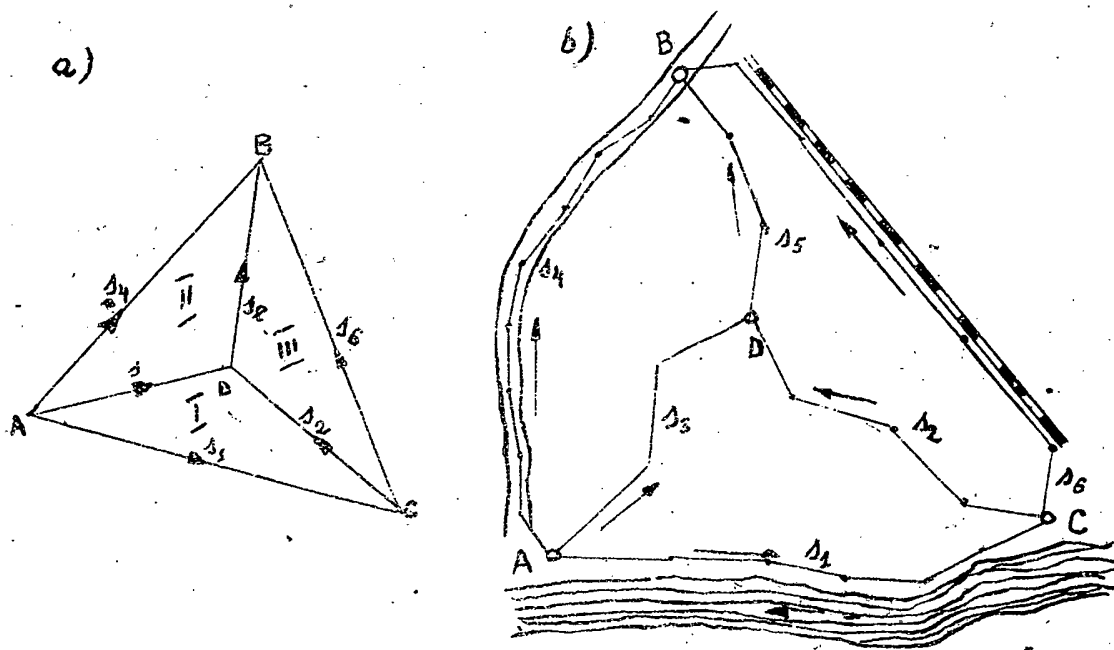


Fig.342.

Săgețile indică sensul în care crește panta.

CAPITOLUL V.APLICATIILE NIVELMENTULUI.

In cele ce urmează se va căuta a se trata citeva cazuri mai importante, in care își găsește aplicabilitate nivelmentul, dind pentru fiecare caz metoda cea mai indicată.

De sigur că nu vor fi tratate toate cazurile in cari se recurge la nivelment, însă studiind citeva probleme de bază se vor putea pe urmă aplica, cu ușurință metodele adecuate fiecărei probleme de nivelment, ce ar fi pusă.

- 1. Profile.

Spre a ne putea da seama de modul cum se execută nivelmentul in anumite probleme, cum ar fi in cazul cind am avea de trasat curbe de nivel, etc., este necesar a cunoaște cum se intocmesc profilele longitudinale și transversale, in-trebuințate mai ales in scopul ridicării detaliilor și cu deosebire in studiul traseurilor căilor ferate, in studiul traseurilor șoselelor, in ridicările pentru canalizări, etc.

Să luăm cazul unei șosele și să arătăm cum se execută nivelmentul și cum se intocmesc profilele cari nu sint altceva decit rezultatul nivelmentului prezentat sub o formă grafică. Prin urmare, avind șoseaua, cu traseul din Fig. 343, se cere să executăm nivelmentul acestei șosele, intre punctele ei A și B, aflate intre ele la distanță de citiva km.

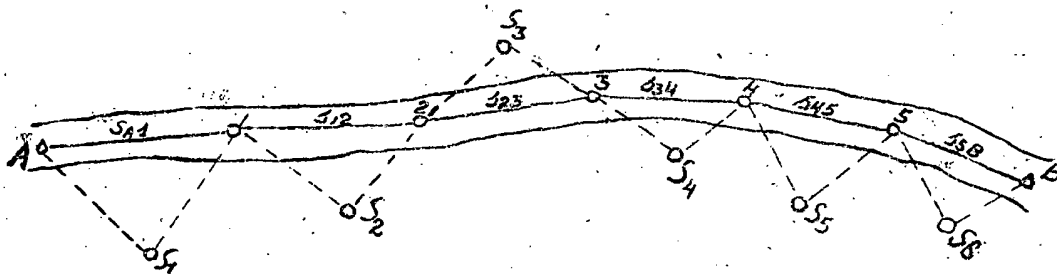


Fig. 343.

În acest caz netind punctele de pe axul șoselei, în cari avem schimbare de pantă cu 1, 2, 3, 4, 5, etc., se execută nivelment geometric așa cum s-a arătat, fiind stație în punctele  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ , iar rezultatul măsurătorilor se înscrie în protocolul respectiv, determinând în modul cunoscut, cotele absolute ale tuturor acestor puncte, în urma compensărilor executate așa cum s-a arătat în Cap. respectiv.

Prin urmare, drumul urmat de nivelment este în lungul șoselei. Având cunoscute cotele punctelor de schimbare de pantă, precum și distanțele respective  $S_{11}, S_{12}, S_{23}, \dots$ , rezultate în urma măsurării lor sau în anumite cazuri cunoscute din coordonatele punctelor, se trec pe desen în abscise aceste distanțe la o anumită scară, iar cotele punctelor, trecute pe ordonată, iarăși la scară și se obține profilul în lung al șoselei, în care mod obișnuit, deoarece diferențele de nivel sînt mici față de distanță, se vor trece distanțele la o scară, iar înălțimile la altă scară, adică avem o scară a lungimilor și o altă scară a înălțimilor.

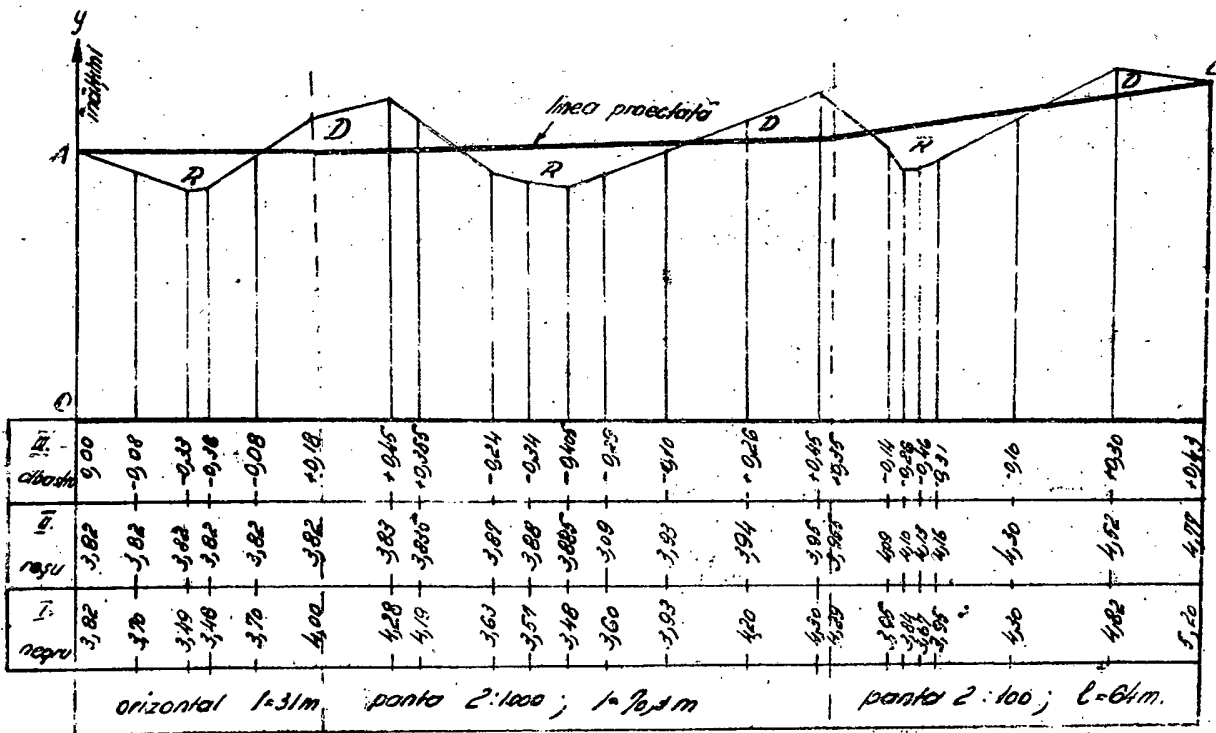


Fig. 344

Profilul în lung ne ajută foarte mult în proiectări, pentru cazurile amintite (căi ferate, șosele, etc.). Dacă avem rezultatul măsurătorilor de nivelment executate în lungul șoselei ce se proiectează, se întocmește

- 499 -

profilul în lung, cum s-a arătat, (în abscisă lungimile și în ordinate cotele absolute ale punctelor).

Se obișnuiește, a se trasa, întotdeauna liniile proiectate cu roșu și față de această linie proiectată, terenul de cote mai mici ne va da rambleu care se colorează în roșu, iar terenul de cote mai mari dă debleu (D în Fig. 344), pe care îl colorăm galben.

Sub abscisă, pe care sînt trecute lungimile la scară, se trec cele trei coloane (I, II, III), în care se înscriu cotele și anume: în coloana I sînt înregistrate cotele adevărate ale terenului, înscrise cu negru, în coloana II cotele proiectate, în culoare roșie și în ultima coloană (III) cu albastru diferențele între cotele adevărate și cele proiectate.

Drumul pe care îl urmează nivelmentul nu este întotdeauna o linie dreaptă, am arătat acest lucru, însă pentru întocmirea profilului în lung se face abstracție de cotiturile măsurate și se transpune la scară numai distanța dintre punctele în cauză.

Profilele transversale, se obțin prin nivelment pe direcție perpendiculară pe mersul normal al operațiunilor, ele pot fi făcute din distanță în distanță, pe traseul șoselei, însă trebuie făcute necondiționat în porțiunile cu schimbări de pantă sau care prezintă variații de suprafață, fiind executate atât la dreapta, cît și la stînga traseului longitudinal.

Punctele de stații pentru nivelment ce executăm în ridicarea profilelor transversale, pot fi chiar punctele de stație utilizate și pentru profilul longitudinal, cu condiția ca punctele pentru profilul transversal să fie alese exact pe direcția perpendiculară a traseului longitudinal.

În orice caz, chiar dacă se iau stații diferite de cele pentru traseul longitudinal, aceste puncte de stație trebuie să ne permită cea mai bună ridicare pentru punctele caracteristice ale terenului.

În Fig. 345 ce urmează, schematic, este arătat traseul nivelmentului în lung, precum și cel al nivelmentului transversal.

Cînd profilele transversale se iac la distanțe egale (picheți), aceste distanțe pot fi, funcție de configurația terenului, de 20 m, 10 m sau chiar 5 m.

Un profil transversal se întocmește identic ca profilul longitudinal, indicînd linia de proiectare cu roșu, cotele adevărate cu negru, cotele proiectate cu albastru, rambleul cu roșu, debleul cu galben, arătînd care profil transversal este (profil transversal I, etc.).

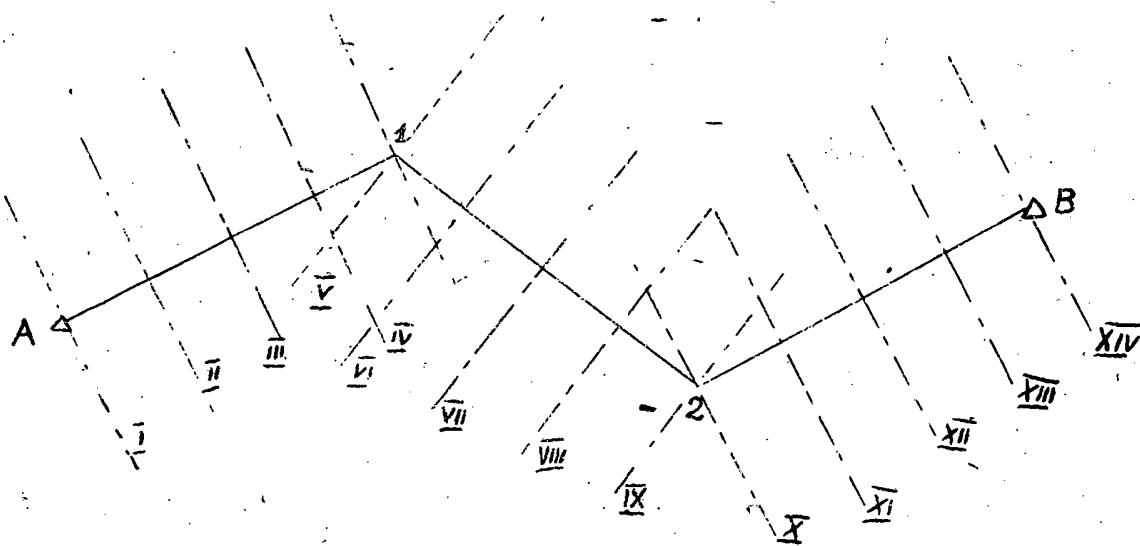


Fig. 345.

In Fig. 346 sint arătate citeva cazuri de profile transversale.

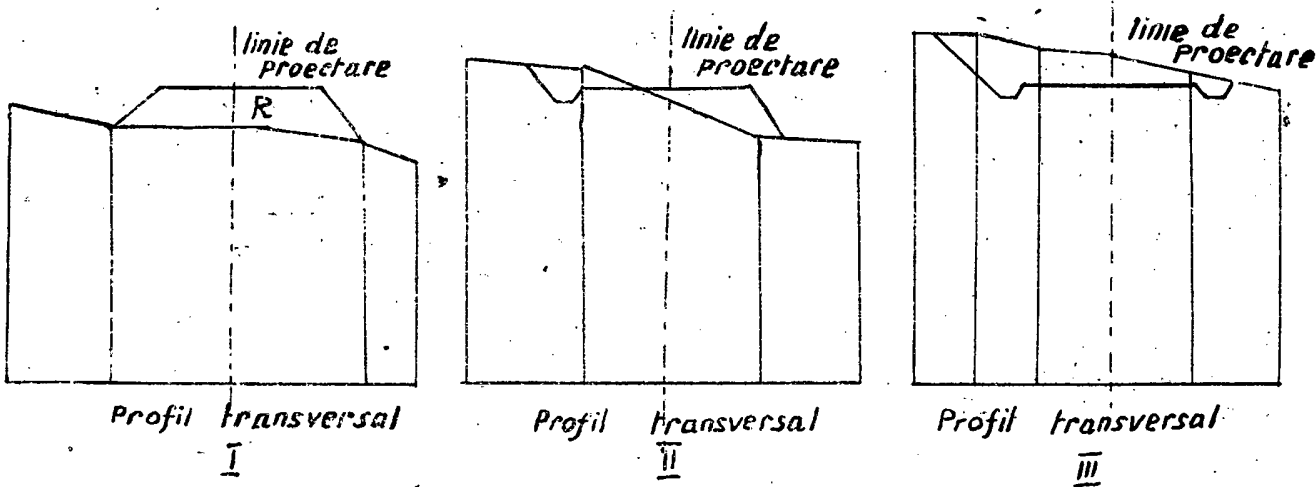


Fig. 346.

