9/5

INFORMATION REPORT INFORMATION REPORT

CENTRAL INTELLIGENCE AGENCY

Leg/Doc

S-E-C-R-E-T
NO FOREIGN DISSEM

#32

50X1-HUM

COUNTRY USSR

REPORT

SUBJECT Soviet Publications on Mechanics

DATE DISTR. 31 August 1962

NO. PAGES 1

REFERENCES RD

DATE OF INFO.

PLACE & DATE ACQ.

50X1-HUM

50X1-HUM

THIS IS UNEVALUATED INFORMATION. SOURCE GRADINGS ARE DEFINITIVE. APPRAISAL OF CONTENT IS TENTATIVE.

Russian-language publications

1. Mekhanika (Mechanics), No 92, a collection of articles (119 pages) from the Moscow Order of Lenin/Order of Labor of the Red Banner Higher Technical School i/n Bauman, published by the State Publishing House of the Defense Industry, Moscow, 1959. 50X1-HUM

2. Programma po teoreticheskoy mekhaniki (Program for Theoretical Mechanics), 14 pages, published by the State Publishing House for Higher Schools, Moscow, 1960. This brochure is a publication of the USSR Ministry of Higher and Middle Specialized Education and concerns the standards for the study of theoretical mechanics at higher schools in the USSR. When removed from the covering report, it is UNCLASSIFIED.

50X1-HUM

S-E-C-R-E-T
NO FOREIGN DISSEM

GROUP 1
EXCLUDED FROM AUTOMATIC DOWNGRADING AND DECLASSIFICATION

STATE	X	ARMY	X	NAVY	X	AIR	X	NSA	X	OCR	X	DIA	X	AID	X	NIC	X

(Note: Washington distribution indicated by "X"; Field distribution by "#".)

INFORMATION REPORT INFORMATION REPORT

МОСКОВСКОЕ ОРДЕНА ЛЕНИНА И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО
ЗНАМЕНИ ВЫСШЕЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ УЧИЛИЩЕ им. БАУМАНА

МЕХАНИКА

СБОРНИК СТАТЕЙ

Под редакцией
докт. физ.-мат. наук проф. В. В. ДОБРОНРАВОВА

92

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ОБОРОННОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ
Москва 1959

В статьях сборника приводятся результаты исследований, относящихся к комплексу весьма часто встречающихся в различных областях современного приборостроения и специального машиностроения и тесно связанных между собой вопросов: автоматического регулирования, колебаний, гироскопии, устойчивости движения и устойчивости процессов.

Книга рассчитана на научных работников, аспирантов, инженеров и студентов старших курсов приборостроительных и машиностроительных вузов.

Редактор инж. Е. В. Латынин

Зав. редакцией инж. *А. С. Займовская*

ПРЕДИСЛОВИЕ

В статьях настоящего сборника отражены результаты исследовательских работ кафедры теоретической механики, проведенных в некоторых областях современного приборостроения и машиностроения, в которых в первую очередь необходимо применять теоретические и математические методы. Сюда относятся: общая теория автоматического регулирования, теоретическая и прикладная гироскопия, теория колебаний, специальные виды механизмов.

В статье Е. К. Шигина разрабатывается новый метод регулирования, состоящий в использовании нелинейных систем специального вида, с особыми характеристиками, названными автором дельта-характеристиками. Метод автора позволяет значительно улучшить переходной процесс, снизив величину перерегулирования и время переходного процесса. Идеи автора могут быть полезны в особенности для обеспечения желаемого режима в быстропротекающих процессах и явлениях.

В статье В. В. Астафьева дается уточнение классических результатов, полученных одним из крупнейших советских гироскопистов Б. В. Булгаковым и относящихся к изучению влияния ускорений летательного аппарата на движение гиромаятника как основного элемента некоторого гироприбора. При составлении уравнений движения гиромаятника учитываются нелинейные члены, ранее опускавшиеся, и выделяется более точная картина работы гиромаятника. Полученные результаты, безусловно, будут полезны при создании гироприборов, требования к точности работы которых все время повышаются.

В работе Г. И. Замуруева исследуется весьма актуальный для современной ракетной техники вопрос о возникновении вредных колебаний давлений в камере ЖРД в процессе горения. Автор исследует весь гидравлический тракт, подводящий топливо в камеру сгорания, и находит параметры, гарантирующие устойчивость процесса.

В статье Н. К. Лобачевой разбираются некоторые особенности современных методов изучения нелинейных колебаний, наблюдающихся в различных областях приборостроения.

В работе К. А. Голенко рассматриваются некоторые вопросы, имеющие значение для баллистики тел с жидким заполнением.

Статьи М. П. Тарновской содержат оригинальные результаты, относящиеся к задаче изыскания оптимальных (в смысле малогабари... некоторых других требований) кулачковых механизмов, применяющихся в некоторых специальных устройствах.

Работа М. З. Литвина-Седого, старшего научного сотрудника кафедры прикладной механики Московского Государственного университета, помещена в порядке содружества кафедр; в ней приводятся результаты, весьма полезные для более рационального расчета многорежимных систем.

В статье Ю. Е. Захарова рассматриваются процессы, происходящие в полостях золотников гидросервомеханизмов. Явления, связанные с протеканием вязкой жидкости в полостях сложной геометрической конфигурации с особыми граничными условиями, имеют большое значение при исследовании всего гидросервомеханизма, а следовательно, при составлении уравнений движения всей данной системы автоматического управления.

Кроме работ, имеющих исследовательский характер, в сборнике помещена научно-методическая статья П. В. Орехова о выводе формулы для гироскопического момента с помощью теоремы Кориолиса. Гироскопический эффект встречается в столь многих областях приборо- и машиностроения, что для работников-практиков наглядное объяснение этого явления будет, безусловно, полезно.

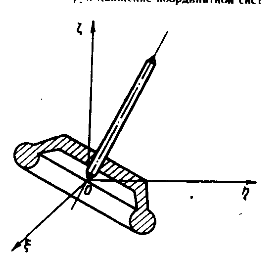
В. В. Добронравов

Ассистент В. В. АСТАФЬЕВ

К ВОПРОСУ ОБ УТОЧНЕНИИ ВЛИЯНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ ОПОРЫ ГИРОСКОПА НА ХАРАКТЕР ЕГО ДВИЖЕНИЯ

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим движение гироскопа по отношению к координатной системе $O\xi\eta\zeta$ (фиг. 1), которая имеет начало в точке опоры гироскопа и оси которой ориентируются определенным образом по отношению к Земле. Анализируя движение координатной системы $O\xi\eta\zeta$,



Фиг. 1.

будем учитывать движение машины (судна, самолета), на которой расположен гироскоп, вдоль земной поверхности и вращение Земли вокруг земной оси. Влиянием поступательного движения земной оси, получающегося в результате вращения Земли вокруг Солнца, пренебрегаем, ибо угловая скорость и ускорение, связанные с этим движением, незначительны.

Система отсчета $O\xi\eta\zeta$ ориентируется таким образом, что при движении начала координат O по земной поверхности ось ζ направлена по вертикали вверх, оси ξ и η ориентированы «географически» по направлениям ост и норд (фиг. 2). Обозначим через u_1, u_2, u_3 проекции мгновенной угловой скорости трехгранника $O\xi\eta\zeta$ на оси ξ, η, ζ, через U — угловую скорость Земли; R—радиус Земли; v_E и v_N — восточную и северную составляющие скорости машины относительно Земли, λ и φ —долготу и широту.

В соответствии с принятыми обозначениями можно записать

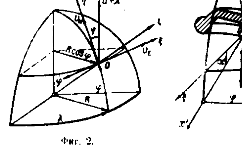
$$\left.\begin{aligned} u_1 &= -\dot{\varphi} = -\frac{v_N}{R};\\ u_2 &= (U+\dot{\lambda})\cos\varphi = \left(U+\frac{v_E}{R\cos\varphi}\right)\cos\varphi = U\cos\varphi + \frac{v_E}{R} = \frac{V_E}{R};\\ u_3 &= (U+\dot{\lambda})\sin\varphi = U\sin\varphi + \frac{v_E}{R}\operatorname{tg}\varphi = u_2\operatorname{tg}\varphi, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где

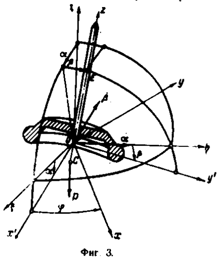
$$V_E = RU\cos\varphi + v_E \quad \text{и} \quad V_N = v_N \qquad (2)$$

проекции скорости абсолютного движения машины.

Для определения положения гироскопа в системе отсчета $O\xi\eta\zeta$ (фиг. 3) можно жестко связать с телом гироскопа координатную систему $Oxyz$, в которой ось z направляется по оси фигуры (оси собственного вращения ротора гироскопа). Положение координатной системы $Oxyz$ может быть определено общепринятым способом посредством трех углов Эйлера. Важно знать положение оси фигуры в системе $O\xi\eta\zeta$.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Для определения этого положения целесообразно ввести новую систему координат $Ox'y'z$, в которой ось z располагается по оси фигуры; ось x' есть линия сечения плоскостей $\xi\zeta$ и xy.

Оси x', y' называются *осями Резаля*; ось x' называют *линией узлов*, ось y'—*поперечной осью*. Положение оси z и системы отсчета $Ox'y'z$ в системе отсчета $O\xi\eta\zeta$ удобно определять углами α и β: α—долгота; β—широта вершины гироскопа E на сфере, описанной из начала координат радиусом, равным единице длины (вершиной E «апексом» гироскопа называют точку, лежащую на положительном направлении оси фигуры z, на расстоянии одной линейной единицы от опоры). Угол α отсчитывается в плоскости $\xi\zeta$ против движения часовой стрелки вокруг оси η от оси ζ до проекции оси z на плоскость $\xi\zeta$; β—угол оси фигуры z с плоскостью $\xi\zeta$. Положение трехгранника $Oxyz$ по отношению к системе отсчета $Ox'y'z$ вполне определяется углом собственного вращения φ, а по отношению к системе отсчета $O\xi\eta\zeta$—углами α, β, φ.

Обычно в практике наблюдаются малые колебания оси фигуры около постоянного направления, которое мы можем принять за ось ζ, поэтому углы α и β малы. Беря приближенные значения косинусов углов между осями координат, запишем таблицу косинусов углов, образуемых осями x', y', z с осями ξ, η, ζ:

	ξ	η	ζ
x'	1	0	$-\alpha$
y'	0	1	$-\beta$
z	α	β	1

(3)

Определим теперь проекции абсолютной угловой скорости трехгранника $Ox'y'z$ на оси x', y', z, которые обозначим через p', q', r', и проекции на те же оси абсолютной угловой скорости жестко связанного с гироскопом трехгранника $Oxyz$, обозначив их через p, q, r.

Проекции переносной угловой скорости, т. е. угловой скорости трехгранника $O\xi\eta\zeta$, на оси x', y', z в соответствии с таблицей косинусов (3) запишутся так: $u_1-u_3\alpha$, $u_2-u_3\beta$, $u_1\alpha+u_2\beta+u_3$.

Относительная угловая скорость, т. е. угловая скорость трехгранника $Ox'y'z$ по отношению к системе отсчета $O\xi\eta\zeta$, определяется составляющими $\dot{\alpha}$ и $\dot{\beta}$. Вектор $\dot{\beta}$ располагается по оси x', перпендикулярной плоскости угла β, и направлен в сторону, противоположную положительному направлению оси x'. Вектор $\dot{\alpha}$ располагается по оси η. Проекции относительной угловой скорости трехгранника $Ox'y'z$ на оси x', y', z в соответствии с таблицей косинусов будут $-\dot{\beta}$, $\dot{\alpha}$, $\dot{\alpha}\beta$, а проекции абсолютной угловой скорости $p'=u_1-u_3\alpha-\dot{\beta}$, $q'=u_2-u_3\beta+\dot{\alpha}$, $r'=u_1\alpha+u_2\beta+u_3+\dot{\alpha}\beta$.

Угловая скорость трехгранника $Oxyz$ и связанного с ним гироскопа по отношению к системе отсчета $O\xi\eta\zeta$ определяется состав-

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2012/01/10 : CIA-RDP80T00246A064300230001-2

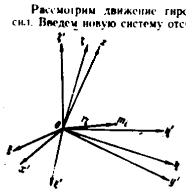
...ляющими α, β, $\dot{\varphi}$. Вектор $\dot{\varphi}$ направлен перпендикулярно к плоскости угла φ по оси z. Проекции относительной угловой скорости трехгранника $Oxyz$ на оси Резаля x', y' совпадают с проекциями относительной угловой скорости трехгранника $Ox'y'z$ на те же оси, а проекция на ось z, называемая *угловой скоростью собственного вращения*, будет $\alpha\dot{\beta}+\dot{\varphi}$.

Проекции абсолютной угловой скорости трехгранника $Oxyz$ и связанного с ним гироскопа на оси x', y', z будут

$$p=p'=u_1-u_3\alpha-\dot{\beta};\quad q=q'=u_2-u_3\beta+\dot{\alpha};\quad r=r'+\dot{\varphi}=u_1\alpha+u_2\beta+u_3+$$
$$+\alpha\dot{\beta}+\dot{\varphi}. \tag{4}$$

ДИНАМИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим движение гироскопа под действием приложенных сил. Введем новую систему отсчета $O\xi'\eta'\zeta'$, которая имеет начало в точке опоры O и движется поступательно (фиг. 4). Движение этой системы отсчета будем считать переносным, а движение гироскопа в системе $O\xi'\eta'\zeta'$ — относительным. Тогда для каждой точки (с массой m_i) тела гироскопа можно записать дифференциальное уравнение относительного движения:



Фиг.4.

$$m_i\overline{W}_{ri}=\overline{R}_i^e+\overline{R}_i^i-m_i\overline{W}_{ei},$$

где $\overline{R}_i^e$ — главный вектор внешних сил, приложенных к точке;

$\overline{R}_i^i$ — главный вектор внутренних сил, приложенных к точке;

$\overline{W}_{ei}$ — переносное ускорение точки, которое для всех точек одинаково и равно ускорению $\overline{W}$ точки опоры;

$\overline{W}_{ri}=d_e\overline{v}_{ri}/dt$ — относительное ускорение точки, равное первой производной вектора относительной скорости точки по времени по отношению к системе отсчета $O\xi'\eta'\zeta'$.

В дальнейшем обозначение d_e/dt будет соответствовать производной вектора по отношению к системе отсчета $O\xi'\eta'\zeta'$, а обозначение d_r/dt — производной вектора по отношению к системе осей Резаля $Ox'y'z$. Тогда

$$m_i\frac{d_e\overline{v}_{ri}}{dt}=\overline{R}_i^e+\overline{R}_i^i-m_i\overline{W}.$$

Умножим обе части уравнения слева векторно на радиус-вектор точки $\overline{r}_i$ и сложим уравнения, написанные для всех точек; учитывая,

что сумма моментов внутренних сил $\sum_i\overline{r}_i\times\overline{R}_i^i$ равна нулю, получим уравнение

$$\sum_i\overline{r}_i\times m_i\frac{d_e\overline{v}_{ri}}{dt}=\sum_i\overline{r}_i\times\overline{R}_i^e-\sum_i\overline{r}_i\times m_i\overline{W}.$$

Проделав обычные преобразования (такие же, как при выводе теоремы о кинетическом моменте), получим уравнение, выражающее теорему о кинетическом моменте в относительном движении по отношению к поступательно движущейся переносной системе отсчета:

$$\frac{d\overline{K}}{dt}=\overline{L}'-\frac{P}{g}\overline{r}_c\times\overline{W}. \tag{5}$$

В этом уравнении

$\overline{K}=\sum_i\overline{r}_i\times m_i\overline{v}_{ri}$ — кинетический момент гироскопа в относительном движении по отношению к поступательно движущейся переносной системе отсчета $O\xi'\eta'\zeta'$;

$\overline{L}'=\sum_i\overline{r}_i\times\overline{R}_i^e$ — главный момент внешних сил относительно точки опоры O;

P — вес гироскопа;

$\overline{r}_c(x_c', y_c', z_c)$ — радиус-вектор центра тяжести.

Применяя к левой части уравнения (5) формулу локальной производной, получим

$$\frac{d_r\overline{K}}{dt}+\overline{\omega}\times\overline{K}=\overline{L}'-\frac{P}{g}\overline{r}_c\times\overline{W}, \tag{6}$$

где $\overline{\omega}(p, q, r')$ — угловая скорость системы осей Резаля.

Спроектировав уравнение (6) на оси x', y', z, найдем

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dK_{x'}}{dt}+qK_z-r'K_{y'}=L_{x'}'-\frac{P}{g}(y_c'W_z-z_cW_{y'});\\
&\frac{dK_{y'}}{dt}+r'K_{x'}-pK_z=L_{y'}'-\frac{P}{g}(z_cW_{x'}-x_c'W_z);\\
&\frac{dK_z}{dt}+pK_{y'}-qK_{x'}=L_z'-\frac{P}{g}(x_c'W_{y'}-y_c'W_{x'}).
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Эти уравнения верны не только для симметричного гироскопа, но и для любого твердого тела, имеющего закрепленную точку O. Центр тяжести симметричного гироскопа $C(0, 0, -l)$ лежит на оси фигуры.

Учитывая, что

$$K_{x'}=Ap;\ K_{y'}=Aq;\ K_z=Cr,$$

где A — момент инерции симметричного гироскопа относительно любой оси, проходящей через точку опоры O и перпендикулярной оси фигуры Oz,

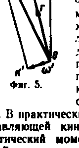
C — момент инерции гироскопа относительно оси фигуры, из уравнений (7) получим следующие уравнения, которые будут верны только для симметричного гироскопа:

$$\left.\begin{aligned} A(\dot{p}-qr')+Crq&=L'_{x'}-\frac{P}{g}lW_{y'};\\ A(\dot{q}+pr')-Crp&=L'_{y'}+\frac{P}{g}lW_{x'}; \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

$$C\dot{r}=L'_{z}. \qquad (8')$$

Члены $A(\dot{p}-qr')$ и $A(\dot{q}+pr')$, содержащие A, не зависят от угловой скорости собственного вращения и обусловлены проекцией ω' абсолютной угловой скорости гироскопа на плоскость, перпендикулярную оси фигуры.

Представим кинетический момент $\overline{K}$ состоящим из *экваториальной составляющей* $\overline{K'}=A\overline{\omega'}$ и составляющей $\overline{K}_z=C\overline{r}$, которую назовем *собственным моментом гироскопа*. Нетрудно убедиться в том, что члены, содержащие A, являются проекциями производной $\frac{d\overline{K'}}{dt}$ на оси x' и y' или, иначе говоря, равны проекциям на оси x' и y' скорости конца вектора $\overline{K'}$.



Фиг. 5.

Для быстро вращающегося гироскопа скорость собственного вращения r велика по сравнению с ω'. Для применяющихся в технике гироскопов $C>A$. Следовательно, составляющая K' мала по сравнению с собственным моментом K_z и очень мал угол между вектором кинетического момента и осью фигуры Oz (фиг. 5). Таким образом, угол между вектором $\overline{K}$ и осью фигуры в процессе движения остается малым. Движение оси фигуры целесообразно рассматривать состоящим из двух движений: из движения кинетической оси, т. е. прямой, по которой направлен вектор кинетического момента, и малых колебаний оси фигуры вокруг кинетической оси. Этими малыми колебаниями, обусловленными составляющей K', можно пренебречь. В практических расчетах обычно пренебрегают экваториальной составляющей кинетического момента K', приближенно полагая кинетический момент равным собственному моменту гироскопа: $\overline{K}\approx C\overline{r}$, что соответствует отбрасыванию в уравнениях (8) членов, содержащих A.

Предполагаем, что составляющая момента сил сопротивления от трения при вращении вокруг оси фигуры уравновешивается активным вращающим моментом, приложенным к гироскопу, и $L'_z=0$. Согласно уравнению (8') $r=\text{const}$.

Определим момент относительно точки опоры силы веса, приложенной в центре тяжести $C(0, 0, -l)$, лежащем на оси фигуры. Вектор силы веса параллелен оси ζ и в соответствии с таблицей косинусов (3) проекции его на оси x', y', z будут $-P\alpha$, $-P\beta$, P; а проекции момента силы веса на те же оси будут $lP\beta$, $-lP\alpha$, 0. Проекции главного момента внешних сил $L'_{x'}$ и $L'_{y'}$ можно считать состоящими из двух слагаемых, одно из которых обусловлено силой веса, а другое — прочими внешними силами: $L'_{x'}=-lP\beta+L_{x'}$, $L'_{y'}=lP\alpha+L_{y'}$.

Тогда уравнения (8) запишутся так:

$$\left.\begin{aligned} A(\dot{p}-qr')+Crq&=lP\beta+L_{x'}-\frac{P}{g}lW_{y'};\\ A(\dot{q}+pr')-Crp&=-lP\alpha+L_{y'}+\frac{P}{g}lW_{x'}. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Ускорение $\overline{W}$ точки опоры равно ускорению машины, на которой расположен гироскоп и которая движется вдоль земной поверхности. Найдем ускорение машины как производную от абсолютной скорости:

$$\overline{W}=\frac{d\overline{V}}{dt}=\frac{d}{dt}(V_E\overline{i}+v_N\overline{j}),$$

где V_E и v_N — восточная и северная составляющие скорости абсолютного движения машины; $\overline{i}$, $\overline{j}$ — единичные векторы, направленные по осям ξ, η.

$$\overline{W}=\dot{V}_E\overline{i}+\dot{v}_N\overline{j}+V_E\frac{d\overline{i}}{dt}+v_N\frac{d\overline{j}}{dt}.$$

$$V_E\frac{d\overline{i}}{dt}+v_N\frac{d\overline{j}}{dt}=V_E\overline{\omega}\times\overline{i}+v_N\overline{\omega}\times\overline{j}=\overline{\omega}\times\overline{V}.$$

Здесь $\overline{\omega}$ — абсолютная угловая скорость трехгранника $O\xi\eta\zeta$.

Угловая скорость $\overline{\omega}$ — величина малая, она мало отличается от угловой скорости вращения Земли вокруг собственной оси (за исключением случаев, когда движущаяся машина находится близко от северного или южного полюса и имеет восточную составляющую скорости, т. е. v_E не равно нулю). Вектор $\overline{\omega}\times\overline{V}$ мал по сравнению с $\dot{V}_E\overline{i}+\dot{v}_N\overline{j}$ и $\overline{W}\approx\dot{V}_E\overline{i}+\dot{v}_N\overline{j}$; $W_\xi=\dot{V}_E$; $W_\eta=\dot{v}_N$; $W_\zeta=0$. В соответствии с таблицей косинусов (3) запишем $W_{x'}\approx W_\xi=\dot{V}_E$; $W_{y'}\approx W_\eta=\dot{v}_N$; $W_z=W_\xi\alpha+W_\eta\beta=\dot{V}_E\alpha+$ $+\dot{v}_N\beta$.

Таким образом, уравнения (9) примут вид

$$\left.\begin{aligned} A(\dot{p}-qr')+Crq&=lP\beta+L_{x'}-\frac{P}{g}l\dot{v}_N;\\ A(\dot{q}+pr')-Crp&=-lP\alpha+L_{y'}+\frac{P}{g}l\dot{V}_E. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

На гироскоп, кроме реакции опоры, которая не дает момента относительно точки O, и силы веса, действуют обычно силы сопротивления от трения. Если пренебречь сопротивлениями от трения, за исключением сопротивлений при вращении вокруг оси фигуры, которые уравновешиваются активным вращающим моментом, то $L_x = 0$ и $L_y = 0$.

Для упрощения расчетов пренебрежем членами, содержащими A, тогда

$$\left.\begin{aligned} -Crq + H\dot{\beta} &= \frac{P}{g} l v_N; \\ -Crp + H\dot{\alpha} &= \frac{P}{g} l V_E. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Подставляя значения p и q согласно (4), получим

$$-Cr(u_2 - u_3\beta + \dot{\alpha}) + H\dot{\beta} = \frac{P}{g} l\dot{v}_N;$$

$$-Cr(u_1 - u_3\alpha - \dot{\beta}) + H\dot{\alpha} = \frac{P}{g} l\dot{V}_E.$$

Разделим левые и правые части полученных уравнений на $-Cr$ и введем обозначение $k = \frac{Pl}{Cr}$:

$$\dot{\alpha} + u_2 - u_3\beta - k\beta = -\frac{k}{g}\dot{v}_N;$$

$$-\dot{\beta} + u_1 - u_3\alpha - k\alpha = -\frac{k}{g}\dot{V}_E.$$

Обе части второго из полученных уравнений помножим на $-i$ $(i = \sqrt{-1})$ и сложим с первым:

$$\dot{\alpha} + i\dot{\beta} + (u_3 + k)(i\alpha - \beta) + u_2 - iu_1 = -\frac{k}{g}\dot{v}_N + \frac{k}{g}\dot{V}_E. \qquad (12)$$

В уравнениях (1) $u_3 = U\sin\varphi + (v_E/R)\,\mathrm{tg}\,\varphi$; следовательно, $u_3 + k = U\sin\varphi + (v_E/R)\,\mathrm{tg}\,\varphi + k$. Величиной $\frac{v_E}{R}\,\mathrm{tg}\,\varphi$ пренебрегаем по сравнению с k и вводим обозначение $U\sin\varphi + k = k'$.

Полагая $W = \alpha + i\beta$ (принимая во внимание равенства (1) и учитывая, что $1/i = -i$), уравнение (12) запишем так:

$$\dot{W} + ik'W = \frac{ik}{g}(\dot{V}_E + i\dot{v}_N) - \frac{1}{R}(V_E + iv_N). \qquad (13)$$

Относительно того, насколько допустимо пренебрегать величиной $\frac{v_E}{R}\,\mathrm{tg}\,\varphi$, можно сказать следующее. В том случае, когда машина предполагается движущейся „прямолинейно"* и равномерно, так что V_E и v_N постоянны, членом $\frac{v_E}{R}\,\mathrm{tg}\,\varphi$ лучше не пренебрегать $\left(\text{тогда } k' = U\sin\varphi + \frac{v_E}{R}\,\mathrm{tg}\,\varphi + k\right)$. При движении с ускорением (V_E и v_N — переменные величины) этим членом приходится пренебрегать, чтобы избежать дифференциального уравнения с переменными коэффициентами. Вообще говоря, коэффициент k' будет переменным и при прямолинейном и равномерном движении, так как угол φ меняется, когда v_N не равно нулю, но это изменение незначительно и можно считать $U\sin\varphi \approx \mathrm{const}$ и $\mathrm{tg}\,\varphi \approx \mathrm{const}$. Пренебрегать величиной $\frac{v_E}{R}\,\mathrm{tg}\,\varphi$ следует с осторожностью, так как при современных скоростях машины $\frac{v_E}{R}\,\mathrm{tg}\,\varphi$ может превосходить $U\sin\varphi$, оставаясь меньше k для применяемых на практике гироскопов в несколько десятков раз. Все сказанное выше о пренебрежении величиной $\frac{v_E}{R}\,\mathrm{tg}\,\varphi$ относится к случаям, когда машина находится на значительном расстоянии от земных полюсов.

Для решения уравнения (13) в самом общем виде воспользуемся методом вариации произвольных постоянных. Введем обозначение

$$p = \frac{ik}{g}(\dot{V}_E + i\dot{v}_N) - \frac{1}{R}(V_E + iv_N), \qquad (14)$$

тогда

$$\dot{W} + ik'W = p. \qquad (15)$$

Для решения однородного уравнения, входящего в состав уравнения (15), составим характеристическое уравнение с корнем λ:

$$\lambda + ik' = 0,$$

откуда $\lambda = -ik'$.

Тогда решением однородного уравнения будет $C^*e^{-ik't}$. Величину C^* будем считать не постоянной, а функцией времени, которую можно подобрать так, чтобы удовлетворить неоднородному уравнению (15):

$$W = C^*e^{-ik't};$$

$$\dot{W} = \dot{C}^*e^{-ik't} - C^*ik'e^{-ik't}.$$

Подставим W и $\dot{W}$ в уравнение (15)

$$\dot{C}^*e^{-ik't} - C^*ik'e^{-ik't} + ik'C^*e^{-ik't} = p,$$

откуда $C^* = \int pe^{ik't}dt + C$ и общее решение будет

$$W = e^{-ik't}\int pe^{ik't}dt + Ce^{-ik't}. \qquad (16)$$

* Слово «прямолинейно» взято в кавычки, так как движение, которое мы считаем на Земле прямолинейным, непрямолинейно по отношению к абсолютно неподвижной системе отсчета.

Общее решение складывается из частного решения

$$W^* = e^{-ik't}\int p e^{ik't}\,dt \qquad (17)$$

и решения однородного уравнения $Ce^{-ik't}$

$$W = W^* + Ce^{-ik't}.$$

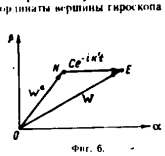
Для нахождения произвольной постоянной C используем начальные условия при $t=0$ $W = W_0$, $W^* = W_0^*$.

$$W_0 = W_0^* + C;\ C = W_0 - W_0^*;\ W = W^* + (W_0 - W_0^*)e^{-ik't}. \qquad (18)$$

Решение однородного уравнения принимает вид

$$(W_0 - W_0^*)e^{-ik't}.$$

При малых углах α и β можно принять их за прямоугольные координаты вершины гироскопа E в горизонтальной плоскости П, проведенной на высоте, равной одной линейной единице над точкой опоры. Тогда комплексное число W геометрически изображается радиусом-вектором вершины в этой плоскости. Движение вершины гироскопа E на картинной плоскости П может быть представлено как результат двух движений: движения некоторой точки N, определяемой радиусом-вектором, соответствующим частному решению W^*, и движения вершины E, которая определяется по отношению к точке N радиусом-вектором, соответствующим решению однородного уравнения (фиг. 6).



Фиг. 6.

Решение однородного уравнения $Ce^{-ik't} = C(\cos k't + i\sin k't)$ определяет движение вершины гироскопа E вокруг точки N по окружности постоянного радиуса $|C| = |W_0 - W_0^*|$ с угловой скоростью k'. Таким образом, движение оси фигуры может быть представлено состоящим из двух движений: из движения некоторой оси, проходящей через точку опоры и через точку N, и из конической прецессии оси фигуры вокруг этой оси; коническая прецессия определяется решением однородного уравнения. Угол конуса прецессии определяется величиной $C = W_0 - W_0^*$, т. е. зависит от начальных условий. Угловая скорость прецессии будет $-k'$.

РАССМОТРЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ СЛУЧАЕВ ДВИЖЕНИЯ МАШИНЫ

1. „Прямолинейное" и равномерное движение (V_E и v_N постоянны). В этом случае в правой части уравнения (13) будет стоять постоянное комплексное число $-\frac{1}{R}(V_E + iv_N)$; и частное решение уравнения (13) будет равно этому числу, деленному на коэффициент при W:

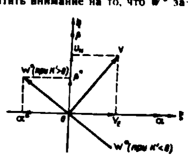
$$W^* = \alpha^* + i\beta^* = \frac{i}{k'R}(V_E + iv_N).$$

Разделяя действительную и мнимую части, получим

$$\alpha^* = -\frac{v_N}{k'R},\quad \beta^* = \frac{V_E}{k'R}.$$

Углы α^* и β^* представляют собой *скоростные девиации гироскопа*. Они определяют положение оси, вокруг которой происходит прецессия (фиг. 7).

Направление радиуса-вектора W^* перпендикулярно скорости движения машины V. Следует обратить внимание на то, что W^* зависит от знака k', определяемого знаком k, а знак $k = lP/Cr$ определяется положением центра тяжести гироскопа и направлением угловой скорости собственного вращения.



Фиг. 7.

Учитывая, что W^*—величина постоянная, запишем общее решение согласно (18)

$$W = W^* + (W_0 - W^*)e^{-ik't}.$$

В этом решении дифференциального уравнения частное решение W^* определяет положение оси, вокруг которой происходит прецессия (фиг. 8); $(W_0 - W^*)$ определяет угол отклонения оси собственного вращения от оси, вокруг которой происходит прецессия (при $W_0 = 0$ угол отклонения определяется величиной $-W^*$, при $W_0 = W^*$ угол отклонения равен нулю). Величина $-k'$—угловая скорость прецессии по отношению к системе отсчета $O\xi\eta\zeta$ (при $k'>0$ прецессия совершается по часовой стрелке, при $k'<0$ — против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления оси ζ). Оси ξ, η вращаются вокруг оси ζ с угловой скоростью

$$u_3 = U\sin\varphi + \frac{v_E}{R}\operatorname{tg}\varphi.$$

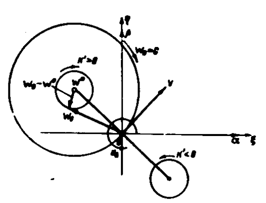
Если принять во внимание, что W^*—малая величина, то ось, вокруг которой происходит прецессия, можно считать совпадающей с осью ζ, и угловую скорость прецессии относительно неподвижных звезд можно определить как сумму угловой скорости прецессии по отношению к системе отсчета $O\xi\eta\zeta$ и переносной угловой скорости вращения осей ξ, η вокруг оси ζ:

$$\omega_{абс} = -k' + u_3; \qquad (19)$$

$$K' = U\sin\varphi + \frac{v_E}{R}\,\mathrm{tg}\,\varphi + k \left(\text{если не пренебрегать } \frac{v_E}{R}\,\mathrm{tg}\,\varphi\right);$$

$$\omega_{абс} = -U\sin\varphi - \frac{v_E}{R}\,\mathrm{tg}\,\varphi - k + U\sin\varphi + \frac{v_E}{R}\,\mathrm{tg}\,\varphi = -k = -\frac{lP}{Cr}.$$

Мы получили для угловой скорости прецессии относительно неподвижных звезд такое же выражение, которое применяется в приближенной теории гироскопа для подсчета угловой скорости прецессии.