In aceste profile, notat pe figura cu R este rambleu iar cu D debleu.

Deei profilul I arată rambleu, profilul II jumătate rambleu, jumătate debleu, iar profilul III debleu.

Profilele in lung și cu oale transversale au rolul de a ne arăta, cit mai fidel posibil, configurația terenului in porțiunea unde operăm.

Calculul cubajului.

In afară de scopul arătat, profilele transversale au o deosebită importanță, mai ales pentru calcularea cubajului săpăturilor sau umpluturilor ce se vor efectua.

Pentru acest calcul, având executate profilele transversale, se evaluează suprafața a două profile, când ambele sînt de acelaș sens /în rambleu de exemplu/, se ia media acestor suprafețe și înmulțit cu distanța dintre profile /d/, se primește volumul de pămînt deplasat.

$$\text{Adică : } V = \frac{S_1 + S_2}{2} d.$$

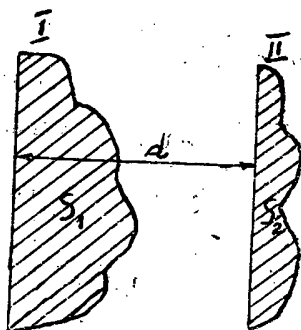


Fig. 347

Acest volum este apoi multiplicat cu un coeficient de afinare, pe care îl găsim în tabele /Hütte/.

Pentru transportul pămîntului ținem cont de densitate, greutate specifică, spre a stabili greutatea ce avem de transportat.

Suprafețele  $S_1$  și  $S_2$  sînt suprafețele, în cazul rambleului, aflate între linia proiectată și linia de cote reale ale terenului.

Aceste suprafețe pot fi calculate sau planimetrare, cu ajutorul planimetrului polar descris în Vol. I.

Formula de mai sus, cum s-a amintit este valabilă numai pentru profilele de acelaș sens, fie în rambleuri, fie în debleuri.

In caz cînd avem două profile, consecutive, unul în rambleu și altul în debleu, calculul cubajului se va face altfel.

Între cele două profile, de sens diferit, în mod evident există o linie în care profilul proiectat se confundă cu suprafața terenului.

Această linie poartă denumirea de linie de pasaj.

Linia de pasaj dintre două profile consecutive, de sens invers, se poate determina în modul următor : dacă figura ABCDEFG este profilul în rambleu, iar A'B'C'D'E'F'G' profilul în debleu, se trasează proiecția lor pe planul abcdefg, respectiv a'b'c'd'e'f'g', /fig. 348/, avînd însă grijă ca distanța dintre cele două profile, /d/ să fie trecută la scară și pe desen.

Observăm că punctele A, A', G și G', cari sînt puncte de pe suprafața terenului de cotă egală cu cota proiectată, le corespund pe proiecție punctele a, a' și g, g', deci linia de pasaj trece prin acele puncte.

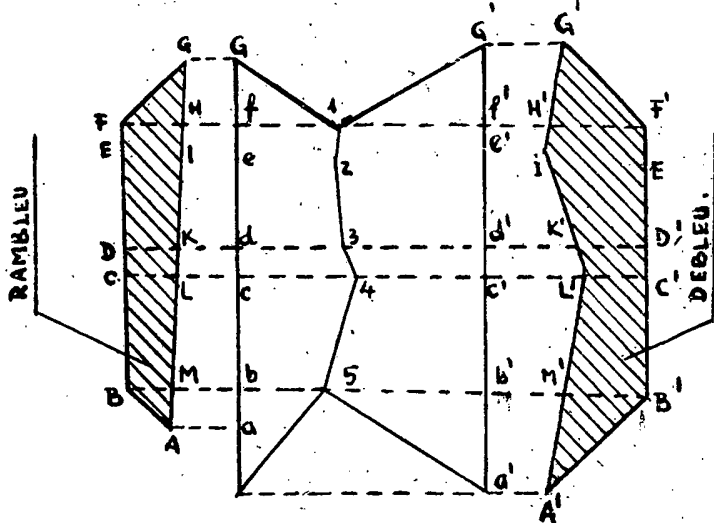


Fig. 348.

Ca să poată fi găsit punctul 1 prin care trece linia de pasaj, trebuie să îndeplinim următoarea relație:

$$\frac{1 f'}{1 f} = \frac{H' F'}{H F}$$

la fel se determină punctul 2 din condiția:  $\frac{2 a'}{2 a} = \frac{I' E'}{I E}$ ,

apoi punctul 3 din relația:

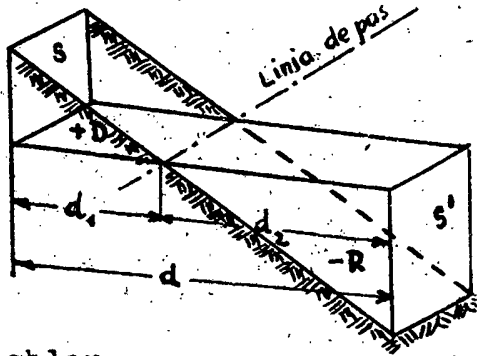
$$\frac{3 d'}{3 d} = \frac{K' D'}{K D}$$

ș.a.m.d.

Unind punctele g și g' cu 1, iar a și a' cu 5, apoi punctele 1 cu 2, 2 cu 3, etc., se

obține linia frântă 12345, reprezentînd linia de nivel în dreapta căreia se găsește săpătura A'B'C'..... și în stînga ei umplutura ABC.....

În ceea ce privește calculul acestor volume se înțelege de la sine că în cazul acesta avem de a face cu niște corpuri pe cari le putem asemîna cu prisme neregulate.



+ debleu  
- rambleu

Fig. 349.

În consecință formula de calculul cubajului este:

$$V_1 = \frac{S}{2} d_1 \text{ pentru debleu}$$

$V_2 = \frac{S'}{2} d_2$  pentru rambleu și am obținut volumul de săpătură și cel de umplutură.

Cum însă linia de pasaj este curbă, se va lua drept distanță  $d_1$  respectiv  $d_2$  distanța medie pînă la linia de pasaj.

Așa că S ar reprezenta suprafața profilului în debleu,  $d_1$  distanța dela acest profil pînă la linia de pasaj (distanța medie), S' ar fi suprafața profilului în rambleu și  $d_2$  distanța medie dela profilul în rambleu la linia de pasaj.

## - 2. Nivelarea suprafețelor.

Pentru a putea rezolva problema nivelării unei suprafețe oarecare, o primă operație pe care o executăm, este de a forma o rețea de puncte, am carcia suprafața respectivă, adică am forma patrate cu laturile de mărime în funcție de precizia cerută, de exemplu din 5 în 5 m (Fig. 350) și apoi am executa nivelmentul, geometric, pentru

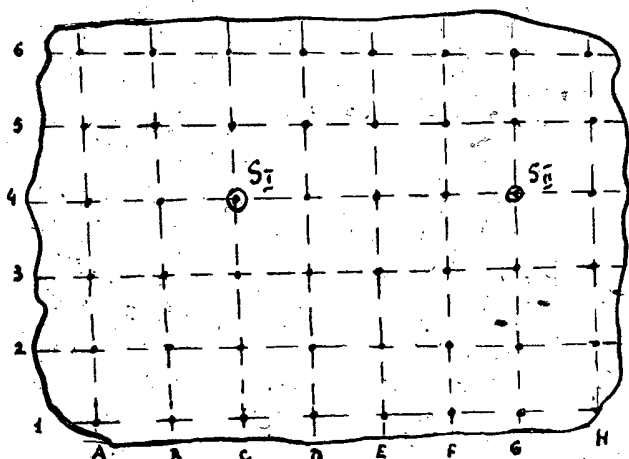


Fig. 350.

a determina cota absolută a tuturor punctelor acestei rețele, luând ca punct de stație un punct central

$S_1$ , iar în caz că suprafața terenului este mult întinsă, va fi necesar să se ia încă unul al doilea punct de stație  $S_2$  sau chiar mai multe puncte de stație.

În urma acestui nivelment, executat, se obțin în carnet, înscriind datele în protocolul de nivelment indicat, prin calcul, cotele absolute ale tuturor punctelor din rețeaua

ce brăzdează porțiunea de teren în care operăm.

Se atrage atențiune că punctele din rețeaua noastră vor fi toate țăruseate.

Spre a putea identifica cu ușurință punctele pe teren, ca și în protocolul măsurărilor de nivelment, este bine ca să fie întrebuintată pentru aceste puncte o nomenclatură cu notație dublă, după cum se arată în Fig. 350.

În detaliile de executare a nivelmentului nu mai intrăm, putându-se întrebuinta orice metodă, este de preferat însă nivelmentul geometric dela mijloc sau dela capăt.

Odată determinate cotele absolute ale punctelor, se pune problema, propriu zisă, de nivelarea suprafeței, în care spre a nu avea dislocări mari de teren, deci manoperă multă, practic este de a face suma tuturor cotelor absolute determinate și a raporta la suma punctelor ce au avut în rețea, stabilind astfel cota absolută a suprafeței proiectate.



- 504 -

În acest mod am soluționat problema în mod rațional, căutând ca să economisim manoperă și să avem, pe cât posibil, volum de ramblent egal cu volumul de săpătură.

Calculul cubajului de pământ se face analog cu cel arătat, după ce în prealabil am făcut profile transversale și anume primul profil prin A A<sub>1</sub> A<sub>2</sub> A<sub>3</sub> ..... apoi profilul al doilea prin B, B<sub>1</sub>, B<sub>2</sub>, B<sub>3</sub> ..... și a.m.d.

Pentru calcul se vor lua, bineînțeles profile vecine, adică profil A cu profil B, apoi profil B cu profil C, etc.

Spre a ne putea da seama de mișcarea de teren ce trebuie să facem și pentru ca cei cari execută această operațiune, să poată proceda în consecință, fără a disloca teren mai mult decât este necesar, țărugiile din fiecare punct vor fi scoși sau bătuți încă în pământ, în așa fel încît suprafața lor să fie la nivelul suprafeței proiectate.

Acest lucru, practic, se execută astfel : cu aparatul de nivelat în punctul de stație, se vizează din nou mira plasată, consecutiv, în toate punctele, astfel încît pe această miră așezată vertical pe țărugul din punctul respectiv, să citim cota suprafeței proiectate, plus înălțimea aparatului în punctul de stație.

### -3- Construcția curbelor de nivel și probleme în legătură cu ele.

După cum am definit la început, în Cap. Generalități, curba de nivel este locul geometric al tuturor punctelor de aceeași cotă, de aceeași înălțime față de nivelul mării sau de un alt plan orizontal ales arbitrar.

De aci rezultă că se obțin curbe de nivel prin intersecția suprafeței pământului cu plane orizontale echidistanțate.

De fapt orice plan orizontal determină o curbă de nivel, însă pentru sistematizare și ușoară citire a curbelor de nivel pe hartă sau plan, se recurge la distanțe egale.

Aceste distanțe, alese după precizia cerută și după scopul, lucrarea, în vederea căreia se construiesc curbele de nivel, poate fi de 0,5 m, de zece sau chiar sute de metri.

- 505 -

Pentru construirea curbelor de nivel sau mai precis pentru determinarea punctelor de aceeași cotă pot fi folosite două metode:

- a) Metoda directă.

O metodă simplă, însă practic foarte puțin utilizată, fiind greoaie în ceea ce privește execuția ei.

Cu această metodă se caută pe teren punctele de cotă egală.

Adică, se face stație cu aparatul într-un punct oarecare, obișnuit un punct central, având înălțimea aparatului și cota curbei de nivel ce vom să trasăm, de exemplu curba de nivel de 100 m, precum și cota punctului de stație, de exemplu 101 m, se adaugă la cota punctului de stație înălțimea aparatului, măsurată 1,20 m și se obține citirea ce trebuie făcută pe miră în punctul de cotă 100 m, pentru cazul nostru această citire ar fi :

$$(101 + 1,20) - 100 = 2,20 \text{ m.}$$

Se fixează un indicator, în mod obișnuit un disc la citirea 2,20 m de pe miră și apoi plimbăm mira pe teren spre a găsi punctul în care la aparat vedem această citire.

Punctul astfel găsit este de cotă

100 m.

Se înțelege acum dela sine greutatea executării nivelmentului și determinarea punctelor prin această metodă, de aceea în practică este întrebuintată metoda următoare:

- b) Metoda indirectă, sau metoda interpolării.

La această metodă determinarea punctelor de aceeași cotă poate fi făcută printr-unul din următoarele trei procedee: prin profile, prin puncte împrăștiate (sau metoda suprafețelor), prin combinare, adică prin profile și puncte împrăștiate.

- c) Prin metoda profilelor.

Se stabilesc mai întâi punctele de schimbare de pantă pe direcția respectivă și apoi prin nivelment, punând mira în fiecare din aceste puncte se

- 506 -

determină cotele lor absolute.

După aceea, în birou, cum s-a arătat, se desenează profilul ridicat și apoi prin linii de nivel echidistante, se determină punctele de pe acest profil, cari au cota absolută a curbei de nivel ce ne interesează.

Interpolarea poate fi executată ori grafic, ori prin calcule.

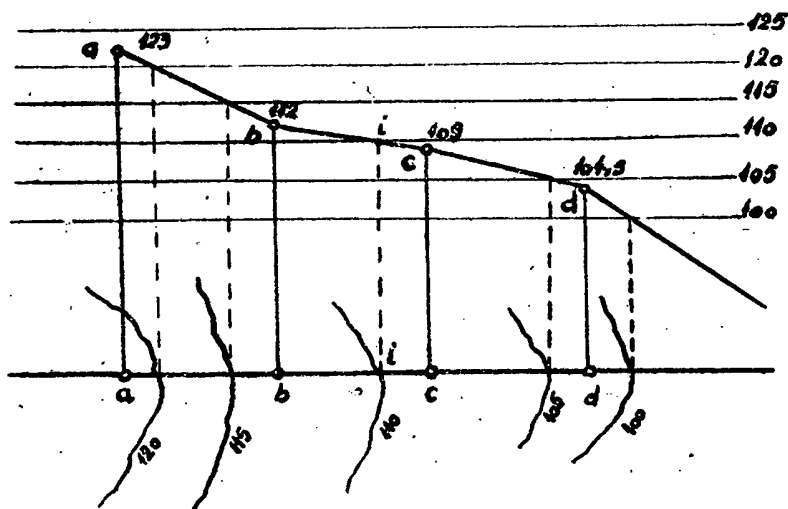


Fig. 351.

Grafic executarea interpolării este prezentată în schița din Fig.

351, unde avem ridicat un profil în care punctele a, b, c, d, sînt punctele de schimbare de pantă.

iar în dreptul lor sînt trecute cotele absolute respective.

Trasînd, peste profilul ridicat echidistanțele, (în Fig. 351 din 5 în 5 m), se determină punctele

de cotă 100, 105, 110, etc., de cota curbelor de nivel pe cari vom a le construi.

Luînd apoi un profil vecin, se obțin și pe acest profil, cum se va vedea în exemplul ce urmează, punctele de cotă 100, 105, 110, etc.

În mod analog pentru alte profile, obținem puncte de cote absolute 100, 105, 110, etc.

Unind acum punctele de aceeași cotă, se va obține curba de nivel respectivă.

Pentru a pune în evidență acest lucru să luăm ca exemplu suprafața din Fig. 350 unde în urma nivelmentului am determinat pentru diferitele puncte cotele absolute indicate în dreptul lor (Fig. 352).