Фиг. 8.

2. Равномерное движение машины по окружности по отношению к Земле. Скорость машины по отношению к Земле обозначим через v (фиг. 9), тогда

$$\left.\begin{aligned} v_E &= v\cos(\omega t + \delta); \\ v_N &= v\sin(\omega t + \delta); \\ V_E &= UR\cos\varphi + v\cos(\omega t + \delta). \end{aligned}\right| \qquad (20)$$

Абсолютная величина угловой скорости машины может быть найдена из соотношения $|\omega| = v/R^*$ (R^*—радиус окружности, по которой происходит движение машины). При заданной по абсолютной величине скорости v числовое значение угловой скорости берется положительным при круговом движении против часовой стрелки и отрицательным при круговом движении по часовой стрелке. Величину $UR\cos\varphi$ будем считать постоянной, так как φ меняется очень медленно. Тогда согласно (14)

$$p = \frac{ik}{g}\left[-v\omega\sin(\omega t + \delta) + iv\omega\cos(\omega t + \delta)\right] - \frac{1}{R}\left[UR\cos\varphi + \right.$$
$$\left. + v\cos(\omega t + \delta) + iv\sin(\omega t + \delta)\right] = -\frac{kv\omega}{g}\left[\cos(\omega t + \delta) + i\sin(\omega t + \delta)\right] -$$

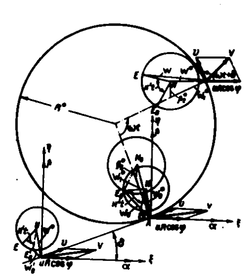
$$-U\cos\varphi - \frac{v}{R}\left[\cos(\omega t + \delta) + i\sin(\omega t + \delta)\right];$$

$$p = -v\left(\frac{k\omega}{g} + \frac{1}{R}\right)e^{i(\omega t + \delta)} - U\cos\varphi. \qquad (21)$$

Согласно (17)

$$W^* = e^{-ik't}\int\left[-v\left(\frac{k\omega}{g} + \frac{1}{R}\right)e^{i(\omega t + \delta)} - U\cos\varphi\right]e^{ik't}\,dt =$$

$$= -\frac{v\left(\frac{k\omega}{g} + \frac{1}{R}\right)e^{i(\omega t + \delta)}}{i(\omega + k')} - \frac{U\cos\varphi}{ik'} = -\frac{v\left(\frac{k\omega}{g} + \frac{1}{R}\right)}{i(\omega + k')}\left[\cos(\omega t + \delta) + \right.$$
$$\left. + i\sin(\omega t + \delta)\right] - \frac{U\cos\varphi}{ik'}.$$



Фиг. 9.

Разделим действительную и мнимую части, используя обозначение $W^* = \alpha^* + i\beta^*$:

$$\alpha^* = -\frac{v\left(\frac{k\omega}{g} + \frac{1}{R}\right)\sin(\omega t + \delta)}{\omega + k'} = -\frac{\frac{k\omega}{g} + \frac{1}{R}}{\omega + k'}\,v_N;$$

$$\beta^* = \frac{v\left(\frac{k\omega}{g} + \frac{1}{R}\right)\cos(\omega t + \delta)}{\omega + k'} + \frac{U\cos\varphi}{k'} = \frac{\frac{k\omega}{g} + \frac{1}{R}}{\omega + k'}\,v_E + \frac{U\cos\varphi}{k'}.$$

Приняв в полученных выражениях угловую скорость ω равной нулю будем иметь для α^* и β^* выражения, полученные ранее при рассмотрении равномерного «прямолинейного» движения.

Если радиус поворота R^* не слишком велик, то k' мало по сравнению с ω, следовательно,

$$\alpha^* \approx -\frac{k}{g}v_N; \quad \beta^* \approx \frac{k}{g}v_E + \frac{U\cos\varphi}{k'}.$$

Введем обозначения

$$\beta_1^* = \frac{\left(\frac{k\omega}{g} + \frac{1}{R}\right)}{\omega + k'}v_E; \quad \beta_2^* = \frac{U\cos\varphi}{k'},$$

тогда $\beta^* = \beta_1^* + \beta_2^*$. Величины α^* и β_1^* обусловлены движением машины по отношению к Земле. Величина β_2^* обусловлена вращением Земли вокруг земной оси. Направление радиуса-вектора $W_1^* = \alpha^* + i\beta_1^*$ перпендикулярно вектору скорости движения машины относительно Земли.

Проследим за поведением оси фигуры при переходе машины от «прямолинейного» равномерного движения к круговому движению по отношению к Земле (см. фиг. 9). При «прямолинейном» и равномерном движении машины ось фигуры совершает коническую прецессию вокруг оси, положение которой определяется скоростными девиациями $\alpha^* = -V\sin\delta/k'R$ и $\beta^* = V\cos\delta/k'R$, где δ—угол между вектором скорости и направлением оси ξ.

Угол конуса прецессии определяется величиной $W_0' - W^*$, где W_0'—начальное отклонение оси фигуры для данного «прямолинейного» равномерного движения.

В некоторой точке A начинается равномерное движение машины по окружности радиуса R^*. С этого момента мы будем иметь коническую прецессию гироскопа, угол конуса которой определяется величиной $W_0 - W_0^*$, где W_0—начальное отклонение оси гироскопа для данного кругового движения, а $W_0^* = \alpha_0^* + i\beta_0^*$;

здесь

$$\alpha_0^* = -\frac{v\left(\frac{k\omega}{g} + \frac{1}{R}\right)\sin\delta}{\omega + k'}; \quad \beta_0^* = \frac{v\left(\frac{k\omega}{g} + \frac{1}{R}\right)\cos\delta}{\omega + k'} + \frac{U\cos\varphi}{k'}.$$

Прецессия происходит вокруг перемещающейся оси, положение которой определяется девиациями

$$\alpha^* = -\frac{\left(\frac{k\omega}{g} + \frac{1}{R}\right)}{\omega + k'}v_N;$$

$$\beta^* = \frac{\left(\frac{k\omega}{g} + \frac{1}{R}\right)}{\omega + k'}v_E + \frac{U\cos\varphi}{k'}.$$

3. **Равнопеременное «прямолинейное» движение машины.** В этом случае

$$v = at + v_0,$$

где a — постоянное по величине тангенциальное ускорение;

$v_0 = \sqrt{v_{0N}^2 + v_{0E}^2}$ — начальная скорость, определяемая северной и восточной составляющими начальной скорости машины.

Составляющие будем считать заданными:

$$\left.\begin{aligned} v_N &= a_N t + v_{0N}; \\ v_E &= a_E t + v_{0E}. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Учитывая, что при «прямолинейном» движении $v_N : v_E = \text{const}$, можно получить выражения для a_N и a_E:

$$a_N = \frac{v_{0N}}{v_0}a; \quad a_E = \frac{v_{0E}}{v_0}a.$$

Согласно (14) и (17)

$$W^* = e^{-ik't}\int\left\{\frac{ik}{g}(a_E + ia_N) - \frac{1}{R}\left[UR\cos\varphi + a_E t + v_{0E} + i(a_N t + v_{0N})\right]\right\}e^{ik't}dt = \frac{k}{gk'}(a_E + ia_N) - \frac{U\cos\varphi}{ik'} - \frac{v_{0E} + iv_{0N}}{ik'R} -$$

$$-\frac{e^{-ik't}}{R}(a_E + ia_N)\int te^{ik't}dt;$$

$$\int te^{ik't}dt = \frac{e^{ik't}}{ik'}t - \int\frac{e^{ik't}}{ik'}dt = \frac{e^{ik't}}{ik'}t - \frac{e^{ik't}}{k'^2}.$$

Подставив значение интеграла в выражение для W^*, получим

$$W^* = \frac{k}{gk'}(a_E + ia_N) - \frac{U\cos\varphi}{ik'} - \frac{v_{0E} + iv_{0N}}{ik'R} - \frac{a_E + ia_N}{ik'R}t + \frac{a_E + ia_N}{k'^2R}.$$

Разделяя действительную и мнимую части, получим

$$\alpha^* = -\frac{v_{0N}}{k'R} + \left(\frac{k}{gk'} + \frac{1}{k'^2R}\right)a_E - \frac{a_N}{k'R}t;$$

$$\beta^* = \frac{v_{0E}}{k'R} + \frac{U\cos\varphi}{k'} + \left(\frac{k}{gk'} + \frac{1}{k'^2R}\right)a_N + \frac{a_E}{k'R}t.$$

В соответствии с (22)

$$\alpha^* = -\frac{v_N}{k'R} + \frac{ka_E}{k'g} + \frac{a_E}{k'^2R};$$

$$\beta^* = \frac{v_E}{k'R} + \frac{U\cos\varphi}{k'} + \frac{ka_N}{k'g} + \frac{a_N}{k'^2R}.$$

2*

Как видно из выражений для α^* и β^* в случае «прямолинейного» равнопеременного движения, помимо скоростных девиаций, имеются девиации, зависящие от ускорения.

Рассмотрим члены $ka_N/k'g$ и $ka_E/k'g$. Отношение k/k' близко к единице. Отношения a_E/g и a_N/g определяют „кажущуюся вертикаль“, т. е. прямую, по которой располагается равнодействующая веса P и горизонтальной силы инерции $-\frac{P}{g}(a_E + ia_N)$.

О ПРЕНЕБРЕЖЕНИИ ВЕЛИЧИНОЙ $\frac{v_E}{R}\,\mathrm{tg}\,\varphi$

При введении обозначения $k' = U\sin\varphi + k$ мы пренебрегали величиной $\frac{v_E}{R}\,\mathrm{tg}\,\varphi$. Если этой величиной не пренебрегать, то уравнение (15) может быть записано так:

$$\dot{W} + i\left(U\sin\varphi + k + \frac{v_E}{R}\,\mathrm{tg}\,\varphi\right)W = p.$$

Введем обозначение

$$k^* = U\sin\varphi + k + \frac{v_E}{R}\,\mathrm{tg}\,\varphi;$$

$$\dot{W} + ik^*W = p. \tag{23}$$

Найдем решение однородного уравнения

$$\dot{W} + ik^*W = 0;$$

$$\frac{dW}{dt} + ik^*W = 0.$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dW}{W} = -ik^*dt.$$

$$\ln W = -\int ik^*\,dt + \ln C^*.$$

$$W = C^*e^{-i\int k^*dt}.$$

Считая величину C^* функцией времени, подберем ее таким образом, чтобы получить общее решение уравнения (23):

$$\dot{W} = \dot{C}^*e^{-i\int k^*dt} - C^*ik^*e^{-i\int k^*dt}.$$

Подставив W и $\dot{W}$ в уравнение (23), получим

$$\dot{C}^*e^{-i\int k^*dt} - C^*ik^*e^{-i\int k^*dt} + ik^*C^*e^{-i\int k^*dt} = p;$$

$$\dot{C}^*e^{-i\int k^*dt} = p;$$

$$C^* = \int pe^{-i\int k^*dt}dt + C.$$

Общее решение будет

$$W = e^{-i\int k^*dt}\int pe^{i\int k^*dt}dt + Ce^{-i\int k^*dt}.$$

В состав k^* входят переменные величины v_E и φ. Для упрощения расчетов величину φ при интегрировании будем считать постоянной, что вполне допустимо, так как φ изменяется очень медленно ($\dot{\varphi} = -(v_N/R)$ — очень малая величина). Имея в виду, что $k^* = k' + \left(\frac{v_E}{R}\right)\mathrm{tg}\,\varphi$, получим

$$W = e^{-i\left(k't + \frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{R}\int v_E dt\right)}\int pe^{i\left(k't + \frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{R}\int v_E dt\right)}dt + Ce^{-i\left(k't + \frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{R}\int v_E dt\right)}.$$

Общее решение W состоит из частного решения

$$W^* = e^{-i\left(k't + \frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{R}\int v_E dt\right)}\int pe^{i\left(k't + \frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{R}\int v_E dt\right)}dt \tag{24}$$

и решения однородного уравнения

$$Ce^{-i\left(k't + \frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{R}\int v_E dt\right)}.$$

Частное решение определяет положение оси, вокруг которой происходит коническая прецессия. Заметим, что в частном решении после взятия интеграла от $pe^{i\left(k't + \frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{R}\int v_E dt\right)}$ появится общий множитель $e^{i\left(k't + \frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{R}\int v_E dt\right)}$, который при помножении на $e^{-i\left(k't + \frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{R}\int v_E dt\right)}$ дает единицу; кроме того, в знаменателе частного решения будет содержаться производная от показателя степени $i\left(k't + \frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{R}\int v_E dt\right)$, равная ik^*, и в выражениях для девиаций W^*, α^*, β^* в знаменателе будет содержаться k^*.

Решение однородного уравнения характеризует прецессию. Если ввести угол поворота $\theta = -k't - \frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{R}\int v_E dt$, то угловая скорость прецессии относительно системы отсчета $O\xi\eta\zeta$ будет равна $\dot{\theta} = -k' - \frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{R}v_E = -k^*$.

В соответствии с (19) угловая скорость прецессии относительно абсолютно неподвижной системы отсчета будет $\omega_{абс} = -k^* + u_3 = -k$, т. е. угловую скорость прецессии относительно неподвижных звезд можно подсчитать по формуле

$$\omega_{абс} = -k = -\frac{lP}{Cr},$$

применяемой в приближенной теории гироскопа.

Рассмотрим два случая движения машины.

1. **Равномерное круговое движение машины относительно Земли.** Согласно (14) и (20) получим (21):

$$p = -v\left(\frac{k\omega}{g}+\frac{1}{R}\right)e^{i(\omega t+\delta)} - U\cos\varphi.$$

Согласно (24)

$$W^* = e^{-i\left(k't+\frac{\operatorname{tg}\varphi}{R}\int v_E\,dt\right)}\int\left[-v\left(\frac{k\omega}{g}+\frac{1}{R}\right)e^{i(\omega t+\delta)} - U\cos\varphi\right]\times$$

$$\times e^{i\left(k't+\frac{\operatorname{tg}\varphi}{R}\int v_E\,dt\right)}dt = e^{-i\left(k't+\frac{\operatorname{tg}\varphi}{R}\int v_E\,dt\right)}\times$$

$$\times\left[-\frac{v\left(\frac{k\omega}{g}+\frac{1}{R}\right)}{\omega+k'+\frac{v_E\operatorname{tg}\varphi}{R}}e^{i\left(\omega t+\delta+k't+\frac{\operatorname{tg}\varphi}{R}\int v_E\,dt\right)} - \frac{U\cos\varphi}{k'+\frac{v_E\operatorname{tg}\varphi}{R}}e^{i\left(k't+\frac{\operatorname{tg}\varphi}{R}\int v_E\,dt\right)}\right] =$$

$$= \frac{v\left(\frac{k\omega}{g}+\frac{1}{R}\right)}{i\left(\omega+k'+\frac{v_E\operatorname{tg}\varphi}{R}\right)}e^{i(\omega t+\delta)} - \frac{U\cos\varphi}{i\left(k'+\frac{v_E\operatorname{tg}\varphi}{R}\right)}.$$

$$W^* = -\frac{v\left(\frac{k\omega}{g}+\frac{1}{R}\right)}{i(\omega+k^*)}e^{i(\omega t+\delta)} - \frac{U\cos\varphi}{ik^*}.$$

Разделяя действительную и мнимую части в выражении W^*, получим девиации α^* и β^*:

$$\alpha^* = -\frac{\frac{k\omega}{g}+\frac{1}{R}}{\omega+k^*}v_N,$$

$$\beta^* = \frac{\frac{k\omega}{g}+\frac{1}{R}}{\omega+k'}v_E + \frac{U\cos\varphi}{k^*}.$$

Частное решение W^* и девиации α^* и β^* в этом случае отличаются от частного решения и девиаций, полученных нами ранее при рассмотрении равномерного кругового движения относительно Земли без учета $v_E/R\operatorname{tg}\varphi$, тем, что вместо k' в соответствующих выражениях стоит k^*.

Согласно (20)

$$v_E = v\cos(\omega t+\delta);$$

$$\int v_E\,dt = \int v\cos(\omega t+\delta)\,dt = \frac{v}{\omega}\sin(\omega t+\delta) = \frac{v_N}{\omega}.$$

Решение однородного уравнения будет

$$Ce^{-i\left(k't+\frac{\operatorname{tg}\varphi}{R}\int v_E\,dt\right)} = Ce^{-i\left[k't+\frac{v\operatorname{tg}\varphi}{\omega R}\sin(\omega t+\delta)\right]}.$$

Общее решение будет

$$W = W^* + Ce^{-i\left[k't+\frac{v\operatorname{tg}\varphi}{\omega R}\sin(\omega t+\delta)\right]}.$$

Произвольную постоянную C определим, используя начальные условия при $t=0$, $W=W_0$ и $W^*=W_0^*$:

$$C = (W_0 - W_0^*)e^{-i\frac{v\operatorname{tg}\varphi\sin\delta}{\omega R}}.$$

Так как величина $\frac{v\operatorname{tg}\varphi\sin\delta}{\omega}$ очень мала по сравнению с радиусом Земли R, то $e^{-i\frac{v\operatorname{tg}\varphi\sin\delta}{\omega R}}\approx 1$ и $C\approx W_0 - W_0^*$.

2. **«Прямолинейное» равнопеременное движение машины.** Определив согласно (14) и (24) частное решение W^* и девиаций α^* и β^*, можно убедиться в том, что эти величины отличаются от ранее полученных при рассмотрении «прямолинейного» равнопеременного движения без учета $\frac{v_E}{R}\operatorname{tg}\varphi$ только тем, что в них вместо k' стоит k^*.

Согласно (22)

$$v_E = a_E t + v_{0E};$$

$$\int v_E\,dt = \int (a_E t + v_{0E})\,dt = \frac{a_E t^2}{2} + v_{0E}t.$$

Решение однородного уравнения будет

$$Ce^{-i\left(k't+\frac{\operatorname{tg}\varphi}{R}\int v_E\,dt\right)} = Ce^{-i\left[k't+\left(\frac{a_E t^2}{2}+v_{0E}t\right)\frac{\operatorname{tg}\varphi}{R}\right]}.$$

Общее решение будет

$$W = W^* + Ce^{-i\left[k't+\left(\frac{a_E t^2}{2}+v_{0E}t\right)\frac{\operatorname{tg}\varphi}{R}\right]}.$$

Подставив начальные условия, получим

$$C = W_0 - W_0^*.$$

На основании изложенного можно сделать вывод: при большой восточной составляющей скорости машины относительно Земли при подсчете девиаций α^* и β^* и угловой скорости прецессии величиной $\frac{v_E}{R}\operatorname{tg}\varphi$ пренебрегать не следует.

ЛИТЕРАТУРА

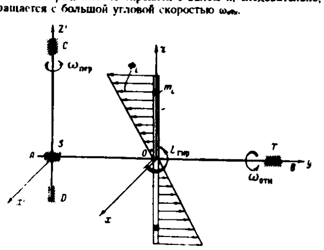
Булгаков Б. В., Прикладная теория гироскопов, 2-е издание, ГИТТЛ, 1955.

Канд. техн. наук доцент П. В. ОРЕХОВ

ВЫВОД ФОРМУЛЫ ДЛЯ ГИРОСКОПИЧЕСКОГО МОМЕНТА С ПОМОЩЬЮ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЫ КОРИОЛИСА

Рассмотрим гироскоп, выполненный по следующей схеме (фиг. 1 и 2).

Вал AB вращается в подшипниках S и T (фиг. 1) с большой угловой скоростью $\omega_{отн}$, как показано стрелкой. На вал насажен диск массой M, который жестко скреплен с валом и, следовательно, также вращается с большой угловой скоростью $\omega_{отн}$.



Фиг. 1.

Пусть в некоторый момент времени вал AB вместе с диском получил некоторое дополнительное вращение вокруг оси CD с угловой скоростью $\omega_{пер}$. В этом случае любая частичка диска массой m_i, расположенная на расстоянии r_i от оси AB, будет находиться в относительном движении и поэтому к ней можно применить динамическую теорему Кориолиса, согласно которой получим

$$m_i\bar{a}_r = \bar{P}_i + \bar{F}_{пер} + \bar{\Phi}_i, \tag{1}$$

где $\bar{a}_r$ — относительное ускорение этой частицы;

$\bar{P}_i$ — непосредственно приложенные силы, в данном случае это сила тяжести частицы $\bar{P}_i = m_i g$;

$\bar{F}_{пер}$ — переносная сила инерции, $\bar{F}_{пер} = -m_i\bar{a}_{пер}$; $a_{пер}$ — переносное ускорение. При $\omega_{пер} = \text{const}$ $a_{пер} = \omega^2_{пер} \cdot SO$ (фиг. 1). Будем считать $\omega_{отн} \gg \omega_{пер}$, поэтому переносной силой инерции будем пренебрегать;

$\bar{\Phi}_i$ — кориолисова сила инерции;

$$\bar{\Phi}_i = -m_i\bar{a}_{кор}, \quad \bar{a}_{кор} = 2\bar{\omega}_{пер} \times \bar{v}_{отн}.$$

Согласно правилу векторного произведения двух векторов (в нашем случае векторов $\bar{\omega}_{пер}$ и $\bar{v}_{отн}$) кориолисовы силы инерции, построенные для всех частичек диска, будут расположены параллельно оси Oy (фиг. 1 и 2), причем для верхнего полудиска в одну сторону, а для нижнего — в противоположную. Таким образом к диску будут приложены системы переносных сил инерции $\bar{F}_{пер}$, сил тяжести $\bar{P}_i$ и кориолисовых сил инерции $\bar{\Phi}_i$. Системой переносных сил инерции, как уже было сказано, в данной задаче будем пренебрегать.

Фиг. 2.

Рассмотрение системы параллельных сил тяжести, создающих статическую нагрузку на подшипники вала, в этой задаче не представляет интереса. Здесь мы рассмотрим подробно лишь кориолисовы силы инерции, которые образуют пару сил, приложенную к валу AB, и подсчитаем момент от этих сил вокруг оси Ox (фиг. 1 и 2). В общем случае любая сила $\bar{\Phi}_i$, приложенная к элементарной частице диска массой m_i (или другого тела вращения), будет создавать вокруг оси Ox момент

$$L_i = \Phi_i r_i \sin\alpha_i. \tag{2}$$

Обозначим результирующий момент всех кориолисовых сил инерции диска относительно оси Ox через $L_{гир}$, тогда *

$$L_{гир} = \sum^{M} \Phi_i r_i \sin\alpha_i, \tag{3}$$

но

$$\Phi_i = 2m_i\,|\bar{\omega}_{пер} \times \bar{v}_{отн}| = 2m_i\omega_{пер}v_{отн}\sin(\widehat{\bar{\omega}_{пер}\bar{v}_{отн}}),$$

* Суммирование производится по частицам всего диска массой M.

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2012/01/10 : CIA-RDP80T00246A064300230001-2

здесь $v_{отн} = \omega_{отн} r_i$,

поэтому $\Phi_i = 2m_i\omega_{пер}\omega_{отн} r_i \sin(\widehat{\bar{\omega}_{пер} \bar{v}_{отн}})$.

Согласно принятым обозначениям (фиг. 2) получим

$$r_i \sin(\widehat{\bar{\omega}_{пер} \bar{v}_{отн}}) = r_i \sin \alpha_i = z_i,$$

следовательно, уравнение (3) можно переписать в виде

$$L_{гир} = \sum^{M} 2m_i\omega_{пер}\omega_{отн} z_i^2. \qquad (4)$$

Так как $\omega_{пер}$ и $\omega_{отн}$ при суммировании по точкам диска не меняются, то их можно вынести за знак суммирования, т. е.

$$L_{гир} = 2\omega_{пер}\omega_{отн} \sum^{M} m_i z_i^2, \qquad (5)$$

но

$$\sum^{M} m_i z_i^2 = J_{xx'},$$

где $J_{xx'}$ — момент инерции диска относительно диаметра, совпадающего с осью Ox',

а $2J_{xx'} = J_0$,

где J_0 — момент инерции диска относительно оси, проходящей через центр диска перпендикулярно плоскости его вращения.

Поэтому

$$L_{гир} = J_0\omega_{пер}\omega_{отн}. \qquad (6)$$

Применяя правило векторного произведения двух векторов, легко выразить векторный момент $\bar{L}_{гир}$ через векторное произведение $\omega_{отн}$ и $\omega_{пер}$:

$$\bar{L}_{гир} = J_0\bar{\omega}_{отн} \times \bar{\omega}_{пер}. \qquad (7)$$

Таким образом, если быстро вращающемуся диску вокруг оси AB сообщить некоторое дополнительное вращение вокруг оси CD с угловой скоростью $\omega_{пер}$, то возникает некоторый момент $L_{гир}$, который стремится ось собственного вращения AB совместить с осью дополнительного вращения в сторону наименьшего угла между осями. Это правило называется правилом Н. Е. Жуковского, а момент $L_{гир}$ — гироскопическим моментом.

Если ось CD расположена не под прямым углом по отношению к оси AB, а под произвольным углом γ, то в выражение для элементарного момента кориолисовой силы $\bar{\Phi}_i$ войдет $\sin\gamma$, так как момент будет образован в этом случае лишь той составляющей силы $\bar{\Phi}_i$, которая параллельна оси AB (фиг. 3), т. е. силой

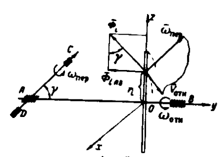
$$|\bar{\Phi}_{i\,AB}| = \Phi_i \sin\gamma.$$

Другая составляющая будет пересекать ось Ox, поэтому момент ее будет равен нулю. Учитывая сказанное и имея в виду, что угол при суммировании по точкам диска не меняется, запишем выражение для гироскопического момента

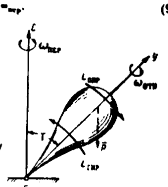
$$L_{гир} = J_0\omega_{отн}\omega_{пер} \sin\gamma. \qquad (8)$$

Так как угол γ есть угол между векторами $\bar{\omega}_{пер}$ и $\bar{\omega}_{отн}$, то легко выразить векторный момент $\bar{L}_{гир}$ через векторное произведение $\omega_{отн}$ и $\omega_{пер}$

$$\bar{L}_{гир} = J_0\bar{\omega}_{отн} \times \bar{\omega}_{пер}. \qquad (9)$$



Фиг. 3.



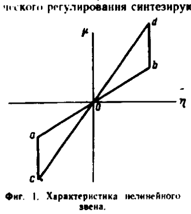
Фиг. 4.

Мы взяли для упрощения выкладок простейшее тело вращения — диск. Очевидно, что суммирование точек можно вести по любому объему тела вращения, следовательно, под J_0 надо понимать момент инерции любого тела вращения относительно оси собственного вращения, т. е. относительно оси AB. Например, если взять обыкновенный волчок (фиг. 4), то в этом случае J_0 — момент инерции волчка относительно оси собственного вращения, а момент $L_{гир}$ будет препятствовать падению волчка под действием опрокидывающего момента $L_{опр}$, образованного силой тяжести $\bar{P}$ (ось собственного вращения волчка наклонена к вертикальной оси дополнительного вращения под углом γ).

Аспирант Е. К. ШИГИН

НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ СО ЗВЕНОМ, ОБЛАДАЮЩИМ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ ТИПА Δ

Нелинейные системы автоматического регулирования обеспечивают наименьшую продолжительность переходного процесса и монотонность его протекания. Обычно нелинейные системы автоматического регулирования синтезируются либо по принципу применения релейного серводвигателя со стабилизацией обратной связью по сумме отклонения, скорости и ускорения отклонения регулируемой величины, либо по принципу применения линейного серводвигателя и нелинейных связей (например, пропорциональных квадрату скорости изменения регулируемой величины или квадратному корню из отклонения регулируемой величины)*.



Фиг. 1. Характеристика нелинейного звена.

μ — относительная величина силы или момента на выходе, η — относительная величина входной координаты.

Недостатком систем автоматического регулирования, синтезируемых по указанным принципам, является опасность возникновения автоколебательных режимов, а также необходимость общего форсирования усилителей и трудность осуществления нелинейных связей для некоторых систем, например гидравлических.

Однако имеется возможность синтеза быстродействующих нелинейных систем автоматического регулирования, обладающих преимуществами линейных систем. Для этого система автоматического регулирования составляется из линейных звеньев и одного звена нелинейного с характеристикой типа Δ, подобной указанной на фиг. 1.

Звено работает на ветви ab характеристики при разгоне системы и на ветви cd — при торможении. Для дальнейших расчетов введем коэффициент нелинейного звена

$$K_\Delta = \frac{\operatorname{tg} \widehat{aO\eta}}{\operatorname{tg} \widehat{bO\eta}}.$$

Разгоном системы автоматического регулирования называется участок переходного процесса, на котором скорость и ускорение регулируемой величины имеют одинаковые знаки, а *торможением* — участок переходного процесса, на котором скорость и ускорение имеют противоположные знаки.

Переключение нелинейного звена с ветви ab на ветвь cd осуществляется *дискриминатором* — устройством релейного типа, реагирующим на соотношения знаков скорости и ускорения регулируемой величины или промежуточных координат, выбранных соответствующим образом.

Фиг. 2. Структурная схема простейшей нелинейной системы автоматического регулирования.

1 — чувствительный элемент; 2 — безынерционный усилитель; 3 — исполнительное звено; 4 — дискриминатор; $\varphi_д$ — входная величина; $\varphi_п$ — выходная величина; δ — ошибка; $e_у$ — выходная величина усилителя; Δ — воздействие дискриминатора.

Структурная схема простейшей нелинейной системы автоматического регулирования с Δ-звеном представлена на фиг. 2.

Нелинейным является исполнительное звено *3*, характеристика которого представлена на фиг. 1. По оси $O\eta$ отложены относительные значения входной координаты, по оси $O\mu$ — относительные значения силы или момента, развиваемых исполнительным звеном в заторможенном состоянии.

Рассмотрим, как протекает переходный процесс в системе автоматического регулирования, схема которого представлена на фиг. 2.

Если бы дискриминатор был выключен и все звенья работали как линейные, процесс при ступенчатом воздействии протекал бы так, как показано на фиг. 3 сплошной линией.

На участке Ot_1 происходит разгон системы, на участке t_1—t_2 — торможение, на участке t_2—t_3—снова разгон и т. д. Изменение значений μ, $\dot{\varphi}_п$ и $\ddot{\varphi}_п$ при этом показано на графиках той же фигуры.

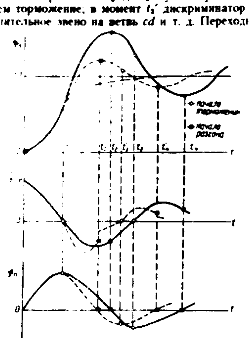
Теперь представим себе, что при протекании переходного процесса в момент t_1 дискриминатор, реагируя на изменение знака $\ddot{\varphi}_п$, переведет исполнительное звено с ветви ab на ветвь cd. Это приведет

* Основы автоматического регулирования, под ред. В. В. Солодовникова, Машгиз, 1954.

Я. З. Цыпкин, Теория релейных систем автоматического регулирования, ГИТТЛ, 1955.

к форсированному торможению, и переходный процесс будет протекать, как указано штриховой линией.

При достижении максимума отклонения в момент t_2' дискриминатор, реагируя на изменение знака φ, переведет исполнительное звено на ветвь *ab* и разгон от t_2' до t_3' будет осуществляться более умеренно, чем торможение; в момент t_3' дискриминатор снова переведет исполнительное звено на ветвь *cd* и т. д. Переходный процесс



Фиг. 3. Графики переходных процессов нелинейной системы автоматического регулирования.

будет затухать быстрее с меньшими перерегулированиями. Соответствующим выбором K_Δ можно свести колебательный процесс к апериодическому, как показано на фиг. 3 штрих-пунктирной линией.

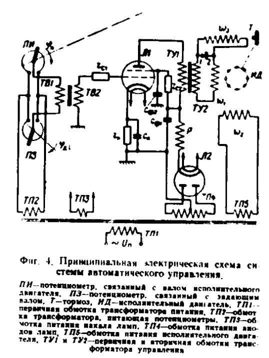
Приведем несколько конкретных примеров синтеза нелинейных систем автоматического регулирования с Δ-звеном.