Construind profilele transversale prin AA, BB, CC, etc., se determină punctele trasate cu cercelete, reprezentînd punctele, de pe aceste profile, cari au

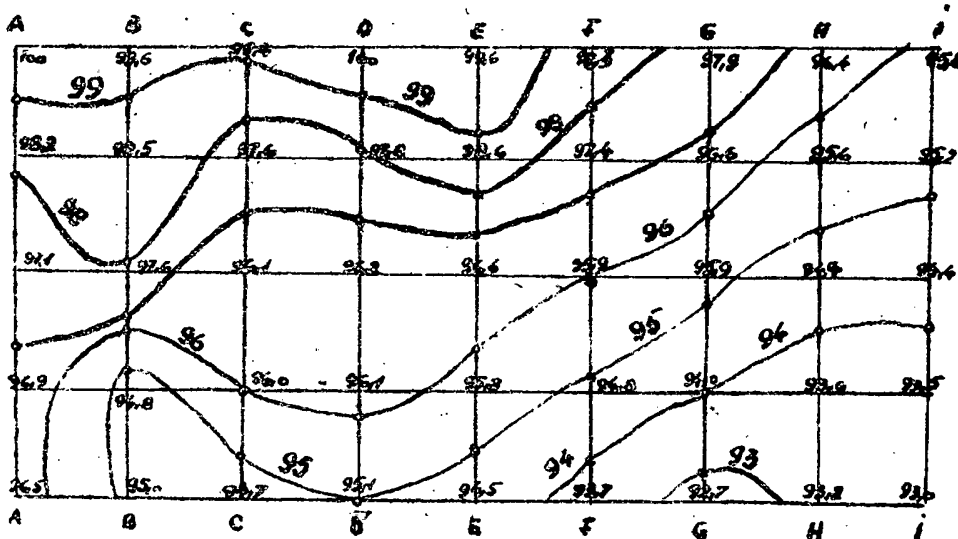


Fig. 352.

cotele 99,98,97,etc.

Apoi unind punctele de aceeași cotă avem construite curbele de nivel de cotă 99,98,97,s.a.m.d. așa cum se arată în figură.

Putem, cum am arătat, să interpolăm prin calcule, de exemplu, referindu-ne la graficul din Fig. 351, să determinăm punctul de cotă absolută 110 m.

Dintru început observăm că acest punct trebuie să fie pe aliniamentul b c deoarece punctul b are cotă 112, iar punctul c are cotă absolută 109 m.

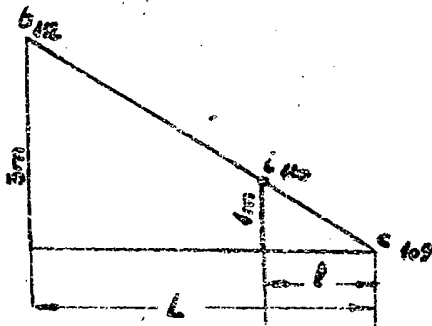


Fig. 353.

Distanța pe orizontală, între punctele b - c, cunoscute, în cazul nostru, este  $L = 215$  m, iar diferența de nivel între aceste puncte extreme ale aliniamentului este  $h_{bc} = 112 - 109 = 3$  m. Pe când diferența de nivel între punctul de cota ce vom să avem (110 m) punctul i și punctul cota cea mai joasă (punctul este  $h_{ic} = 110 - 109 = 1$  m.

Urmează că distanța (1), pe zontală, între punctul c și va fi dată de relația:

$$l = L \frac{h_{ic}}{h_{bc}} = 215 \frac{1}{3} = 71,6 \text{ m.}$$

- 508

Observând Fig. 353, poate fi găsită justetea relației întrebuințate.

Această metodă de interpolare se întrebuințează de predilecție în orașe la nivelmentul străzilor.

Am arătat trasarea curbelor de nivel în cazul suprafețelor cu denivelări mici, vâlurite.

Să vedem cum se execută nivelmentul și cum pot fi construite curbele de nivel prin metoda profilelor în cazul terenurilor accidentate, deluroase, caz în care metoda carciajului nu poate fi aplicată în determinarea cotelor absolute, în executarea nivelmentului.

În acest scop, având un punct A Fig 354, în vârful dealului și cunoscând cota lui absolută, cu

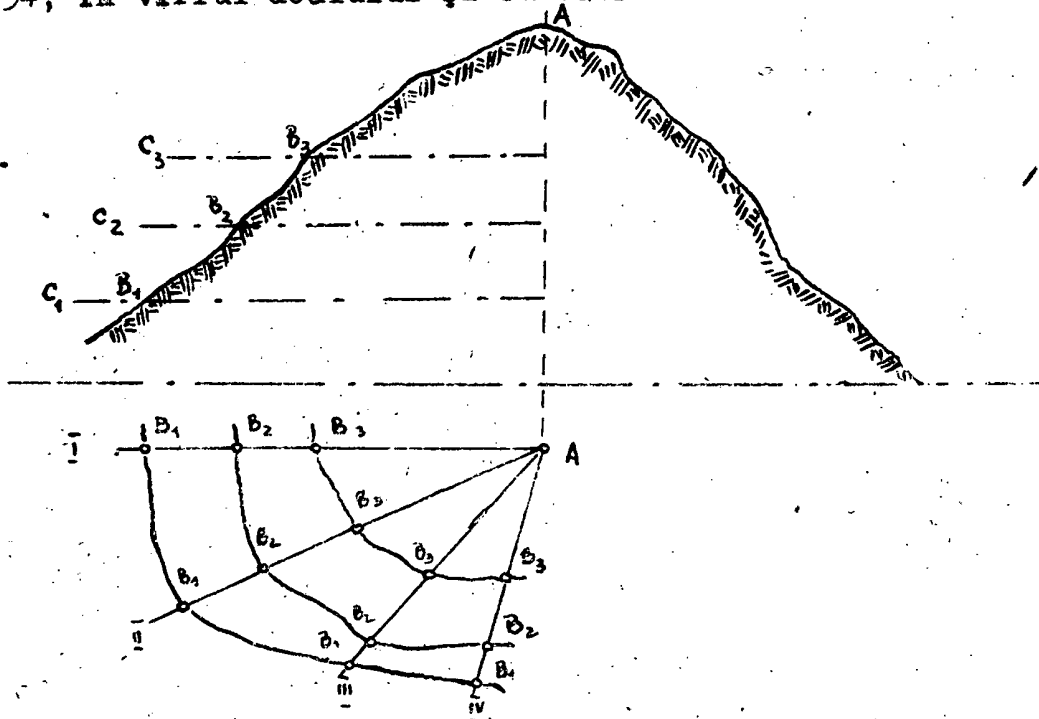


Fig. 354.

aparatul de nivelat facem stație în acest punct.

Problema care se pune este de a construi, în planul orizontal, curbele de nivel  $C_1, C_2, C_3, \dots$

Pentru rezolvarea problemei va trebui să executăm mai multe profile I, II, III, IV, etc., cari toate să treacă prin punctul A.

Aceste profile vor fi acum radiale, deci avem în acest caz o nouă metodă, a profilelor radiale.

- 509 -

cari, este ușor să ne dăm seama că nu pot fi determinate prin nivelment geometric, ci prin nivelment trigonometric.

Ca atare, staționând în punctul A se va executa un nivelment trigonometric în primul rând pe direcția A I, apoi un al doilea pe direcția A II, ș.a.m.d., determinând cotele absolute ale tuturor punctelor de schimbare de pantă, aflate pe aceste direcții.

Desigur că pentru a putea avea în plan indicate direcțiile acestor profile, va trebui să fie măsurate și unghiurile orizontale ( $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots$ ) dintre ele sau să avem orientările  $\rho_{A1}, \rho_{A2}, \rho_{A3}, \dots$

Unghiul  $\alpha$ , fiind măsurat față de o direcție cunoscută din ridicările de planimetrie.

Apoi, având în urma nivelmentului executat, cotele absolute ale punctelor de schimbare de pantă, construim profilul conform celor stabilite anterior, precum și punctele de pe aceste profile, cari au cota absolută a curbelor de nivel  $C_1, C_2, C_3, \dots$  pe cari vom să le trasăm, determinate aceste puncte prin interpolare, așa cum s-a văzut.

Raportînd în plan direcțiile profilelor A I, A II, A III,  $\dots$  și unind punctele de aceeași cotă, egală cu cota curbei de nivel, pot fi trasate toate curbele de nivel cari ne interesează.

Numărul profilelor radiale, ce trebuie executate, este în funcție de forma reliefului, precum și de precizie, exactitatea, ce ne este cerută.

#### - d). Metoda punctelor împrăștiate.

Este metoda cea mai uzitată în cazul terenurilor accidentate, în regiunile muntoase, constînd în a determina, dintr-un anumit punct de stație S, distanțele și diferențele de nivel ale punctelor de schimbare de pantă.

După aceea se plasează toate aceste puncte în plan orizontal, cunoscînd, în urma măsurărilor unghiurile dintre diferitele direcții și prin interpolare, așa cum se opera la metoda precedentă, se stabilesc punctele de aceeași cote, prin unirea cărora sînt obținute curbele de nivel, la echidistanța dorită.

Iată pentru punerea în evidență a celor afirmate, un exemplu numeric, reprezentat în schița

- 510 -

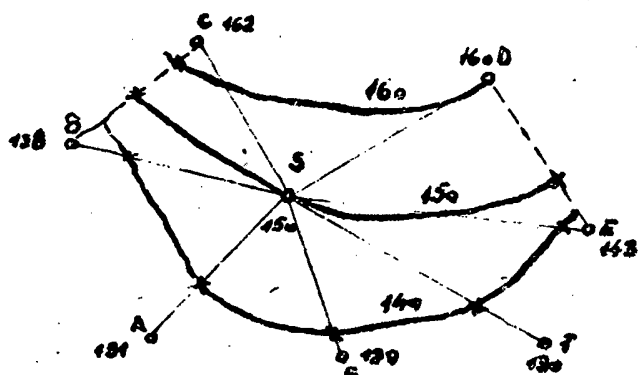


Fig. 355.

Fig. 355.

Punctul S, în care staționăm cu aparatul, are cotă absolută cunoscută, de exemplu 150 m, prin nivelment sînt determinate cotele absolute ale punctelor A, B, C, D, E, ..... indicate pe figură în dreptul lor,

Dessezena sînt măsurate și distanțele SA, SB, SC, ..... precum și unghiurile orizontale dintre aceste drepte, necesare în vederea plasării, la scara respectivă, în planul orizontal a tuturor acestor puncte.

Avînd cotele absolute ale punctelor extreme, pe aliniamentele SA, SB, SC, ..... pot fi găsite, prin interpolare, punctele de cotă curbelor de nivel pe cari căutăm a le trasa, în figură aceste puncte fiind marcate prin semnul ori (x).

Dessezena astfel de puncte pot fi determinate și pe aliniamentele obținute prin unirea punctelor de cotă cunoscută, de exemplu pe aliniamentele BC și DE, pe cari am determinat în figura noastră punctele de cotă 150 m.

Unind punctele de aceeași cotă, se obțin curbele de nivel necesare.

Este important de reamintit faptul că metoda de nivelment cea mai indicată, în cazul trasării curbelor de nivel prin puncte împrăștiate, este metoda tachimetrică, adică nivelment tachimetric, în care cu mai mare ușurință putem stabili distanțele SA, SB, SC, precum și diferențele de nivel  $h_{AS}$ ,  $h_{BS}$ , ..... .

De altfel această metodă, este bine stabilită, se aplică cu predilecție în cazul terenurilor accidentate.

Ca metodă indicată, în afară de metoda tachimetrică, de altfel mai precisă ca aceasta, este cea fotogrametrică, pe care o vom trata într-un alt Capitol în cadrul fotogrametriei.

#### - e) Metoda combinată (prin profile și puncte împrăștiate).

După ce am văzut cum pot fi trasate curbele de nivel prin metoda profilelor și prin metoda punctelor împrăștiate, este simplu a ne da seama cum prin combinarea convocabilă, a acestor două metode, pot fi obținute

- 511 -

punctele de aceeași cotă, din a căror unire rezultă curba de nivel de cotă egală cu cea a acestor puncte.

- f). Cîteva probleme în legătură cu curbele de nivel.

Înainte de a aborda aceste probleme, este necesar să amintim că, pentru ape, (lacuri, râuri, mări, oceane), pentru a se stabili adîncimea lor, se caută cotele punctelor de fund ale acestora, cote denumite cote bathymetrice, iar cotele bathymetrice de aceeași valoare ne dau curbe bathymetrice, despre cari se va vorbi mai tîrziu.

Și acum să vedem, sumar, cîteva din problemele ce putem rezolva cu ajutorul curbelor de nivel.

- g). Determinarea pantei terenului.

Cu ajutorul curbelor de nivel putem determina, în orice porțiune a planului, panta terenului reprezentat pe hartă.

Intr-adevăr, știind valoarea echidistanței și măsurînd distanța pe orizontală între două puncte situate pe curbe de nivel diferite, putem construi un triunghi dreptunghic, ale cărui catete reprezintă, una echidistanța, iar cealaltă distanța pe orizontală dintre cele două puncte.

Aceste două elemente fiind cunoscute, putem determina unghiul de pantă  $\alpha$  cuprins între ipotenuză și orizontală.

În cazul din Fig. 356 se caută panta, pe direcția AB, a terenului cunoscut prin curbele de nivel  $C_1, C_2, C_3$ .

Se formează, cu echidistanța  $e$ , cunoscută și distanța  $d = d_1 + d_2$ , triunghiul dreptunghic.

Valoarea unghiului de pantă va rezulta din relația:

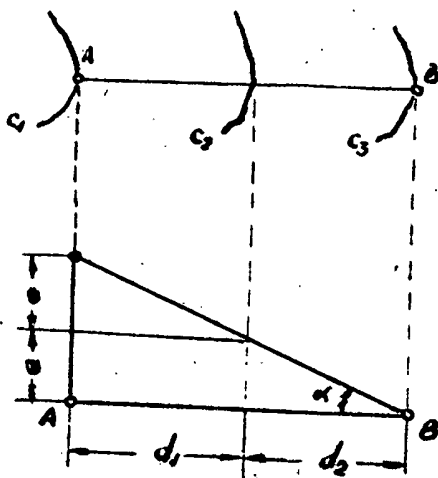


Fig. 356.



- 512 -

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AC}{AB}; \text{ ceeace in cazul nostru este :}$$

$$\text{este } \operatorname{tg} \alpha = \frac{2a}{d_1 + d_2} \text{ și } d_1 = d_2 \text{ avem } \operatorname{tg} \alpha = \frac{2a}{2d_1} = \frac{a}{d_1}$$

Se poate acum ușor observa că, pentru pante mari, rezezi /  $\alpha$  mare/, pentru aceeași echidistanță, curbele de nivel se apropie, adică numitorul relației care dă pe  $\alpha$  se micșorează și din contra, pentru pante line, unghiul de pantă mic, curbele de nivel se îndepărtează, iar la distanțe egale între curbe, cazul din figura de mai sus, avem pante uniforme.

Această observație ne poate servi la citirea hărților spre a ne putea da seama de configurația terenului.

- h/ Determinarea unui traseu de aceeași pantă.