Для улучшения качества переходного процесса маломощной системы автоматического управления, приведенной в книге Т. Н. Соколова *, было применено нелинейное исполнительное звено с Δ-характеристикой, представляющее собой агрегат: асинхронный двухфазный двигатель — электромеханический тормоз **.

* Т. Н. Соколов, Электромеханические системы автоматического управления, Госэнергоиздат, 1952.

** Е. К. Шигин, Следящая система автоматического управления, Авторское свидетельство № 106167 по заявке № 550384 от 9 апреля 1956.

На фиг. 4 приведена принципиальная электрическая схема этой системы, а на фиг. 2 — ее структурная схема. Последовательно с управляющей обмоткой двигателя w_1 включается обмотка электромагнита тормоза w_3. На участках разгона тормоз шунтируется контактами *1* и *2* дискриминатора (фиг. 4). На участках торможения шунтирующие контакты *1* и *2* разрываются, ток проходит через обмотку w_3 и исполнительное звено создает форсированное торможение.



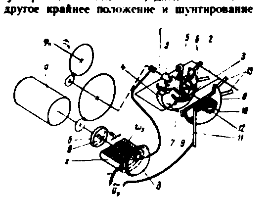
Фиг. 4. Принципиальная электрическая схема системы автоматического управления.

ПИ—потенциометр, связанный с валом исполнительного двигателя, *ПЗ*—потенциометр, связанный с задающим валом, *Т*—тормоз, *ИД*—исполнительный двигатель, *ТП1*—первичная обмотка трансформатора питания, *ТП2*—обмотка трансформатора, питающая потенциометры, *ТП3*—обмотка питания накала ламп, *ТП4*—обмотка питания анодов ламп, *ТП5*—обмотка питания исполнительного двигателя, *ТУ1* и *ТУ2*—первичная и вторичная обмотки трансформатора управления

В качестве дискриминатора может быть применено контактное устройство, приведенное на фиг. 5.

На промежуточном валу *1* сервопривода сидит рамка *2*, имеющая два опорных конуса *3*, на которых насажен диск *4*, вращающийся с малым моментом трения. Этот диск играет роль инерционного элемента. При отсутствии ускорения диск *4* приводится к нулевому положению двумя встречно-действующими пружинами кручения *5*. С помощью упоров *6* вращение диска *4* относительно рамки *2* ограничено в пределах некоторого угла. На диске *4* имеется пружинящий контакт *7*. На ось *10* рамки *2* надето коллекторное кольцо *8* с контактом *9*. Кольцо *8* изолировано от рамки и оси изолирующей втулным *12*, это кольцо так же как и диск *4* ограниченно-подвижно относительно рамки *2* (при помощи упоров *13*) в пределах некоторого угла. К коллекторному кольцу *8* прижимается токоподводящая щетка *11*, которая создает некоторый момент трения на кольце *8*.

При разгоне исполнительного двигателя знаки $\varphi_и$ и $\varphi_и$ будут одинаковы, а моменты от трения и инерции им противоположны, поэтому диск *4* и кольцо *8* будут повернуты относительно рамки *2* в одну и ту же сторону и контакты *7* и *9* будут замкнуты, обмотка w_3—шунтирована. При изменении знака тока в цепи двигателя (начало торможения) ускорение изменит знак, диск *4* вместе с контактом *7* отойдет в другое крайнее положение и шунтирование обмотки w_3



Фиг. 5. Кинематическая схема системы автоматического управления.

а—исполнительный двигатель, *б* и *в*—диски тормоза, *г*—магнитопровод электромагнита тормоза, *д*—якорь электромагнита тормоза.

прервется. Теперь тормоз будет действовать совместно с двигателем, останавливая систему. При изменении знака скорости кольцо *8* повернется относительно рамки *2* и снова контакты *7* и *9* замкнутся, разгон будет осуществляться только двигателем до нового участка торможения.

О качестве переходного процесса такой системы можно судить по кривой переходного процесса, построенной любым способом. Вычисление точек этой кривой необходимо производить по участкам разгона и торможения, учитывая, что начальными условиями для каждого последующего участка будут конечные условия предыдущего участка.

Как и в книге Т. Н. Соколова, имеем следующие уравнения звеньев системы:

рассогласование системы $\varphi_д - \varphi_и = \delta$;
напряжение на входе усилителя $e_{вх} = C_п\delta$;
электродвижущая сила на выходе усилителя $e_у = K_у e_{вх} = K_у C_п \delta$;

передаточная функция сервопривода

$$p\varphi_и = \frac{\frac{C_{мд}}{C_{мω}} e_у}{1 + T_1 p},$$

где
$\varphi_д$ — угол поворота задающего вала;
$\varphi_и$ — угол поворота исполнительного вала;
$C_п$ — коэффициент предварительного усиления;
$K_у$ — коэффициент усиления усилителя;
$C_{мд}$ и $C_{мω}$ — коэффициенты движущего и демпфирующего моментов;
T_1 — инерционная постоянная времени сервопривода;
p — символ дифференцирования.

Подставляя в передаточную функцию двигателя значения $e_у$, будем иметь уравнение системы

$$\left(T_1 p^2 + p + \frac{C_{мд}}{C_{мω}} K_у C_п\right)\varphi_и = \frac{C_{мд}}{C_{мω}} K_у C_п \varphi_д.$$

Деля левую и правую части на $\frac{C_{мд}}{C_{мω}} K_у C_п$ и обозначая $\frac{C_{мω}}{C_{мд} K_у C_п} = T_2$, будем иметь

$$(T_1 T_2 p^2 + T_2 p + 1)\varphi_и = \varphi_д.$$

На участках торможения тормоз создаст добавочный тормозящий момент. Хотя электромагнит тормоза имеет нелинейную характеристику, можно все-таки в некоторых пределах линеаризовать зависимость момента тормоза от приложенного напряжения. В этом случае на участках торможения будем иметь следующее уравнение динамики:

$$Jp^2\varphi_и = K_\Delta (C_{мд} e_у - C_{мω} p\varphi_и),$$

где J — приведенный момент инерции сервопривода.

Передаточная функция сервопривода на участках торможения будет выглядеть так:

$$\left(\frac{J}{K_\Delta C_{мω}} p^2 + p\right)\varphi_и = \frac{C_{мд}}{C_{мω}} e_у;$$

$$p\varphi_и = \frac{\frac{C_{мд}}{C_{мω}} e_у}{1 + \frac{T_1}{K_\Delta} p}$$

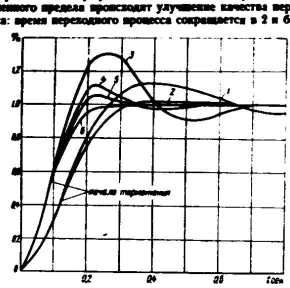
уравнение системы на участках торможения будет

$$\left(\frac{T_1}{K_\Delta} T_2 p^2 + T_2 p + 1\right)\varphi_и = \varphi_д.$$

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2012/01/10 : CIA-RDP80T00246A064300230001-2

На фиг. 6 приведены результаты расчета переходных процессов системы с $T_1=0,1$ сек.; $T_2=0,12$ сек. и $T_2=0,06$ сек. при $K_\Delta=1$ (линейная система), $K_\Delta=2$; $K_\Delta=3$; $K_\Delta=4$. На фиг. 7 приведены графики токов и моментов для первой системы.

Из приведенных графиков видно, что с возрастанием K_Δ до определенного предела происходит улучшение качества переходного процесса: время переходного процесса сокращается в 2 и более раз



Фиг. 6. Графики переходных процессов системы автоматического регулирования.

1 — линейная система ($T_1=0,1$ сек., $T_2=0,12$ сек., $K_\Delta=1$);
2 — нелинейная система ($T_1=0,1$ сек., $T_2=0,12$ сек., $K_\Delta=2$);
3 — линейная система ($T_1=0,1$ сек., $T_2=0,06$ сек.; $K_\Delta=1$);
4 — нелинейная система ($T_1=0,1$ сек., $T_2=0,06$ сек., $K_\Delta=2$);
5 — нелинейная система ($T_1=0,1$ сек., $T_2=0,06$ сек., $K_\Delta=3$);
6 — нелинейная система ($T_1=0,1$ сек., $T_2=0,06$ сек., $K_\Delta=4$).

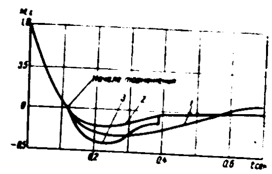
уменьшается перерегулирование в 2—4 раза, а при достаточно боль шом K_Δ переходный процесс протекает монотонно.

Следует отметить, что все реальные исполнительные звенья (элек тродвигатели, гидроцилиндры) имеют, кроме описанных в литера туре * типов нелинейности, и нелинейность типа Δ. Так, эксперимен ты показывают, что электродвигатели следящего привода развиваю различные по величине моменты в зависимости от направления вра щения и знака напряжения, как показано на фиг. 8.

Реальные системы автоматического регулирования в какой-т мере всегда имеют Δ-нелинейность и работают не только с $K_\Delta \geqslant 1$, н и с $K_\Delta < 1$. В последнем случае качество переходного процесса ре

* Основы автоматического регулирования, под ред. В. В. Солодовников Машгиз, 1954

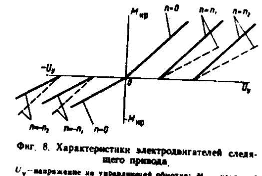
альной системы может быть худшим, чем вычисленное по осредненным линеаризованным характеристикам, а запас устойчивости — меньшим.



Фиг. 7. Графики относительных значений токов (i) в управляющей обмотке и крутящего момента (M) на валу двигателя (для системы с $T_1=0,1$ сек., $T_2=0,12$ сек.).

1 — ток и момент линейной системы; 2 — ток нелинейной системы с $K_\Delta=2$; 3 — момент нелинейной системы с $K_\Delta=2$.

На фиг. 9 представлены переходные процессы систем автоматического регулирования второго порядка при изменении K_Δ от нуля до бесконечности. Область переходных процессов реальных систем автоматического регулирования заштрихована. При уменьшении K_Δ



Фиг. 8. Характеристики электродвигателей следящего привода.

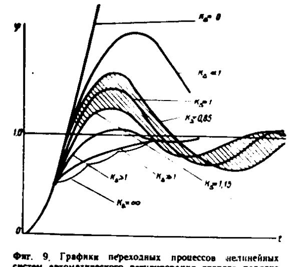
U_y — напряжение на управляющей обмотке; $M_{кр}$ — крутящий момент на валу двигателя; n — число оборотов двигателя;
——— прямое направление вращения;
– – – – обратное направление вращения.

от единицы до нуля происходит увеличение размахов колебаний системы, и при некотором K_Δ система становится неустойчивой. При увеличении K_Δ происходит улучшение переходного процесса с уменьшением времени, затрачиваемого на переходный процесс и пере-

3*

регулирование, а затем и превращение колебательного процесса в апериодический. При дальнейшем увеличении K_Δ переходный процесс затягивается.

Очевидно, что Δ-нелинейным может быть не только исполнительное звено, но и усилительный, преобразовательный, передающий и т. п. элемент, соответствующим образом выбранный в зависимости от структурной схемы системы.

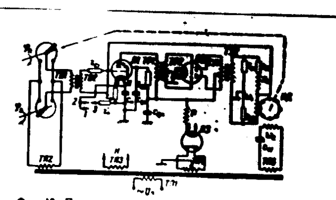


Фиг. 9. Графики переходных процессов нелинейных систем автоматического регулирования второго порядка при различных значениях K_Δ.

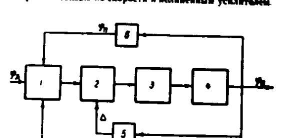
На фиг. 10 приведена принципиальная схема следящей системы с обратной связью по скорости и нелинейным усилителем, аналогичная линейной системе, приведенной в книге Соколова.

Структурная схема системы дана на фиг. 11. Здесь Δ-звеном является 1-я ступень усилителя. Дискриминатор, аналогичный описанному выше, включает на участках торможения сопротивление $r_к'$ (см. фиг. 10), чем увеличивает коэффициент усиления 1-й ступени усилителя: контакты *1* и *2*, находящиеся на инерционном диске, и контакт *3*, расположенный на коллекторном диске, при различии знаков скорости и ускорения замыкают цепь сопротивления $r_к'$, чем уменьшают общее сопротивление цепи смещения.

В качестве лампы Л1 используется пентод. Точка *а* (фиг. 12) является рабочей точкой на участках разгона, а *б* — на участках торможения. Так как по абсолютной величине на участках торможения напряжение управляющего сигнала меньше, чем на участках разгона, можно подобрать так рабочие точки *1* и *2*, что усилитель будет работать без искажений.

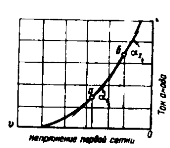


Фиг. 10. Принципиальная схема следящей системы с обратной связью по скорости и нелинейным усилителем.



Фиг. 11. Структурная схема следящей системы с обратной связью по скорости и нелинейным усилителем.

1 — чувствительный элемент, *2* — первая ступень усилителя, *3* — вторая ступень усилителя, *4* — исполнительный орган, *5* — дискриминатор, *6* — дифференцирующее звено.



Фиг. 12. Статическая характеристика первой усилительной лампы.

Переходный процесс рассчитываем по участкам разгона и торможения, как и в предыдущем случае. Приведем следующие уравнения звеньев:

уравнение обратной связи

$$e_o = \frac{r_{o1}}{r_{o1} + r_{o2}} e_m;$$

уравнение обратной связи, приведенное к входной цепи усилителя

$$e_o = \frac{r_{o1} C_e}{K_{вх} (r_{o1} + r_{o2})} \varphi_n;$$

напряжения на входе усилителя

$$e_1 = C_n \delta - \frac{r_{o1} C_e}{K_{вх} (r_{o1} + r_{o2})} p \varphi_n;$$

напряжение, подаваемое на двигатель,

$$e_y = K_y C_n \delta - \frac{K_y r_{o1} C_e}{K_{вх} (r_{o1} + r_{o2})} p \varphi_n,$$

где C_e — коэффициент противоэлектродвижущей силы двигателя;
$K_{вх}$ — коэффициент трансформации входного трансформатора.

Обозначим

$$\frac{r_{o1} C_e}{K_{вх} (r_{o1} + r_{o2})} = K_o,$$

тогда $e_y = K_y C_n \delta - K_y K_o p \varphi_n$.

В уравнение сервопривода $J p^2 \varphi_n + C_{м\omega} p \varphi_n = C_{мu} u$ подставляем $u = e_y$, тогда уравнение движения системы примет вид

$$J p^2 \varphi_n + C_{м\omega} p \varphi_n = C_{мu} K_y C_n \varphi_x - C_{мu} K_y C_n \varphi_n - C_{мu} K_y K_o p \varphi_n. \qquad (A)$$

Производя преобразования и деля обе части уравнения на $C_{мu} K_y C_n$, получим

$$\left(\frac{J}{C_{м\omega} + C_{мu} K_y K_o} \frac{C_{м\omega} + C_{мu} K_y K_o}{C_{мu} K_y C_n} p^2 + \frac{C_{м\omega} + C_{мu} K_y K_o}{C_{мu} K_y C_n} p + 1 \right) \varphi_n = \varphi_x .$$

Обозначим

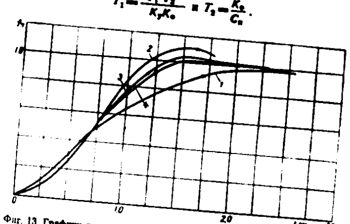
$$\frac{J}{C_{м\omega} + C_{мu} K_y K_o} = \frac{J}{C_{м\omega}\left(1 + \frac{C_{мu}}{C_{м\omega}} K_y K_o\right)} = T_1' \frac{1}{1 + \frac{1}{T_2'} K_y K_o} = T_1,$$

где $T_1' = \frac{J}{C_{м\omega}}$; $T_2' = \frac{C_{м\omega}}{C_{мu}}$;

$$\frac{C_{м\omega} + C_{мu} K_y K_o}{C_{мu} K_y C_n} = \frac{1 + \frac{C_{мu}}{C_{м\omega}} K_y K_o}{\frac{C_{мu}}{C_{м\omega}} K_y C_n} = \frac{1 + \frac{1}{T_2'} K_y K_o}{\frac{1}{T_2'} K_y C_n} = T_2.$$

Так как обычно $T_2' < 1$, а K_y и $K_o \gg 1$, можно положить

$$T_1 = \frac{T_1' T_2'}{K_y K_o} \text{ и } T_2 = \frac{K_o}{C_n}.$$



Фиг. 13. Графики переходных процессов следящей системы с обратной связью по скорости и нелинейным усилителем.
1 — линейная система ($T_1 = 0{,}2$ сек., $T_2 = 0{,}8$ сек., $K_\Delta = 1$);
2 — нелинейная система ($T_1 = 0{,}2$ сек., $T_2 = 0{,}4$ сек., $K_\Delta = 2$);
3 — нелинейная система ($T_1 = 0{,}2$ сек., $T_2 = 0{,}4$ сек., $K_\Delta = \frac{8}{3}$);
4 — нелинейная система ($T_1 = 0{,}2$ сек., $T_2 = 0{,}4$ сек., $K_\Delta = 4$).

Для участка разгона уравнение системы примет вид

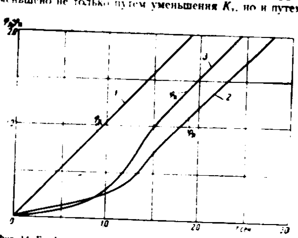
$$\left(\frac{T_1' T_2'}{K_y C_n} p^2 + \frac{K_o}{C_n} p + 1 \right) \varphi_n = \varphi_x;$$

для участка торможения

$$\left(\frac{T_1' T_2'}{K_\Delta K_y C_n} p^2 + \frac{K_o}{C_n} p + 1 \right) \varphi_n = \varphi_x.$$

Переходные процессы для линейной системы с $T_1 = 0{,}2$ сек. и $T_2 = 0{,}8$ сек. и нелинейных систем с $K_\Delta = 2$; $K_\Delta = \frac{8}{3}$ и $K_\Delta = 4$ при $K_{y.нелин} = \frac{1}{2} K_{y.лин}$ и $K_{o.нелин} = \frac{1}{2} K_{o.лин}$ приведены на фиг. 13 при ступенчатом воздействии и на фиг. 14 — при линейном. Как видно из графиков, даже при уменьшении общего коэффициента усиления А нелинейные системы дают большее быстродействие при ступенчатом воздействии и меньшую ошибку при линейном воздействии. Для приведенных систем время переходного процесса сократилось на 25%, а ошибка — на 30%.

Применение Δ-нелинейного усилителя открывает возможности применения менее мощных исполнительных двигателей, что снижает вес и габариты системы автоматического регулирования. Действительно, в правой части уравнения (А) произведение $C_{м.н}K_y$ может быть уменьшено не только путем уменьшения K_y, но и путем уменьшения $C_{м.н}$, что означает снижение мощности исполнительного двигателя.



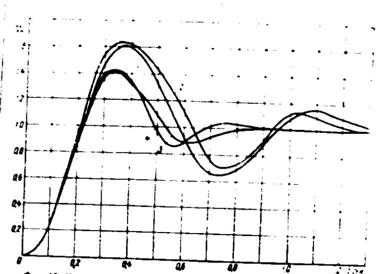
Фиг. 14. Графики переходных процессов следящей системы с обратной связью по скорости.

1 — линейное изменение входной величины $\varphi_д$; 2 — система с линейным усилителем (T_1 =0,2 сек., T_2 =0,8 сек., $K_Δ$ =1); 3 — система с нелинейным усилителем (T =0,9 сек., T_2 =0,4 сек., $K_Δ$ =4).

По описанным схемам автором были собраны маломощные следящие системы. В качестве исполнительного двигателя применялся асинхронный двигатель ДРК-627. Опыты подтвердили возможность улучшения переходного процесса применением Δ-звена. На фиг. 15 приведен график переходного процесса экспериментальной следящей системы с $K_Δ$ = 1 и 1,7. Применение Δ-звена дает преимущества также в системах более высокого порядка.

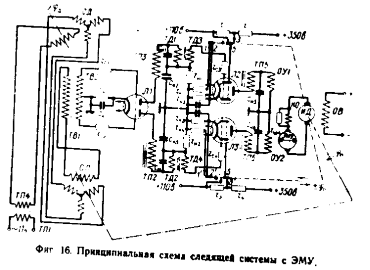
На фиг. 16 приведена принципиальная схема следящей системы с электромашинным усилителем и дифференцирующим звеном, а на фиг. 17 — структурная схема системы.

Дифференцирование осуществляется дифференцирующим трансформатором с обмотками ТД1; ТД2; ТД3; ТД4. Питание анодов ламп осуществляется обмотками ТП2; ТП3; ТП5; ТП6.



Фиг. 15. Кривые переходного процесса экспериментальной установки.

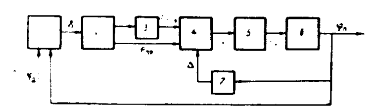
1 — теоретическая и 2 — экспериментальная кривые линейной системы (T_1 =0,32 сек., T = 0,06 сек., $K_Δ$ =1); 3 — теоретическая и 4 — экспериментальная кривые нелинейной системы с $K_Δ$ =1,7 и теми же постоянными времени.



Фиг. 16. Принципиальная схема следящей системы с ЭМУ.

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2012/01/10 : CIA-RDP80T00246A064300230001-2

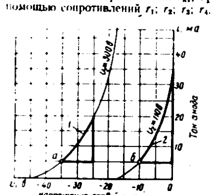
Сигнал рассогласования поступает с сельсина СП на первую ступень усилителя, выполненную на лампе Л1, начальное смещение на которой образовано падением напряжения на сопротивлении r_k. Вторая ступень выполнена на лучевых тетродах Л2 и Л3. Эта ступень является Δ-нелинейной. На участках разгона рабочей точкой



Фиг. 17. Структурная схема следящей системы с ЭМУ.

1 — чувствительный элемент, 2 — первая ступень усилителя, 3 — дифференцирующее звено, 4 — вторая ступень усилителя, 5 — третья ступень усилителя, 6 — исполнительное звено, 7 — дискриминатор.

лампы является точка *а* (фиг. 18), на участках торможения точка *б*. Как видно, для конкретной лампы 6П6С в этом случае $K_\Delta = 2$. Для выбора рабочей точки задается начальное смещение на первой сетке с помощью сопротивлений r_{k1}; r_{k2}; r_{k3}; r_{k4} и на второй сетке с помощью сопротивлений r_1; r_2; r_3; r_4. Переключение контактов 1; 2; 3; 4; 5 и 1′; 2′; 3′; 4′; 5′ в зависимости от знака скорости исполнительного вала осуществляется дискриминатором, находящимся на промежуточном валу сервопривода, с некоторым моментом трения. На участках торможения замыкаются контакты 1 и 2 или 1′ и 2′, а контакты 5 и 5′ переключаются с контактов 3 или 3′ на 4 или 4′.



Фиг. 18. Статические характеристики лампы 6П6С при разгоне (*1*) и торможении (*2*); U_2 — напряжение второй сетки.

В зависимости от знака скорости исполнительного вала рабочей точкой лампы Л2 или Л3 является точка *а*, тогда как рабочей точкой другой лампы является точка *б*. В зависимости от знака тока в выходной цепи второй ступени усилителя больший ток проходит через лампы Л2 или Л3. Таким образом, при соотношении знаков тока и скорости исполнительного вала, соответствующем разгону исполнительного двигателя, рабочей точкой лампы, по которой проходит больший ток, является точка *а*; при соотношении же знаков тока и скорости, соответствующем торможению, рабочей точкой

лампы, по которой проходит больший ток, является точка *б*. Такая работа 2-й ступени вызывает более быстрое изменение напряжения на выходе 3-й ступени усилителя ЭМУ на участках торможения, что приводит к более быстрому затуханию переходного процесса.

Переходный процесс следует рассчитывать исходя из следующих уравнений звеньев:

напряжение на первом каскаде усилителя

$$e_{\text{вх}} = C_n\delta;$$

напряжение на входе второго каскада

$$u_c = C_n\delta + C_{\text{диф}}p\delta,$$

где $C_{\text{диф}}$ — коэффициент дифференцирования дифференцирующего звена;

напряжение на выходе второго каскада усилителя

на участке разгона $e_y' = K_y(C_n\delta + C_{\text{диф}}p\delta)$;

на участке торможения $e_y' = K_\Delta K_y(C_n\delta + C_{\text{диф}}p\delta)$;

напряжение на выходе третьего каскада усилителя:

на участке разгона $e_y = \dfrac{K_y(C_n\delta + C_{\text{диф}}p\delta)}{1 + T_3p}$;

на участке торможения $e_y = \dfrac{K_\Delta K_y(C_n\delta + C_{\text{диф}}p\delta)}{1 + T_3p}$,

где T_3 — постоянная времени ЭМУ;

передаточная функции двигателя

$$p\varphi_n = \frac{\dfrac{C_{\text{мн}}}{C_{\text{мω}}}e_y}{1 + T_1p}.$$

Преобразуем выражение для e_y:

$$(1 + T_3p)\,e_y = K_yC_n\left(\delta + \frac{C_{\text{диф}}}{C_n}p\delta\right);$$

обозначим $\dfrac{C_{\text{диф}}}{C_n} = K_{\text{диф}}$ и $\dfrac{C_{\text{мω}}}{C_{\text{мн}}} = T_2'$.

Тогда движение системы описывается уравнениями:

на участках разгона

$$(1 + T_3p)\,e_y = K_yC_n(\delta + K_{\text{диф}}p\delta); \qquad (\text{Б})$$

$$(T_1T_2'p^2 + T_2'p)\,\varphi_n = e_y; \qquad (\text{В})$$

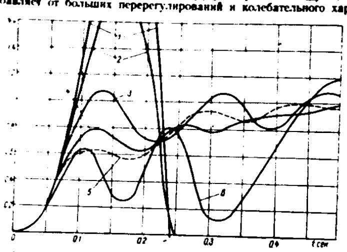
на участках торможения в уравнение (Б) вводится коэффициент K_Δ:

$$(1 + T_3p)\,e_y = K_\Delta K_yC_n(\delta + K_{\text{диф}}p\delta).$$

Построение переходного процесса можно проводить графически по методу, предложенному Башкировым *.

На фиг. 19 приведены графики переходных процессов системы с $T_1 = 0,1$ сек., $T_2' = 0,033$ сек., $T_3 = 0,1$ сек. и $K.C._\nu = 1,38$ в при различных $K_{диф}$ и K_Δ.

Как видно из графиков, возможность воздействия на форму переходного процесса путем изменения $K_{диф}$ ограничена. Даже наилучшее значение коэффициента дифференцирования $K_{диф} = 0,5$ не избавляет от больших перерегулирований и колебательного харак-



Фиг. 19. Графики переходных процессов следящей системы с ЭМУ.

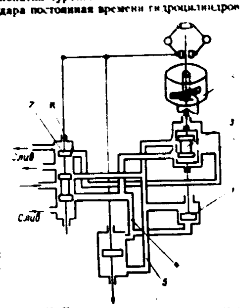
$1 - K_{диф} = 0,1$; $K_\Delta = 1$; $4 - K_{диф} = 0,5$, $K_\Delta = 2$;
$2 - K_{диф} = 0,2$; $K_\Delta = 1$; $5 - K_{диф} = 0,5$; $K_\Delta = 4$;
$3 - K_{диф} = 0,5$; $K_\Delta = 1$; $6 - K_{диф} = 1,0$; $K_\Delta = 1$.

тера переходного процесса. Применение более сложных систем с обратными связями по ускорению потребовало бы увеличения мощности исполнительного двигателя со всеми вытекающими из этого последствиями. Применение же Λ-нелинейного звена, не вызывая увеличения мощности исполнительного двигателя и ЭМУ, дает возможность существенно улучшить переходный процесс системы с инерционным усилителем.

Применение Λ-звена в системе автоматического регулирования оборотов гидротурбины позволяет существенно улучшить качество переходного процесса.

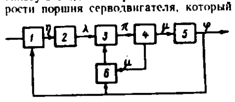
Обычно возможность улучшения переходного процесса систем автоматического регулирования гидравлических турбин большой мощности ограничивается сравнительно большим значением постоянных времени исполнительных гидроцилиндров, устанавливающих направляющие и рабочие лопатки турбин. Из-за опасности возникновения гидравлического удара постоянная времени гидроцилиндров выдерживается в пределах $4 \div 7$ сек. и не может быть снижена. Поэтому переходный процесс затухает медленно (обычно мирятся с наличием $3 \div 4$ колебаний около нового установившегося положения) *.

Система автоматического регулирования с Λ-звеном, принципиальная схема которой приведена на фиг. 20 и структурная схема—на фиг. 21, не обладает указанным недостатком.



Фиг. 20. Принципиальная схема системы автоматического регулирования гидротурбины

Здесь Λ-характеристикой обладает трубопровод с дросселирующим окном K золотника 7, а роль дискриминатора выполняют поршень 1 с гильзой 2 и инерционный диск (маховик) 6 с профильным вырезом и золотником 3. Во время протекания переходного процесса поршень 1 передвигает гильзу 2 в одно из крайних положений в зависимости от знака скорости поршня серводвигателя, который в свою очередь зависит от знака разности давлений в трубопроводах 4 и 5. Золотник 3, связанный поводком с вырезом в маховике 6, занимает одно из крайних положений в зависимости от знака ускорения вращения вала гидроагрегата.



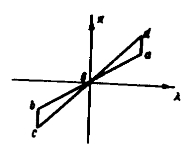
Фиг. 21. Структурная схема системы автоматического регулирования гидротурбины.

1—чувствительный элемент, 2—первая ступень усилителя, 3—трубопровод, 4—исполнительное звено, 5—объект регулирования, 6—дискриминатор.

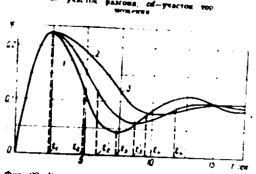
Дискриминатор выполнен таким образом, что на участках разгона при совпадении знаков скорости поршня гидроцилиндра и ускорения вала гидроагрегата окна в гильзе 2 и золотнике 3 совпадают и часть масла через окно K из трубопровода с бо́льшим давлением поступает

* Основы автоматического регулирования, под ред. В. В. Солодовникова, Машгиз, 1954.

* А. Г. Москалев, Автоматическое регулирование частоты в энергосистемах, Госэнергоиздат, 1952.

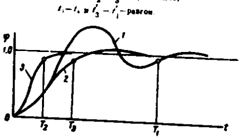


Фиг 22 Статическая характеристика трубопровода
ab участок разгона, cd — участок торможения



Фиг 23 Графики переходных процессов линейной системы автоматического регулирования гидротурбины (кривая 1) и нелинейных систем с $K_\Delta = 2$ (кривая 2) и $K_\Delta = 3$ (кривая 3).

$0 - t_1$ — торможение;
$t_1 - t_2$ и $t_1 - t_2'$ — разгон;
$t_2 - t_3$ и $t_2' - t_3'$ — торможение;
$t_3 - t_4$ и $t_3' - t_4'$ — разгон.



Фиг. 24. Переходные процессы систем автоматического регулирования: линейной 1, нелинейной с Δ-звеном 2 и релейной 3 с оптимальным процессом.

на слив, в результате чего замедляется движение поршня исполнительного гидроцилиндра. Слив масла будет происходить до тех пор пока не изменится знак скорости поршня гидроцилиндра. При изменении знака скорости поршня гидроцилиндра гильза 2 займет другое крайнее положение, слив масла прекратится, что вызовет форсированное торможение.

Движение системы описывается следующими уравнениями
уравнение центробежного измерительного органа

$$\varphi = -\delta\eta;$$

уравнение золотника

$$\lambda = \eta_1 - \mu;$$

уравнение трубопровода на участках разгона

$$\pi = \frac{\lambda}{K_\Delta}$$

и на участках торможения

$$\pi = \lambda$$

(характеристика трубопровода приведена на фиг. 22);
уравнение исполнительного гидроцилиндра

$$T_2 p\mu = \pi;$$

уравнение гидроагрегата

$$T_1 p\varphi + \varphi = \mu_1 + f(t),$$

где φ — относительная скорость гидроагрегата;
η — относительное перемещение втулки центробежного чувствительного органа;
λ — относительное перемещение золотника;
π — относительная скорость масла в трубопроводах;
μ — относительное перемещение поршня серводвигателя;
T_1 — постоянная времени гидроагрегата;
T_2 — постоянная времени серводвигателя;
δ — степень неравномерности;

$$K_\Delta = \frac{\operatorname{tg} \widehat{\lambda O d}}{\operatorname{tg} \widehat{\lambda O a}}.$$

Построение переходного процесса можно проводить по уже упоминавшемуся графическому методу Башкирова.