În lumina celor stabilite anterior, dacă dorim să ducem o linie de pantă dată, cunoscând echidistanța, putem determina lungimea pe orizontală care la această echidistanță face cu ipotenuza unghiul de pantă dat. Este problema inversă celei de mai sus, în care

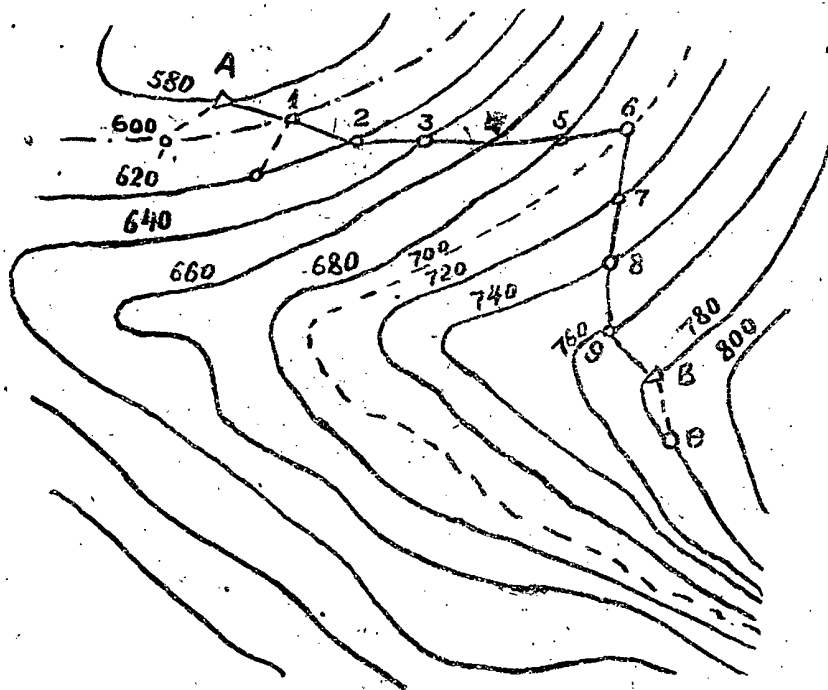


Fig. 357

cunoaștem unghiul  $\alpha$  și cateta AC, urmînd să determinăm cealaltă catetă AB adică distanța pe orizontală.

Cu această distanță, luată în compas, din punctul de pornire A, situat pe o curbă de nivel, căutăm să intersectăm curba de nivel următoare și astfel am obținut aliniamentul care în această porțiune a terenului are panta dată. Pentru cazul nostru să presupunem că lungimea pe orizon-

- 513 -

tală determinată pentru unghiul  $\alpha$  (dat), ar fi, ab.

Luind în compas această lungime, din punctul de plecare A, se vor afla pe curba de nivel următoare, de cotă 600 m, punctele 1 și 1' cari satisfac condiția de a avea panta dată de aliniamentul A 1 și A 1'.

Deci se găsesc două puncte, cari satisfac condiția impusă.

După aceea, cu cîtimea ab în compas, din punctul 1, pe curba de nivel vecină (620 m) se vor stabili punctele 2 și 2'.

Procedind analog și luind doar punctele 1, 2, 3, 4, ..... se va obține traseul A 1 2 3 4 5 6 7 8 9 B, deslungul căruia avem rampe de aceeași pantă.

Ca observație, trebuie să amintim că dacă am uni punctul B cu C, între acestea nu avem pantă, deoarece ele se găsesc pe aceeași curbă de nivel (780 m).

- i) Linia de cea mai mare pantă.

Din punctul A (Fig. 357), pentru o pantă oarecare avem pe curba de nivel vecină două puncte 1 și 1' cari, unite cu A, satisfac condiția.

Dacă micșorăm distanța ab se vor găsi pe curba vecină alte două puncte, mai apropiate între ele decît 1 și 1'.

Procedind din aproape în aproape la micșorarea distanței ab, va ajunge la situația cînd pe curba de nivel vecină, nu se obține decît un singur punct, adică cele două puncte ce ar trebui să obținem, se confundă.

Aceasta este cea mai scurtă distanță dintre curbe, ori, conform celor arătate la determinarea unghiului de pantă, acest aliniament ne va da linia de cea mai mare pantă, care în realitate este linia descisă de picătura de apă ce cade de pe curba de nivel de cota 600 m în punctul A.

- j) Determinarea profilului pe o direcție dată.

Problema inversă trasării curbelor de nivel prin metoda preriilor este de a determina profilul

pe o direcție dată, atunci când avem curbele de nivel.

De exemplu, dacă avem curbele de nivel, Fig. 358, ne propunem de a determina profilul pe direcția AB.

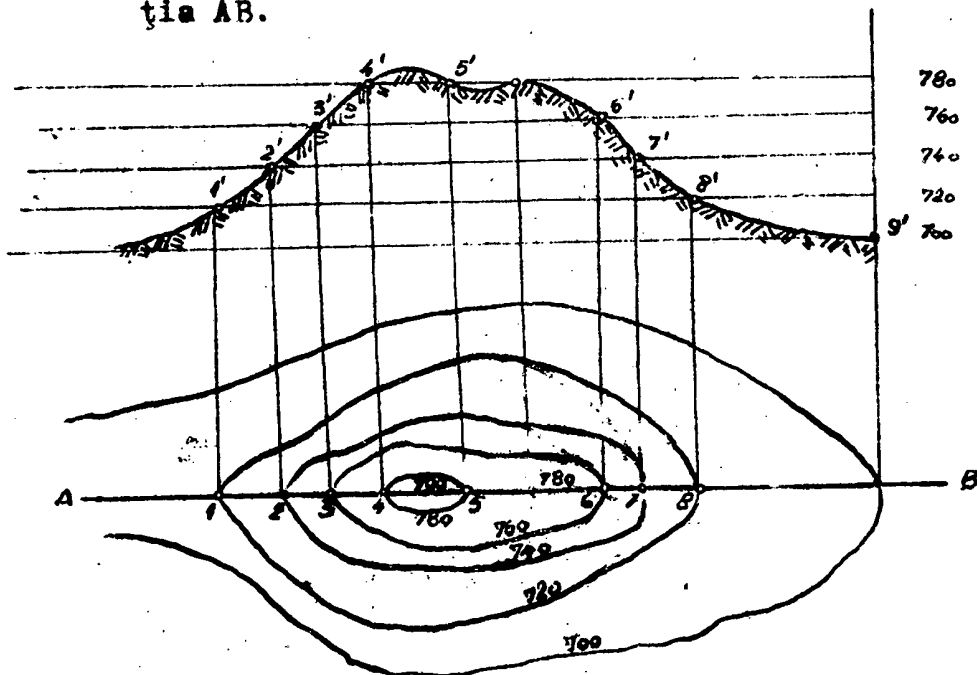
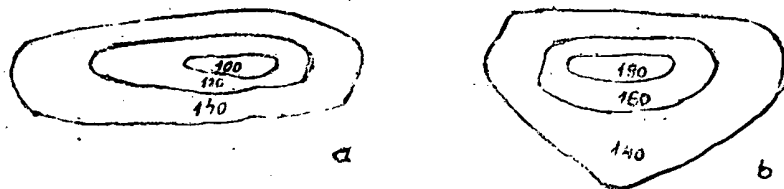


Fig. 358.

Pentru rezolvarea problemei se ridică perpendicularare, pe direcția AB, în punctele unde acest aliniament (AB) taie curbele de nivel adică în punctele: 1, 2, 3, 4, ..... .

Admițind pentru înălțimi o scară care, aleasă arbitrar (desigur că nu trebuie exagerată spre a obține un profil care să ne dea cât mai aproape de real configurația terenului) se vor afla punctele 1', 2', 3', ..... prin a căror unire se obține profilul pe direcția AB.

- k) Plan cotat.



Curbele de nivel trasate pe un plan nu spun nimic dacă ele nu poartă indicațiile înălțimii deasupra unui plan de comparație nu arată ce cotă

Fig. 359.

- 515 -

are curba respectivă.

Intr-adevăr curbele ovale incluse, cazul din Fig. 359, pot indica un lac (a) sau un deal (b), ceea ce nu poate fi știut fără cifrele care ne arată raportul curbelor între ele, care numai când sînt cu aceste cifre ne pot da adevărate imagine a terenului reprezentat în plan.

Acest plan, curbele de nivel și cu cifrele indicatoare de înălțimi, poartă denumirea de plan cotat.

#### - 4) Nivelmentul rîurilor, curbe bathymetrice.

Foarte adeseori ni se cere a cunoaște forma albiei unui rîu, adică să determinăm cota fundului rîului.

Aceste cote luate în comparație cu cota absolută a suprafeței apei liniștite sînt cote de adîncime sau cote bathymetrice.

În ultimă analiză ni se cere să facem profile transversale, de la un mal la celălalt.

Spre a putea rezolva problema, va trebui ca în prealabil să avem dealungul unui mal al rîului o poligenație nivelitică, ale cărei puncte să aibă cota apei liniștite.

Adică, referindu-ne la cazul din Fig. 360, dealungul rîului, am executat o poligenație nivelitică și am găsit cota punctelor A, 1, 3, 4 .....

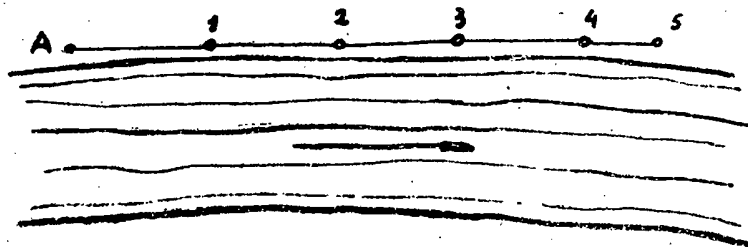


Fig. 360.

egală cu cota suprafeței apei liniștite.

Pentru ca acest lucru să fie posibil este necesar ca punctele poligenației nivelitice, adică punctele 1, 2, 3, ...

să fie marcate cu niște țărusi, în cari sînt bătute cue cu capetele în calotă.

Țărușii sînt bătuti în așa fel ca ei să fie cu puțin sub suprafața apei.

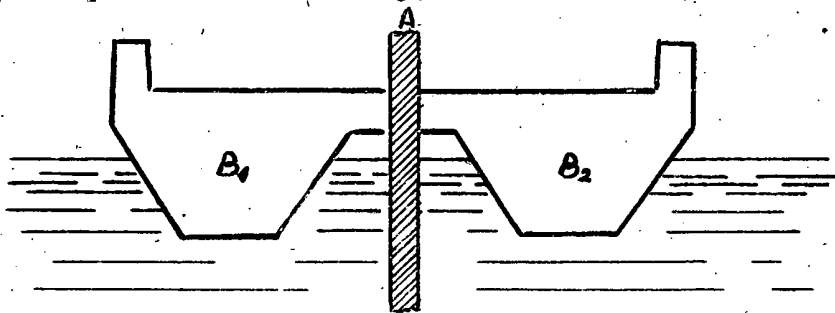
- 516 -

Cotele acestor puncte sînt determinate prin procedeele, metodele, de nivelment, în special prin nivelment geometric de la mijloc.

Aceste puncte sînt la distanțe, unul față de altul, mici, 5 - 10 - 20 m, după distanța ce vom avea între profile.

După aceea prin punctul A, apei prin 1, ș.a.m.d., se fac profile transversale, determinînd adîncimea apei din 5 în 5 m, sau la distanță aleasă după precizia cerută.

Adîncimea apei se află prin sondaje, cari la rîuri mici pot fi executate din barcă, cu o cangă gradată, iar la rîurile mai adînci se întrebunțează o barcă specială de sondaj, schematic reprezentată în Fig. 361,



compusă din două bărci cuplate B și B și cu o prăjină de sondaj (A), care poate fi înlocuită, la adîncimi mari cu un cablu.

Mentineră bărcii pe aliniamentul pe care se face profilul se realizează cu

Fig. 361.

ajutorul teodolitului.

Avînd adîncimea diferitelor puncte din profilul nostru, pentru a avea cota lor, o scadem din cota suprafeței apei liniștite, respective din cota punctului de poligonatie prin care s-a făcut profilul.

După executarea mai multor profile, prin interpolare sînt determinate puncte de aceeași cotă bathymetrică, din unirea cărora rezultă curbele bathymetrice.

#### - 5) Nivelmentul lacurilor.

Aceiași metodă, ca în cazul rîurilor este aplicată și pentru lacuri.

În cazul rîurilor, sondajul fiind făcut din barca specială, cînd sondajul fiind efectuat pe același profil (de exemplu profilul A), din 5 în 5 m sau

o altă distanță, înseamnă că am întrebuințat metoda carotajului, la fel ca în cazul suprafețelor.

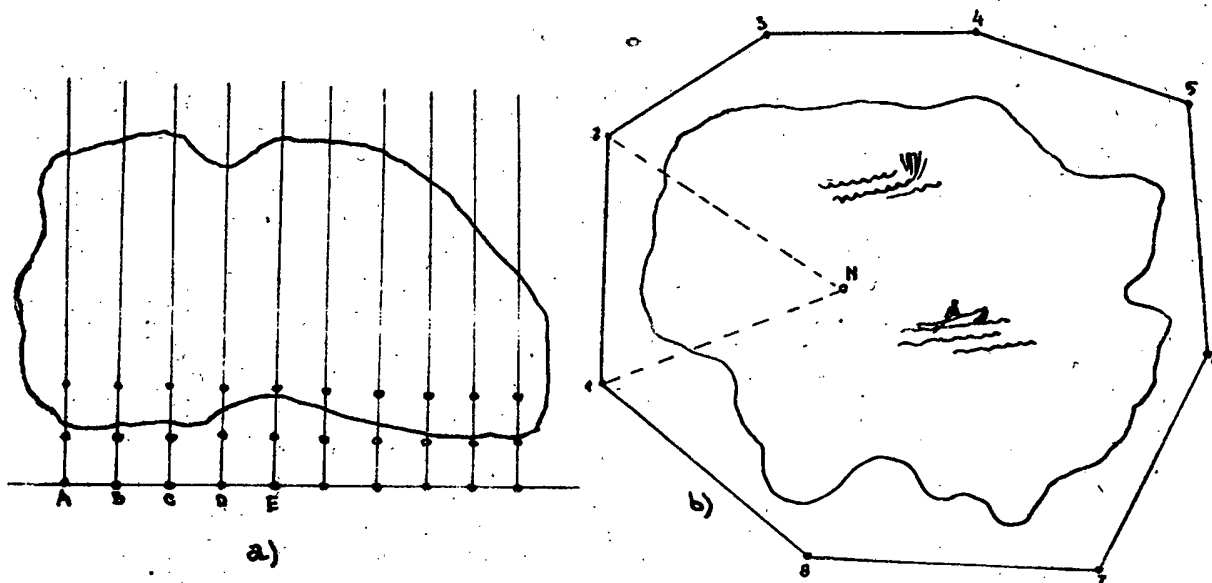


Fig. 362.

Când lacul are o suprafață mare, în loc de metoda profilelor se poate întrebuința, cu mai mult succes, metoda punctelor împrăștiate, a căror cotă este aflată tot prin sondaj din barcă, iar pentru a avea poziția punctului în care se face sondajul, va trebui, în prealabil, să avem o poligonatie în jurul lacului, ceea ce în ultima analiză înseamnă să avem o serie de puncte : 1, 2, 3, ..... (Fig. 362 b,) a căror poziție, coordonate, le cunoaștem și apoi cu teodolitul, prin intersecție înainte, determinăm poziția punctului N în care facem sondaj.

Desigur că pentru a putea construi curbele bathymetrice, se vor determina și cotele bathymetrice, prin scăderea adâncimei din cota suprafeței apei liniștite, a mai multor puncte și apoi la fel ca la curbele de nivel trasate prin metoda punctelor pierdute sînt obținute curbele bathymetrice.