На фиг. 23 приведены результаты расчетов переходных процессов для системы с $T_1 = 6$ сек., $T_2 = 4$ сек. и $\delta = 0{,}1$ при $K_\Delta = 1$, $K_\Delta = 2$, $K_\Delta = 3$.

Как видно из графиков, применение Δ-звена в системе автоматического регулирования гидротурбины также улучшает переходный процесс.

Следует отметить, что при останове поршня гидроцилиндра с дросселированием уменьшается опасность возникновения гидравли-

ческого удара в масляном тракте, поэтому постоянная времени гидроцилиндра может быть уменьшена (если это не вызовет гидравлических ударов в водоводах) и переходный процесс может быть еще более улучшен.

Приведенные расчеты показывают, что нелинейные системы автоматического регулирования с Λ-звеном обладают существенными преимуществами по быстродействию и монотонности переходного процесса перед линейными системами; следует ожидать также и большего запаса устойчивости, чем у линейных систем.

Для сравнения на фиг. 21 приведены переходные процессы трех систем автоматического регулирования при ступенчатом управляющем воздействии: релейной с оптимальным переходным процессом, линейной и нелинейной с Λ-звеном. Как видно из графиков переходных процессов, по быстродействию система с Λ-звеном занимает промежуточное положение между линейной системой и релейной системой с оптимальным переходным процессом ($T_1 > T_3 > T_2$). Уступая релейным системам с оптимальным переходным процессом по быстродействию, нелинейные системы с Λ-звеном, очевидно, будут иметь то преимущество, что в них не будет склонности к автоколебательным режимам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Москалев А. Г., Автоматическое регулирование частоты в энергосистемах, Госэнергоиздат, 1952.
2. Основы автоматического регулирования, под ред. В. В. Солодовникова, Машгиз, 1954.
3. Соколов Т. Н., Электромеханические системы автоматического управления, Госэнергоиздат, 1952.
4. Цыпкин Я. З., Теория релейных систем автоматического регулирования, ГИТТЛ, 1955.
5. Шигин Е. К., Следящая система автоматического управления, Авторское свидетельство № 106167, по заявке № 550384 от 9 апреля 1956.

Ассистент Н. А. ЛОБЧЕВ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Метод Галеркина заключается, как известно, в том, что для дифференциального уравнения вида $F(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) = 0$ ищется приближенное решение в виде суммы

$$q = a_0 + a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + \ldots + a_k \varphi_k,$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ — некоторые функции времени, заранее назначаемые;

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k$ — постоянные, подлежащие определению.

Точность решения дифференциального уравнения этим методом зависит от числа членов ряда и от того, насколько удачно выбраны функции φ_k. Если ряд будет содержать достаточно большое число членов, то приближенное значение функции q может очень близко подходить к ее точному значению $q = q(t)$. Однако при удачном выборе функции φ_k уже при $k = 2; 3$, а иногда и при $k = 1$ получается практически достаточно хорошее приближение.

Для определения коэффициентов a воспользуемся принципом Гамильтона. Для случая n степеней свободы выражение принципа Гамильтона имеет вид

$$\int_0^\tau \left(\delta T - \delta П + \sum_{j=1}^{n} Q_j \delta q_j\right) dt = 0, \qquad (1)$$

что при отсутствии неконсервативных сил Q_j приводит к виду

$$\delta \int_0^\tau (T - П)\, dt = 0,$$

где T — кинетическая энергия системы;

П — потенциальная энергия системы.

Известно, что для склерономной системы

$$T = T(q_1, q_2, \ldots, q_n;\ \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n);$$

$$П = П(q_1, q_2, \ldots, q_n).$$

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2012/01/10 : CIA-RDP80T00246A064300230001-2

В этом случае вариации кинетической и потенциальной энергии запишутся в виде

$$\delta T = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j + \frac{\partial T}{\partial q_j} \delta q_j \right); \tag{2}$$

$$\delta \Pi = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \delta q_j. \tag{3}$$

Подставим δT и $\delta \Pi$ в уравнение (1) и проинтегрируем первую сумму по частям

$$\int_0^{\tau} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \, dt = \left| \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right|_0^{\tau} - \int_0^{\tau} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j \, dt. \tag{4}$$

Вследствие того, что начальная и конечная точки фиксированы, т. е. при $t=0$ и $t=\tau$ величина $\delta q_j = 0$, будем иметь

$$\left| \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right|_0^{\tau} = 0. \tag{5}$$

Учитывая соотношения (4) и (5), перепишем (1) в виде

$$\sum_{j=1}^{n} \int_0^{\tau} \left[-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + Q_j \right] \delta q_j \, dt = 0. \tag{6}$$

Пусть теперь система имеет одну степень свободы (это не принципиальное ограничение), тогда

$$T = \frac{1}{2} a\dot{q}^2;$$

$$\Pi = \frac{1}{2} cq^2 + \text{члены высшего порядка.}$$

Используя эти выражения для T и Π, составим уравнение (6); при этом включим члены высшего порядка в разложении потенциальной энергии в выражение для $Q_j = Q$, а линейную часть сопротивления, содержащуюся в Q, запишем в виде отдельного слагаемого. Меняя знак, получим

$$\int_0^{\tau} (a\ddot{q} + b\dot{q} + cq - Q) \delta q \, dt = 0 \tag{7}$$

или сокращенно

$$\int_0^{\tau} F(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) \delta q \, dt = 0. \tag{8}$$

Для отыскания периодического решения уравнения $F(q, \dot{q}, \ddot{q}, t)$ с нулевой фазой за сравниваемые движения с искомым периодическим движением принимаются также периодические движения с тем же периодом. В этом случае равенство (8) выполняется не в любом интервале времени, а на периоде, т. е. время τ принимаем равным основному периоду.

Задаемся приближенным решением уравнения (8) в виде

$$q = a_0 + a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + \ldots + a_k \varphi_k, \tag{9}$$

где $\varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ — периодические функции того же периода. Варьируя выражение (9), получим

$$\delta q = \delta a_0 + \varphi_1 \delta a_1 + \varphi_2 \delta a_2 + \ldots + \varphi_k \delta a_k,$$

что при подстановке в (8) дает

$$\int_0^{\tau} F(a_0 + a_1\varphi_1 + \ldots + a_k\varphi_k;\ a_1\dot{\varphi}_1 + \ldots + a_k\dot{\varphi}_k;\ a_1\ddot{\varphi}_1 + \ldots + a_k\ddot{\varphi}_k,\ t) \times$$

$$\times (\delta a_0 + \varphi_1 \delta a_1 + \varphi_2 \delta a_2 + \ldots + \varphi_k \delta a_k) \, dt = 0.$$

В этом уравнении вариации $\delta a_0, \delta a_1, \delta a_2, \ldots, \delta a_k$ произвольны. Положим все δa, кроме δa_0, равными нулю. Это приведет к соотношению

$$\int_0^{\tau} F \, dt = 0. \tag{10}$$

Рассуждая подобным образом по отношению к оставшимся k вариациям, получим совместно с (10) систему $(k+1)$ уравнений для определения коэффициентов $a_0, a_1, \ldots a_k$

$$\int_0^{\tau} F \varphi_j \, dt = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k). \tag{11}$$

Если бы выражение (9) давало точное решение исходного уравнения $a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = Q$, то функция $F(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) = 0$.

В данном же случае функция $F = a\ddot{q} + b\dot{q} + cq - Q \neq 0$ представляет собой какую-то ошибку, и она будет тем меньше, чем точнее q дает решение уравнения (7). В связи с этим равенства (10) и (11) показывают обращение в нуль различно взвешенных средних ошибок за время τ.

Пусть теперь функция F имеет вид

$$F = \ddot{q} + \omega^2 q + \mu f(q\dot{q}) - Q(t) = 0, \tag{12}$$

где μ — малый параметр, а колебания, описываемые уравнением (12), близки к линейным.

Полагаем

$$q = x_0 + a_0 + a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + \ldots + a_k \varphi_k, \tag{13}$$

4*

где x_0 есть решение линейного уравнения

$$\ddot{x}+\omega^2 x-Q(t)=0. \tag{14}$$

Составляя соотношения (10) и (11), получим следующую систему уравнений

$$\int_0^{\tau}[\ddot{x}_0+a_1\ddot{\varphi}_1+\ldots+a_k\ddot{\varphi}_k+\omega^2x_0+\omega^2a_0+\omega^2a_1\varphi_1+\ldots$$
$$\ldots+\omega^2a_k\varphi_k+\mu f(q,\ \dot{q})-Q]\,dt=0;$$
$$\int_0^{\tau}[\ddot{x}_0+a_1\ddot{\varphi}_1+\ldots+a_k\ddot{\varphi}_k+\omega^2x_0+\omega^2a_0+\omega^2a_1\varphi_1+\ldots+\omega^2a_k\varphi_k+$$
$$+\mu f(q,\ \dot{q})-Q]\,\varphi_j\,dt=0 \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$$

или в развернутом виде с учетом уравнения (14)

$$\left.\begin{aligned}
&a_0\omega^2\tau+a_1\int_0^{\tau}(\ddot{\varphi}_1+\omega^2\varphi_1)\,dt+\ldots+a_k\int_0^{\tau}(\ddot{\varphi}_k+\omega^2\varphi_k)\,dt\\
&\qquad+\mu\int_0^{\tau}f\,dt=0,\\
&a_0\omega^2\int_0^{\tau}\varphi_1\,dt+a_1\int_0^{\tau}(\ddot{\varphi}_1+\omega^2\varphi_1)\,\varphi_1\,dt+\ldots\\
&\qquad\ldots+a_k\int_0^{\tau}(\ddot{\varphi}_k+\omega^2\varphi_k)\,\varphi_1\,dt+\mu\int_0^{\tau}f\varphi_1\,dt=0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_0\omega^2\int_0^{\tau}\varphi_k\,dt+a_1\int_0^{\tau}(\ddot{\varphi}_1+\omega^2\varphi_1)\,\varphi_k\,dt+\ldots\\
&\qquad\ldots+a_k\int_0^{\tau}(\ddot{\varphi}_k+\omega^2\varphi_k)\,\varphi_k\,dt+\mu\int_0^{\tau}f\varphi_k\,dt=0.
\end{aligned}\right|\tag{15}$$

Полученная система уравнений дает возможность определить коэффициенты $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_k$, которые будут пропорциональны малому параметру μ.

Функции $\varphi_j\,(j=1,\ 2,\ \ldots\ k)$ должны быть выбраны так, чтобы при $\mu=0$ система уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&a_0\omega^2\tau+a_1\int_0^{\tau}(\ddot{\varphi}_1+\omega^2\varphi_1)\,dt+\ldots+a_k\int_0^{\tau}(\ddot{\varphi}_k+\omega^2\varphi_k)\,dt=0,\\
&a_0\omega^2\int_0^{\tau}\varphi_1\,dt+a_1\int_0^{\tau}(\ddot{\varphi}_1+\omega^2\varphi_1)\,\varphi_1\,dt+\ldots\\
&\qquad\ldots+a_k\int_0^{\tau}(\ddot{\varphi}_k+\omega^2\varphi_k)\,\varphi_1\,dt=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_0\omega^2\int_0^{\tau}\varphi_k\,dt+a_1\int_0^{\tau}(\ddot{\varphi}_1+\omega^2\varphi_1)\,\varphi_k\,dt+\ldots\\
&\qquad\ldots+a_k\int_0^{\tau}(\ddot{\varphi}_k+\omega^2\varphi_k)\,\varphi_k\,dt=0
\end{aligned}\right|\tag{15'}$$

имела отличный от нуля определитель, т. е.

$$\Delta=\begin{vmatrix}
\omega^2\tau & \int_0^{\tau}(\ddot{\varphi}_1+\omega^2\varphi_1)\,dt & \ldots & \int_0^{\tau}(\ddot{\varphi}_k+\omega^2\varphi_k)\,dt\\
\omega^2\int_0^{\tau}\varphi_1\,dt & \int_0^{\tau}(\ddot{\varphi}_1+\omega^2\varphi_1)\,\varphi_1\,dt & \ldots & \int_0^{\tau}(\ddot{\varphi}_k+\omega^2\varphi_k)\,\varphi_1\,dt\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\omega^2\int_0^{\tau}\varphi_k\,dt & \int_0^{\tau}(\ddot{\varphi}_1+\omega^2\varphi_1)\,\varphi_k\,dt & \ldots & \int_0^{\tau}(\ddot{\varphi}_k+\omega^2\varphi_k)\,\varphi_k\,dt
\end{vmatrix}\neq 0.$$

В этом случае коэффициенты $a_0,\ a_j\,(j=1,\ 2\ \ldots\ k)$ будут равны нулю и выражение (13) дает решение линейного уравнения, в которое переходит уравнение (12) при $\mu=0$.

Для определения коэффициентов $a_j\,(j=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$ из системы уравнений (15) можно применить метод итераций. Так как функции φ_k известны, то все входящие в эти уравнения интегралы вида

$$\int_0^{\tau}\varphi_j\,dt;\quad \int_0^{\tau}(\ddot{\varphi}_i+\omega^2\varphi_i)\,\varphi_j\,dt$$

можно вычислить. В интегралах вида $\int_0^{\tau}f\varphi_j\,dt$ возьмем сначала $f=f(x_0,\ \dot{x}_0)$ и вычислим эти интегралы. Подставляя найденные значения интегралов указанных видов в уравнения (15), придем к системе алгебраических уравнений относительно подлежащих определению постоянных $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$.

Пусть в результате решения этой системы уравнений получим следующие значения коэффициентов:

$$a_0^{(1)},\ a_1^{(1)},\ a_2^{(1)},\ \ldots,\ a_k^{(1)}.$$

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2012/01/10 : CIA-RDP80T00246A064300230001-2

Затем берем функцию f в виде $f(q^{(1)}, \dot{q}^{(1)})$, где

$$q^{(1)} = x_0 + a_0^{(1)} + a_1^{(1)}\varphi_1 + a_2^{(1)}\varphi_2 + \ldots + a_n^{(1)}\varphi_n;$$

$$\dot{q}^{(1)} = \dot{x}_0 + a_1^{(1)}\dot{\varphi}_1 + a_2^{(1)}\dot{\varphi}_2 + \ldots + a_n^{(1)}\dot{\varphi}_n,$$

и снова подобным же образом определяем постоянные $a_0^{(2)}, a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \ldots, a_n^{(2)}$. Решение дифференциального уравнения (12) теперь запишется в виде

$$q^{(2)} = x_0 + a_0^{(2)} + a_1^{(2)}\varphi_1 + a_2^{(2)}\varphi_2 + \ldots + a_n^{(2)}\varphi_n.$$

Этот процесс можно продолжать неограниченно, и он сходится, так как основан на решении дифференциальных уравнений методом последовательных приближений, что по Пикару дает сходящийся процесс.

Примеры. 1. Свободные колебания. Дифференциальное уравнение этих колебаний имеет вид

$$\ddot{x} + x + \mu(x^3 + \lambda x^5) = 0. \qquad (16)$$

Будем искать решение дифференциального уравнения (16) в виде

$$x = x_0 + a_1 \cos 3t + a_2 \cos 5t, \qquad (17)$$

где $x_0 = A\cos t$ есть решение линейного уравнения, получаемого из данного при $\mu = 0$ и при начальных условиях $x(0) = A$; $\dot{x}(0) = 0$. Сравнивая выражения (13) и (17) найдем, что $\varphi_1 = \cos 3t$, $\varphi_2 = \cos 5t$. Для определения постоянных a_1 и a_2 составим систему уравнений (15)

$$a_1\int_0^{2\pi}(-9\cos 3t + \cos 3t)\cos 3t\,dt + a_2\int_0^{2\pi}(-25\cos 5t + \cos 5t)\times$$
$$\times\cos 3t\,dt + \mu\int_0^{2\pi}(A^3\cos^3 t + \lambda A^5\cos^5 t)\cos 3t\,dt = 0;$$

$$a_1\int_0^{2\pi}(-9\cos 3t + \cos 3t)\cos 5t\,dt + a_2\int_0^{2\pi}(-25\cos 5t + \cos 5t)\times$$
$$\times\cos 5t\,dt + \mu\int_0^{2\pi}(A^3\cos^3 t + \lambda A^5\cos^5 t)\cos 5t\,dt = 0.$$

Проделав необходимые выкладки, получим следующие значения коэффициентов:

$$a_1 = +\mu\left(\frac{1}{32}A^3 + \frac{5}{128}\lambda A^5\right);$$

$$a_2 = +\frac{1}{384}\mu\lambda A^5.$$

После подстановки в уравнение (17) получим

$$x = A\cos t + \mu\left(\frac{1}{32}A^3 + \frac{5}{128}\lambda A^5\right)\cos 3t + \frac{1}{384}\mu\lambda A^5\cos 5t.$$

2. Вынужденные колебания. Дифференциальное уравнение этих колебаний имеет вид

$$\ddot{x} + x + \mu(x^3 + \lambda x^5) = h\cos pt. \qquad (18)$$

Решение ищем в виде

$$x = (A + a_1)\cos pt + a_2\cos 3pt + a_3\cos 5pt, \qquad (19)$$

где $x_0 = A\cos pt$ $\left(A = \frac{h}{1-p^2}\right)$;

$\varphi_1 = \cos pt$;

$\varphi_2 = \cos 3pt$;

$\varphi_3 = \cos 5pt$.

Составляя систему уравнений (15) и решая ее, находим коэффициенты

$$a_1 = -\frac{\mu}{1-p^2}\left(\frac{3}{4}A^3 + \frac{5}{8}\lambda A^5\right);$$

$$a_2 = -\frac{\mu}{1-9p^2}\left(\frac{1}{4}A^3 + \frac{5}{16}\lambda A^5\right);$$

$$a_3 = -\frac{\mu}{16(1-25p^2)}\lambda A^5.$$

Подставляя в (19), получим

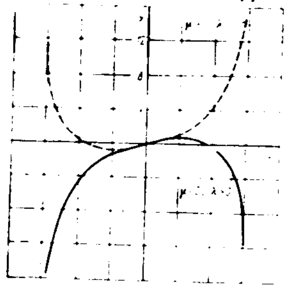
$$x = \left[\frac{h}{1-p^2} - \frac{\mu}{1-p^2}\left(\frac{3}{4}A^3 + \frac{5}{8}\lambda A^5\right)\right]\cos pt -$$
$$-\frac{\mu}{1-9p^2}\left(\frac{1}{4}A^3 + \frac{5}{16}\lambda A^5\right)\cos 3pt - \frac{\mu}{16(1-25p^2)}\lambda A^5\cos 5pt. \qquad (20)$$

Частота возмущающей силы p и амплитуда A полностью характеризуют полученное периодическое решение нелинейного дифференциального уравнения (18). Найдем зависимость между p и A. Выражение $x_0 = A\cos pt$ можно рассматривать как первое приближение для искомого решения уравнения (18), а выражение (20) — как следующее приближение. Так как мы исследуем колебания, близкие к линейным, то коэффициент при $\cos pt$ в выражении (20) не должен сильно отличаться от амплитуды A, поэтому положим этот коэффициент равным A. Это приведет к соотношению

$$p^2 = 1 - \frac{h}{A} + \mu\left(\frac{3}{4}A^2 + \frac{5}{8}\lambda A^4\right). \qquad (21)$$

Уравнение (21) позволяет рассматривать p^2 как данную функцию амплитуды A, значением которой и будем задаваться. В плоскости p, A это уравнение дает семейство кривых, для которых амплитуда h возмущающей силы играет роль параметра. Такие кривые называются амплитудными кривыми; при $\mu=0$ они приводятся к амплитудным кривым вынужденных линейных колебаний.

Для получения более высокого приближения для x указанным методом надо опять положить коэффициент при $\cos pt$ равным A. Это приведет к соотношению между A и p, аналогичному (21), но более точному.



Фиг. 1 Графики функции $y=x+\mu(x^3+\lambda x^5)$

Выясним влияние знаков μ и λ на характер амплитудных кривых. На фиг. 1 и 2 представлены графики функции

$$y=x+\mu(x^3+\lambda x^5),$$

выражающей восстанавливающую силу при различных комбинациях знаков μ и λ и при следующих значениях этих величин: $\mu=0{,}1$; $\lambda=0{,}5$.

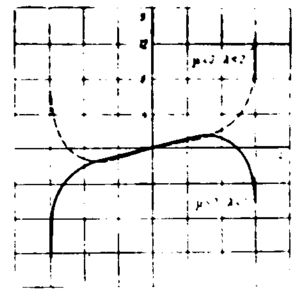
На фиг. 3 даны примерные амплитудные кривые в соответствии с указанными случаями. На этих графиках по оси ординат отложено абсолютное значение A; кривые построены для различных положительных значений h. Кривые, соответствующие свободным колебаниям ($h=0$)

$$p_A^2=1+\mu\left(\frac{3}{4}A^2+\frac{5}{8}\lambda A^4\right),$$

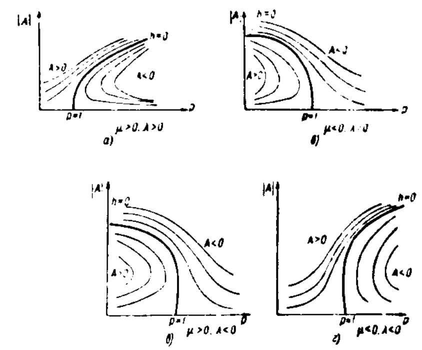
выделены на графиках жирной линией. Эти кривые называются скелетными кривыми.

Из рассмотрения графиков (3, *а*) и (3, *б*) следует, что при $\lambda>0$ учет члена пятой степени в уравнении (18) существенного влияния на амплитудные кривые не оказывает. Действительно, если в уравнении (18) положить $\lambda=0$, то мы получим известное уравнение Дуффинга. Для этого уравнения качественный характер резонансных кривых при жесткой ($\mu>0$) и мягкой ($\mu<0$) упругой силе будет таким же, как и для уравнения (18). Графики на фиг. (3, *в*) и (3, *г*) показывают, что при $\lambda<0$ происходит изменение характера амплитудных кривых по сравнению с аналогичными кривыми для уравнения Дуффинга.

Из сказанного можно сделать вывод, что, если в функции $y=x+\mu(x^3+\lambda x^5)$ коэффициент $\lambda<0$, то при интегрировании уравнения (18) надо обязательно учитывать член, содержащий λ.

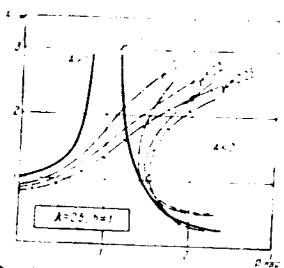


Фиг. 2 Графики функции $y=x+\mu(x^3+\lambda x^5)$.



Фиг. 3 Амплитудные кривые.

На фиг. 4 изображены резонансные кривые, соответствующие уравнению (21), при различных положительных значениях коэффициента μ. Из рассмотрения резонансных кривых следует, что при малом μ амплитудные кривые находятся вблизи соответствующих кривых линейных вынужденных колебаний. При увеличении μ



Фиг. 4. Амплитудные кривые при различных значениях μ.

кривые отклоняются вправо и увеличивается интервал, в котором каждому значению p соответствует только одно значение A. Следует также отметить, что нелинейность особенно сильно проявляется при больших значениях амплитуд; при малых значениях амплитуд все резонансные кривые располагаются вблизи резонансной кривой $\mu = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Норпш Ю. И., Защита самолетного оборудования от вибрации, Оборонгиз, 1949.
2. Канторович Л. В. и Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, издание 4-е, Гостехиздат, М.—Л., 1952.
3. Кац А. М., О вынужденных нелинейных колебаниях, Труды Ленинградского индустриального института, № 3, вып. 1, 1939.
4. Лурье А. И., Чекмарев А. И., Вынужденные колебания в нелинейной системе с характеристикой, составленной из двух прямолинейных отрезков, Прикладная математика и механика, Новая серия, т. I, вып. 3, 1938.
5. Малкин И. Г., Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, 1956.
6. Стокер Дж., Нелинейные колебания в механических и электрических системах, ИЛ, 1953.
7. Фрезер Р., Дункан В., Коллар А., Теория матриц и ее приложения к дифференциальным уравнениям и динамике, ИЛ, 1950.

Мл. научный сотрудник А. ... ГОЛЕНКО

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЦИЛИНДРЕ

В некоторых задачах машиностроения встречается течение жидкости под напором во вращающейся цилиндрической полости. В качестве примеров можно указать на процесс подачи смазки в поршневых машинах, на процесс охлаждения ротора турбины и др. В некоторых случаях вращение цилиндрической полости, содержащей жидкость, происходит с небольшим возмущением начальной угловой скорости вращения — с замедлением или ускорением. Возникает вопрос о характере движения жидкости внутри полости в данном случае. Освещение этого вопроса может быть полезно при решении и второй, обратной задачи — о влиянии внутреннего движения жидкости относительно полости на движение самой полости.

В настоящей работе мы предлагаем некоторое приближенное решение первой задачи, полученное при нескольких допущениях, вытекающих из существа вопроса.

При исследовании задачи принимаются следующие допущения.

Предполагается, что вязкая несжимаемая жидкость заполняет бесконечно длинную цилиндрическую полость сплошь. Цилиндр вращается с угловой скоростью

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 + \varepsilon t, \tag{1}$$

где $\dot{\varphi}_0$ — известная начальная угловая скорость вращения трубы,
ε — положительное или отрицательное угловое ускорение, величина которого также известна и значение которой мало сравнительно с $\dot{\varphi}_0$: $|\varepsilon| \ll \dot{\varphi}_0^2$.

Можно считать, что появление углового ускорения ε вызывает возмущение некоторого установившегося движения жидкости внутри полости при данной угловой ее скорости $\dot{\varphi}_0$. Это течение предполагается ламинарным и осесимметричным. Возмущение внешнего движения полости, характеризуемое величиной ε, очевидно, не нарушит осесимметричности и дальнейшего возмущенного движения жидкости, так как ось вращения остается неизменной в пространстве. Вследствие малости ε можно пренебречь тангенциальной силой инерции от переносного движения. Ввиду несжимаемости жидкости

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2012/01/10 : CIA-RDP80T00246A064300230001-2

и сплошного заполнения полости можно пренебречь центробежными силами инерции и силами Кориолиса (можно пренебречь и массовыми силами). Также можно считать, что радиальная компонента поля скоростей v_r равна нулю.

В цилиндрических координатах с осью z, совпадающей с осью цилиндрической полости, скорость жидкости $\bar{V}$ может быть записана в виде

$$\bar{V}(r, t) = \bar{v}_z(r) + \bar{v}_\theta(r, t), \tag{2}$$

где $\bar{v}_z(r)$ — обычное решение для ламинарного течения в цилиндре без учета вращения *. В то время как $\bar{v}_\theta(r, t)$ зависит от вращения трубы, очевидно, $\bar{v}_z$ всюду направлено параллельно оси цилиндра, а $\bar{v}_\theta$ лежит в плоскости, перпендикулярной к ее оси.

При сделанных допущениях уравнения Навье-Стокса в цилиндрических координатах дают следующее уравнение для $v_\theta(r, t)$:

$$\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} = \frac{1}{\nu}\frac{\partial v_\theta}{\partial t}. \tag{3}$$

Так как мы изучаем вращательное движение жидкости, которое мало отличается от вращения твердого тела (ибо ε — малая величина первого порядка), то можно предположить, что уравнение (3) обладает решением в форме

$$v_\theta = r(\dot{\varphi}_0 + \varepsilon t) + v_{1\theta}(r) + v_{2\theta}(r, t), \tag{4}$$

где $v_{1\theta}$ является функцией, которая не зависит от времени и характеризует относительное установившееся движение жидкости;

$v_{2\theta}(r, t)$ — функция также относительного движения жидкости, но зависит от радиуса частицы и от времени. Иначе говоря, все возмущенное движение разлагается на два движения. В этом случае уравнение (3) распадается на два уравнения:

$$\frac{d^2 v_{1\theta}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv_{1\theta}}{dr} - \frac{v_{1\theta}}{r^2} = \frac{\varepsilon}{\nu} r, \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 v_{2\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_{2\theta}}{\partial r} - \frac{v_{2\theta}}{r^2} = \frac{1}{\nu}\frac{\partial v_{2\theta}}{\partial t}. \tag{6}$$

Уравнение (5) может быть записано в виде

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{v_{1\theta}}{r} + \frac{dv_{1\theta}}{dr}\right) = \frac{\varepsilon}{\nu} r, \tag{7}$$

откуда

$$\frac{v_{1\theta}}{r} + \frac{dv_{1\theta}}{dr} = \frac{\varepsilon}{\nu}\frac{r^2}{2} + C_1. \tag{8}$$

* Н. В. Розе и др., Теоретическая гидродинамика, ч. 2, ГИТТЛ, 1937, стр. 300.

Умножив уравнение (8) на r, получим

$$\frac{d(v_{1\theta} r)}{dr} = \frac{\varepsilon}{\nu}\frac{r^3}{2} + C_1 r, \tag{9}$$

откуда

$$v_{1\theta} r = \frac{\varepsilon}{\nu}\frac{r^4}{8} + C_1\frac{r^2}{2} + C_2. \tag{10}$$

Так как $v_{1\theta}$ есть функция, которая характеризует относительное движение жидкости, то она должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\text{при } r = R \text{ и } r = 0 \quad v_{1\theta} = 0, \tag{11}$$

где R — внутренний радиус трубы. Выполнение этих условий позволяет определить произвольные постоянные в следующем виде:

$$C_1 = -\frac{\varepsilon}{\nu}\frac{R^2}{8} 2, \tag{12}$$

$$C_2 = 0. \tag{13}$$

Тогда из уравнения (10) найдем

$$v_{1\theta} = -\frac{1}{8}\frac{\varepsilon}{\nu} r(R^2 - r^2). \tag{14}$$

Переходя к решению уравнения (6), будем искать функцию $v_{2\theta}$ в следующей форме:

$$v_{2\theta} = G(r)H(t). \tag{15}$$

Подстановка (15) в уравнение (6) позволяет после деления уравнения на GH написать

$$\frac{1}{G}\frac{d^2G}{dr^2} + \frac{1}{Gr}\frac{dG}{dr} - \frac{1}{r^2} = \frac{1}{\nu}\frac{1}{H}\frac{dH}{dt} = k^2, \tag{16}$$

где k^2 произвольное целое число. Для определения H имеем уравнение

$$\frac{dH}{dt} = \nu H k^2. \tag{17}$$

Положив $H = Ce^{st}$, найдем $s = \nu k^2$, откуда

$$H = Ce^{\nu k^2 t}. \tag{18}$$

Так как при данной постановке задачи нельзя предположить, чтобы функция $v_{2\theta}$ с течением времени непрерывно росла, а следовательно, и возрастала бы скорость движения жидкости, то отсюда следует, что

$$k^2 < 0. \tag{19}$$

Окончательно, функция H запишется в виде

$$H = Ce^{-\nu k^2 t}. \tag{20}$$

Согласно сказанному о величине k^2 из уравнения (16) можно получить уравнение для определения функции G

$$\frac{d^2G}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dG}{dr}+\left(k^2-\frac{1}{r^2}\right)G=0. \qquad (21)$$

Решение этого уравнения записывается в функциях Бесселя первого и второго рода первого порядка

$$G=C_1^*J_1(kr)+C_2^*Y_1(kr). \qquad (22)$$

Это решение также должно удовлетворять граничным условиям (11). При $r=0$ функция Y_1 стремится к бесконечности, поэтому, естественно, следует положить $C_2^*=0$. Очевидно, что на стенке полости при $r=R$ функция $v_{2\varphi}$ должна обращаться в нуль, т. е.

$$G(R)=C_1^*J_1(kR)=0,$$

но это наблюдается в том случае, если

$$k_iR=\alpha_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots),$$

где α_i являются корнями функции Бесселя.

Отсюда находим второе условие, которому должна удовлетворять величина k^2:

$$k_i=\frac{\alpha_i}{R} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots). \qquad (23)$$

Учитывая все сказанное, можно окончательно написать решение уравнения (6) в виде

$$v_{2\varphi}=\sum_{i=1}^{\infty}C_iJ_1\left(\frac{\alpha_i}{R}r\right)e^{-\nu\left(\frac{\alpha_i}{R}\right)^2 t}, \qquad (24)$$

где $C_i=C^*_{1i}C$ согласно (15), (18), (22) являются произвольными постоянными, определяемыми из начальных условий.

Найденное решение (24) наглядно показывает, что член, зависящий от начальных условий, исчезает с течением времени. При некоторых условиях этот член будет пренебрежимо малым по сравнению с изменением члена $r(\dot{\varphi}_0+\varepsilon t)$.

Необходимым условием этого является следующее неравенство:

$$\nu\left(\frac{\alpha_1}{R}\right)\gg\frac{\varepsilon}{\dot{\varphi}_0},$$

где α_1 — первый и наименьший корень функции Бесселя.