#### - 6) Nivelmentul mărilor și oceanelor.

Metoda este aceeași ca pentru lacuri, cu deosebirea că adâncimea nu se mai determină prin sondaj, ci prin metode speciale, bazate pe viteza sunetului sau cu ajutorul radarului.

## CAPITOLUL VI.

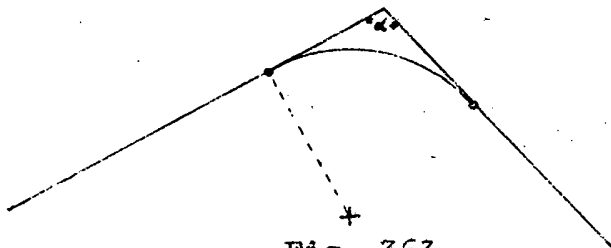
TRASAREA CURBELOR.

Deși problema trasării curbilor este o problemă care privește partea de planimetrie, în mod intenționat s-a lăsat ca tratarea ei să fie făcută după nivelment, cu justificarea că în multe cazuri (curbe în pantă) este necesar și de nivelment în rezolvarea problemei ce ne este pusă.

În rezumat, curba de racordare este curba care leagă două aliniamente, cari formează între ele un unghi oarecare, ea fiind tangentă la cele două aliniamente.

Cu alte cuvinte, având două porțiuni drepte de șosea sau de cale ferată, cari nu sînt în prelungire, ci se întretaie sub unghiul  $\alpha$  (Fig. 363), trebuiesc legate, recordate, printr-o curbă, care să permită trecerea de la un aliniament la altul, ușor, fără șguduiri. Cea mai simplă

curbă de racordare ar fi cercul, acărui rază, ca mărime, este luată după importanța liniei (la linii principale raze mari și în vers la linii secundare raze mici), dar mai ales în funcție de viteza de circulație.



- 1) Trasarea curbei în arc de cerc cînd intersecți  
aliniamentelor este accesibilă.

Avînd aliniamentele  $D_1$ ,  $D_2$ , și punctul de intersecție (V), al celor două aliniamente, accesibil staționabil, ne propunem să legăm aceste două aliniamente prin-trun arc de cerc.

Prima operațiune ce trebuie executată este de a staționa cu teodolitul în punctul V și

să măsurăm, printr-una din metodele cunoscute, unghiul  $\alpha$  dintre cele două aliniamente.

Amintim, fiind lucru cunoscut, că, dacă sînt date orientările  $\beta_1$  și  $\beta_2$  ale celor două drepte, valoarea unghiului  $\alpha$  poate fi dedusă din diferența acestor două orientări:

$$\alpha = \beta_1 - \beta_2$$

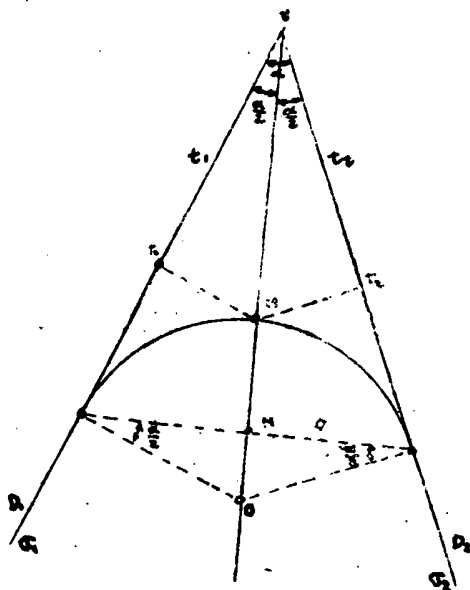


Fig. 364.

Rezolvarea problemei ne cere a determina cîteva puncte caracteristice ale curbei punctele: A, M, B, cari sînt: punctul A începutul curbei, M mijlocul curbei și B sfîrșitul curbei.

Aceste elemente caracteristice pot fi calculate numai dacă se mai cunoaște un element caracteristic al racordării și anume raza R.

Prin urmare în rezumat: se dă raza R, se măsoară unghiul  $\alpha$  și se cer punctele A, M, B.

Notînd:  $\overline{VA} = t_1$ ,  $\overline{VB} = t_2$

Din triunghiurile A O V și V O B rezultă:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{R}{t_1} = \frac{R}{t_2}; \quad t_1 = t_2 = t.$$

$$t = \frac{R}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = R \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$$

Avînd lungimea  $t = AV = BV$ , din punctul V măsurăm această lungime și sînt determinate punctele A, B, adică începutul și sfîrșitul curbei.

Determinarea punctului M (mijlocul curbei) poate fi făcută prin mai multe metode:

Observînd că unghiurile  $OAB = OBA = \frac{\alpha}{2}$ ,

din triunghiul OAN

$$\overline{ON} = R \sin \frac{\alpha}{2} \quad \overline{NM} = R - \overline{ON}$$

Cunoscînd lungimea  $\overline{NM}$ , poziția punctului M este determinată ridicînd perpendiculara pe mijlocul coardei AB și pe această perpendiculară este măsurată lungimea  $\overline{NM}$ .

O a doua metodă pentru determinarea lui M, ar fi următoarea:

Se găsește valoarea lui  $\overline{VM}$  din relația:

$$\overline{VM} = \overline{VO} - R = \frac{R}{\sin \frac{\alpha}{2}} - R = \frac{R(1 - \sin \frac{\alpha}{2})}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$



Apoi din triunghiurile asemenea VAO și VT<sub>1</sub>M rezultă lungimile:  $\overline{VT_1}$ , și  $\overline{T_1M}$ , în mod analog din celălalt triunghi vor rezulta  $\overline{VT_2} = \overline{VT_1}$ , și  $\overline{T_2M} = \overline{T_1M}$ .

$$\overline{VT_1} = \frac{\overline{VA}}{\overline{VO}} \cdot \overline{VM} = R \cotg \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{R(1 - \sin \frac{\alpha}{2})}{\sin \frac{\alpha}{2}} = R \cotg \frac{\alpha}{2} (1 - \sin \frac{\alpha}{2})$$

Si:

$$\overline{T_1M} = \overline{T_2M} = R \frac{\overline{VM}}{\overline{VO}} = R \frac{R(1 - \sin \frac{\alpha}{2})}{\sin \frac{\alpha}{2}} = R (1 - \sin \frac{\alpha}{2}).$$

Odată stabilite valorile lui  $\overline{VT_1}$  și  $\overline{T_1M}$ , poziția punctului M este determinată, nu rămâne decât pe aliniamentul  $D_1$ , din punctul V să fie măsurată lungimea  $\overline{VT_1}$  și apoi pe perpendiculara la aliniamentul  $D_1$ , ridicată în punctul  $T_1$ , să se măsoare lungimea  $\overline{T_1M}$ .

Observație: când punctul V este accesibil, racordarea se face în câmp deschis, caz în care avem posibilitatea de a prelungi cele două aliniamente până la intersecția lor.

- 2) Racordarea aliniamentelor când punctul de intersecție este inaccesibil.

Cazul frecvent în regiuni deluroase, în subteran, sau la orașe, este cel în care punctul de intersecție al aliniamentelor date ( $D_1, D_2$ ) nu este cunoscut, nu pot fi prelungite aceste aliniamente spre a avea punctul V din cazul precedent, care, prin staționare cu teodolitul să ne permită a măsura unghiul ( $\alpha$ ) dintre cele două aliniamente.

Pentru rezolvarea problemei se va reurge la o construcție ajutătoare și anume se calculează punctele de intersecție, ale celor două aliniamente, cu o dreaptă oarecare, adică, să stabili poziția punctelor  $P_1$  și  $P_2$ .

Practic se iau pe aliniamentele  $D_1$  și  $D_2$  punctele  $P_1$ ,  $P_2$ .

Staționând în aceste puncte, cu teodolitul, se măsoară unghiurile  $\beta$  și  $\gamma$  (Fig. 365).

Observăm că unghiul  $\alpha$ , format de

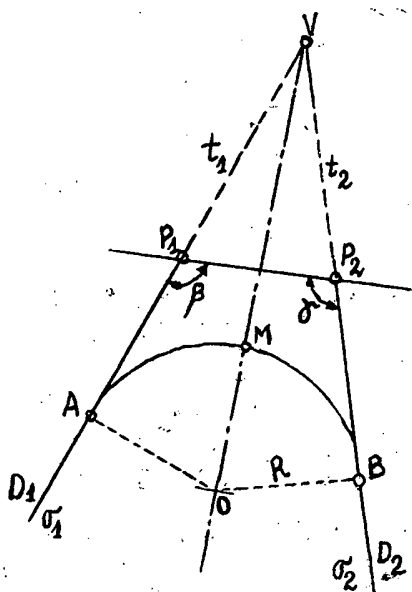


Fig. 365

aliniamentul  $D_1, D_2$ , cari trebuiesc racordate, rezultă din relația :

$$\alpha = 180^\circ - \frac{180^\circ - \beta}{2} - \frac{180^\circ - \gamma}{2}$$

$$= \beta + \gamma - 180^\circ.$$

Desigur că, dacă avem orientările  $\sigma_1, \sigma_2$ , valoarea unghiului  $\alpha$  ca în cazul precedent, poate fi dedusă din diferențe dintre aceste două orientări.

Acum față de punctele  $P_1, P_2$ , calculăm, determinăm punctele caracteristice ale curbei, punctele A, M, B.

Intr-adevăr, conform relațiilor anterioare :

$$AV = VB = t = R \cdot \cotg \frac{\alpha}{2}$$

Notînd :  $P_1V = t, P_1P_2 = S$  / pe care o măsurăm, deci o cunoaștem/.

Avem :  $t_1 = \frac{s \cdot \sin \frac{180^\circ - \gamma}{2}}{\sin \alpha} = S \cdot \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \alpha}; t_2 = S \cdot \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\sin \alpha}$

Deci :

$$\overline{P_1A} = \overline{AV} - t_1 = R \cotg \frac{\alpha}{2} - S \cdot \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \alpha}$$

$$\overline{P_2B} = \overline{VB} - t_2 = R \cotg \frac{\alpha}{2} - S \cdot \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\sin \alpha}$$

Adică, poziția punctelor A, B, este determinată prin măsurarea din punctele  $P_1$  și  $P_2$  a distanțelor  $P_1A, P_2B$ , fără a mai fi necesar să căutăm punctul V și apoi față de el să ducem măsurătorile noastre.

Pentru determinarea lui M se va proceda analog ca în cazul 1, cînd V era accesibil.

- 3/ Trasarea punctelor de detaliu ale curbei.

În racordarea aliniamentelor nu este suficient să fie date numai punctele caracteristice, începutul, sfîrșitul și mijlocul curbei, ci o serie întregă de puncte intermediare, suficiente, ca număr, pentru trasarea practic pe teren a curbei.

În acest scop pot fi întrebuințate mai multe metode, din care se vor indica doar cîteva mai frecvent utilizate.

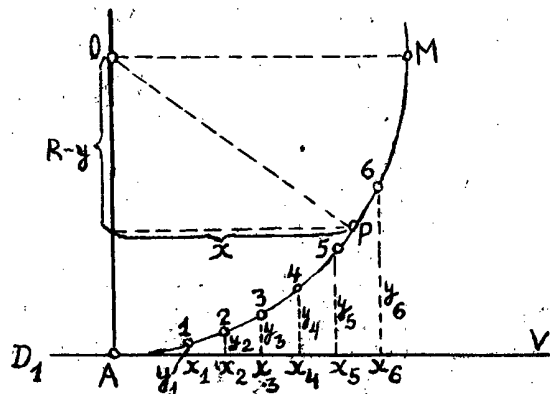


Fig. 366

-a/ Metoda prin abscise și ordonate dela tangentă.

Se va arăta cum se procedează pentru jumătate de curbă, pentru cealaltă jumătate, procedându-se identic.

În rezumat, trebuie să plasăm pe teren o serie de puncte 1, 2, 3, 4, ..... cuprinse între A și B cari au fost determinate cum s-a arătat.

Pe aliniamentul  $D_1$ , din punctul de tangentă /A/ la curbă, considerat ca axă de x, se ridică ordonatele y, conform valorilor lor deduse pentru anumite valori ale lui x.

Dacă scriem ecuația cercului /ceea ce putem urmări și pe Fig. 366.

$$R - Y + \frac{X^2}{2R} = R$$

Avem :  $R - Y = R - \frac{X^2}{2R} = R \left( 1 - \frac{X^2}{2R^2} \right)$

Desvoltând în serie pe  $1 - \frac{X^2}{2R^2}$  rezultă :

$$1 - \frac{X^2}{2R^2} = 1 - \frac{1}{2} \frac{X^2}{R^2} - \frac{1}{8} \frac{X^4}{R^2} - \dots$$

După desvoltarea în serie, oprindu-ne la primul termen, în urma acestei simplificări, se obține ecuația unei parabole, adică am înlocuit racordarea în arc de cerc prin parabolă.

Intr-adevăr :  $R - Y = R \left( 1 - \frac{X^2}{2R^2} \right) = R - \frac{X^2}{2R}$

$$Y = \frac{X^2}{2R} \text{ care este ecuația parabolei.}$$

În această relație luând valori anumite pentru x, se vor obține ordonatele respective și determinăm ca atare punctele 1, 2, 3, ..... cari ne interesează.

Ca exemplu practic, să presupunem că  $R = 125 \text{ m.}$

Luăm valori din 5 în 5 m. pentru x :

$$x_1 = 5 \text{ m, } x_2 = 10 \text{ m, } x_3 = 15 \text{ m, } x_4 = 20 \text{ m } \dots$$

$$y_1 = 2x \cdot 125 = 10 \text{ m, } y_2 = \frac{1}{2} \times 5^2 = 10 \text{ m, } y_3 = 3^2 \times 10 = 90 \text{ m,}$$

$$y_4 = 4^2 \times 10 = 160 \text{ m.}$$

Din acest exemplu se vede cu ușurință ce avem în determinarea punctelor intermediare prin înlocuirea racordării în arc de cerc cu cea prin parabolă.

Generalizînd, dacă se ia pentru  $x$  o valoare arbitrară  $x = x$ , avem :

$$x_1 = x_0 ; \quad y_1 = y_0$$

$$x_2 = 2x_0 ; \quad y_2 = 2 y_0$$

$$x_3 = 3x_0 ; \quad y_3 = 3 y_0$$

⋮

$$x_n = n x_0 ; \quad y_n = n^2 \cdot y_0$$

$$\text{Unde : } y_0 = \frac{x_0^2}{2 R}$$

- b/ Determinarea punctelor intermediare prin coarde de lungimi egale.

Observăm că valorile lui  $x_1, x_2, x_3, \dots$  le corespund :

$$y_1 = \frac{R}{2} \sin^2 \beta = 2 R \sin^2 \frac{\beta}{2}$$

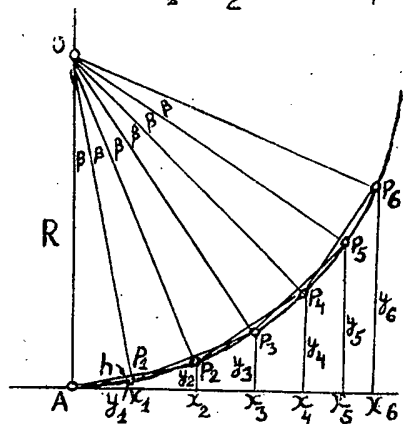


Fig. 367

adică :

$$x_1 = R \sin \beta \dots y_1 = 2 R \sin^2 \frac{\beta}{2}$$

$$x_2 = R \sin 2\beta \dots y_2 = 2 R \sin^2 2 \frac{\beta}{2}$$

$$x_3 = R \sin 3\beta \dots y_3 = 2 R \sin^2 3 \frac{\beta}{2}$$

⋮

$$x_n = R \sin n\beta \dots y_n = 2 R \sin^2 n \frac{\beta}{2}$$

In acest caz toate săgețile sînt egale

$$h_1 = h_2 = h_3 = \dots = h$$

Aceasta de altfel constituie avantajul metodei, prezentîndu-ne un mijloc de control chiar la fața locului, pe teren, pentru că stînd în punctul A și privind către punctul  $P_1$ , punctul  $P_1$  ne rămîne la dreapta acestei coarde și ne arată o săgeată  $h_1$ , apoi mutîndu-ne în  $P_1$  și observînd punctul  $P_3$ , punctul  $P_2$  rămîne la dreapta și dacă am lucrat bine, săgeata lui va fi egală cu  $h_1$  la fel pentru toate celelalte puncte.