Если принять $\nu=0{,}018$ *см/сек* (вода), $\alpha=2{,}405$ *см*, $\dot{\varphi}_0=1000\frac{1}{сек}$, $\varepsilon=0{,}1\frac{1}{сек^2}$, $R=2{,}405$ *см*, то $0{,}018\gg0{,}0001$.

Это обстоятельство позволяет представить решение (4) в следующем виде:

$$v_\varphi=r(\dot{\varphi}_0+\varepsilon t)-\frac{1}{8}\frac{\varepsilon}{\nu}r(R^2-r^2). \qquad (25)$$

Возвращаясь к равенству (2), можем окончательно написать

$$\bar{V}(r,\ t)=\frac{p_1-p_2}{4\mu l}(R^2-r^2)\bar{z}^0+$$
$$+\left[r(\dot{\varphi}_0+\varepsilon t)-\frac{1}{8}\frac{\varepsilon}{\nu}r(R^2-r^2)\right]\bar{\varphi}^0, \qquad (26)$$

где

$$v_z=\frac{p_1-p_2}{4\mu l}(R^2-r^2);$$

$\bar{z}^0$, $\bar{\varphi}^0$ — единичные векторы цилиндрических координат. Отметим еще раз, что v_z — известная функция, так как рассматриваемое течение является ламинарным; эта функция описывает течение Пуазейля.

Полученное решение показывает, что частицы жидкости движутся по винтовым линиям в пределах концентрических цилиндров, угловая скорость каждого из которых отличается от угловой скорости трубы на $-\frac{1}{8}\frac{\varepsilon}{\nu}(R^2-r^2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Грей Э. и Мэтьюз Г. Б., Функции Бесселя (приложения к физике и механике), ИЛ, 1949.
2. Кочин Н. Е. и др., Теоретическая гидродинамика, ч. 1, 4-е переработанное издание, Гостехиздат, М.—Л., 1948.
3. Розе Н. В. и др., Теоретическая гидродинамика, ч. 2, ГИТТЛ, 1937, стр. 300.

Мл. научный сотрудник К. Т. ГОЛЕНКО

О КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ НЕВРАЩАЮЩИХСЯ СНАРЯДОВ

Вопрос устойчивости невращающихся снарядов всегда изучается вне всякой связи с хорошо развитой теорией устойчивости вращающихся снарядов. Настоящая заметка ставит своей целью распространить эту теорию на устойчивость невращающихся снарядов.

При исследовании устойчивости вращающихся снарядов обычно принимаются такие допущения, которые позволяют использовать аналогию между движением снаряда и движением гироскопа в случае Лагранжа: траектория полета принимается плоской, вся система аэродинамических сил приводится к одной силе лобового сопротивления, которая приложена в центре давления, параллельна скорости центра тяжести снаряда, но направлена противоположно ей. При этом аналогия заключается в том, что движение снаряда относительно центра тяжести (при предположении, что оно не зависит от движения самого центра тяжести) совпадает с движением гироскопа относительно неподвижной точки в случае Лагранжа. Тогда роль центра тяжести снаряда играет неподвижная точка гироскопа, а роль центра давления и силы лобового сопротивления — центр тяжести и сила веса гироскопа.

В основу дальнейшего рассуждения мы положим работу Н. Г. Четаева * в области устойчивости вращения твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа.

За невозмущенное движение снаряда относительно центра тяжести примем движение, которое характеризуется следующими соотношениями:

$$p=0;\ q=0;\ r=r_0;\ \gamma=0;\ \gamma'=0;\ \gamma''=1,$$

где p, q, r — проекции мгновенной угловой скорости снаряда на оси XYZ, жестко связанные с корпусом; γ, γ', γ'' — направляющие косинусы углов касательной к траектории с осями XYZ.

* Н. Г. Четаев. Об устойчивости вращения твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа, «Прикладная математика и механика», т. XVIII, вып. 1, стр. 123—124.

Вопрос о безусловной устойчивости этого движения по отношению к функциям p, q, r, γ, γ', γ'' сводится к соблюдению следующего неравенства (см. работу Н. Г. Четаева)

$$Cr_0^2>4Amgz,$$

где z — положение центра тяжести ($z>0$), другие символы имеют обычный смысл.

Применительно к нашей цели это будет положение центра давления, а силу веса mg следует заменить силой лобового сопротивления R. В случае невращающегося снаряда $r_0=0$. Тогда неравенство принимает вид

$$0>4ARz,$$

но в этом случае оно может иметь место только, если $z<0$, что является известным критерием устойчивости невращающихся снарядов: *центр давления должен находиться позади центра тяжести снаряда.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. Об устойчивости вращения твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа, «Прикладная математика и механика», т. XVIII, вып. 1, стр. 123—124.
2. Шапиро Я. М., Внешняя баллистика, Оборонгиз, 1946.

Ассистент Г. И. ЗАМУРУЕВ

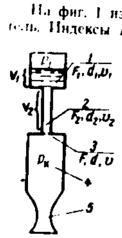
ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРИТЕРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ РАБОТЫ ЖРД

В настоящее время еще недостаточно надежны методы определения условий, при которых работа жидкостного ракетного двигателя (ЖРД) является устойчивой. В опубликованной литературе области устойчивости определяются графически.

В данной статье делается попытка найти некоторый новый критерий, позволяющий провести аналитическое исследование устойчивости работы ЖРД.

ЖИДКОСТНЫЙ РАКЕТНЫЙ ДВИГАТЕЛЬ С УНИТАРНЫМ (ОДНОКОМПОНЕНТНЫМ) ТОПЛИВОМ

На фиг. 1 изображен упрощенный жидкостный ракетный двигатель. Индексы *1* и *2* на фиг. 1 относятся соответственно к баку и питающей линии.



Фиг. 1. Упрощенная схема ЖРД, работающего на унитарном (однокомпонентном) топливе.

1 — бак, *2* — трубопровод, *3* — форсунка, *4* — камера сгорания, *5* — реактивное сопло.

Обозначим через V, F, v и d — объем, площадь поперечного сечения, скорость жидкости и диаметр емкости топлива соответственно, $p_к$ — давление в камере сгорания.

Исследование проводится без учета акустических колебаний в камере сгорания и без учета волновых процессов в топливном тракте.

Унитарное топливо под постоянным давлением p_1 вытесняется из бака *1* через трубопровод *2* и впрыскивается через форсунку *3* в камеру сгорания *4*, где оно сгорает и продукты сгорания выбрасываются наружу через реактивное сопло *5*.

Колебательный режим работы двигателя может возникнуть следующим образом.

Допустим, что по какой-либо случайной причине внезапно уменьшился расход топлива через форсунку. Вследствие этого уменьшится расход продуктов сгорания, а поэтому снизится и давление в камере. Понижение давления в камере приводит к увеличению расхода топлива, соответствующему увеличению расхода продуктов сгорания, затем к увеличению давления в камере и уменьшению расхода топлива. Таким образом, система возвращается в исходное состоя-

ние, и колебательный процесс, если он незатухающий, может происходить как угодно долго. В общем, амплитуды колебаний могут быть постоянными и непостоянными и принимать большие или меньшие значения. Если они с течением времени увеличиваются, то система становится неустойчивой. В результате могут возникнуть опасные пульсации давления в камере или трубе, которые могут вызвать разрушение камеры.

Уравнение движения

Для составления дифференциального уравнения неустановившегося одномерного движения потока жидкости в топливоподающей системе пользуемся уравнением неразрывности и теоремой об изменении кинетической энергии.

Для конечного фиксированного объема материальных частиц можно записать

$$\left[\frac{d}{dt}\int\limits_V \frac{\rho v^2}{2}\,dV\right]dt = \sum_{i=1}^{n} \delta A_i.$$

или

$$\left[\int\limits_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right)dV + \oint\limits_S \frac{\rho v^2}{2}\,v_n\,dS\right]dt = \sum_{i=1}^{n} \delta A_i. \tag{A}$$

где $\int\limits_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right)dV$ — учитывает изменение кинетической энергии внутри зафиксированного объема;

$\oint\limits_S \frac{\rho v^2}{2}\,v_n\,dS$ — учитывает изменение кинетической энергии по поверхности S;

ρ — плотность жидкости, предполагаемая постоянной вдоль трубопровода.

На фиг. 1 имеются два участка с постоянными сечениями.

Очевидно, кинетическая энергия внутри системы, соответствующая этим двум сечениям, за промежуток времени dt может быть представлена в виде

$$\left[\int\limits_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right)dV\right]dt = \left[V_1\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v_1^2}{2}\right) + V_2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v_2^2}{2}\right)\right]dt;$$

при этом принимаем, что частная производная $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right)$ в каждой точке объема V_1 и V_2 постоянна.

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2012/01/10 : CIA-RDP80T00246A064300230001-2

Изменение кинетической энергии по поверхности (вызванное различными скоростями выхода и входа частиц жидкости на поверхности) запишется так:

$$\left[\oint_S \frac{\rho v^2}{2} v_n\, dS\right] dt = \left[\frac{\rho v^2}{2} Q - \frac{\rho v_1^2}{2} Q_1\right] dt,$$

где $Q_1 = v_1 F_1$ и $Q = vF$ — секундный объемный расход жидкости соответственно через сечения бака и форсунки.

В уравнении (А) нетрудно подсчитать сумму элементарных работ всех сил, приложенных к жидкой системе (работа веса жидкости не учитывается):

работа сил нормального давления

$$\sum_{i=1}^{n} \delta A_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i d\overline{l}_i = p_1 F_1 v_1\, dt - p_к F v\, dt = p_1 Q_1\, dt - p_к Q\, dt;$$

работа сил трения

$$\sum_{i=1}^{n} \delta A_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{R}_i\, d\overline{l}_i = -R_1 v_1\, dt - R_2 v_2\, dt - Rv\, dt,$$

где $\overline{P}_i = \overline{p}_i F_i$, а $d\overline{l}_i$ — элементарные перемещения.

Учитывая, что полная сила трения при движении жидкости по трубе определяется по известной формуле *

$$R = \zeta \frac{\rho v^2}{2} \frac{l}{d} F,$$

получим

$$\sum_{i=1}^{n} \delta A_i = -\zeta \frac{\rho v_1^3}{2} \frac{l_1}{d_1} F_1\, dt - \zeta \frac{\rho v_2^3}{2} \frac{l_2}{d_2} F_2\, dt - \zeta \frac{\rho v^3}{2} \frac{l}{d} F\, dt \approx -\zeta \frac{\rho v_2^3}{2} \frac{l_2}{d_2} F_2,$$

где принято

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{F_2}{F_1} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2, \quad \frac{v}{v_2} = \frac{F_2}{F} = \left(\frac{d_2}{d}\right)^2$$

и предположено, что $l_2 \gg l_1$, $l_2 \gg l$ и $d_1 \gg d_2$, $d_2 \approx d$.

Теперь, принимая во внимание все полученные формулы, уравнение (А) можно представить в виде

$$\left[V_1 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v_1^2}{2}\right) + V_2 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v_2^2}{2}\right)\right] dt + \left[\frac{\rho v^2}{2} Q - \frac{\rho v_1^2}{2} Q_1\right] dt = p_1 Q_1\, dt - p_к Q\, dt - \zeta \frac{\rho v_2^3}{2} \frac{l_2}{d_2} F_2\, dt.$$

* В общем случае, когда имеют место местные гидравлические потери, величина R определяется как $R = \lambda(\rho\, v^2/2) F$. Здесь λ — полный коэффициент потерь в топливном тракте, отнесенный к данному скоростному напору.

Сократив на время dt и учитывая, что $V_1 = l_1 F_1$ и $V_2 = l_2 F_2$, получим

$$l_1 F_1 \rho v_1 \frac{dv_1}{dt} + l_2 F_2 \rho v_2 \frac{dv_2}{dt} + \frac{\rho v^2}{2} Q - \frac{\rho v_1^2}{2} Q_1 = p_1 Q_1 - p_к Q - \zeta \frac{\rho v_2^3}{2} \frac{l_2}{d_2} F_2.$$

Ввиду справедливости для несжимаемой жидкости уравнения неразрывности $Q_1 = Q_2 = Q = F_1 v_1 = F_2 v_2$ можно сократить секундные объемные расходы, тогда энергетическое уравнение неустановившегося одномерного движения потока жидкости окончательно запишется так:

$$\frac{\rho v^2}{2} - \frac{\rho v_1^2}{2} + l_1 \rho \frac{dv_1}{dt} + l_2 \rho \frac{dv_2}{dt} = p_1 - p_к - \zeta \frac{\rho v_2^2}{2} \frac{l_2}{d_2}$$

или

$$p_1 - p_к = \frac{\rho v^2}{2} - \frac{\rho v_1^2}{2} + l_1 \rho \frac{dv_1}{dt} + l_2 \rho \frac{dv_2}{dt} + \zeta \frac{\rho v_2^2}{2} \frac{l_2}{d_2}. \qquad \text{(Б)}$$

Из уравнений неразрывности для несжимаемой жидкости следует, что $v = v_1 (d_1/d)^2 = v_2 (d_2/d)^2$. Тогда уравнение (Б) примет вид

$$p_1 - p_к = \frac{\rho v^2}{2} - \frac{\rho v^2}{2}\left(\frac{d}{d_1}\right)^4 + l_1 \rho \left(\frac{d}{d_1}\right)^2 \frac{dv}{dt} + l_2 \rho \left(\frac{d}{d_2}\right)^2 \frac{dv}{dt} + \zeta \frac{\rho v^2}{2}\left(\frac{d}{d_2}\right)^4 \frac{l_2}{d_2}$$

или

$$p_1 - p_к = \frac{\rho v^2}{2}\left[1 - \left(\frac{d}{d_1}\right)^4\right] + \left[l_1 \left(\frac{d}{d_1}\right)^2 + l_2 \left(\frac{d}{d_2}\right)^2\right] \rho \frac{dv}{dt} + \zeta \frac{\rho v^2}{2}\left(\frac{d}{d_2}\right)^4 \frac{l_2}{d_2}.$$

Полагаем, что скорость v отличается от скорости стационарного потока v_c на величину v', т. е. $v = v_c + v'$.

Пренебрегая членами, содержащими $(d/d_1)^4$ и v'^2, получим

$$p_1 - p_к = \left[l_1 \left(\frac{d}{d_1}\right)^2 + l_2 \left(\frac{d}{d_2}\right)^2\right] \rho \frac{dv'}{dt} + \rho v_c \left[1 + \zeta \left(\frac{d}{d_2}\right)^4 \frac{l_2}{d_2}\right] v' + \frac{\rho v_c^2}{2}\left[1 + \zeta \left(\frac{d}{d_2}\right)^4 \frac{l_2}{d_2}\right].$$

Обозначим величину $l_1 (d/d_1)^2 + l_2 (d/d_2)^2$ через $l' (d/d_2)^2$, тогда

$$p_1 - p_к = \rho l' \left(\frac{d}{d_2}\right)^2 \frac{dv'}{dt} + \rho v_c \left[1 + \zeta \frac{l_2}{d_2}\left(\frac{d}{d_2}\right)^4\right] v' + \frac{\rho v_c^2}{2}\left[1 + \zeta \frac{l_2}{d_2}\left(\frac{d}{d_2}\right)^4\right]. \qquad (1)$$

Полагая, что изменение скорости вызывает изменение давления, зависимость между ними можно представить в виде ряда Тейлора:

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2012/01/10 : CIA-RDP80T00246A064300230001-2

ограничиваясь членами первого порядка малости и разлагая $p_к(v_e + v'_e)$ по степеням v'_e, получим (для случая малых колебаний)

$$p_к = p_{к.с} + \left(\frac{\partial p_к}{\partial v}\right)_c v_e' = p_{к.с}\left[1 + \left(\frac{\partial p_к}{\partial v}\right)_c \frac{v_c}{p_{к.с}} \frac{v_e'}{v_c}\right] = p_{к.с}\left(1 + K\frac{v_e'}{v_c}\right), \qquad (2)$$

где $p_{к.с}$ — давление в камере сгорания при установившемся режиме;

K — постоянная, отражающая зависимость давления в камере от скорости сгоревшего топлива; считается, что время пребывания газов в камере сгорания пренебрежимо мало по сравнению с задержкой газообразования α;

α — задержка газообразования (время от момента поступления порции топлива в камеру сгорания до ее превращения в продукты сгорания).

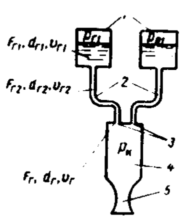
Знак v'_e означает v', вычисленное во время $t-\alpha$. Индекс «с» относится к стационарному процессу. Подставляя уравнение (2) в (1), получим

$$p_1 - p_{к.с} = Kp_{к.с}\frac{v_e'}{v_{к.с}} + \rho l'\left(\frac{d}{d_2}\right)^2\frac{dv'}{dt} + \rho v_c\left[1 + \zeta\frac{l_2}{d_2}\left(\frac{d}{d_2}\right)^4\right]v' +$$
$$+ \frac{\rho v_c}{2}\left[1 + \zeta\frac{l_2}{d_2}\left(\frac{d}{d_2}\right)^4\right]. \qquad (3)$$

Но для устойчивого потока $v' = 0$, $v_e' = 0$, $dv'/dt = 0$.

Следовательно, из уравнения (3) находим

$$p_1 - p_{к.с} = \frac{\rho v_c^2}{2}\left[1 + \zeta\frac{l_2}{d_2}\left(\frac{d}{d_2}\right)^4\right]. \qquad (4)$$



Фиг. 2. Схема ЖРД, работающего на двухкомпонентном топливе.

1—баки с горючим и окислителем, *2*—трубопроводы, *3*—форсунки, *4*—камера сгорания, *5*—реактивное сопло.

Используя уравнение (4), из уравнения (3) получим

$$\frac{dv'}{dt} + \frac{v_c}{l'}\left(\frac{d_2}{d}\right)^2\left[1 + \zeta\frac{l_2}{d_2}\left(\frac{d}{d_2}\right)^4\right]v' =$$
$$= -\frac{K}{\rho l'}\left(\frac{d_2}{d}\right)^2\frac{p_{к.с}}{v_c}v_e'$$

или

$$\frac{dv'}{dt} + Ev' = -Cv_e', \qquad (5)$$

где

$$E = \frac{v_c}{l'}\left(\frac{d_2}{d}\right)^2\left[1 + \zeta\frac{l_2}{d_2}\left(\frac{d}{d_2}\right)^4\right] > 0;$$

$$C = \frac{K}{\rho l'}\left(\frac{d^2}{d}\right)^2\frac{p_{к.с}}{v_c} > 0;$$

здесь принято $K > 0$.

Полученное уравнение (5) есть дифференциальное однородное уравнение первой степени с запаздывающим аргументом α для одномагистральной системы.

Распространим полученные результаты на двухмагистральную систему, когда подача горючего и окислителя осуществляется раздельно (фиг. 2).

ЖИДКОСТНЫЙ РАКЕТНЫЙ ДВИГАТЕЛЬ С ДВУХМАГИСТРАЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ ПОДАЧИ ТОПЛИВА

На фиг. 2 представлена обычная двухмагистральная система. Используем те же обозначения, что и раньше. Индекс «г» будет соответствовать параметрам линии подачи горючего, индекс «о» — линии подачи окислителя.

Предположим, что время запаздывания α у обеих магистралей одинаково, т. е.

$$\alpha_о = \alpha_г = \alpha.$$

Из рассмотрения энергии, как и раньше, находим:

для горючего

$$p_{г1} - p_{к.с} = \frac{1}{2}\rho_г v_{г.с}^2\left[1 + \zeta_г\frac{l_{г2}}{d_{г2}}\left(\frac{d_г}{d_{г2}}\right)^4\right]; \qquad (6а)$$

для окислителя

$$p_{о1} - p_{к.с} = \frac{1}{2}\rho_о v_{о.с}^2\left[1 + \zeta_о\frac{l_{о2}}{d_{о2}}\left(\frac{d_о}{d_{о2}}\right)^4\right]. \qquad (6б)$$

Эти уравнения (6а) и (6б) полностью соответствуют уравнению (4).

Как и раньше, разложим давление $p_к$ в ряд Тейлора, но уже для функции двух переменных:

$$p_к = p_{к.с}\left(1 + K_г\frac{v_{e\,г}'}{v_{г.с}} + K_о\frac{v_{e\,о}'}{v_{о.с}}\right). \qquad (7)$$

Тогда для любого момента времени уравнение (1) для горючего запишется так:

$$p_{г1} - p_{к.с}\left(1 + K_г\frac{v_{e\,г}'}{v_{г.с}} + K_о\frac{v_{e\,о}'}{v_{о.с}}\right) = \rho_г l_г'\left(\frac{d_г}{d_{г2}}\right)^2\frac{dv_г'}{dt} +$$
$$+ \rho_г v_{г.с}\left[1 + \zeta_г\frac{l_{г2}}{d_{г2}}\left(\frac{d_г}{d_{г2}}\right)^4\right]v_г' + \frac{\rho_г v_{г.с}^2}{2}\left[1 + \zeta_г\frac{l_{г2}}{d_{г2}}\left(\frac{d_г}{d_{г2}}\right)^4\right].$$

Отсюда, учитывая равенства (6а) и (6б), получим для горючего уравнение

$$\frac{dv_г'}{dt} + E_г v_г' = -C_г v_{e\,г}' - L_г v_{e\,о}', \qquad (8а)$$

где

$$E_г = \frac{v_{г.с}}{l_г'}\left(\frac{d_{г2}}{d_г}\right)^2\left[1 + \zeta_г\frac{l_г}{d_{г2}}\left(\frac{d_г}{d_{г2}}\right)^4\right];$$

$$C_г = \frac{K_г}{\rho_г l_г'}\left(\frac{d_{г2}}{d_г}\right)^2\frac{p_{к.с}}{v_{г.с}};$$

$$L_г = \frac{K_о}{\rho_г l_г'}\left(\frac{d_{г2}}{d_г}\right)^2\frac{p_{к.с}}{v_{о.с}}.$$

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2012/01/10 : CIA-RDP80T00246A064300230001-2

Заменяя индексы, получим уравнение для окислителя

$$\frac{dv_o'}{dt}+E_o v_o'=-C_o v'_{\alpha o}-L_o v'_{\alpha г}, \qquad (8б)$$

где

$$E_o=\frac{v_{о.с}}{l_o'}\left(\frac{d_{кс}}{d_o}\right)^2\left[1+\zeta_o\frac{l_o}{d_{кс}}\left(\frac{d_o}{d_{кс}}\right)^4\right];$$

$$C_o=\frac{K_o}{\rho_o l_o'}\left(\frac{d_{кс}}{d_o}\right)^2\frac{p_{к.с}}{v_{о.с}};$$

$$L_o=\frac{K_г}{\rho_o l_o'}\left(\frac{d_{кс}}{d_o}\right)^2\frac{p_{к.с}}{v_{г.с}}.$$

Эти уравнения (8а) и (8б) соответствуют уравнению (5) одномагистральной системы.

Из уравнения (7) видно, что

$$K_г=\frac{v_{г.с}}{p_{к.с}}\left(\frac{\partial p_к}{\partial v_г}\right)_с;$$

$$K_o=\frac{v_{о.с}}{p_{к.с}}\left(\frac{\partial p_к}{\partial v_o}\right)_с.$$

Итак, получены два уравнения (8а) и (8б) первого порядка с постоянными коэффициентами относительно возмущений $v_г'$ и v_o', но с запаздывающими аргументами, которые могут быть приведены к одному дифференциальному уравнению второго порядка следующим образом.

Как и в работе Д. Гандера и Д. Фрианта *, дифференцируем уравнение (8а) по t:

$$\frac{d^2v_г'}{dt^2}+E_г\frac{dv_г'}{dt}=-C_г\frac{dv'_{\alpha г}}{dt}-L_г\frac{dv'_{\alpha o}}{dt}. \qquad (9)$$

Напишем уравнения (8а) и (8б) для момента времени $t_1=t-2\alpha$ (т. е. сдвигаем аргумент еще на время α):

$$\frac{dv'_{\alpha г}}{dt}=-E_г v'_{\alpha г}-C_г v'_{2\alpha г}-L_г v'_{2\alpha o}; \qquad (10а)$$

$$\frac{dv'_{\alpha o}}{dt}=-E_o v'_{\alpha o}-C_o v'_{2\alpha o}-L_o v'_{2\alpha г}, \qquad (10б)$$

в которых $v'_{\alpha г}$ играет роль скорости $v_г'$, отнесенной к периоду $t-2\alpha$.

Из уравнения (10а) имеем

$$v'_{2\alpha o}=-\frac{1}{L_г}\left(\frac{dv'_{\alpha г}}{dt}+E_г v'_{\alpha г}+C_г v'_{2\alpha г}\right) \qquad (11)$$

---

* Д. Гандер и Д. Фриант, Стабильность потока в ракетном двигателе. Вопросы ракетной техники, Сб. сокращенных переводов, вып. 1, ИЛ, 1951.

и из уравнения (8а)

$$v'_{\alpha o}=-\frac{1}{L_г}\left(\frac{dv_г'}{dt}+E_г v_г'+C_г v'_{\alpha г}\right). \qquad (12)$$

Подставим уравнения (11) и (12) в уравнение (10б):

$$L_г\frac{dv'_{\alpha o}}{dt}=E_o\left(\frac{dv_г'}{dt}+E_г v_г'+C_г v'_{\alpha г}\right)+$$

$$+C_o\left(\frac{dv'_{\alpha г}}{dt}+E_г v'_{\alpha г}+C_г v'_{2\alpha г}\right)-L_г L_o v'_{2\alpha г}. \qquad (13)$$

Подставим уравнение (13) в уравнение (9):

$$\frac{d^2v_г'}{dt^2}+E_г\frac{dv_г'}{dt}=-C_г\frac{dv'_{\alpha г}}{dt}-E_o\left(\frac{dv_г'}{dt}+E_г v_г'+C_г v'_{\alpha г}\right)-$$

$$-C_o\left(\frac{dv'_{\alpha г}}{dt}+E_г v'_{\alpha г}+C_г v'_{2\alpha г}\right)+L_г L_o v'_{2\alpha г};$$

здесь отсутствует скорость с индексом «о».

Группируя члены, получим

$$\frac{d^2v_г'}{dt^2}+(E_г+E_o)\frac{dv_г'}{dt}+E_o E_г v_г'=-(C_г+C_o)\frac{dv'_{\alpha г}}{dt}-$$

$$-(E_г C_o+E_o C_г)v'_{\alpha г}-(C_г C_o-L_г L_o)v'_{2\alpha г}, \qquad (14)$$

а поскольку $C_г C_o-L_г L_o=0$ (в чем легко убедиться, если подставить выражения каждого члена уравнения), то

$$\frac{d^2v_г'}{dt^2}+(E_г+E_o)\frac{dv_г'}{dt}+E_o E_г v_г'=$$

$$=-(C_г+C_o)\frac{dv'_{\alpha г}}{dt}-(E_г C_o+E_o C_г)v'_{\alpha г}$$

или

$$\frac{d^2v_г'}{dt^2}+\mu\frac{dv_г'}{dt}+\nu v_г'+\sigma\frac{dv'_{\alpha г}}{dt}+\tau v'_{\alpha г}=0, \qquad (15)$$

где

$$\mu=E_г+E_o>0;\quad \sigma=C_г+C_o;$$

$$\nu=E_г E_o>0;\quad \tau=E_г C_o+E_o C_г.$$

Уравнение (15) представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка с запаздывающим аргументом, причем в старшую производную этот аргумент не входит.

Исследование уравнения возмущенного движения

Необходимым условием устойчивости системы является отсутствие бесконечно нарастающих со временем частных решений полученного дифференциального уравнения (15).

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2012/01/10 : CIA-RDP80T00246A064300230001-2

Эти частные решения можно составить из слагаемых вида

$v_t' = Ce^{\frac{zt}{\alpha}}$, следовательно

$$v'_{\alpha,t} = v'_{t-\alpha} = Ce^{\frac{z(t-\alpha)}{\alpha}} = Ce^{\frac{zt}{\alpha}} e^{-z},$$

где возмущения v_t' берутся в интервале $-\alpha \leq t < 0$.

После подстановки этих выражений v_t' и $v'_{\alpha,t}$ в уравнение (15) получим следующее характеристическое уравнение, которому должна удовлетворять величина z (z — корень характеристического уравнения):

$$\frac{z^2}{\alpha^2} + \mu\frac{z}{\alpha} + \nu + \sigma\frac{z}{\alpha}e^{-z} + \tau e^{-z} = 0$$

или, умножая на α^2, получим

$$z^2 + Mz + N + e^{-z}(Sz + T) = 0, \qquad (16)$$

где $M = \alpha\mu > 0$; $N = \alpha^2\nu > 0$; $S = \alpha\sigma > 0$; $T = \alpha^2\tau > 0$.

Выражения для M, N, S и T можно записать иначе. Введем обозначения

$$B_г = \alpha E_г; \quad B_о = \alpha E_о; \quad H_г = \alpha C_г; \quad H_о = \alpha C_о.$$

Используя (8а) и (8б), запишем

$$\left.\begin{aligned} B_г &= v_{г.с}\frac{\alpha}{l_г'}\left(\frac{d_{г2}}{d_г}\right)^2\left[1 + \zeta_г\frac{l_г}{d_{г2}}\left(\frac{d_г}{d_{г2}}\right)^4\right];\\ B_о &= v_{о.с}\frac{\alpha}{l_о'}\left(\frac{d_{о2}}{d_о}\right)^2\left[1 + \zeta_о\frac{l_о}{d_{о2}}\left(\frac{d_о}{d_{о2}}\right)^4\right];\\ H_г &= \frac{K_г}{\rho_г}\frac{\alpha}{l_г'}\left(\frac{d_{г2}}{d_г}\right)^2\frac{p_{к.с}}{v_{г.с}};\\ H_о &= \frac{K_о}{\rho_о}\frac{\alpha}{l_о}\left(\frac{d_{о2}}{d_о}\right)^2\frac{p_{к.с}}{v_{о.с}} \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

или, иначе, в соответствии с уравнениями (6) и (17)

$$\left.\begin{aligned} B_г &= 2\frac{g\alpha F_{г2}}{G_{г.с}l_г'}\Delta p_г; \qquad B_о = 2\frac{g\alpha F_{о2}}{G_{о.с}l_о'}\Delta p_о;\\ H_г &= K_г\frac{g\alpha F_{г2}}{G_{г.с}l_г'}p_{к.с}; \quad H_о = K_о\frac{g\alpha F_{о2}}{G_{о.с}l_о'}p_{к.с}, \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

где $G_{г.с} = g\rho_г v_{г.с}F_г$ — секундный весовой расход горючего;
$G_{о.с} = g\rho_о v_{о.с}F_о$ — секундный весовой расход окислителя;
$\Delta p_о = p_{о1} - p_{к.с}$ — перепад давления на форсунке окислителя;
$\Delta p_г = p_{г1} - p_{к.с}$ — перепад давления на форсунке горючего;

$$K_г = \frac{G_{г.с}}{p_{к.с}}\frac{\partial p_к}{\partial G_г}; \quad K_о = \frac{G_{о.с}}{p_{к.с}}\frac{\partial p_к}{\partial G_о}.$$

Окончательно получим

$$\left.\begin{aligned} M &= B_г + B_о; \quad S = H_г + H_о;\\ N &= B_гB_о; \quad T = B_гH_о + B_оH_г. \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Для решения уравнения (16) полагаем $z = x + iy$, тогда выражение для v_t' примет вид

$$v_t' = Ce^{\frac{x+iy}{\alpha}t} = Ce^{\frac{x}{\alpha}t}e^{\frac{iy}{\alpha}t} = Ce^{\frac{x}{\alpha}t}\left(\cos\frac{y}{\alpha}t + i\sin\frac{y}{\alpha}t\right).$$

Отсюда видно, что возможны три случая колебаний:

1) $x/\alpha > 0$ — колебания системы растут беспредельно (возмущения v_t' возрастают) и, следовательно, система неустойчива;

2) $x/\alpha < 0$ — колебания затухающие, система устойчива;

3) $x/\alpha = 0$ — имеют место периодические колебания, которые в настоящей статье не исследуются ввиду их сложности, так как из-за незначительных возмущений возможен переход корня уравнения (16) с мнимой оси на левую или правую полуплоскость.

Рассматривая приведенные выше три случая колебаний можно сделать вывод, что если уравнение (16) имеет корень z с положительной действительной частью, то система неустойчива, если же с отрицательной, то система устойчива.

Таким образом, для устойчивости необходимо, чтобы уравнение (16) не имело корней, расположенных в правой полуплоскости.

Заменив z числом iz и выразив e^{iz} через $\operatorname{ctg} z/2$, преобразуем уравнение (16).

По формулам Эйлера

$$\cos\frac{z}{2} = \frac{e^{i\frac{z}{2}} + e^{-i\frac{z}{2}}}{2}$$

и

$$\sin\frac{z}{2} = \frac{e^{i\frac{z}{2}} - e^{-i\frac{z}{2}}}{2i},$$

поэтому

$$\operatorname{ctg}\frac{z}{2} = i\frac{e^{i\frac{z}{2}} + e^{-i\frac{z}{2}}}{e^{i\frac{z}{2}} - e^{-i\frac{z}{2}}}\cdot\frac{e^{i\frac{z}{2}}}{e^{i\frac{z}{2}}} = i\frac{e^{iz} + 1}{e^{iz} - 1},$$

откуда

$$e^{iz} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{z}{2} + i}{\operatorname{ctg}\frac{z}{2} - i}.$$

После замены z числом iz, запишем уравнение (16) в виде

$$-z^2+Miz+N-(Siz+T)e^{-iz}=0.$$

Выражая e^{iz} через котангенс, найдем

$$\operatorname{ctg}\frac{z}{2}+i\,\frac{(N-z^2-T)+i(M-S)z}{(N-z^2+T)+iz(M+S)}=0$$

или

$$\operatorname{ctg}\frac{z}{2}+Q(z)=F(z)=0, \qquad (20а)$$

где

$$Q(z)=i\,\frac{(N-z^2-T)+i(M-S)z}{(N-z^2+T)+i(M+S)z}.$$

Выделив действительную и мнимую части у функции $Q(z)$, получим

$$Q(z)=\varphi(z)+i\psi(z),$$

где

$$\varphi(z)=\frac{2z[TM-S(N-z^2)]}{(N-z^2+T)^2+z^2(M+S)^2},$$

$$\psi(z)=\frac{(N-z^2)^2-T^2+z^2(M^2-S^2)}{(N-z^2+T)^2+z^2(M+S)^2}.$$

Функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — рациональные функции, принимающие вещественные значения при вещественных значениях z.

Теперь уравнение (16) можно представить в таком виде

$$\operatorname{ctg}\frac{z}{2}+\varphi(z)+i\psi(z)\equiv F(z)=0. \qquad (20б)$$

При замене z числом iz уравнение (16) заменяется уравнением (20б), при этом корни, расположенные в правой полуплоскости, соответственно переходят в нижнюю полуплоскость.

Таким образом, определение числа лежащих в правой полуплоскости корней уравнения (16), рационального относительно e^z и z (e^z входит только в первой степени), приводится к определению числа корней уравнения (20б), лежащих в нижней полуплоскости и поэтому выяснение того, при каких обстоятельствах система устойчива, сводится к вопросу: при каких условиях уравнение (20б) не имеет корней в нижней полуплоскости.

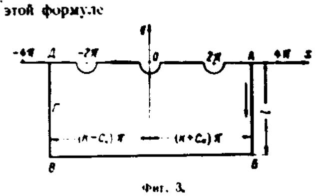
Для определения числа корней уравнения (20б), лежащих в нижней полуплоскости, рассмотрим контур, изображенный на фиг. 3. На вещественной оси функция $F(z)$ будет иметь полюсами точки, где $\operatorname{ctg} z/2$ обращается в бесконечность, т. е. точки $\pm 2\pi$, 4π, 6π и т. д. Полюса функции $\operatorname{ctg} z/2$ обойдены этим контуром при помощи полуокружностей малого радиуса δ.

Число корней функции $F(z)$, расположенных в нижней полуплоскости, равно пределу, к которому стремится число полных оборотов, которые делает вектор, изображающий функцию $F(z)$, при обходе контура, когда числа l и k стремятся к бесконечности и радиус δ полуокружности стремится к нулю, плюс число полюсов функции $F(z)$, лежащих в нижней полуплоскости.

Как впервые показано Н. В. Сапрским *, а затем уточнено Е. М. Есиповичем **, формула для подсчета числа нулей у функции $F(z)$ в нижней полуплоскости выглядит так:

$$N=\frac{1}{2}(j-n)+m+P, \qquad (21)$$

причем для устойчивости системы выражение (21) должно быть равно нулю. В этой формуле



Фиг. 3.

N — искомое число нулей (для устойчивой системы $N=0$, для неустойчивой $N\neq 0$);

j — порядок полюса в бесконечно удаленной точке рациональной части $Q(z)$ функции $F(z)$;

$$Q(z)=\varphi(z)+i\psi(z)=\sum_{k=-\infty}^{j} a_k z^k,$$

причем

j — число пересечений вектором $F(z)$ вещественной оси при обходе контура Γ вдоль $АБВД$ (число j равно разности степеней числителя и знаменателя функции $Q(z)$; в нашей задаче $j=0$);

n — число пересечений вектором $F(z)$ вещественной оси при движении от $Д$ к $А$ вдоль прямолинейных отрезков контура Γ;

$$n=\sum_i \operatorname{sign}\left\{\frac{1}{R_eF(t)}\frac{d\,ImF(t)}{dt}\right\}=\sum_i \operatorname{sign}\left\{\frac{1}{\operatorname{ctg}\frac{t}{2}+\varphi(t)}\frac{d\psi(t)}{dt}\right\}_{t=t_i}.$$

* Н. В. Сапрский, Определение числа корней, лежащих в правой полуплоскости для функций вида $F(e^z, z)$, где $F(e^z, z)$ — рациональная функция от аргументов e^z и z, и применение результатов к исследованию автоматического регулирования паровых турбин, Известия Казанского филиала АН СССР, Серия физико-математических и технических наук, вып. 1, 1948.

** Е. М. Есипович, Об устойчивости решений одного класса дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, «Прикладная математика и механика», т. XV, вып. 5, АН СССР, 1951.

где t_i — действительные корни уравнения $\phi(z)=0$;

$$\varphi(z)=\varphi(t)=\frac{2t\,[S(N-t^2)-TM]}{(N-t^2+T)^2+t^2(M+S)^2};$$

$$\phi(z)=\phi(t)=\frac{(N-t^2)^2-T^2+t^2(M^2-S^2)}{(N-t^2+T)^2+t^2(M+S)^2};$$

m — число полюсов $\operatorname{ctg} z/2$, в которых $\varphi(2k\pi)<0$ (при обходе по полуокружности каждого такого полюса получаем два пересечения вещественной оси, т. е. один полный оборот вектора $F(z)$);

P — число полюсов функции $Q(z)$ в нижней полуплоскости; оно равно числу корней ее знаменателя, лежащих в нижней полуплоскости.

Формула (21) верна тогда, когда функция $Q(z)$ не имеет нулей и полюсов на вещественной оси.

Проведем исследование функции $Q(z)$. Функция $Q(z)$ на вещественной оси ($y=0$) обращается в нуль при условии:

$$\varphi(z)=\varphi(x)=\frac{2x\,[TM-S(N-x^2)]}{(N-x^2+T)^2+x^2(M+S)^2}=0; \tag{22}$$

$$\phi(z)=\phi(x)=\frac{(N-x^2)^2-T^2+x^2(M^2-S^2)}{(N-x^2+T)^2+x^2(M+S)^2}=0. \tag{23}$$

Совместное решение уравнений (22) и (23) дает следующие условия применимости формулы (21):

$$N\neq T \text{ и } (M^2-S^2)(T^2+NS^2-MTS)\neq 0.$$

Теперь покажем, что функция $Q(z)$ не имеет полюсов на вещественной оси ($y=0$). Для этого знаменатель функции $Q(z)$ приравниваем нулю и решаем биквадратное уравнение

$$x^4+[(M+S)^2-2N]x^2+N^2+T^2=0,$$

откуда получаем

$$(x^2)_{1,2}=\frac{(M+S)^2}{2}-N\pm\sqrt{(M+S)^2\left[\frac{(M+S)^2}{4}-N\right]-T^2}.$$

По виду полученного выражения трудно сказать, будут ли корни уравнения иметь нулевые решения. Однако отметим, что функция $Q(z)$ на действительной оси имеет полюсы в очень редких случаях.

Разберем другой возможный случай, когда числитель и знаменатель $Q(z)$ одновременно обращаются в нуль. В этом случае $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\phi(x)=1$, и, следовательно, функция $Q(z)$ не имеет полюсов при $z\to\infty$.

Займемся определением величин P, m и n, входящих в выражение (21).

1. Определение числа полюсов P в нижней полуплоскости функции $F(z)$. Как показано в работе

И. В. Сварского, функция $\operatorname{ctg} z/2$ не имеет полюсов в нижней полуплоскости, поэтому в уравнении (20а) подлежит исследованию только функция $Q(z)$.

Выпишем значение этой функции:

$$Q(z)=i\,\frac{(N-z^2-T)+i(M-S)z}{(N-z^2+T)+i(M+S)z}.$$

Посмотрим, где расположены полюсы этой функции. Для этого приравняем нулю знаменатель дроби $(N-z^2+T)+i(M+S)z=0$, откуда

$$z=\frac{M+S}{2}i\pm\sqrt{N+T-\left(\frac{M+S}{2}\right)^2}. \tag{24}$$

Здесь возможны два значения корня z:

1) $N+T>\left(\frac{M+S}{2}\right)^2$, тогда векторы z_1 и z_2 будут расположены в верхней полуплоскости и, следовательно, корни в нижней полуплоскости отсутствуют. Поэтому число полюсов P, расположенных в нижней полуплоскости, считаем равным нулю;

2) $N+T<\left(\frac{M+S}{2}\right)^2$, тогда оба члена выражения для z мнимые.

При этом если векторы z_1 и z_2 будут расположены в верхней полуплоскости, то число полюсов P равно нулю, если один из векторов (z_1 или z_2) окажется в нижней полуплоскости, тогда число полюсов P равно единице.

2. Определение величины m. Для определения вещественных корней (t_i) функции $\phi(t)=0$ приравняем ее числитель нулю, тогда получим следующее биквадратное уравнение:

$$(N-t^2)^2-T^2+t^2(M^2-S^2)=0,$$

откуда

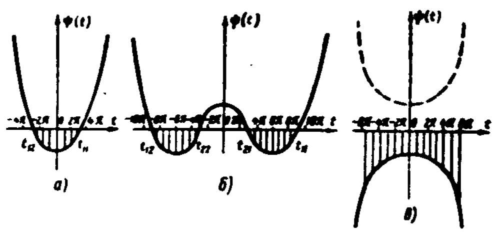
$$(t^2)_{1,2}=\frac{2N+S^2-M^2}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{2N+S^2-M^2}{2}\right)^2+T^2-N^2}$$

или

$$\left.\begin{aligned}
t_{11}&=+\sqrt{\frac{2N+S^2-M^2}{2}+\sqrt{\left(\frac{2N+S^2-M^2}{2}\right)^2+T^2-N^2}};\\
t_{21}&=+\sqrt{\frac{2N+S^2-M^2}{2}-\sqrt{\left(\frac{2N+S^2-M^2}{2}\right)^2+T^2-N^2}};\\
t_{12}&=-t_{11};\\
t_{22}&=-t_{21}.
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Возможны случаи, когда все четыре корня (25) будут действительными, или два корня будут действительными и два мнимыми, или все корни будут мнимыми.

Помня, что m — число всех полюсов $\operatorname{ctg} t/2$, лежащих внутри интервалов, где функция $\varphi(t)<0$, получим следующие значения m для разных случаев.



Фиг. 4.

1) если биквадратное уравнение имеет два действительных корня (см. фиг. 4, *а*), то

$$m=2\left[\frac{t_{11}}{2\pi}\right]+1; \qquad (26а)$$

2) если биквадратное уравнение имеет четыре действительных корня (см. фиг. 4, *б*), то

$$m=2\left[\frac{t_{11}-t_{21}}{2\pi}\right]; \qquad (26б)$$

[ ] — знак целой части (например, $[3^1/_2]=3$);

3) если биквадратное уравнение имеет все четыре корня мнимые, то надо посмотреть, где располагается функция $\psi(t)$: если $\psi(t)>0$, то значит $m=0$ (см. фиг. 4, *в*, пунктирная кривая) и из уравнения (23) подстановкой $x=t=0$ получаем

$$N^2-T^2>0. \qquad (26в)$$

Если $\psi(t)<0$, то $m=\infty$ (см. фиг. 4, *в*, сплошная кривая), и из уравнения (23) получаем

$$N^2-T^2<0. \qquad (26г)$$

3. Определение величины n. Как показано в работе И. В. Свирского,

$$n=\sum_i \operatorname{sign}\left\{\frac{\frac{d}{dt}\psi(t)}{\operatorname{ctg}\frac{t}{2}+\varphi(t)}\right\}_{t=t_i},$$

где

$$\varphi(t)=\frac{2t[S(N-t^2)-TM]}{(N-t^2+T)^2+t^2(M+S)^2};$$

$$\psi(t)=\frac{(N-t^2)^2-T^2+t^2(M^2-S^2)}{(N-t^2+T)^2+t^2(M+S)^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\psi(t)=2t\,\frac{[(N-t^2+T)^2+t^2(M+S)^2][(M^2-S^2)-2(N-t^2)]-[(N-t^2)^2-T^2+t^2(M^2-S^2)][(M+S)^2-2(N-t^2+T)]}{[(N-t^2+T)^2+t^2(M+S)^2]^2}=$$

$$=4t\,\frac{t^4(MS+S^2-T)+2t^2T(N+T)+(N+T)[M^2T+MS(T-N)-N(S^2+T)-T^2]}{[(N-t^2+T)^2+t^2(M+S)^2]^2}.$$

Подставив $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $(d/dt)\psi(t)$ в выражение для n и отбросив во вновь полученном после соответствующих преобразований выражении величину

$$4\,\frac{(N-t^2+T)^2+t^2(M+S)^2}{[(N-t^2+T)^2+t^2(M+S)^2]^2},$$

которая не влияет на перемену знака, окончательно запишем

$$n=\sum_i \operatorname{sign}\left\{t\,\frac{t^4(MS+S^2-T)+2t^2T(N+T)+(N+T)[M^2T+MS(T-N)-N(S^2+T)-T^2]}{[(N-t^2+T)^2+t^2(M+S)^2]\operatorname{ctg}\frac{t}{2}+2t[S(N-t^2)-TM]}\right\}_{t=t_i}. \qquad (27)$$

Из формулы (27) видно, что число перемен знаков может меняться в зависимости от значений величин M, N, S и T, а также от числа и величин действительных корней (25).

Используя полученные выражения для m и n и учитывая, что при наших данных $j=0$, запишем в окончательной форме критерий устойчивости ЖРД (21) для трех случаев:

1) случай, когда биквадратное уравнение $(N-t^2)^2-T^2+t^2(M^2-S^2)=0$ имеет два действительных корня:

$$P+2\left[\frac{t_{11}}{2\pi}\right]+1-\frac{1}{2}\sum_i \operatorname{sign}\times$$

$$\times\left\{t\,\frac{t^4(MS+S^2-T)+2t^2(N+T)T+(N+T)[M^2T+MS(T-N)-N(S^2+T)-T^2]}{[(N+T-t^2)^2+t^2(M+S)^2]\operatorname{ctg}\frac{t}{2}+2t[S(N-t^2)-TM]}\right\}_{t=t_i}=0; \qquad (28а)$$

6 269

2) случай, когда это биквадратное уравнение имеет четыре действительных корня:

$$P+2\left[\frac{t_{11}-t_{12}}{2\pi}\right]-\frac{1}{2}\sum_{i}\operatorname{sign}\times$$

$$\times\left\{t\frac{t^4(MS+S^2-T)+2t^2(N+T)T+(N+T)[M^2T+MS(T-N)-N(S^2+T)-T^2]}{[(N-T-t^2)^2+t^2(M+S)^2]\operatorname{ctg}\frac{t}{2}+2t[S(N-t^2)-TM]}\right\}_{t=t_i}=0;\quad(28б)$$

3) случай, когда это биквадратное уравнение имеет все четыре корня мнимых (при этом выражение (27) получает значение $n=0$).

Если $\psi(t)>0$, то $m=0$ и для устойчивости системы необходимо выполнить условия

$$\left.\begin{array}{l} N^2-T^2>0;\\ P=0 \end{array}\right\}\qquad(28в)$$

(если $\psi(t)<0$, то $m=\infty$ и $N^2-T^2<0$—система неустойчива).

Здесь

t_i — действительные корни биквадратного уравнения, которые определяются по формулам (25);

P — число полюсов, равное числу корней с отрицательными коэффициентами при мнимой части, определяемых по формуле (24);

M, N, S, T — величины, входящие в выражения (19), определяются конструктивными параметрами, а также физикой процесса сгорания α.

Примеры. Рассмотрим следующий пример (данные заимствованы из работы Д. Гандера и Д. Фрианта *):

$\alpha=8\cdot10^{-3}$ сек.; $K_o=0,6$;

$F_{r2}=0,389$ $см^2$; $l_r=61$ см;

$F_{o2}=0,66$ $см^2$; $l_o=61$ см;

$\Delta p_r=3,557$ $кг/см^2$; $p_{к.с}=35,57$ $кг/см^2$;

$\Delta p_o=3,557$ $кг/см^2$; $G_r=0,1656$ кг/сек;

$K_r=0,4$; $G_o=0,28804$ кг/сек.

Из выражений (18) определяем

$B_r=2,13$; $H_r=4,26$;

$B_o=2,08$; $H_o=6,24$.

* Д. Гандер и Д. Фриант, Стабильность потока в ракетном двигателе. Вопросы ракетной техники, Сб. сокращенных переводов, вып. 1, ИЛ, 1951

Следовательно, на основании (19) имеем

$M=B_r+B_o=4,21$; $S=H_r+H_o=10,5$;

$N=B_rB_o=4,43$; $T=B_rH_o+B_oH_r=22,2$.

По формуле (24) находим $z=7,36i\pm5,26i$, откуда $z_1=12,62i$ и $z_2=2,1i$, т. е. оба корня расположены в верхней полуплоскости, поэтому

$$P=0.$$

По формулам (25) определяем

$t_{11}=15,3$; $t_{21}=5,66i$;

$t_{12}=-15,3$; $t_{22}=-5,66i$.

Так как получили два действительных корня, то используем уравнение (28а), для которого подсчитаем

$$2\left[\frac{t_{11}}{2\pi}\right]=2[2,44]=2\cdot2=4.$$

при $t_{11}=15,3$

$$\operatorname{sign}\frac{t_{11}[t_{11}^4(-88,15)+1184t_{11}^2+2663]}{[(26,63-t_{11}^2)^2+21,7t_{11}^2]\operatorname{ctg}\frac{t_{11}}{2}+2t_{11}[10,5(4,43-t_{11}^2)-93,5]}=$$

$$=\operatorname{sign}\frac{15,3[-4\,555\,000]}{48\,090\operatorname{ctg}23°21'-74\,900}=$$

$$=\operatorname{sign}\frac{-696\cdot10^6}{111\,300-74\,900}=\operatorname{sign}[-19\,320]=-1$$

и при $t_{12}=-15,3$

$$\operatorname{sign}\frac{t_{12}[t_{12}^4(-88,15)+1184t_{12}^2+2663]}{[(26,63-t_{12}^2)^2+21,7t_{12}^2]\operatorname{ctg}\frac{t_{12}}{2}+2t_{12}[10,5(4,43-t_{12}^2)-93,5]}=$$

$$=\operatorname{sign}\frac{696\cdot10^6}{-111\,300+74\,900}=\operatorname{sign}(-19\,320)=-1.$$

Сумма знаков (Σ sign) равна $[-1+(-1)]=-2$.

Подставляя все найденные величины в уравнение (28а), получим $6\neq0$, т. е. критерий устойчивости не выполняется, поэтому данная система *неустойчива*.

Изменим параметры системы следующим образом (оставив остальные без изменений):

$F_{r2}=0,162$ $см^2$; $\Delta p_r=22,032$ $кг/см^2$;

$F_{o2}=0,274$ $см^2$; $\Delta p_o=22,032$ $кг/см^2$;

тогда

$B_r=5,48$; $H_r=1,768$;

$B_o=5,35$; $H_o=2,59$,

6*

откуда

$$M = 10{,}83; \qquad S = 4{,}36;$$
$$N = 29{,}3; \qquad T = 23{,}7.$$

Далее,

$$P = 0, \text{ так как } z = 14{,}6i + 12{,}6i$$

(откуда $z_1 = 27{,}2i$ и $z_2 = 2i$)

$$t_{11} = 3{,}3i; \qquad t_{21} = 5{,}5i;$$
$$t_{12} = -3{,}3i; \qquad t_{22} = -5{,}5i.$$

Все корни оказались мнимыми. Согласно (28в) получаем $N^2 - T^2 = 29{,}3^2 - 23{,}7^2 > 0$, т. е. $\varphi(t) > 0$, значит $m = 0$.

Поэтому в уравнении (21) величины m, n и P равны нулю. Следовательно, критерий устойчивости (21) выполняется и система носит *устойчивый* характер.

ВЫВОДЫ

1. Представленная методика может быть использована для определения критерия устойчивости работы ЖРД с раздельной подачей горючего и окислителя.

2. Если выполняются равенства выражений (28а, б, в), то система устойчива только при малых отклонениях возмущений v' и при условии, что соблюдаются следующие неравенства:

$$N \neq T; \quad (M^2 - S^2)(T^2 + NS^2 - MTS) \neq 0.$$

В случае, когда все четыре корня уравнений (25) получаются действительными, то надо пользоваться выражением (28а); когда два корня действительных и два мнимых—выражением (28б). В случае, когда все четыре корня окажутся мнимыми (при этом $n = 0$), нужно посмотреть, где располагается функция $\varphi(t)$.

Если $\varphi(t) > 0$, то $m = 0$ и для *устойчивости* системы необходимо выполнить условия $N^2 - T^2 > 0$ и $P = 0$.

Если $\varphi(t) < 0$, то $m = \infty$ и $N^2 - T^2 < 0$ — в этом случае система *неустойчива*.

3. Приведены примеры, на которых показано, каким образом пользоваться этими критериями.

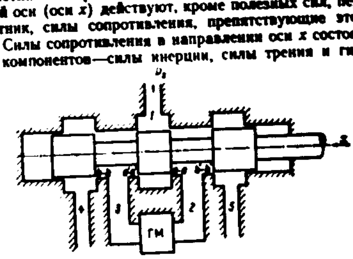
ЛИТЕРАТУРА

1. Гандер Д. и Фриант Д., Стабильность потока в ракетном двигателе, Вопросы ракетной техники, Сб. сокращенных переводов, вып. 1, ИЛ, 1951.
2. Есипович Е. М., Об устойчивости решений одного класса дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, «Прикладная математика и механика», т. XV, вып. 5, АН СССР, 1951.
3. Сирский И. В., Определение числа корней, лежащих в правой полуплоскости для функций вида $F(e^z, z)$, где $F(e^z, z)$ — рациональная функция от аргументов e^z и z, и применение результатов к исследованию автоматического регулирования паровых турбин, Известия Казанского филиала АН СССР, Серия физико-математических и технических наук, вып. 1, 1948.

Аспирант Ю. Е. ЗАХАРОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСЕВОЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИЛЫ НА ЗОЛОТНИКАХ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ СЕРВОМЕХАНИЗМОВ

На золотники гидравлических сервомеханизмов в направлении продольной оси (оси x) действуют, кроме полезных сил, перемещающих золотник, силы сопротивления, препятствующие этому перемещению. Силы сопротивления в направлении оси x состоят из трех основных компонентов—силы инерции, силы трения и гидравлической силы, вызываемой давлением струи движущейся жидкости на исполнительный золотник.



Фиг. 1. Схема гидравлического усилителя мощности.

Определение осевой составляющей гидродинамической силы является целью настоящей работы. Правильное определение этой силы необходимо для рационального расчета гидравлических сервомеханизмов: следящих золотников, гидравлических усилителей мощности, гидравлических золотниковых регуляторов. Ниже в качестве примера взят гидравлический усилитель мощности.

Рассмотрим работу гидроусилителя, исполнительный золотник которого схематически изображен на фиг. 1. При перемещении исполнительного золотника влево на величину x рабочая жидкость, поступая из трубопровода *1*, пройдет через окно a—a, далее по трубопроводу *2* в полость нагнетания, затем через гидромотор, через трубопровод *3* попадет опять в полость золотника и через окно b—b уйдет в трубопровод *4* на слив.

При перемещении исполнительного золотника вправо на величину x жидкость пойдет в обратном направлении (через окна $a'—a'$ в трубопровод *3*, в гидромотор, затем в трубопровод *2* и через окно $b'—b'$ в трубопровод *5* на слив).

Очевидно, на всем пути жидкости вектор ее средней скорости меняется как по величине, так и по направлению, причем особенно резко он меняется при прохождении жидкости через рабочее окно.

Решаем статическую задачу: предполагаем, что исполнительный золотник перемещен влево на величину x. Это перемещение x будем называть *осевым зазором*. Поток жидкости считаем установившимся.

Задача сводится к пространственному обтеканию твердого тела стационарным потоком вязкой жидкости. При такой постановке задачи ее едва ли возможно решить, поэтому идеализируем задачу, вводя следующие допущения.

1. Жидкость принимаем идеальной, т. е. невязкой и несжимаемой. Это допущение справедливо, так как, проходя через узкую щель, жидкость сильно нагревается и вязкость ее падает.

Область рабочих давлений Δp невелика (1—10 *ат*), поэтому сжимаемость можно не учитывать.

2. Заменяем пространственную задачу протекания жидкости через рабочее окно плоской. Это справедливо, так как ширина окна $l=\sqrt{x^2+\delta^2}$ (δ — радиальный зазор) обычно очень мала по сравнению с длиной окна; при кольцевом окне его длина равна $L=\pi(D+\delta)$ (D — диаметр рабочего бурта золотника). Имеем, следовательно, задачу о плоском течении жидкости. Выберем длину окна единичной.

3. Предполагаем, что поток—квазиламинарный в области входа в окно и выхода из него. Это справедливо, так как обычно при выходе из окна поток сужается и только незначительная часть энергии жидкости состоит из кинетической энергии вращения; большая часть энергии есть или кинетическая энергия движущейся струи или потенциальная энергия статического напора.

4. Объемными силами, т. е. силами гидростатического давления, и силой тяжести, пренебрегаем.

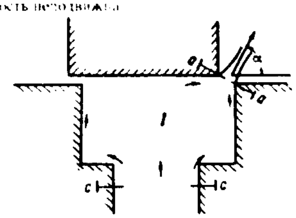
Рассмотрим картину течения жидкости в области входа в окно и при выходе из него (фиг. 2).

Жидкость поступает через сечение $c—c$ в камеру *1* и дросселируется через окно $a—a$.

Скорости жидкости в двух сечениях обратно пропорциональны площади этих сечений. Сечение $a—a$ очень мало по сравнению с сечением $c—c$, поэтому можно считать, что скорость жидкости в сечении $c—c$ $c_c=0$. Теперь следует определить характер течения жидкости за окном $a—a$, зная, что течение в области окна ламинарное.

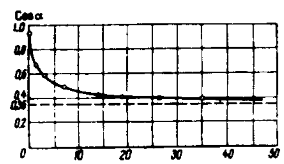
При сделанных допущениях задача сводится к задаче о струйном стационарном плоском истечении невязкой несжимаемой жидкости из бесконечно большого резервуара через отверстие с острыми кромками. Требуется определить скорость жидкости при выходе из рабочего окна в бесконечно удаленной точке. Применим теорию об обтекании с отрывом струи, предложенную Кирхгофом

По этой теории линия тока, идя вдоль твердой обтекаемой стенки (контура), в некоторой точке контура отрывается и уходит в бесконечность, отделяя область течения от области покоя. На этой линии тока, называемой *свободной* и аналогичной свободной поверхности жидкости, скорость жидкости постоянна и равна по абсолютной величине скорости в бесконечности. В области покоя давление постоянно и жидкость неподвижна.



Фиг. 2. Схема течения в области рабочего окна

В действительности отрыв реальной жидкости объясняется срывом тонкого вихревого слоя, образующегося на поверхности контура и называемого *пограничным слоем*. Поверхность разрыва в реальной жидкости не уходит в бесконечность, а постепенно сглаживается вследствие затухания вихрей. Зона покоя заполнена вихревым движением. Несмотря на это, теория Кирхгофа дает хорошее совпадение с экспериментом при ламинарном и квазиламинарном течениях.



Фиг. 3. Зависимость $\cos\alpha$ от параметра x/δ.

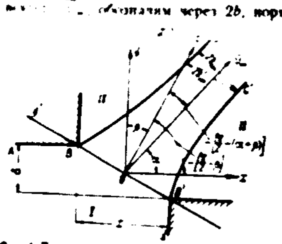
Вектор скорости потока в бесконечности направлен в плоскости течения под некоторым углом к оси x движения исполнительного золотника. Величина этого угла α для случая острых кромок теоретически найдена немецким ученым Мизесом и экспериментально определена на прозрачной модели (в Массачузетском технологическом институте) учеными Блекбурном и Ли. Мизес показал, что при стремлении осевого зазора x к бесконечности, $\alpha \to 69°$.

Блекбурн и Ли дали график $\cos\alpha = f(x/\delta)$, которым будем пользоваться в дальнейшем (фиг. 3).

Примем [illegible] нашего течения за плоскость комплексного переменного z' [illegible] Рассмотрим картину течения по фиг. 4.

Поместим начало координат в точке, делящей отрезок BB' пополам. Выберем за направление положительной оси x' направление внешней нормали к линии BB'. AB и $A'B'$ — твердые стенки, BC и $B'C'$ — свободные линии тока. Вектор скорости $\bar{v}_\infty$ направлен под углом α к оси Ox и составляет угол $-\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]$ с осью Ox'.

[illegible] II — область покоя. Обозначим отрезок BB' через [illegible] сечение струи жидкости на бесконечности, нормальное к [illegible] обозначим через $2b$, нормальное к оси Ox', через $2b'$, расход жидкости обозначим буквой Q; $\operatorname{tg}\beta = b/x$.



Фиг. 4. Течение на комплексной плоскости z'

Так как наше течение безвихревое, то предполагаем, что оно обладает комплексным потенциалом $w=\varphi+i\psi$, где φ — потенциал скоростей, ψ — функция тока. Так как комплексный потенциал определен с точностью до аддитивной постоянной $c=c_1+ic_2$, то c_1 и c_2 можно считать выбранными так, чтобы в точке B потенциал скорости $\varphi=0$, а линия ABC была нулевой линией тока $\psi=0$.

По сделанному выше допущению можно считать, что в точке A скорость $v_A=0$. Других критических точек нет вдоль линии тока ABC. Следовательно, $(d\varphi/ds)>0$, где ds — элемент дуги линии тока, причем $\lim\limits_{s\to\infty} v_s = v_\infty$ при стремлении по линии тока в бесконечность. Значит потенциал скорости φ меняется вдоль линии тока ABC от $\varphi=-\infty$ в точке A до $\varphi=+\infty$ в точке C, проходя через 0 в точке B. Известно, что расход жидкости между двумя точками кривой не зависит от формы кривой и равен разности значений функций тока в этих точках. Следовательно, линия тока $A'B'C'$ есть линия тока $\psi=-Q$. Аналогично полагаем, что в точке B' потенциал скорости $\varphi=0$. Тогда вдоль линии тока $A'B'C'$ φ меняется от $-\infty$ до 0 и от 0 до $+\infty$.

Итак, области течения I плоскости комплексного переменного z' соответствует бесконечная полоса шириной $(0,-Q)$. Очевидно, если мы найдем функцию, конформно преобразующую область течения I плоскости z' на полосу плоскости w (фиг. 5), то задача об обтекании заданного контура заданным потенциалом будет решена.

Введем переменную Жуковского

$$Z=\ln\frac{\bar{v}_\infty}{\bar{v}}, \quad Z=X+iY, \quad \bar{v}=\frac{dw}{dz'},$$

где $\bar{v}$ — обратная скорость, т. е. скорость, равная по величине данной, но направленная в противоположную сторону.

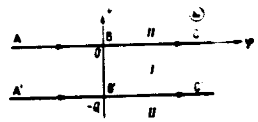
Так как обтекаемый контур состоит из прямолинейных отрезков AB и $A'B'$, то положим, что $\bar{v}=|v|e^{-i\theta}$, где θ — угол между осью ox' и вектором v, тогда

$$Z=\ln\frac{v_\infty}{v}-i\theta;$$

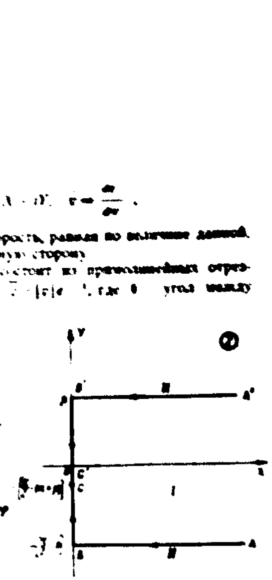
$$X=\ln\left|\frac{v_\infty}{v}\right|; \quad Y=\theta.$$

Рассмотрим, во что преобразуется область течения I плоскости z' на плоскости Z.

На линии AB $\theta=-[\pi/2-\beta]$.



Фиг. 5. Течение на комплексной плоскости w.



Фиг. 6. Течение на комплексной плоскости Z.

в точке A $|v|=0$; $\ln|v_\infty/v|=\infty$.