Această metodă este frecvent utilizată la căile ferate pentru a observa starea curbilor.

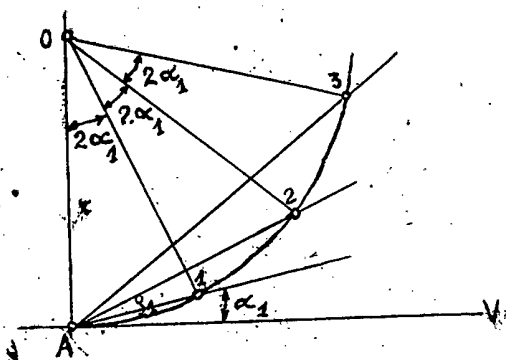
- c/ Metoda polară.

Fig. 368

Pentru un unghi oarecare  $\alpha$ , avem vectorul director :

$$\rho = 2 R \sin \alpha$$

Cu ajutorul acestor elemente  $\alpha$ ,  $\rho$  / cari sînt coordonatele polare /, poziția punctului 1 / este determinată.

Spre a afla poziția unui punct oarecare, cînd unghiurile la vîrf sînt egale, adică punctele subînțind coarde egale, elementele necesare sînt :

$$\alpha_n = \alpha, \text{ și } \rho_n = 2 R \sin \alpha_n = 2 R \sin n\alpha,$$

Cu ușurință în trasarea curbelor cu această metodă sînt întocmite tabele cari dau, pentru raze diferite, la diferite valori ale lui  $\alpha$  valoarea vectorului director.  $\rho$

Aplicarea practică, avînd elementele necesare  $\alpha$  și  $\rho$ , constă în a staționa cu aparatul în A și a da direcții sub unghiul  $\alpha$  față de tangenta AV și apoi pe aliniamentul respectiv să fie măsurată valoarea respectivă a lui.  $\rho$

- d/ Metoda poligonului înscris.

Toate cazurile, metodele, arătate pînă aci, pot fi practic întrebuintate la suprafață, însă în subteran aceste metode, datorită condițiilor speciale și cu deosebire lipsei de spațiu, nu pot fi aplicate.

Metoda poligonului înscris cercului este una din metodele întrebuintate în ridicările subterane, în mină sau la construcția tunelelor.

Avantajul pe care îl prezintă este că ne permite trasarea, din aproape în aproape, a curbei.

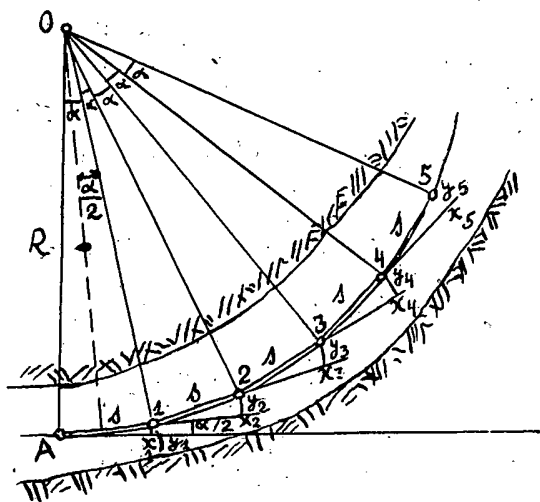


Fig. 369

Observăm că :

$$\frac{S}{2} = R \sin \frac{\alpha}{2}$$

sau :

$$S = 2 R \sin \frac{\alpha}{2}$$

Si cum unghiul între coarda A 1 și AV este  $\frac{\alpha}{2}$  urmează că :

$$(1) \begin{cases} x_1 = S \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \\ y_1 = S \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \end{cases} \quad /1/$$

Prelungind coarda A1 și luind coordonatele  $x_2$  și  $y_2$  cum se arată în figură, valorile acestora, ținând seama că avem coarda 1-2, formează cu coarda A-1 prelungită, unghiul  $\alpha$ , sînt :

$$(2) x_2 = S \cdot \cos \alpha; \quad y_2 = S \cdot \sin \alpha / 2 /$$

Alte calcule nu mai trebuie să facem, deoarece abscisele și ordonatele,

arătate în figură, sînt :

$$x_2 = x_3 = x_1 = \dots = x_n$$

$$y_2 = y_3 = y_4 = \dots = y_n$$

Recapitulînd, practic trasarea curbei prin metoda poligonului înscris, se face săpînd din aproape în aproape, înțelegînd că nu continuăm săpăturile decît concomitent cu fixarea punctelor curbei /1,2,3,...../ adică săpăm o porțiune de galerie și pentru un unghi oarecare  $\alpha$  prin coordonatele  $x$  și  $y$ , deduse din relațiile /1/ se fixează punctul 1, apoi săpăm pînă fixăm punctul 2, ș.a.m.d.

- Metoda poligonului circumscriș.

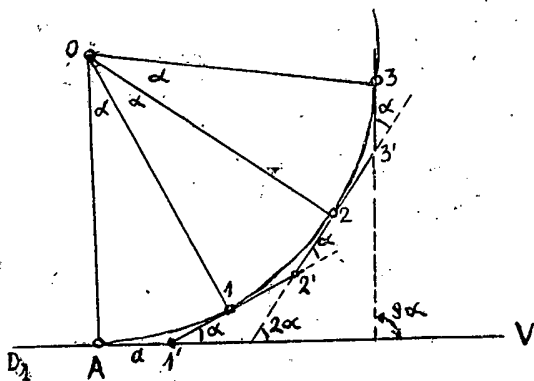


Fig. 370

Si această metodă este utilizată la trasarea curbelor în subterane.

Procedeeul constă în a păstra direcția galeriei, trecînd de punctul de început de curbă /A/. pînă în punctul 1, din acest punct și schimbă direcția galeriei cu unghiul  $\alpha$  în spre centrul curburii și cu mărirea  $A1 = a$  măsurată pe această direcție, determinăm punctul 1, care este un punct al curbei.

Se merge cu această direcție pînă în 2', avînd dreapta  $1'2' = 2a$ ; din 2' schimbăm iarăși direcția cu încă un  $\alpha$ , adică acum cu  $2\alpha$ , față de aliniamentul inițial și pe noul aliniament măsurînd o lungime egală cu  $a$  se află punctul 2 al curbei.

În 3' schimbăm iarăși direcția cu  $3\alpha$  față de direcția  $D_1$ , precedînd analog.

- f/ Metoda rapidă.

După ce am determinat punctele caracteristice ale curbei, unim A cu M și B cu M.

Săgeata  $h_1$  este :

$$h = \frac{S}{8R}$$

Admitem că  $\overline{AM} = \frac{S}{2}$ , în acest caz  $h_2 = \frac{\sqrt{S^2}}{8R}$

$$\text{Deci : } h_2 = \frac{h_1}{4}$$

Continuînd mai departe, am obține progresiv :

$$h_3 = \frac{h_2}{4} = \frac{h_1}{16}$$

$$h_4 = \frac{h_3}{4} = \frac{h_1}{64} = \frac{h_1}{32}, \text{ ș.a.m.d.}$$

În felul acesta obținem puncte de detaliu foarte apropiate între ele, bine-înțelese. Însă că metoda nu poate fi aplicată decît acolo unde precizia cerută nu este mare și cînd primează numai expeditivitatea lucrărilor.

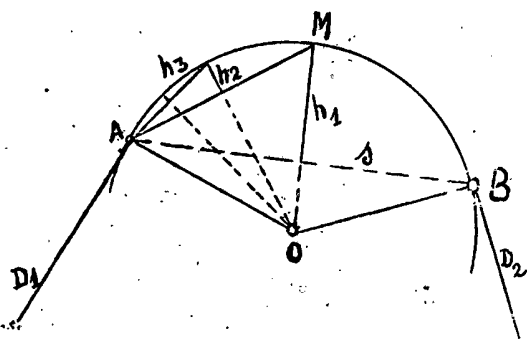


Fig. 371

- 4/ Trasarea curbilor cu condițiuni inițiale.

- a/ Un singur punct obligat.

Este cazul cînd curba trebuie să treacă printr-un anumit punct, caz foarte frecvent, mai ales la orașe sau sate, prin care trebuie să racordăm două străzi, două șosele și curba este nevoită să treacă printr'un punct P /Fig. 372/, întrucît nu avem altă posibilitate de racordare din cauza să presupunem a unei construcții.

In mod frecvent soluția problemei nu poate fi un singur arc de cerc, ci vom fi nevoiți să unim cele două aliniamente prin două arce de cerc tangente la punctele de început și sfârșit de curbă și având tangenta comună și punctul obligat P.

De altfel practic nu interesează faptul, dacă racordarea aliniamentelor se face printr-o singură curbă sau mai multe, cu singură condiție ca în cazul din urmă curbele să se racordeze între ele, cum am amintit și să aibe aspectul unei singure curbe.

Sînt mai multe soluții de rezolvare a problemei, una din ele ar fi de a duce prin punctul P o dreaptă MN /Fig. 372/ și apoi luînd pe aliniamentul  $D_1$  din punctul M o lungime egală cu MP se află punctul de început al curbei. /A/.

La fel pe aliniamentul  $D_2$  din N se măsoară o lungime egală cu PN și aflăm punctul B.

Ridicînd perpendiculare în A la aliniamentul  $D_1$  și în P la dreapta MN, la intersecția acestor două perpendiculare va fi centrul /O/ al curbei de rază  $R_1$  tangență în A și P la aliniamentele respective.

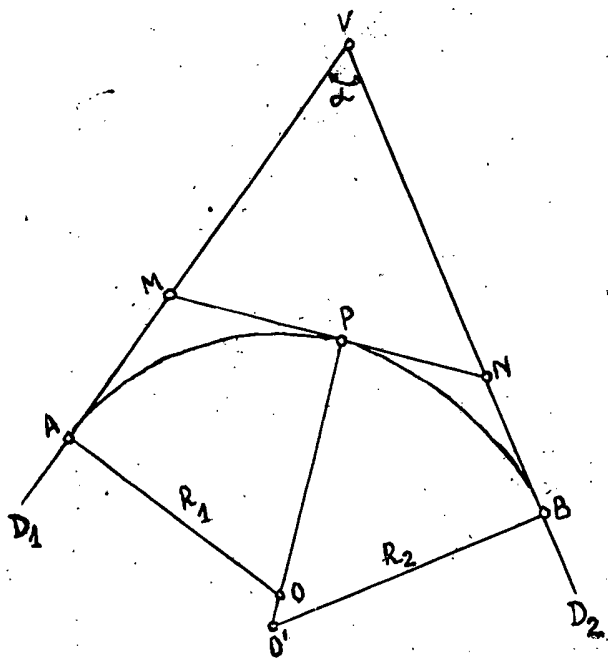


Fig. 372

Identic se determină și  $O'$ , respectiv raza  $R_2$  a curbei ce racordează aliniamentele MN și  $D_2$ , fiind tangență în P și B la cele două aliniamente.

Cele două arce de cerc de raze  $R_1$  și  $R_2$ , avînd în punctul P tangență comună, se racordează.

Metoda are avantajul că dreapta MN se poate alege arbitrar și că trasarea redusă acum la un caz simplu, cunoscut, se rezolvă ușor.

Este dela sine înțeles că pe MN o alegem după cum cer împrejurările locale.

In cele de mai sus a fost arătată rezolvarea practică a problemei, să vedem acum rezolvarea ei analitică, știind că cele două aliniamente, reprezen-



tînd de exemplu axele a două străzi, făcînd între ele unghiul  $\alpha$ , trebuiesc racordate printr-o curbă obligată să treacă și prin punctul dat P, curba de racordare trebuie să fie tangentă la cele două aliniamente  $VD_1$  și  $VD_2$ .

În general s-ar putea alege orice conică drept curbă de racordare, dar în cazul de față, fiind corba numai de trei condiții, trei relații de condiții, pe care trebuie să le îndeplinească curba, se va alege desigur un arc de cerc drept curbă de racordare.

În cazul cînd tangenta între curbă și aliniamentele  $VD_1$  și  $VD_2$  ar fi fost condiționate să aibă loc în punctele A și B, am fi avut două relații de condiții

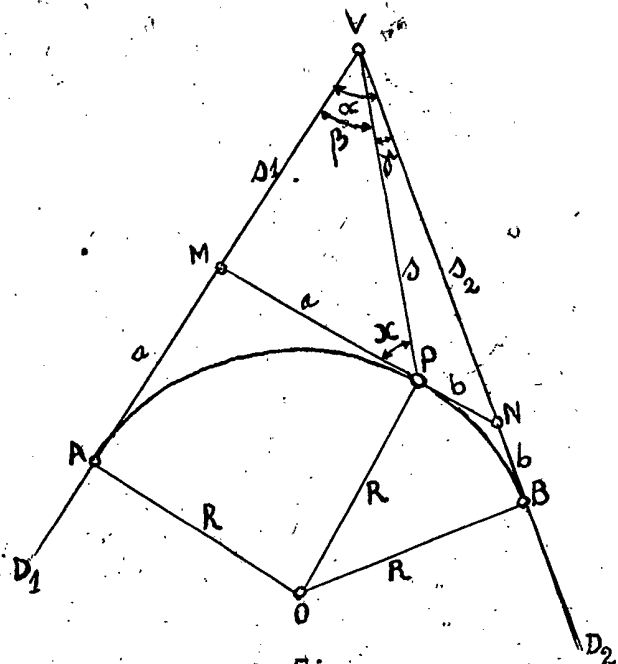


Fig. 373.

în plus, deci în total cinci relații și atunci curba de racordare ar fi fost o conică perfect determinată.

Rezolvarea geodezică a problemei pentru a putea trasa curba la fața locului, este următoarea.

Considerînd curba trasată, s-a dus prin punctul P o dreaptă MN tangentă la curbă.

Punctul P este definit geodezic prin unghiurile  $\beta$  și prin distanța:  $S = \overline{VP}$ .

Făcînd următoarele notațiuni :

$\overline{AV} = t_1, \overline{BV} = t_2, \overline{MV} = S_1, \overline{NV} = S_2, \overline{AM} = a, \overline{BN} = b, \overline{VP} = S,$   
 $x =$  unghiul dintre dreptele VP și NM.

În cazul cercului trebuie să existe relația :

$$t_1 = t_2, \quad t_1 = a + S, \quad t_2 = b + S_2$$

Scriind relațiile de sinusuri în triunghiurile MVP și VPN, rezultă :

$$(1) \quad a = \frac{S \cdot \sin \beta}{\sin / \beta + x /}; \quad b = \frac{S \cdot \sin \beta}{\sin / x - \beta /}; \quad S_1 = \frac{S \cdot \sin x}{\sin / \beta + x /};$$

$$S_2 = \frac{S \cdot \sin x}{\sin / x - \beta /}$$

- 529 -

Dar :  $a + S_1 = b + S_2$ 

Deci :

$$\frac{S \cdot \sin \beta}{\sin / \beta + x /} + \frac{S \cdot \sin x}{\sin / \beta + x /} = \frac{S \cdot \sin \gamma}{\sin / x - \gamma /} + \frac{S \cdot \sin x}{\sin / x - \gamma /}$$

$$\therefore \frac{S / \sin \beta + \sin x /}{\sin / \beta + x /} = \frac{S / \sin \gamma + \sin x /}{\sin / x - \gamma /}$$

$$\therefore \frac{\sin \beta + \sin x}{\sin / \beta + x /} = \frac{\sin \gamma + \sin x}{\sin / x - \gamma /}$$

Ecuatia care se reduce la :

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \cdot \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2}$$

Deci  $x$  fiind determinat, problema este perfect rezolvată, în sensul că se pot calcula toate elementele necesare trasării curbei la fața locului.

Ca o mică variantă să impunem condiția ca segmentele  $MP$  și  $NP$  să fie egale între ele, adică :  
 $a = b$ .

Adică, referindu-ne la relațiile /1/ :

$$\frac{S \cdot \sin \beta}{\sin / \beta + x /} = \frac{S \cdot \sin \gamma}{\sin / x - \gamma /} \quad \therefore \quad \frac{\sin \beta}{\sin / \beta + x /} = \frac{\sin \gamma}{\sin / x - \gamma /}$$

De unde :

$$\operatorname{tg} x = \frac{2 \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\gamma}{2}}$$

Mai departe rezultă că :

$$S_1 = \frac{a \cdot \sin x}{\sin \beta} ; \quad S_2 = \frac{a \sin x}{\sin \gamma} ; \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$$

și deci  $t_1$  și  $t_2$ , elementele de trasare sînt cunoscute

$$t_1 = a + a ; \quad t_2 = a + S_2.$$

În cazul studiat analitic, am făcut racordarea printr-un arc de cerc, acum ne propunem să rezolvăm analitic cazul tratat practic, adică să facem racordarea celor două aliniamente printr-un sistem de curbe racordate, tangente în punctele  $A$  și  $B$  la aliniamentele respective, ceea ce ar reveni la a determina pe o dreaptă  $MN$  paralelă la  $AB$  poziția punctului "P", care imparte această dreaptă în segmente  $a$  și  $b$ .

Problema de față s-ar putea reduce la cazul precedent pentru o anumită valoare a unghiului  $x$  care trebuie determinat.

Vom stabili însă alte formule mai simple și de importanță practică mai mare.

Păstrînd aceleași notațiuni, adică :



făcînd înlocuirile :  $a = t_1 \frac{D}{t_1 + t_2}$  ;  $b = t_2 \frac{D}{t_1 + t_2}$

Dacă ținem seama că :

$$t_1 = S_1 + a ; \quad t_2 = S_2 + b \text{ și } D = a + b, \text{ avem :}$$

$$a = \frac{a + S_2}{D + S_1 + S_2} D ; \quad b = \frac{b + S_1}{D + S_1 + S_2} D$$

Sau notînd :  $D + S_1 + S_2 = P$  /perimetrul triunghiular MVN/

$$a = \frac{a + S_2}{P} D ; \quad a \cdot \frac{P - D}{P} = S_1 \frac{D}{P} ; \quad a = \frac{S_1 D}{P - D} = \frac{S_1 D}{S_1 + S_2}$$

$$b = \frac{b + S_1}{P} D ; \quad b \cdot \frac{P - D}{P} = S_2 \frac{D}{P} ; \quad b = \frac{S_2 D}{P - D} = \frac{S_2 D}{S_1 + S_2}$$

$$z = \frac{D / (t_1 + t_2)}{t_1 + t_2 - D} = \frac{D / (D + S_1 + S_2)}{S_1 + S_2} = \frac{P \cdot D}{S_1 + S_2}$$

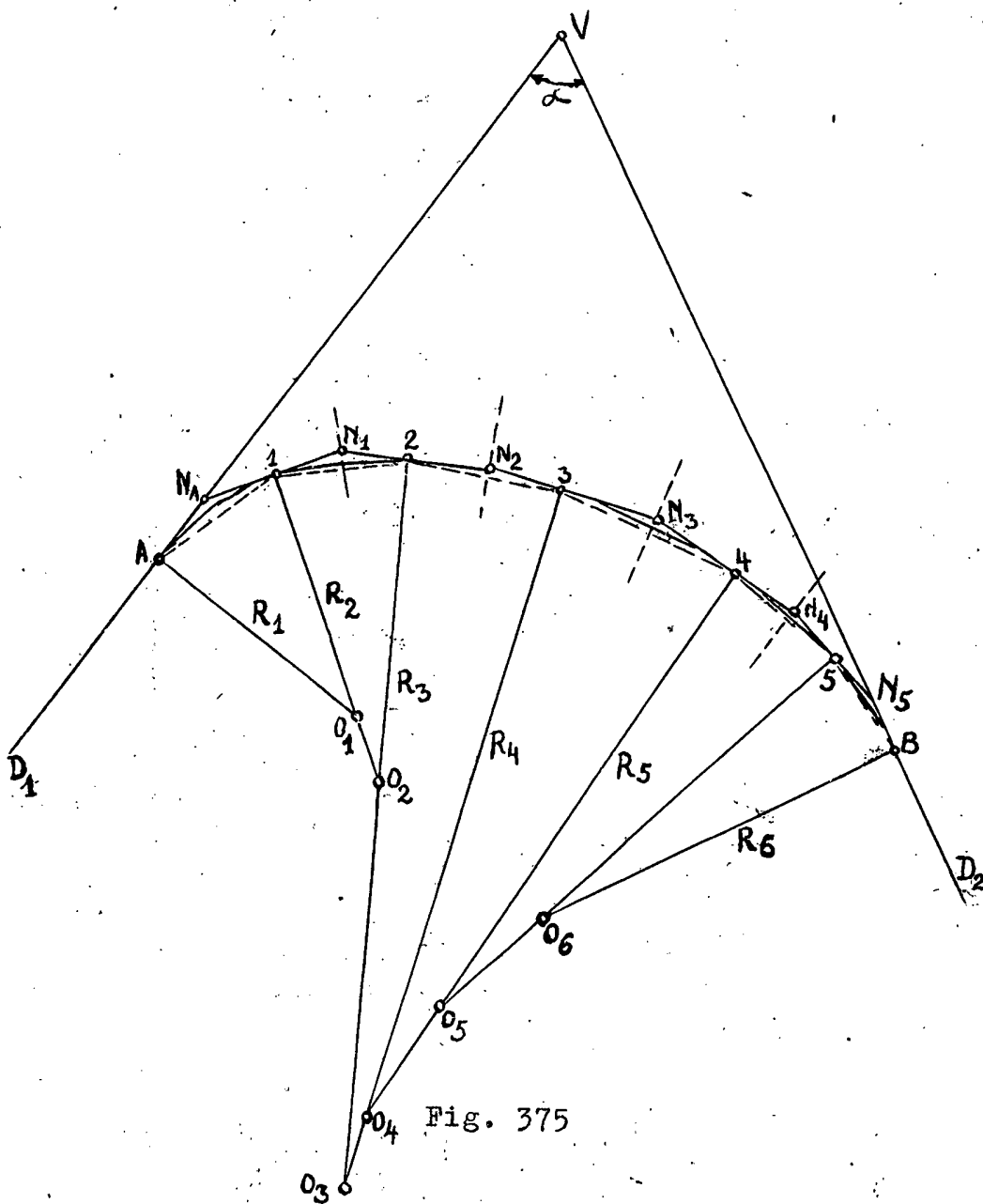


Fig. 375

- 532 -

- b/ Trasarea curbelor cu mai multe puncte obligatorii

Este problema cu un aspect mai general.

Referindu-ne la Fig. 375, aliniamentele  $D_1, V$  și  $D_2V$ , cu unghiul  $\alpha$  între ele, trebuiesc racordate printr-o curbă ce trebuie să treacă prin punctele 1, 2, 3, 4 și 5.

Teoretic curba de racordare fiind o funcție de formă  $f(x,y) = 0$ , ce trebuie să satisfacă 9 condițiuni pentru exemplul nostru și anume, cinci condițiuni datorite faptului că trece prin punctele 1, 2, 3, 4 și 5 și încă 4 condițiuni fiind tangentă la aliniamentele  $D_1, V, D_2, V$  respectiv în punctele A și B.

Sub o formă explicată, funcția este de forma :

$$y = A_0x^8 + A_1x^7 + A_2x^6 + \dots + A_7x + A_8$$

Acest polinom are nouă constante arbitrare, cari pot fi determinate prin cele nouă condițiuni impuse.

Metoda cea mai simplă pentru rezolvarea acestei probleme de interpolație este cea a coeficienților nedeterminați, deși poate fi aplicată și metoda Lagrange.

Teoretic problema, bine cunoscută pare foarte simplă, din punct de vedere practic, a rezolva un sistem de nouă ecuații cu nouă necunoscute, nu este așa de recomandat, așa că se dă următoarea soluție mult mai simplă.

Referindu-ne la Fig. 375 unim 1, 2, 3, 4, 5 printr-o linie poligonală.

Pe mijloacele distanțelor :  $\overline{12}, \overline{23}, \overline{34}, \overline{45}$  se duc perpendiculare.

Pe perpendiculara dusă pe  $\overline{12}$  s-a ales un punct convenabil  $N_1$ , unind  $N_1$  cu 1 pe prelungirea ei, obținem punctul  $N_A$ , iar din prelungirea lui  $N_1$  2 determinăm pe  $N_2$ .

Analog se unește  $N_2$  cu 3 și obținem  $N_3$  ș.a.m.d.

Acum apare evident cum se face trasarea : luind  $\overline{N_A A} = \overline{N_A 1}$ , se determină punctul A, de unde începe curba și cu  $\overline{N_B B} = \overline{N_B 5}$ , se determină sfârșitul curbei, adică punctul B.

Între A și 1 se duce un arc de cerc de rază  $R_1$ , aflată prin intersecția normalelor, în

în puncte A și 1 la aliniamentele  $D_1$  și  $N_{A1}$ .

La fel între 1 și 2 se duce un arc de cerc de rază  $R_2$  tangent la 1 și 2.

Cercurile fiind tangente două câte două, respectiv în punctul 1, 2, 3, 4, 5 la aceleași drepte, înseamnă că se racordează.

În cazul de față curba de racordare este formată din 6 arce de cerc, de raze diferite, racordate între ele.

Din elementele  $\overline{N_A A} = \overline{N_{A1}} = a$  / cunoscut ca valoare, adică măsurat/ și unghiul din  $N_A$ , la fel măsurat, se poate determina  $R_1$ .

În mod similar din  $\overline{1 N_1} = \overline{N_1 2} = a_2$  unghiul din  $N_1$  se determină raza  $R_2$ .

Deci putem calcula și razele celor 6 arce de cerc.

#### Observațiune.

Dacă s-ar prezenta cazul din Fig. 376, problema are aceeași rezolvare, deși ar avea o curbă la dreapta și una la stînga.

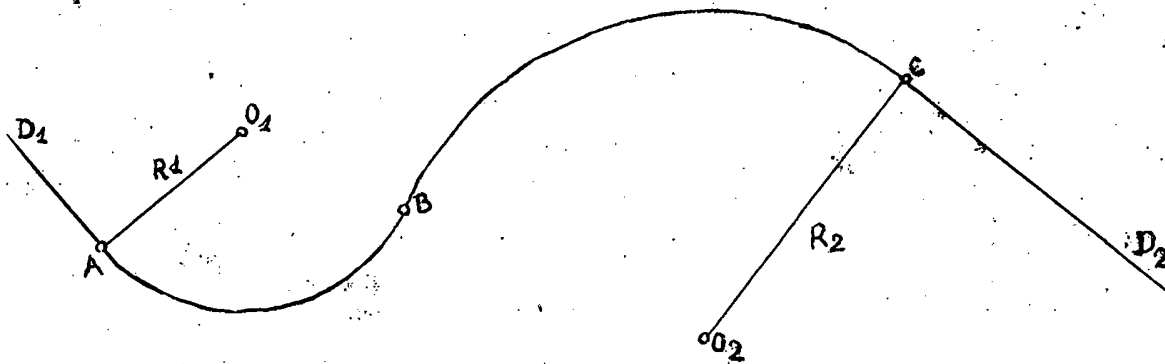


Fig. 376

#### - 6/ Trasarea curbelor de cale ferată.

La căile ferate, avînd în vedere vitezele mari cu cari circulă trenurile, trasarea curbelor cere o atenție deosebită.

- 534 -

Este bine știut, că orice vehicol cînd se antrenează pe o curbă este supus la o forță centrifugală, proporțională cu patratul vitezei.

Forța centrifugală este dată de relația  $F = M \cdot a$ , unde  $M$  reprezintă masa, iar  $a$  accelerația.

Sau se mai poate scrie :

$$F = M \cdot R \cdot \omega^2 = \frac{M \cdot V^2}{R} = \frac{G \cdot V^2}{g \cdot R}, \text{ unde :}$$

$R$  este raza curbei,  $\omega$  = viteza unghiulară,  $V$  = viteza vehicolului,

$g$  = accelerația universală și  $G$  = greutatea vehicolului.

Stim însă că forței centrifugale i se opune greutatea vehicolului, care împiedecă răsturnarea lui.

Unghiul între forța centrifugă  $F$  și greutatea  $G$  este de  $90^\circ$ , iar rezultanta lor face cu direcția verticalei locului un unghi  $\alpha$  a căruia valoare poate fi dedusă din relația :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F}{G} = \frac{M \cdot V^2}{G \cdot R} = \frac{V^2}{g \cdot R}$$

Așadar și unghiul  $\alpha$  dintre rezultantă și verticală, este funcție de pătratul vitezei.

Trebuie remarcat că, atît timp cît rezultanta cade în interiorul perimetrului de susținere al vehicolului, acesta nu se răstoarnă sub influența forței centrifugale.

Răsturnarea vehicolului se întîmplă în momentul în care viteza a depășit limita pentru care rezultanta cade în interiorul perimetrului de susținere, cu alte cuvinte în momentul cînd rezultanta iese din perimetrul amintit.

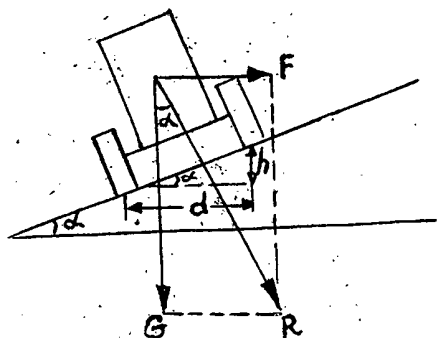


Fig. 377

Pentru micșorarea forței centrifuge, sau mai bine zis pentru motivul arătat, se dă firului, și-nei, exterioare a liniei în curbă o înălțime mai mare  $h$ , denumită supraînălțarea curbei.

Supraînălțarea este în funcție de viteza maximă de circulație a treburilor, pe linia respectivă și de raza curbei, avînd valoarea :

$$h = \frac{d}{g} \frac{V^2}{R}$$

Unde  $d$  este distanța între cele două fire ale căii, denumită ecartament, care la C.F.R., normal, este de 1,435 m.