На линии BC угол θ меняется от $-[\pi/2-\beta]$ до $-[\pi/2-(\alpha+\beta)]$; $|v|=|v_\infty|$; $\ln|v_\infty/v|=0$.

На линии $A'B'$ $\theta=\beta$; в точке A' $|v|=0$; $\ln|v_\infty/v|=\infty$.

На линии $B'C$ угол θ меняется от β до $-[\pi/2-(\alpha+\beta)]$; $|v|=|v_\infty|$, $\ln|v_\infty/v|=0$.

В точке C и C'

$$\theta=-\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]; \quad |v|=|v_\infty|; \quad \ln\left|\frac{v_\infty}{v}\right|=0.$$

На плоскости Z области течения I плоскости z' соответствует бесконечный треугольник, т. е. треугольник, одна из вершин которого лежит в бесконечности (фиг. 6).

Чтобы найти связь между z' и Z, введем новую комплексную переменную t. Преобразуем бесконечный треугольник плоскости Z на верхнюю полуплоскость t. Это преобразование дается формулой Шварца—Кристоффеля, которая для бесконечного треугольника имеет вид

$$Z=A\int (t-t_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1}(t-t_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1}\,dt+B,$$

где α_1, α_2 — углы при вершине треугольника;

[illegible] ξ_3 — точка вещественной оси плоскости t, определяющая длину конечной стороны треугольника;

[illegible] — произвольные постоянные, определяющие положение треугольника на плоскости.

Параметры ξ_1, ξ_2 и положение еще одной точки треугольника можно выбрать произвольно.

Пусть точке B соответствует в плоскости t точка $\xi_1 = 1$; точке B' точка $\xi_2 = a$, точкам C и C' точка $\xi_3 = 0$. Для нашего треугольника [illegible] $a_1 = a_2 = \pi/2$. Имеем

$$Z = A\int \frac{dt}{\sqrt{(t-1)(t-a)}} + B.$$

Интегрируем полученный интеграл, обозначив $-iA = K$:

$$Z = K \arcsin \frac{2t-(a+1)}{a-1} + B.$$

Для определения a, K и B используем возможность произвольного выбора точек ξ_1, ξ_2, ξ_3. Для точки B

$$Z = -i\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right); \quad t = 1;$$

$$-i\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = -K\frac{\pi}{2} + B. \qquad (а)$$

Для точки B'

$$Z = i\beta; \; t = a; \; i\beta = K\frac{\pi}{2} + B. \qquad (б)$$

Для точки C

$$Z = -i\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]; \quad t = 0;$$

$$-i\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right] = K \arcsin \frac{-(a+1)}{a-1} + B. \qquad (в)$$

Из равенств (а) и (б) следует, что

$$K = \frac{i}{2}; \quad B = i\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right).$$

Подставляя эти значения K и B в равенство (в), найдем

$$a = \frac{\cos 2\alpha + 1}{\cos 2\alpha - 1}.$$

Окончательно имеем

$$Z = \frac{i}{2} \arcsin\left[t(\cos 2\alpha - 1) - \cos 2\alpha\right] + i\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right).$$

Заметим, что в плоскости комплексной переменной t области течения I плоскости z' соответствует вся верхняя полуплоскость t, причем все точки A, B, C, A', B', C' лежат на вещественной оси (фиг. 7).

Рассматривая плоскость t как [illegible] течения с комплексным потенциалом w, мы [illegible] тока идут в точку CC'. Такую картину течения дает сток, помещенный в точке CC'. Так как в верхнюю полуплоскость [illegible] количество жидкости Q, то, очевидно, [illegible] $2Q$.

Следовательно, имеем

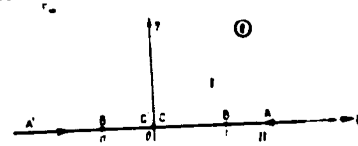
$$w = -\frac{2Q}{2\pi} \ln t = -\frac{Q}{\pi} \ln t.$$

Нетрудно увидеть, что эта зависимость отображает нашу [illegible] в верхнюю полуплоскость плоскости t. Итак, имеем решение $z' = f(w)$ в параметрической форме

$$Z = \frac{i}{2} \arcsin\left[t(\cos 2\alpha - 1) - \cos 2\alpha\right] + i\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right);$$

$$w = -\frac{Q}{\pi} \ln t;$$

$$dz' = \frac{1}{v_\infty} e^{Z}\, dw.$$



Фиг. 7. Течение на комплексной плоскости t.

Нас интересует сечение струи на бесконечности и скорость струи на бесконечности. Для этого рассмотрим уравнение линии тока BC. На ней мы имеем $Z = i\theta$; $\psi = 0$; следовательно,

$$w = \varphi; \quad dw = d\varphi; \quad e^{Z} = e^{i\theta};$$

$$i\theta = \frac{i}{2} \arcsin\left[t(\cos 2\alpha - 1) - \cos 2\alpha\right] + i\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right),$$

откуда

$$t = \frac{\cos 2(\theta-\beta) + \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha - 1};$$

$$\varphi = -\frac{Q}{\pi} \ln \frac{\cos 2(\theta-\beta) + \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha - 1};$$

$$d\varphi = \frac{2Q \sin 2(\theta-\beta)}{\pi\left[\cos 2(\theta-\beta) + \cos 2\alpha\right]}\, d\theta;$$

$$dz' = \frac{1}{v_\infty} e^{i\theta} \frac{2Q \sin 2(\theta-\beta)}{\pi\left[\cos 2(\theta-\beta) + \cos 2\alpha\right]}\, d\theta;$$

$$dz = dx + i\,dy.$$

$$dx = \frac{2Q \sin 2(\theta-\beta)\cos\theta}{\pi v_m\,[\cos 2(\theta-\beta)+\cos 2\alpha]}\,d\theta,$$

$$dy = \frac{2Q \sin 2(\theta-\beta)\sin\theta}{\pi v_m\,[\cos 2(\theta-\beta)+\cos 2\alpha]}\,d\theta.$$

Для точки B

$$y_B = \frac{l}{2},$$

отсюда

$$y' = \frac{l}{2} + \int_0^{\theta} \frac{2Q \sin 2(\theta-\beta)\sin\theta}{\pi v_m\,[\cos 2(\theta-\beta)+\cos 2\alpha]}\,d\theta.$$

Из фиг. 4 следует, что

$$b = y' - x'\,\mathrm{ctg}\,(\alpha+\beta).$$

Очевидно,

$$b_m' = \frac{l}{2} - \frac{2Q}{\pi v_m}\int_{-\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}^{-\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)} \frac{\sin 2(\theta-\beta)\sin\theta}{\cos 2(\theta-\beta)+\cos 2\alpha}\,d\theta +$$

$$+ \frac{2Q}{\pi v_m}\int_{-\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}^{-\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)} \frac{\sin 2(\theta-\beta)\cos\theta\,\mathrm{ctg}\,(\alpha+\beta)}{\cos 2(\theta-\beta)+\cos 2\alpha}\,d\theta.$$

Интегрируя, получим

$$b_m' = \frac{l}{2} - \frac{2Q\sin\alpha}{\pi v_m \sin(\alpha+\beta)}\left[-1+\cos\alpha\ln\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}\right];$$

$$b_m = b_m'\sin(\alpha+\beta) = \frac{l\sin(\alpha+\beta)}{2} + \frac{2Q\sin\alpha}{\pi v_m}\left[-1+\cos\alpha\ln\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}\right].$$

Из уравнения расхода

$$b_m = \frac{Q}{2v_m},$$

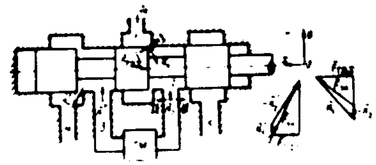
отсюда

$$v_m = \frac{4Q\sin\alpha\left[1+\frac{\pi}{4\sin\alpha}-\cos\alpha\ln\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}\right]}{\pi l\sin(\alpha+\beta)}.$$

Для определения гидродинамического осевого усилия применим следующую теорему об изменении количества движения в форме Эйлера. Главные векторы объемных и поверхностных сил и векторы количеств движения жидкости, входящие и выходящие сквозь два

каких-нибудь сечения трубы [illegible] направленные внутрь выделенного объема, [illegible] многоугольник, т. е. в сумме равны нулю. Объемными [illegible] по сравнению с поверхностными силами ввиду их малости по [illegible] пренебрегаем.

Рассмотрим выделенный объем [illegible], заключенный между сечениями $I-I$ и $II-II$ (фиг. 8). Проекция на ось Ox вектора количества движения, входящего в выделенный объем сечения $I-I$, есть $K_{1x} = -m v_m \cos\alpha$. Проекция на ось Ox вектора количества движения входящего в выделенный объем в сечении $II-II$, есть $K_{2x} = 0$. В формулировке Эйлера речь идет о поверхностной силе, внешней по отношению к данному объему [illegible] силе, действующей со



Фиг. 8. Определение направления осевой гидродинамической силы

стороны поверхности полости на объем жидкости. Проекция этой внешней силы на ось Ox есть $F_{вн\,x}$. По теореме Эйлера имеем

$$\overline{K}_1 - \overline{K}_2 + \overline{F}_{вн} = 0,$$

где $\overline{K}_1$ и $\overline{K}_2$ — векторы количества движения в сечениях $I-I$ и $II-II$. Но $K_{2x}=0$, отсюда $F_{вн\,x} = -K_{1x}$.

Интересующая нас внутренняя сила, т. е. сила давления жидкости на поверхность золотника, по третьему закону механики равна по величине внешней силе и направлена противоположно ей. Обозначим эту внутреннюю гидродинамическую силу через $F_{гд}$

$$\overline{F}_{гд} = -\overline{F}_{вн} \quad \text{или} \quad F_{гд\,x} = K_{1x} = -m v_m \cos\alpha.$$

Следовательно, гидродинамическое осевое усилие, возникающее при дросселировании жидкости через рабочее окно золотника, стремится уменьшить величину этого окна, т. е. она направлена против направления движения золотника.

В схемах с гидроусилителем расход через дросселирующее рабочее окно обычно переменный, а перепад давления на острых кромках рабочего окна, т. е. разность давлений в камерах 1 и 2 (фиг. 8), есть величина постоянная (при постоянной нагрузке на гидромоторе). Обозначим этот перепад через Δp.

Для величины гидродинамической силы имеем

$$F_{гд} = m v_m \cos\alpha.$$

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2012/01/10 : CIA-RDP80T00246A064300230001-2

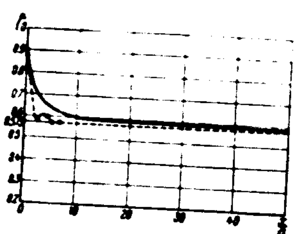
Выразим массу жидкости через плотность и секундный расход. Тогда размерность силы станет $Г$ или $kГ$. Подставим найденное ранее значение скорости v_∞

$$F_{гд.x} = vQ\frac{4Q\sin\alpha\left(1-\frac{\alpha}{4\sin\alpha}-\cos\alpha\ln\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}\right)\cos\alpha}{\zeta l\sin(\alpha+\beta)}$$

Из формул гидравлики имеем

$$\Delta p = \zeta\frac{\gamma}{2g}v^2;\quad Q = \mu v_\infty l;\quad \rho = \frac{\gamma}{g};\quad \zeta = \frac{1}{\mu^2},$$

где γ — удельный вес жидкости,
g — ускорение свободного падения,
ζ — коэффициент гидравлического сопротивления,
μ — коэффициент расхода.



Фиг. 9. Зависимость коэффициента расхода μ от параметра x/δ.
——— теоретическая кривая; — — — экспериментальная кривая (по Хохлову); Δp = 13 атм; δ = 0,010 мм.

Отсюда

$$F_{гд.x} = \frac{8\Delta pl\cos\alpha\sin\alpha\left[1+\frac{\alpha}{4\sin\alpha}-\cos\alpha\ln\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}\right]}{\zeta\pi\sin(\alpha+\beta)}.$$

Определим коэффициент расхода $\mu = v/v_\infty$. Подставляя значение v_∞, находим

$$\mu = \frac{\pi\sin(\alpha+\beta)}{4\sin\alpha\left[1+\frac{\alpha}{4\sin\alpha}-\cos\alpha\ln\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}\right]}.$$

Пользуясь графиком фиг. 3, подсчитываем по полученной формуле значения $\mu(x/\delta)$.

Подсчитанные значения μ хорошо совпадают с экспериментальными * (фиг. 9). Подставляя значения μ и ζ в формулу для $F_{гд.x}$, получаем

$$F_{гд.x} = 2\Delta pl\cos\alpha\,\mu,$$

$$F_{гд.x} = 2\Delta pl\cos\alpha\frac{\pi\sin(\alpha+\beta)}{4\sin\alpha\left[1+\frac{\alpha}{4\sin\alpha}-\cos\alpha\ln\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}\right]}$$

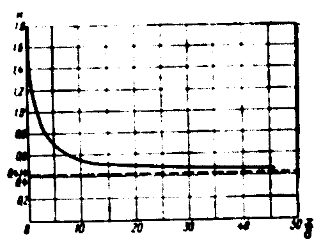
или

$$F_{гд.x} = k\Delta pl,\quad l = \sqrt{x^2+\delta^2},$$

где

$$k = \frac{\pi\sin(\alpha+\beta)\operatorname{ctg}\alpha}{2\left[1+\frac{\alpha}{4\sin\alpha}-\cos\alpha\ln\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}\right]}.$$

Значения $k = k(x/\delta)$ даны на фиг. 10.



Фиг. 10. Зависимость коэффициента пропорциональности k от параметра x/δ.

При осевых открытиях x, гораздо больших δ, коэффициент k стремится к постоянной величине 0,414.

Полученная формула дает величину гидродинамического усилия, возникающего при протекании жидкости через окно единичной длины. При протекании жидкости через окно конечной длины полученное выражение надо умножить на длину окна

$$F_{гд.x} = k\Delta p\sqrt{x^2+\delta^2}\times L.$$

Для кольцевого окна

$$F_{гд.x} = \pi k\Delta pD\sqrt{x^2+\delta^2}.$$

* В. А. Хохлов, Коэффициент гидравлических потерь и коэффициент расхода жидкости через окна цилиндрических золотников гидравлических исполнительных механизмов, «Автоматика и телемеханика», № 1, 1965.

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2012/01/10 : CIA-RDP80T00246A064300230001-2

В золотнике, изображенном на фиг. 1, жидкость дросселируется через два окна, поэтому

$$\Delta p = \frac{p_0 - \Delta p_{гм}}{2},$$

где p_0 — давление на входе;

$\Delta p_{гм}$ — перепад давления на гидромоторе.

Следовательно, осевая гидродинамическая сила удваивается:

$$F_{г.о} = 2k\Delta p\sqrt{x^2 - \delta^2} \times L.$$

Для кольцевого окна

$$F_{г.о} = 2\pi k\Delta p D\sqrt{x^2 + \delta^2}.$$

В том случае, когда золотник имеет двусторонние осевые зазоры x_0, в среднем положении осевые гидродинамические усилия, возникающие из-за дросселирования жидкости через рабочее окно и окно утечек, взаимно уничтожаются. При перемещении золотника окно утечек, уменьшаясь, перекроется совсем и гидродинамические усилия будут зависеть только от открытия рабочего окна:

$$F_{г.о} = 2\pi k\Delta p D\sqrt{(x + x_0)^2 + \delta^2} - 2\pi k'\Delta p' D\sqrt{(x_0 - x)^2 + \delta^2},$$

где

$$k' = k\left(\frac{x_0 - x}{\delta}\right); \quad \Delta p' = \frac{p_0 + \Delta p_{гм}}{2};$$

$$k = k'\left(\frac{x_0 + x}{\delta}\right); \quad \Delta p = \frac{p_0 - \Delta p_{гм}}{2}.$$

Здесь $(x_0 - x)$ — открытие окна утечек; $(x_0 + x)$ — открытие рабочего окна.

График на фиг. 11 построен с учетом окна утечек.

Если пренебречь величинами δ и x_0, то формула для осевой гидродинамической силы примет вид

$$F_{г.о} = 2\pi k\Delta p D x.$$

Как видно из графика, результаты экспериментов дают хорошее совпадение с теоретическими расчетами.

Радиальные составляющие гидродинамической силы взаимно уничтожаются, так как рабочая жидкость протекает из камеры *1* (см. фиг. 8) в камеру *2* по всей длине кольцевого рабочего окна, т. е. по всей кольцевой поверхности цилиндра, и все радиальные составляющие гидродинамической силы направлены к центру. В случае, когда золотник неуравновешен и ширина рабочего окна по длине неодинакова, радиальные составляющие гидродинамической силы уравновешиваются неполностью; наличие неуравновешенных радиальных гидродинамических усилий, наряду с другими причинами (силой веса и т. д.) вызывает разрушение масляной пленки и переход к полусухому трению.

Осевая составляющая гидродинамических усилий оказывает существенное влияние на работу гидроусилителя. Рассматривая исполнительный золотник гидроусилителя как твердое тело с массой m, погруженное в жидкость, можно записать уравнение движения исполнительного золотника гидроусилителя с управляемым сливом в следующей форме (сухим трением пренебрегаем):

$$m\ddot{x} + k_v\dot{x} + cx = F_{ax} - k_2\Delta p,$$

где m — масса золотника;

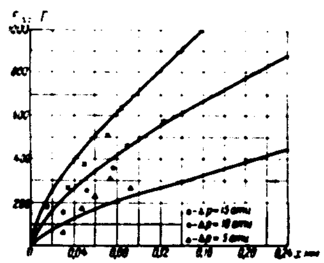
k_v — коэффициент вязкого трения;

c — коэффициент, учитывающий или жесткость пружин в гидроусилителе с противодействующими пружинами, или коэффициент обратной связи в гидроусилителе с обратной связью;

F_a — гидродинамическое усилие (осевая составляющая);

Δp — перепад давления в рабочих камерах гидроусилителя;

k_2 — коэффициент пропорциональности.



Фиг. 11. Зависимость осевой гидродинамической силы от перемещения золотника. Теоретические кривые (сплошные линии) и экспериментальные точки.

$D = 22$ мм; $\delta = 0{,}080$ мм.

Обычно $\Delta p \approx \lambda$, где λ — перемещение управляющего золотника.

Осевая составляющая гидродинамической силы приближенно равна

$$F_{ax} = k_{гд}(p_0 - \Delta p_{гм})x,$$

где $k_{гд} = k\pi D$.

Уравнение движения исполнительного золотника гидроусилителя перепишется в виде

$$m\ddot{x} + k_v\dot{x} + [c + k_{гд}(p_0 - \Delta p_{гм})]x = k_2\lambda.$$

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2012/01/10 : CIA-RDP80T00246A064300230001-2

[illegible] в операторной форме

$$ms^2x + k_2 sx + [c + k_{r1}(p_0 - \Delta p_m)]\, x = k_1 i$$

или

$$\frac{x}{i} = \frac{K_y}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1},$$

где s — оператор Лапласа,
K_y — коэффициент усиления гидроусилителя,

$$K_y = \frac{k_1}{c + k_{r1}(p_0 - \Delta p_m)};$$

T — постоянная времени гидроусилителя,

$$T^2 = \frac{m}{c + k_{r1}(p_0 - \Delta p_m)}.$$

Итак, существование гидродинамической силы влияет на коэффициент усиления и на постоянную времени гидроусилителя. Так как величина гидродинамической силы (при прочих равных условиях) есть функция перепада давления на гидромоторе Δp_m, т. е. функция нагрузки, то и коэффициент усиления и постоянная времени гидроусилителя тоже являются функциями нагрузки. С увеличением нагрузки (т. е. Δp_m) увеличивается коэффициент усиления и постоянная времени; с уменьшением нагрузки коэффициент усиления и постоянная времени уменьшаются. При достаточно большом начальном давлении в рабочей камере p_0 и малом c влияние изменения нагрузки сильно скажется на работе гидроусилителя, а следовательно, и на работе следящей системы в целом.

Гидродинамическое усилие действует не только на исполнительный золотник, но и на управляющий золотник. В этом случае можно записать

$$F_{r.1.3} = -k_3 \Delta p_3 \lambda.$$

Здесь Δp_3 — перепад давления на кромках управляющего золотника: $\Delta p_3 = p_3 - p_{30} \pm \Delta p$, где p_3 — давление в рабочей камере. Обычно $\Delta p = k\lambda$, где k — коэффициент, зависящий от геометрических размеров золотника, рода рабочей жидкости и начального давления в рабочей камере. Следовательно,

$$F_{r.1.3} = -k_3 (p_{30} \pm k)\lambda.$$

Если управляющий золотник жестко связан с подвижной рамкой электромеханического преобразователя, то при выводе уравнения движения рамки преобразователя обязательно следует учитывать влияние гидродинамической силы на управляющем золотнике. Эта сила, нелинейно зависящая от перемещения λ подвижной рамки, обычно не учитывается при выводе уравнений движения преобразователя, что может быть причиной возникновения автоколебаний особенно при больших λ.

В гидроусилителях с объемным управлением гидродинамическое усилие действует лишь на управляющий золотник гидроусилителя

$$F_{r.1} = -k_3 \Delta p_3,$$

где Δp_3 — перепад давления на кромках [illegible]. В гидроусилителе с объемным управлением $\Delta p_3 = \mathrm{const}$, следовательно, $F_{r.1.3} = -k\lambda$. При выводе уравнения движения управляющего звена следует учитывать этот член.

В заключение следует отметить, что учет гидродинамического усилия позволяет более точно рассчитывать как гидроусилитель, так и управляющее звено. Определение гидродинамического усилия в случае стационарного потока идеальной жидкости является первым шагом в изучении гидромеханических процессов в гидравлических сервомеханизмах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е., Кибель И. А. и Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, том I, ГИТТЛ, 1955.

2. Хохлов В. А. Коэффициент гидравлических потерь и коэффициент расхода жидкости через окна цилиндрических золотников гидравлических исполнительных механизмов, «Автоматика и телемеханика», № 1, 1958.

3. Shih-Ying Lee and Blackburn J. F. Steady-State Axial Forces on Control-Valve Pistons, «Transactions of the ASME», August 1952, vol 74, N 6, p. 1005—1011.

Канд. физ.-мат. наук М. З. ЛИТВИН-СЕДОЙ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛОВОГО ПОЛОЖЕНИЯ ТЕЛА С ПОМОЩЬЮ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ ДАТЧИКОВ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ РАСПОЛОЖЕНИИ ОСЕЙ ИХ КОЖУХОВ В ТЕЛЕ, СОВЕРШАЮЩЕМ ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ

При применении гироскопических датчиков углового положения тела в пространстве возникает задача определения влияния расположения в этом теле осей наружных карданных колец датчиков и ориентации гироскопа в пространстве на карданные ошибки датчиков при пространственном движении тела. Рассмотрим решение этой задачи с помощью матричных методов, выразив его в чисто аналитической форме.

Условимся о некоторых обозначениях, полезных для дальнейшего. Пусть x_i, y_i, z_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) — некоторый правый прямоугольный трехгранник из совокупности n таких трехгранников. Через $(x_p y_p z_p, x_q y_q z_q)$ обозначим матрицу направляющих косинусов углов между осями p-того и q-того трехгранников из указанной совокупности:

$$l_{pq} = (x_p y_p z_p,\ x_q y_q z_q) = \left\| \begin{matrix} l_{11}^{(pq)}, & l_{12}^{(pq)}, & l_{13}^{(pq)} \\ l_{21}^{(pq)}, & l_{22}^{(pq)}, & l_{23}^{(pq)} \\ l_{31}^{(pq)}, & l_{32}^{(pq)}, & l_{33}^{(pq)} \end{matrix} \right\|.$$

Так что $l_{11}^{(pq)} = \cos(x_p, x_q)$, $l_{21}^{(pq)} = \cos(y_p, x_q)$ и т. д., т. е. матрица l_{pq} соответствует таблице косинусов

	x_q	y_q	z_q
x_p	$l_{11}^{(pq)}$	$l_{12}^{(pq)}$	$l_{13}^{(pq)}$
y_p	$l_{21}^{(pq)}$	$l_{22}^{(pq)}$	$l_{23}^{(pq)}$
z_p	$l_{31}^{(pq)}$	$l_{32}^{(pq)}$	$l_{33}^{(pq)}$

Подобным же образом через $(\bar{a}, x_i y_i z_i)$ обозначим матрицу-строку направляющих косинусов некоторого вектора $\bar{a}$ по отношению к трехграннику $x_i y_i z_i$:

$$\varepsilon_i = (\bar{a},\ x_i y_i z_i) = \| l_1^{(i)},\ l_2^{(i)},\ l_3^{(i)} \|,$$

где

$$l_1^{(i)} = \cos(\bar{a},\ x_i),\quad l_2^{(i)} = \cos(\bar{a},\ y_i),\quad l_3^{(i)} = \cos(\bar{a},\ z_i).$$

Используя методы линейной алгебры *, нетрудно выразить матрицу $(\bar{a}, x_n y_n z_n)$ направляющих косинусов вектора $\bar{a}$ по отношению к последнему трехграннику $x_n y_n z_n$, рассматриваемой совокупности через цепочку матриц направляющих косинусов углов между осями последовательных пар трехгранников **:

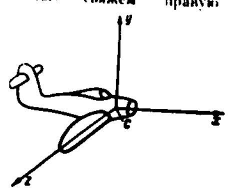
$$(\bar{a},\ x_n y_n z_n) = \varepsilon_1 \prod_{i=1}^{n} l_{i(i+1)} =$$

$$= (\bar{a},\ x_1 y_1 z_1)(x_1 y_1 z_1,\ x_2 y_2 z_2)(x_2 y_2 z_2,\ x_3 y_3 z_3) \ldots$$

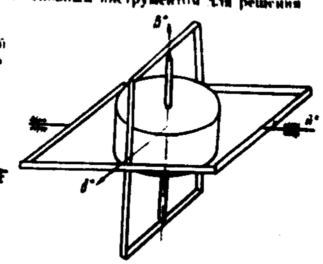
$$\ldots (x_{n-1} y_{n-1} z_{n-1},\ x_n y_n z_n). \qquad (1)$$

Отметим, что в общем случае матрицы-сомножители не перестановочны. Разложение (1) послужит основным инструментом для решения поставленной задачи.

С движущимся телом (точнее с его неизменяемой частью) свяжем правую



Фиг. 1.



Фиг. 2.

прямоугольную систему координат $Cxyz$. Например, в случае самолета расположение осей $Cxyz$ принимается по стандарту *** (фиг. 1).

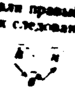
* Р. Фрезер, В. Дункан, А. Коллар, Теория матриц и ее приложения, ИЛ, 1950.

А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, ГИТТЛ, 1955.

** М. З. Литвин-Седой, К кинематике свободного движения прямоугольного трехгранника, Вестник Московского университета, № 10, 1953.

*** Б. В. Ольман, Я. Н. Соловьев, В. П. Токарев, Автопилоты, Оборонгиз, 1946.

Для измерения угловых переменных, определяющих угловое положение тела по отношению к инерциальному пространству, применяются гироскопы в полном карданном подвесе (фиг. 2). Ось наружного кольца гироскопа фиксирована в движущемся теле с помощью подшипников; ось гироскопа некоторым образом ориентирована в пространстве, принимаемом за инерциальное, в котором определена система отсчета $OXYZ$ (правая прямоугольная). Пусть $\bar n^\circ$, $\bar e^\circ$ и $\bar p^\circ$ — единичные векторы осей наружного кольца, внутреннего кольца и самого гироскопа соответственно. При этом $\bar n^\circ \perp \bar e^\circ$ по конструкции. Пусть еще $\bar h^\circ$ — единичный вектор перпендикуляра к плоскости наружного кольца; его направление зададим из условия, требующего, чтобы векторы $\bar n^\circ$, $\bar h^\circ$, $\bar e^\circ$ образовывали правый трехгранник, т. е. за циклический примем такой порядок следования векторов



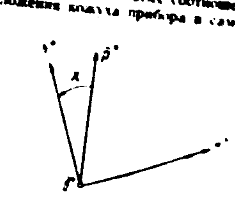
С гироскопического датчика снимаются углы: χ — угол между плоскостями наружного и внутреннего колец, т. е. $\chi = \angle(\bar p^\circ, \bar h^\circ)$, отсчитываемый от $\bar p^\circ$ по правилу правой системы; φ — угол между плоскостью наружного карданного кольца и плоскостью, проходящей через ось этого кольца и фиксированной в теле. Эта плоскость определяется двумя перпендикулярными единичными векторами $\bar\varkappa^\circ$ и $\bar n^\circ$, фиксированными в теле. Введем еще единичный вектор $\bar\lambda^\circ$ направления, перпендикулярного упомянутой плоскости так, чтобы векторы $\bar n^\circ$, $\bar\lambda^\circ$, $\bar\varkappa^\circ$, рассматриваемые в указанной последовательности, образовывали правый прямоугольный трехгранник, неподвижный относительно системы $Cxyz$, связанной с телом, тогда $\varphi = \angle(\bar h^\circ, \bar\lambda^\circ)$. Обозначим через $\bar i$, $\bar j$, $\bar k$ единичные векторы осей Cx, Cy, Cz соответственно.

При установке на самолете гироскопический датчик сведется к обычному курсовому гироскопу при $\bar n^\circ = \bar j$; $\bar\varkappa^\circ = \bar k$, $\bar\lambda^\circ = \bar i$ и к обычной гировертикали при $\bar n^\circ = \bar i$; $\bar\varkappa^\circ = \bar k$; $\bar\lambda^\circ = \bar j$. В силу конструкции подвеса направление гироскопа и направление оси наружного кольца можно задавать независимо, не нарушая связей (по крайней мере в достаточно широких пределах).

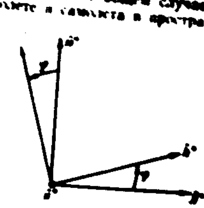
Что касается неподвижной системы координат $OXYZ$, то в тех случаях, когда за $OXYZ$ можно принимать систему координат, связанную с Землей, ось OY условимся направлять вертикально вверх. Очевидно, что $p = (\bar p^\circ, XYZ) = \|\lambda, \mu, \nu\| = \mathrm{const}$ $(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1)$. Здесь $\lambda = \cos(\bar p^\circ, X)$ и т. д.

Чтобы установить угловое положение движущегося тела, например, самолета в неподвижном пространстве, т. е. угловое положение системы $Cxyz$ по отношению к системе $OXYZ$, необходимо определить три соответствующих угла, например, три эйлеровых угла ϕ, θ, γ, введенных каким-либо образом. Технически эта задача ре-

шается, как известно, с помощью двух гироскопических датчиков, причем с одного из них (обычно гировертикали) снимаются два угла (углы тангажа θ и крена γ), а с другого (курсового гироскопа) — угол рысканья ϕ. Следовательно, координаты гироскопических датчиков и эйлеровы углы тела связаны некоторыми соотношениями. Для нахождения этих соотношений в самом общем случае расположения корпуса прибора в самолете и самолета в пространстве и



Фиг. 3



Фиг. 4

произвольной ориентации ротора в пространстве воспользуемся матричным разложением (1):

$$(\bar p^\circ, XYZ) = (\bar p^\circ, \bar n^\circ \bar h^\circ \bar e^\circ)(\bar n^\circ \bar h^\circ \bar e^\circ, \bar n^\circ \bar\lambda^\circ \bar\varkappa^\circ) \times$$
$$\times (\bar n^\circ \bar\lambda^\circ \bar\varkappa^\circ, xyz)(xyz, XYZ). \tag{2}$$

По определению углов χ и φ:

$$(\bar p^\circ, \bar n^\circ \bar h^\circ \bar e^\circ) = \|\sin\chi, \cos\chi, 0\| = m;$$

$$(\bar n^\circ \bar h^\circ \bar e^\circ, \bar n^\circ \bar\lambda^\circ \bar\varkappa^\circ) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix} = M.$$

Для иллюстрации на фиг. 3 и 4 приведены геометрические схемы, поясняющие смысл матриц m и M. Третья матрица в правой части равенства (2) постоянна, ибо она характеризует расположение системы отсчета положения наружного кольца относительно самолета:

$$(\bar n^\circ \bar\lambda^\circ \bar\varkappa^\circ, xyz) = S = \|S_{\alpha\beta}\| = \mathrm{const} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3)$$

Последняя матрица в правой части (2) определяет положение самолета в пространстве:

$$(xyz, XYZ) = L = \|L_{\alpha\beta}\| = L(\phi, \theta, \gamma).$$

При выборе эйлеровых углов, принятом в работах А. К. Мартынова и Е. В. Ольмана и др. *,

$$L_{11} = \cos\phi\cos\theta, \quad L_{12} = \sin\theta; \quad L_{13} = -\sin\phi\cos\theta;$$
$$L_{21} = \sin\phi\sin\gamma - \cos\phi\cos\gamma\sin\theta; \quad L_{22} = \cos\gamma\cos\theta;$$

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2012/01/10 : CIA-RDP80T00246A064300230001-2

$$L_{23} = \cos\psi \sin\gamma + \sin\psi \cos\gamma \sin\theta;$$
$$\left.\begin{aligned} &L_{31} = \sin\psi\cos\gamma + \cos\psi\sin\gamma\sin\theta; \quad L_{32} = -\sin\gamma\cos\theta; \\ &L_{33} = \cos\psi\cos\gamma - \sin\psi\sin\gamma\sin\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Таким образом,

$$p = mMSL = lN; \quad (N = SL),$$

где

$$l = mM = \| \sin\chi, \ \cos\chi\cos\varphi, \ \cos\chi\sin\varphi \|. \qquad (4)$$

Разрешая матричное уравнение $p = lN$ относительно l, найдем, что

$$l = pN^{-1}$$

или, поскольку для ортогональной матрицы обратная матрица равна транспонированной **,

$$l = pN^{T}.$$

Производя матричное умножение в правой части последнего равенства и учитывая (4), получим систему трех скалярных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \sin\chi &= N_{11}\lambda + N_{12}\mu + N_{13}\nu, \\ \cos\chi\cos\varphi &= N_{21}\lambda + N_{22}\mu + N_{23}\nu, \\ \cos\chi\sin\varphi &= N_{31}\lambda + N_{32}\mu + N_{33}\nu. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Первое уравнение определяет связь между координатой χ гироскопического датчика и эйлеровыми углами; из двух последних уравнений находим

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{N_{31}\lambda + N_{32}\mu + N_{33}\nu}{N_{21}\lambda + N_{22}\mu + N_{23}\nu}, \qquad (6)$$

т. е. связь между координатой φ гироскопического датчика и углами Эйлера. Вводя второй гироскопический датчик и снимая с него только один угол типа χ или φ, получим еще одно соотношение вида (5) или (6). Эти три соотношения определяют (за исключением случая вырождения систем) три угла ψ, θ, γ, характеризующих угловое положение самолета в пространстве в функции трех угловых координат гироскопического датчика (например, гировертикали и курсового гироскопа). Соотношения (5) и (6) получены при самых общих предположениях: самолет совершает произвольное

---

* А. К. Мартынов, Экспериментальная аэродинамика, Оборонгиз, 1960. Е. В. Ольман, Я. И. Соловьев, В. П. Токарев, Автопилоты, Оборонгиз, 1946.