Departamentul C.F.R., în Regulamentul de exploatare tehnică, ediția 1948, dă supraînălțările, pentru diferite raze și viteze, rezultate în urma observațiilor practice.

Aceste supraînălțări sînt date în tabloul ce urmează.

Am admis supraînălțarea, însă lucru cert este că, imediat ce un vehicol s-a angajat în curbă, din cauză că își menține viteza de regim, el intră imediat sub acțiunea forței centrifugale, prin urmare supraînălțarea trebuie să existe chiar la punctul în care începe curba.

Ar urma să existe un prag de șină, ceea ce este inadmisibil.

De aci necesitatea unei curbe de racordare între porțiunea dreaptă a liniei și curba propriu zisă.

Curba propriu zisă este un arc de cerc de rază  $R$ .

Curba de racordare trebuie la început să fie un aliniament drept, adică să aibă raza  $\rho = \infty$ , care se micșorează treptat-treptat, ajungînd ca în punctul unde începe curba propriu zisă, să aibe raza egală cu cea a curbei propriu zise, adică :  $\rho = R$ .

În acest timp și supraînălțarea firului exterior variază de la zero pînă la valoarea arătată  $h$ .

Prin urmare supraînălțarea se menține, cu valoarea sa întregă, pe toată lungimea curbei propriu zise, cea în arc de cerc și se pierde, în lungul curbelor de racordare, pînă ajunge la zero.

Să presupunem că lungimea pe care trebuie să întindem curba de racordare este  $l$ , a căruia valoare C.F.R. o dă în diferite instrucțiuni în funcție de raza curbei propriu zisă.

Si dacă ne referim la Fig. 378, în care se arată că din punctul A, unde începe curba de racordare, pînă în punctul B, unde începe curba propriu zisă, supraînălțarea crește, ca valoare, de la zero la  $h$ , o supraînălțare intermediară  $Z$  este proporțională cu o constantă  $K$  și invers proporțională cu raza variabilă a curbei de racordare, adică :

$$Z = \frac{K}{\rho}$$



Suprainălțările în m/m la liniile în curba

Raza cur- bei	V I T E Z A in km/oră																					
	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120
100	20	35																				
125	20	35	45	60																		
150	15	25	40	55	70	85																
180	15	25	35	45	60	70	90															
220		20	30	40	55	65	80	100														
225		20	25	35	55	60	70	90	105													
250		15	25	35	45	50	65	85	95	110												
275		15	20	30	40	45	60	70	85	100												
300		15	20	25	35	45	55	65	75	90	110											
350			20	25	30	40	45	55	65	75	95	110										
400			15	20	25	35	40	50	60	70	85	100	110									
450				20	25	30	35	40	50	60	70	85	100	110								
500				20	25	30	35	40	45	55	65	80	90	100	110							
550				15	20	25	30	35	40	50	60	70	80	90	100	115						
600				15	20	25	30	30	35	40	55	65	70	80	90	100	115					
700					15	20	25	30	35	40	50	55	65	70	80	90	100	115				
800					15	20	20	20	25	35	40	50	55	65	70	80	90	95	110	115		
900						15	20	20	25	30	40	45	50	60	65	70	80	85	95	100	115	
1000						15	15	20	20	25	35	40	45	55	60	65	70	75	80	95	100	110
1100						15	15	15	20	25	35	35	40	50	55	60	65	70	75	85	90	95
1200							15	15	20	25	30	35	35	45	50	55	60	65	70	80	80	85
1300								15	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	75
1400									15	20	25	30	30	40	40	45	50	55	60	65	70	70
1500										15	20	20	25	25	30	35	40	45	50	55	60	65
1600											15	15	20	20	25	25	30	35	40	45	50	60
1700												15	15	20	20	25	25	30	30	35	40	55
2000													15	15	20	20	25	25	30	30	35	40
2500														15	15	20	20	25	25	30	30	35
3000															15	15	20	20	25	25	30	35
4000																15	15	20	20	25	25	30
5000																	15	15	15	20	20	20

Toleranțe admisibile la denivelări până la maximum 5 mm.

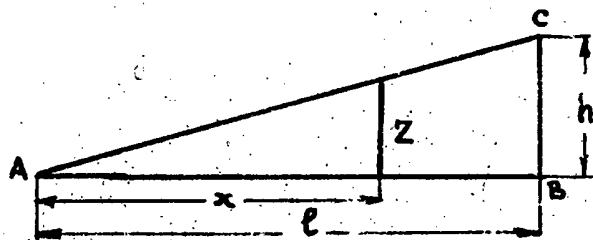


Fig. 378.

Am văzut însă că:

$$h = \frac{d v^2}{g} \cdot \frac{1}{R}, \text{ unde } v \text{ este}$$

viteza maximă de circulație a trenurilor, așa că se poate scrie:

$$\frac{d v^2}{g} = K$$

(o constantă), ceea ce revine ca:

$$h = \frac{K}{R}$$

Deci:  $\frac{Z}{h} = \frac{R}{\rho}$ , sau  $\rho = \frac{R h}{Z}$

iar raza de curbura:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{Z}{R h}$$

Din triunghiul ABC, Fig. 378, avem:

$$\frac{h}{l} = \frac{Z}{x}, \text{ adică } Z = \frac{h x}{l}$$

Introducând valoarea lui Z în relația care ne dă curbura, se obține:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{h \cdot x}{R h l} = \frac{x}{R l}$$

Dar curbura știe că este o diferențială a două a funcției în raport cu x, adică:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{d x^2}$$

Egalind:  $\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{x}{R l}$  și integrând, primii:

$$y = \frac{x^3}{6 R l}, \text{ ceea ce nu reprezintă alt}$$

ceva decât ecuația parabolei cubice.

Din cele amintite rezultă că racordarea a două aliniamente la căile ferate nu se face numai în arc de cerc, ci în contact cu primul aliniament avem o curbă de racordare (o parabolă), pe o lungime l, apoi curba propriu zisă în arc de cerc și în fine iarăși o parabolă, curba de racordare până la contactul cu cel de al doilea aliniament.

Urmează să se arate cum se face, propriu zis, practic trasarea curbei de cale ferată, ținând seamă de cele stabilite mai sus.

Referindu-ne la Fig. 379, considerând curba trasată, am avea în A începutul curbei de racordare prescurtat (ICR), în M mijlocul curbei de racordare (MCR) în C sfârșitul curbei de racordare și începutul curbei propriu zise (IC), în M mijlocul curbei propriu zise (MC).

D este sfârșitul curbei propriu zise și începutul curbei de racordare (SC), B mijlocul curbei de racordare (MCR) și în fine B sfârșitul curbei de racordare (SCR)

Notațiile arătate prescurtat sînt cele uzitate la C.F.R.

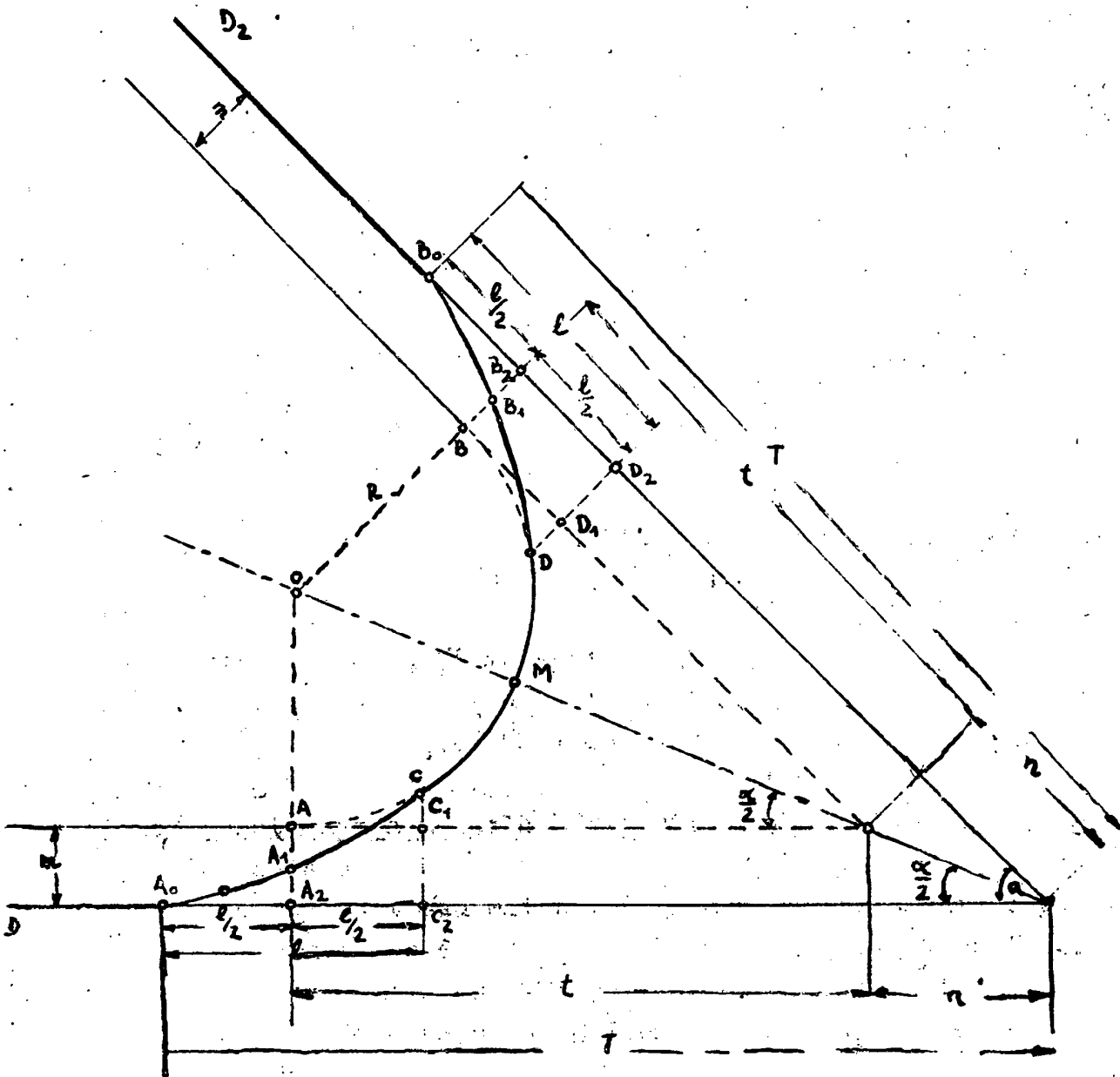


Fig. 379.

Observăm că pe o lungime  $l$  avem curbă de racordare parabolică, de o parte și de alta a curbei

Lungimea  $l$ , am arătat, se găsește în tabele, după prescripțiuni, dată fiind în funcție de raza ( $R$ ) a curbei.

Pentru trasarea curbei se va calcula în prealabil, valoarea lui " $m$ ", element de bază în trasarea acestei curbe, spre a putea avea apoi calcula, cu unghiul  $\alpha$  măsurat, după metodele arătate atit pentru cazul cind  $V$  este staționabil, cit și pentru cazul contrar.

$$\text{Dar } m = \overline{CC_2} = \overline{CC_1}$$

Inșă din ecuația parabolei, pe care o avem pe lungimea  $A, A, C$ , precum și pe lungimea  $B, B, D$ , rezultă, pentru  $x = 1$ :

$$\overline{CC_2} = y = \frac{x^3}{6lR} = \frac{l^3}{6lR} = \frac{l^2}{6R}$$

Iar  $\overline{CC_1}$ , din ecuația cercului, fiind ordonata față de axa  $x$  ce trece prin  $A$ , pentru valoarea lui  $x$ , în acest caz, egală cu  $l/2$

$$\overline{CC_1} = \frac{x^2}{2R} = \frac{(l/2)^2}{2R} = \frac{l^2}{8R}$$

$$\text{Așa că: } (1) \quad m = \overline{CC_2} - \overline{CC_1} = \frac{l^2}{6R} - \frac{l^2}{8R} = \frac{l^2}{24R},$$

unde atit " $l$ " cit și " $R$ " sînt elemente cunoscute.

Alte elemente cari ne interesează la trasarea curbei este de a determina pe  $A$  și  $B$ , apoi pe  $A_0$  și  $B_0$  sau mai bine zis cele arătate:

$$t = R \cotg \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{Iar: } T = \frac{l}{2} + t + n = \frac{l}{2} + R \cotg \frac{\alpha}{2} + m \cotg \frac{\alpha}{2}$$

$$n = m \cotg \frac{\alpha}{2}$$

$$T = \frac{l}{2} + (R + m) \cotg \frac{\alpha}{2}$$

Avînd determinată poziția lui  $A$  și  $B$ , s-a arătat cum se determină mijlocul curbei și cum pot fi date punctele intermediare pentru porțiunea de curbă, propriu zisă, în arc de cerc.

În mod similar puncte intermediare, folosind ecuația parabolei, pot fi stabilite și pentru curba de racordare.

Ca un exemplu să vedem cum este determinat  $A_1$  și în mod analog  $B_1$

- 540 -

$$\overline{A_2 A_1} = \frac{x^3}{6 R l}, \quad x = \frac{l}{2}$$

$$(2) \quad \overline{A_2 A_1} = \frac{(\frac{l}{2})^3}{6 l R} = \frac{l^3}{48 l R} = \frac{l^2}{48 R}$$

Din comparația relației (2) cu (1), rezultă că punctul A, și B, se găsesc la mijlocul distanței m.

Rămâne să demonstrăm că în punctul C, analog în D, unde se racordează curba în arc de cerc cu parabola cubică, avem tangenta comună, adică derivata celor două funcțiuni (cerc și parabolă) este aceeași în punct C și D.

Pentru parabola cubică:

$$y = \frac{x^3}{6 l R}, \quad y' = \frac{3 x^2}{6 l R} = \frac{x^2}{2 l R}$$

pentru  $x = \frac{l}{2}$  avem:

$$(3) \quad y' = \frac{\frac{l^2}{4}}{2 l R} = \frac{l}{2 R}$$

Pentru cerc, înlocuit cum s-a arătat prin parabolă:

$$y = \frac{x^2}{2 R}, \quad y' = \frac{2 x}{2 R} = \frac{x}{R}$$

pentru  $x = \frac{l}{2}$  avem:

$$(4) \quad y' = \frac{l}{2 R}$$

Comparând rezultatele, relația (3) și (4), vedem că derivatele sînt egale, deci în punctele C și D, avem tangenta comună.

#### Observație:

La o cale ferată în curbă cu rază mică, roțile dela vagoane și mai ales cele dela locomotivă, nu se înscriu, adică nu pot încăpea între cele două fire ale căii dacă nu este lăsată, între aceste fire, o lărgime mai mare ca cea normală, ca ecartamentul.

Această depărtare, ce sîntem nevoiți a o da între cele două fire, formează ceea ce numește supralărgirea căii.

Ea este cu atît mai mare, cu cît raza curbei este mai mică și nu se dă decît la curbele de rază sub 500 m.

STAT

**Page Denied**

- 541 -

Supralărgirea se dă prin deplasarea firului exterior al liniei și valoarea ei, pe toată lungimea curbei în arc de cerc, este dată în tabloul de mai jos, aflat în Regulamentul de exploatare tehnică C.F.R.

Raza curbei în m	Supraînălțarea în mm	Lărgimea căii în m	Observații
501 și mai mult	0	1,435	Toleranțele nu pot depăși valoarea de + 5 mm și - 3 mm.
500 ÷ 401	5	1,440	
400 ÷ 301	10	1,445	
300 ÷ 251	15	1,450	
250 ÷ 201	20	1,455	
200 ÷ 150	25	1,460	