** Р. Фрезер, В. Дункан, А. Коллар, Теория матриц и ее приложения, ИЛ, 1950.

пространственное движение (определяемое матрицей L); гироскоп ориентирован произвольным образом по отношению к инерциальному пространству (матрица p); ось наружного кольца датчика и направление, от которого отсчитывается угол φ в теле самолета, ориентированы произвольным образом (матрица S).

В задачах управления полетом счетно-решающее устройство, вырабатывающее команды на рули, должно содержать блок, работающий по программе, выраженной соотношениями (5) и (6) для преобразования координат гироскопических датчиков в координаты самолета *. Соотношения (5) и (6) позволяют также находить погрешность определения угловых координат ψ, θ, γ самолета при наличии производственных неточностей в установке кожуха гиродатчика (определяемых матрицей S) и неточности начальной установки гироскопа или его ухода со временем (определяемой матрицей p).

При $p = \|1, 0, 0\|$ и $S = E$ (E — единичная матрица) возвращаемся к условиям работы, изложенным в работе Л. Беккера *.

Рассмотрим несколько примеров, начав с известных **.

1. Пусть самолет летит без крена ($\gamma = 0$) и с курсового гироскопа снимается курсовой угол ψ. Для обычного курсового гироскопа $\bar{n}^{\circ} = \bar{j}$, $\bar{n}^{\circ} = \bar{k}$; $\bar{\lambda}^{\circ} = \bar{i}$. Пусть гироскоп установлен по направлению заданной курсовой линии $\psi = 0$. Тогда $\lambda = 1$, $\mu = \nu = 0$,

$$p = \|1, 0, 0\|; \quad S = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix};$$

$$N_{21} = S_{21}L_{11} + S_{22}L_{21} + S_{23}L_{31} = L_{11};$$

$$N_{31} = S_{31}L_{11} + S_{32}L_{21} + S_{33}L_{31} = L_{31}.$$

С помощью (3) и (6) приходим к известному результату

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{N_{31}}{N_{21}}\bigg|_{\gamma=0} = \frac{L_{31}}{L_{11}}\bigg|_{\gamma=0} = \frac{\sin\psi}{\cos\psi\cos\theta} = \frac{\operatorname{tg}\psi}{\cos\theta}; \quad \psi = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}\varphi\cos\theta),$$

т. е. при полете без крена тангаж самолета искажает показание курсового угла, определяемое углом поворота наружного кольца, пропорционально косинусу угла тангажа.

2. Пусть самолет летит с креном при нулевом угле тангажа ($\theta = 0$) при прочих условиях первого примера, тогда

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{L_{31}}{L_{11}}\bigg|_{\theta=0} = \operatorname{tg}\psi\cos\gamma; \quad \psi = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos\gamma}\right).$$

---

* L. Becker, Gyro pitch-off Indications at Arbitrary Plane Attitude, Journal of the Aeronautical Sciences, N 11, November, 1951.

** Д. А. Браславский, С. С. Логунов, Д. С. Пельпор, Расчет и конструкция авиационных приборов, Оборонгиз, 1954.

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2012/01/10 : CIA-RDP80T00246A064300230001-2

3. Рассмотрим более сложную задачу. Пусть ось наружного кольца курсового гироскопа установлена с угловым отклонением θ в плоскости Cxy самолета (плоскости симметрии): $\theta = \angle(\bar{n}^{\circ}, \bar{j})$ (фиг. 5).

Здесь

$$S = \begin{Vmatrix} -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Если считать по-прежнему, что $p = \|1, 0, 0\|$, то соотношение (6) примет вид

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{N_{11}}{N_{21}}.$$

При этом

$$N_{21} = L_{11}\cos\theta + L_{21}\sin\theta; \quad N_{11} = L_{31}$$

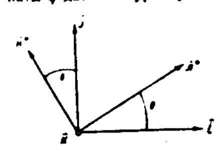
и

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\psi\cos\gamma + \cos\psi\sin\gamma\sin\vartheta}{\cos\psi\cos\vartheta\cos\theta + (\sin\psi\sin\gamma - \cos\psi\cos\gamma\sin\vartheta)\sin\theta},$$

откуда следует

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{(\cos\vartheta\cos\theta - \cos\gamma\sin\vartheta\sin\theta)\operatorname{tg}\varphi - \sin\gamma\sin\theta}{\cos\gamma - \sin\gamma\sin\theta\operatorname{tg}\varphi}.$$

Последнее равенство определяет угол рысканья в функции координаты φ датчика курса, углов тангажа ϑ и крена γ и угла θ отклонения оси наружного карданного кольца датчика от ее направления, требуемого по конструкции. При полете без крена



Фиг. 5.

$$\operatorname{tg}\psi|_{\gamma=0} = \operatorname{tg}\varphi\cos(\vartheta + \theta);$$

т. е. угол θ отклонения оси наружного кольца датчика в плоскости симметрии самолета (в данном случае в плоскости тангажа) вызывает (при установке гироскопа по заданной курсовой линии) дополнительное искажение показания курсового угла, равное искажению от увеличения угла тангажа на угол θ. При $\vartheta = -\theta$ карданная ошибка отсутствует.

В общем случае, пусть в движущемся теле, связанном с системой $Cxyz$, установлены с некоторой геометрической погрешностью гировертикаль и курсовой гироскоп. С первой снимаются углы $\varphi_г$, $\chi_г$, со второго — угол $\varphi_к$. Ошибка в установке гировертикали характеризуется матрицей $S_г = \| S_{\alpha\beta}^{(г)} \| = \mathrm{const}$, в установке курсового гироскопа — матрицей $S_к = \| S_{\alpha\beta}^{(к)} \| = \mathrm{const}$. Направление ротора гировертикали в неподвижном пространстве задано матрицей-строкой $p_г = \| \lambda_г, \mu_г, \nu_г \|$, ротора курсового гироскопа — матрицей $p_к = \| \lambda_к, \mu_к, \nu_к \|$. Тогда в силу (5) и (6) справедливы уравнения

$$\sin\chi_г = N_{31}^{(г)}\lambda_г + N_{32}^{(г)}\mu_г + N_{33}^{(г)}\nu_г,$$

$$\operatorname{tg}\varphi_г = \frac{N_{21}^{(г)}\lambda_г + N_{22}^{(г)}\mu_г + N_{23}^{(г)}\nu_г}{N_{11}^{(г)}\lambda_г + N_{12}^{(г)}\mu_г + N_{13}^{(г)}\nu_г},$$

$$\operatorname{tg}\varphi_к = \frac{N_{21}^{(к)}\lambda_к + N_{22}^{(к)}\mu_к + N_{23}^{(к)}\nu_к}{N_{11}^{(к)}\lambda_к + N_{12}^{(к)}\mu_к + N_{13}^{(к)}\nu_к},$$

где $N_г = \| N_{\alpha\beta}^{(г)} \|$, $N_к = \| N_{\alpha\beta}^{(к)} \|$ — матрицы для гировертикали и курсового гироскопа соответственно, $N_г = S_г L$, $N_к = S_к L$.

Как и выше, $L = L(\psi, \vartheta, \gamma)$. Эти уравнения определяют три угла ψ, ϑ, γ, характеризующие ориентацию данного тела в неподвижном пространстве в функции трех координат $\varphi_г$, $\chi_г$, $\varphi_к$ гиродатчиков и параметров (косинусов) $S_{\alpha\beta}^{(г)}$ и $S_{\alpha\beta}^{(к)}$, характеризующих ошибки в установке осей наружных карданных колец этих гиродатчиков, и косинусов $\lambda_г$, $\mu_г$, $\nu_г$, $\lambda_к$, $\mu_к$, $\nu_к$, характеризующих направление роторов гиродатчиков в пространстве в данный момент времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Браславский Д. А., Логунов С. С., Пельпор Д. С., Расчет и конструкция авиационных приборов, Оборонгиз, 1964.
2. Курош А. Г., Курс высшей алгебры, ГТТИ, 1955.
3. Литвин-Седой М. З., К кинематике свободного движения прямоугольного трехгранника, Вестник Московского университета, № 10, 1955.
4. Мартынов А. К., Экспериментальная аэродинамика, Оборонгиз, 1950.
5. Ольман Е. В., Соловьев Я. И., Токарев В. П., Автопилоты, Оборонгиз, 1946.
6. Фрезер Р., Дункан В., Коллар А., Теория матриц и ее приложения, ИЛ, 1950.
7. Becker L., Gyro pick-off Indications at Arbitrary Plane Attitude, Journal of the Aeronautical Sciences, N 11, (November), 1951.

Ассистент М. П. ТАРНОВСКАЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МИНИМАЛЬНЫХ ГАБАРИТОВ КУЛАЧКОВОГО МЕХАНИЗМА С ВРАЩАЮЩИМСЯ КУЛАЧКОМ И КАЧАЮЩИМСЯ ЩУПОМ

Для кулачкового механизма с качающимся щупом допустимое значение угла подъема определяется соотношением *

$$\gamma_{доп} = \arccos \frac{1}{a(1-\mu_1'^2)\sqrt{1+\mu_2^2}} - \operatorname{arctg} \mu_2, \qquad (1)$$

где

$$a = \frac{N}{F_\Sigma}; \quad F_\Sigma = \frac{M_\Sigma}{l_1};$$

$\mu_1' = \frac{M_{тр}}{Ql_1}$ — приведенный коэффициент трения; $M_{тр}$ — момент тре-
ния в цапфе; Q — опорная реакция в цапфе, N — допустимое
контактное усилие; M_Σ — суммарный момент на щупе; μ_2 — коэф-
фициент трения в точке контакта.

Схема кулачкового механизма с качающимся щупом приведена на фиг. 1.

Габаритный размер (горизонтальный)

$$L = 2(R_0 + H_1 - r) + 2r_2 = 2(R_0 + H_1 - r + r_2).$$

Межцентровое расстояние

$$l_1 = R_0 + H_1 - r + r_2, \qquad (2)$$

следовательно, $L = 2l_1$.

Тангенс угла подъема в произвольной точке поверхности кулачка

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\frac{l}{l_1}\left(\frac{d\psi}{d\varphi} \pm 1\right) \mp \cos(\psi + \psi_0)}{\sin(\psi + \psi_0)}, \qquad (3)$$

где φ — угол поворота кулачка; ψ — угол наклона щупа.

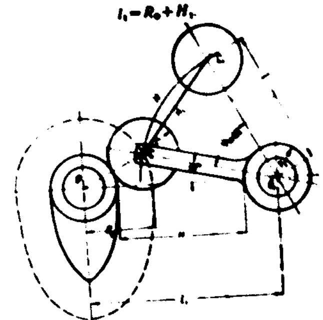
* Л. Н. Преснухин, Кулачковые механизмы, МВТУ. Юбилейный сб., вып. 49, Счетно-решающие приборы, Оборонгиз, 1955. В формулах (8) и (9) на стр. 85 допущены ошибки (см. примечание редакции на стр. 118). Табл. 5 соответствует соотношению (1) нашей статьи в предположении $\sqrt{1+\mu_2^2} = 1$.

Очевидно, при заданных ψ, l и ψ_0 угол подъема растет с уменьшением l_1, т. е. с уменьшением габарита механизма.

Рассмотрим, как меняется габаритный размер $L = 2l_1$ с изменением R_0, l, ψ_0.

Мы имели $l_1 = R_0 + H_1 + r_2 - r$. Если положить $r_2 = r$, то

$$l_1 = R_0 + H_1. \qquad (4)$$



Фиг. 1. Схема кулачкового механизма с вращающимся кулачком и качающимся щупом.
r — радиус ролика, r_1 — радиус цапфы, R_0 — минимальный радиус теоретической поверхности кулачка, ψ_0 — начальный угол наклона щупа, ψ_{max} — максимальный угол наклона щупа; l — межцентровое расстояние, H — ход щупа.

Принимая ход щупа, измеренный по дуге CC_1, равным H, получим

$$l = \frac{H}{\psi_{max}}; \quad H_1 = 2l \sin \frac{\psi_{max}}{2}. \qquad (5)$$

Для удобства вычисления положим

$$l_1 = R_0 + H. \qquad (6)$$

При этом $H_1/H = 0{,}955$, если $\psi_{max} = 60°$.

Если H задано, то L зависит только от R_0. Из фиг. 1 имеем

$$R_0^2 = l^2 - 2ll_1 \cos \psi_0 + l_1^2.$$

Полагая

$$l_1 = R_0 + H; \quad l = \frac{H}{\psi_{max}}, \qquad (7)$$

получим

$$R_0 = \frac{H}{2\psi_{max}} \cdot \frac{\psi_{max}^2 + 1 - 2\psi_{max} \cos \psi_0}{\cos \psi_0 - \psi_{max}}. \qquad (8)$$

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2012/01/10 : CIA-RDP80T00246A064300230001-2

Функция $R_0(\psi_0, \psi_{max})$ терпит разрыв при $\psi_{max} = \cos\psi_0$. Для $\psi_{max} > \cos\psi_0$ числитель и знаменатель имеют разные знаки. Таким образом, R_0 надо выбирать для $\psi_{max} < \cos\psi_0$. Для $\psi_0 > 30°$ получаем очень большие значения $R_1 (R_0 > H)$, для $\psi_{max} > 25-30°$ получаются значения l, превышающие $2H$.

График функции $\psi_0(\psi_{max})$ изображен на фиг. 2. Анализируя соотношение (8) и учитывая зависимость (7), видим, что значения ψ_0 и ψ_{max} следует выбирать внутри заштрихованной области. В точке $\psi_0 = 0$, $\psi_{max} = 1$ радиан функция R_0 не определена, т. е. можно взять любое значение R_0. Габариты механизма при различных ψ_{max} и ψ_0 приведены в табл. 1.

Минимальное значение R_0 при заданном ψ_0 получим из условия

$$\frac{\partial R_0}{\partial \psi_{max}} = 0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial R_0}{\partial \psi_{max}} = \frac{H}{2} \cdot \frac{2(\psi_{max} - \cos\psi_0)(\cos\psi_0 - \psi_{max})\psi_{max} - (\cos\psi_0 - 2\psi_{max})(\psi_{max}^2 + 1 - 2\psi_{max}\cos\psi_0)}{\psi_{max}^2(\cos\psi_0 - \psi_{max})^2}. \tag{10}$$

Приравнивая нулю числитель правой части (10), получим квадратное уравнение

$$\psi_{max}^2 \cos\psi_0 - 2\psi_{max} + \cos\psi_0 = 0, \tag{11}$$

корни которого

$$\psi_{max(1)} = \frac{1 - \sin\psi_0}{\cos\psi_0} \quad \text{и} \quad \psi_{max(2)} = \frac{1 + \sin\psi_0}{\cos\psi_0}.$$

Второй корень дает нам значения $\psi_{max} > 1$; соответствующие этому корню значения $R_0 < 0$ (см. фиг. 2).
Таким образом, практически пригодные минимальные значения R_0 получаем при

$$\psi_{max} = \frac{1 - \sin\psi_0}{\cos\psi_0}. \tag{12}$$

Подставляя это значение ψ_{max} в (8), имеем

$$R_{0\,min} = \frac{H \sin\psi_0}{1 - \sin\psi_0}. \tag{13}$$

Функция (8) представляет собой семейство плоских кривых

$$f(R_0, \psi_0, \psi_{max}) = 0,$$

зависящих от одного переменного параметра ψ_{max} (фиг. 3).

Исключив параметр ψ_{max} из уравнений $f(R_0, \psi_0, \psi_{max}) = 0$ и $\partial f / \partial \psi_{max} = 0$, получим уравнение огибающей этих кривых

$$\frac{H \sin\psi_0}{1 - \sin\psi_0} - R_0 = 0.$$

Сравнивая уравнение огибающей с (13), мы видим, что минимальные значения R_0 лежат на огибающей семейства кривых:

$$\frac{H}{2\psi_m} \cdot \frac{\psi_{max}^2 + 1 - 2\psi_{max}\cos\psi_0}{\cos\psi_0 - \psi_{max}} - R_0 = 0.$$

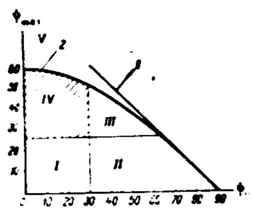
Таблица 1

Габариты кулачкового механизма с качающимся щупом*

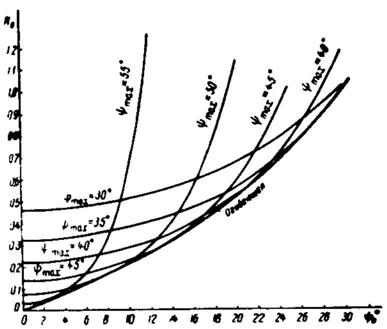
ψ_{max}	ψ_{max} рад	ψ_0	R_0	l_1	l	$l\cos\psi_0$**	$L-H$
30°	0,53300	0	0,455	1,455	1,910	1,910	2,910
		5	0,467	1,467		1,903	2,904
		10	0,503	1,503		1,881	3,006
		15	0,567	1,567		1,845	3,134
		20	0,666	1,666		1,798	3,332
		25	0,911	1,911		1,731	3,622
		30	1,024	2,024		1,654	4,048
35°	0,61086	0	0,318	1,318	1,637	1,637	2,636
		5	0,332	1,332		1,631	2,664
		10	0,372	1,372		1,612	2,744
		15	0,446	1,446		1,581	[illegible]
		20	0,560	1,560		1,538	3,120
		25	0,737	1,737		1,484	3,474
		30	1,011	2,011		1,418	4,022
40°	0,69813	0	0,216	1,216	1,432	1,432	2,432
		5	0,232	1,232		1,427	2,464
		10	0,261	1,261		1,411	[illegible]
		15	0,371	1,371		1,384	2,742
		20	0,520	1,520		1,346	3,040
		25	0,764	1,764		1,298	3,528
		30	1,187	2,187		1,240	4,374
45°	0,78540	0	0,137	1,137	1,273	1,273	2,274
		5	0,157	1,157		1,268	2,214
		10	0,223	1,223		1,254	2,446
		15	0,351	1,351		1,230	2,702
		20	0,581	1,581		1,196	3,162
		25	1,017	2,017		1,154	4,084
50°	0,87266	0	0,073	1,073	1,146	1,146	2,146
		5	0,106	1,106		1,142	2,212
		10	0,218	1,218		1,128	2,436
		15	0,465	1,465		1,107	2,980
		20	1,127	2,127		1,077	4,254
55°	0,95993	0	0,021	1,021	1,042	1,042	2,042
		5	0,129	1,129		1,038	2,258
		10	0,647	1,647		1,026	3,294
		15	5,847	6,847		1,006	13,694

* Величины R_0, l, l_1 и L даны в долях H.

** При $l\cos\psi_0 > l_1$ угол $COO_1 > 90°$ (см. фиг. 1).



Фиг. 2. Области значений функций $R_0(\psi_0, \psi_{max})$ и $l(\psi_0, \psi_{max})$.
1 — прямая $\psi_{max}+\psi_0=90°$; 2 — кривая $\psi_0=\arccos\psi_{max}$;
в области I $R<H$, $l>2H$;
в области II $R>H$, $l>2H$;
в области III $R>H$, $l<2H$;
в области IV $R<H$, $l<2H$;
в области V $R<0$.



Фиг. 3. Семейство кривых $R_0=f(\psi_0, \psi_{max})$.

Итак, условия минимальных габаритов кулачкового механизма с качающимся щупом определяются следующими зависимостями.

$$\psi_{max}=\frac{1-\sin\psi_0}{\cos\psi_0};\quad R_0=\frac{H\sin\psi_0}{1-\sin\psi_0};\quad l=\frac{H\cos\psi_0}{1-\sin\psi_0},\quad l_1=\frac{H}{1-\sin\psi} \tag{13}$$

или

$$\psi_{max}=\frac{1-\sin\psi_0}{\cos\psi_0};\quad l_1=\frac{H}{\psi_{max}\cos\psi_0};\quad l=l_1\cos\psi_0;\quad R_0=l_1\sin\psi_0. \tag{14}$$

т. е. в треугольнике OCO_1 (см. фиг. 1) угол между R_0 и l равен 90°.

Условия отсутствия самозаклинивания для кулачка минимального габарита запишутся следующим образом:

$$\frac{d\psi}{d\varphi}=\frac{\cos(\psi+\psi_0-\gamma_0)}{\cos\psi_0\cos\gamma_0}-1 \tag{15}$$

в случае вращения кулачка и щупа в противоположных направлениях

и

$$\frac{d\psi}{d\varphi}=1-\frac{\cos(\psi+\psi_0-\gamma_0)}{\cos\psi_0\cos\gamma_0} \tag{16}$$

в случае вращения кулачка и щупа в одном направлении.

Значения минимальных габаритов механизма приведены в табл. 2.

Таблица 2

Минимальные габариты кулачкового механизма с качающимся щупом

ψ_0	ψ_{max}	ψ^0_{max}	R_0	l_1	l	L
			0	1	1	2
0	1		0,036	1,036	1,036	2,072
2°	0,96568	55°19′45″	0,075	1,075	1,072	2,150
4°	0,93251	53°25′45″	0,117	1,117	1,111	2,234
6°	0,90040	51°35′21″	0,162	1,162	1,150	2,324
8°	0,86928	49°48′23″	0,210	1,210	1,192	2,420
10°	0,83909	48°04′35″	0,262	1,262	1,235	2,524
12°	0,80978	46°23′50″	0,319	1,319	1,280	2,638
14°	0,78128	44°45′51″	0,381	1,381	1,327	2,762
16°	0,75355	43°10′31″	0,447	1,447	1,376	2,894
18°	0,72653	41°37′39″	0,520	1,520	1,428	3,040
20°	0,70020	40°07′08″	0,599	1,599	1,483	3,198
22°	0,67450	38°38′47″	0,686	1,686	1,540	3,372
24°	0,64940	37°12′29″	0,781	1,781	1,600	3,562
26°	0,62487	35°48′12″	0,885	1,885	1,664	3,770
28°	0,60086	34°25′37″	1	2	1,732	4
30°	0,57734	33°04′45″				

8 368

Ассистент М. П. ТАРНОВСКАЯ

РАСЧЕТ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОФИЛЯ КУЛАЧКА КУЛАЧКОВОГО МЕХАНИЗМА С ВРАЩАЮЩИМСЯ КУЛАЧКОМ И ПОСТУПАТЕЛЬНО ДВИЖУЩИМСЯ ЩУПОМ

Цель настоящей работы — найти профиль кулачка, обеспечивающий минимальные габариты кулачкового механизма при заданной величине хода щупа.

Критическое значение угла подъема кулачка при произвольном положении щупа (см. фигуру) определяется соотношением *

$$\operatorname{tg}\gamma_{кр} \geqslant \frac{b}{\mu_1(H+r+b-s\mp\mu_1 r')}, \qquad (1)$$

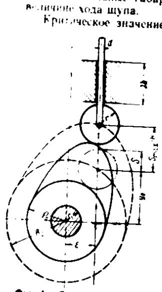
где μ_1—коэффициент трения в направляющих; s — текущая координата центра ролика, отсчитываемая от начального положения.

Знак минус соответствует движению щупа вверх. Наименьшее значение критического угла подъема соответствует $s=0$:

$$(\operatorname{tg}\gamma_{кр})_{min} = \frac{b}{\mu_1(H+r+b\mp\mu_1 r')}.$$

Габаритный размер механизма (вертикальный)

$$L=(2b+H+y_0+r)+\left(\sqrt{(y_0+H)^2+\varepsilon^2}-r\right).$$



Фиг. 1. Схема кулачкового механизма с поступательно движущимся щупом.

r—радиус валика, R_1—минимальный радиус действительной поверхности кулачка, R_0—минимальный радиус теоретической поверхности кулачка, H—ход щупа, ε—эксцентриситет, r—радиус ролика, $l=2b$—длина направляющей, $d=2r'$—поперечный размер штанги.

* Соотношение (1) выведено в предположении, что трение скольжения в точке контакта щупа и кулачка отсутствует, а самозаклинивание механизма наступает при контактном усилии $N=\infty$. См. В. Т. Костицын, Методы расчета наименьших размеров кулачковых механизмов со штангой в прямолинейных направляющих, Труды семинара по ТММ, АН СССР, т. III, вып. 12, М.—Л., 1947.

Для удобства вычислений будем считать $L=2(b+H+y_0)$. При таком упрощении даже для больших значений ε ($\varepsilon=0{,}3H\div0{,}5H$) погрешность в вычислении габаритного размера L не превышает 3—4%. Для центрального механизма $L=2(R_0+H+b)$.

Итак при одинаковых H, b и R_0 дезаксиальный кулачковый механизм будет иметь меньший габарит, чем центральный механизм на $\Delta L\approx2\left(R_0-\sqrt{R_0^2-\varepsilon^2}\right)$. Кроме того, ниже покажем, что в некоторых случаях для дезаксиального механизма мы получаем меньшие значения b, чем для центрального механизма.

Фактический угол подъема кулачка для рассматриваемого типа кулачкового механизма

$$\operatorname{tg}\gamma_ф = \pm\frac{\frac{ds}{d\varphi}-\varepsilon}{y_0+s}. \qquad (2)$$

При этом во избежание самозаклинивания должно выполняться условие

$$\operatorname{tg}\gamma_ф < \operatorname{tg}\gamma_{доп}, \qquad (3)$$

где

$$\operatorname{tg}\gamma_{доп} = \frac{b}{k\mu_1(H+r+b\mp\mu_1 r'-s)} \qquad (4)$$

(k — коэффициент запаса).

При заданном H габаритный размер механизма зависит лишь от суммы $z=b+y_0$. Уменьшение размера b (при неизменных H, r, ε, μ_1, r') влечет за собой уменьшение допустимых углов подъема, в то время как с уменьшением y_0 фактические углы подъема кулачка растут.

Таким образом, необходимость выполнения условия (3) сильно ограничивает возможности уменьшения габаритов кулачкового механизма. Ограничения в выборе размеров y_0 и b, налагаемые условием (3), отпадают в том случае, когда кулачок имеет постоянный коэффициент запаса, т. е.

$$\operatorname{tg}\gamma_ф = \operatorname{tg}\gamma_{доп}. \qquad (5)$$

Подставляя значения $\operatorname{tg}\gamma_ф$ и $\operatorname{tg}\gamma_{доп}$ из (2) и (4), после простых преобразований получим

$$\pm\frac{ds}{d\varphi} = \frac{b(y_0+s)}{k\mu_1(A+b-s)} \pm \varepsilon. \qquad (6)$$

При интегрировании произвольные постоянные определяем из условия: $s=0$ при $\varphi=0$. Получаем следующий закон движения щупа:

$$\frac{CD+k\mu_1 B}{C^2}\ln\frac{Cs+B}{B}-\frac{k\mu_1 s}{C}=\pm\varphi, \qquad (7)$$

где

$$C=b\mp\varepsilon\mu_1 k;\quad D=\mu_1 k(A+b);$$
$$B=by_0\pm D\varepsilon;\quad A=H+r\mp\mu_1 r'.$$

Рассмотрим кулачковые механизмы различных конструкций.

Центральный механизм с кулачком постоянного коэффициента запаса. Закон движения щупа в этом случае примет вид

$$\frac{k\mu_1(H + r \mp \mu_1 r')}{b}\ln\frac{s + R_0}{R_0} - \frac{k\mu_1}{b}s = \pm\varphi. \qquad (8)$$

Уравнение теоретического профиля кулачка:

$$R = s + R_0.$$

Закон движения щупа был получен из условия $\operatorname{tg}\gamma_\varphi = \operatorname{tg}\gamma_{доп}$ в любой точке профиля кулачка, следовательно, механизм гарантирован от самозаклинивания при любых значениях b и R_0. Однако некоторое ограничение в выборе этих величин остается, а именно: значения b и R_0 должны соответствовать заданным масштабам механизма $s_{max} = H$ и $\varphi_{max} = \Phi$. Подставляя предельные значения угла поворота и хода щупа в уравнение (8), получим зависимость $b(R_0)$

$$b = \frac{(H + r + R_0 \mp \mu_1 r')\,2{,}3\lg\dfrac{H + R_0}{R_0} - H}{\dfrac{\Phi}{k\mu_1} - 2{,}3\lg\dfrac{H + R_0}{R_0}}, \qquad (9)$$

где H, Φ, r, μ_1, k, r' — заданы, а $R_0 > r + r_1$. При неизменных H, Φ, r, μ_1, k, r' величина b растет с уменьшением R_0. Подсчитываем $z = b + R_0$ и выбираем R_0, при котором $z(R_0)$ принимает минимальное значение.

Дезаксиальный механизм постоянного коэффициента запаса. Он имеет меньшие габариты, чем центральный механизм при прочих равных условиях. Разница в габаритах особенно заметна при больших k. Так, например, для $k = 10$; $H = 100$; $\Phi = 2{,}5$; $r = 22$; $r' = 20$; $\mu_1 = 0{,}1$ имеем: для центрального механизма $z = 110$ ($b = 50$, $R_0 = 60$), для дезаксиального $z = 74$ ($\varepsilon = 16$; $b = 30$; $R_0 = 44$). Однако расчет дезаксиального механизма значительно сложнее, чем расчет центрального механизма. Здесь уже нельзя установить простую зависимость, которая дала бы возможность выбрать b, y_0, ε такими, чтобы заданные масштабы были удовлетворены. Приходится подсчитывать $\Phi = \Phi(b, \varepsilon, y_0, H)$ при многих комбинациях b, ε, y_0, чтобы выбрать значения, соответствующие заданным H и Φ.

Существует еще один вид кулачка, для которого условия отсутствия самозаклинивания выполняются при любых значениях b и R_0. Это **кулачок постоянного угла подъема.**

Закон движения щупа в этом случае получим из условия

$$\operatorname{tg}\gamma_\varphi = k = \text{const},$$

тогда

$$s = \frac{\pm\varepsilon + ky_0}{k}\left(e^{\pm k\varphi} - 1\right). \qquad (10)$$

Коэффициент k должен удовлетворять условию $k < (\operatorname{tg}\gamma_{доп})_{min}$, т. е.

$$k < \frac{b}{\mu_1(H + r + b \mp \mu_1 r')}. \qquad (11)$$

Радиус-вектор теоретической поверхности кулачка рассчитывается по формуле

$$R = \sqrt{(s + y_0)^2 + \varepsilon^2}. \qquad (12)$$

Порядок расчета геометрических размеров следующий. Нам заданы масштабы, т. е. $s_{max} = H$ и $\varphi_{max} = \Phi$, размеры r, r_1, r', коэффициент трения в направляющих μ_1 и коэффициент запаса k. Надо выбрать три величины: b, ε, y_0 так, чтобы они обеспечивали заданные масштабы и чтобы габаритный размер механизма лежал в выбранных нами пределах. При заданном H габаритный размер механизма определяется суммой $z = b + y_0$. Задаемся z_{max} и выбираем b и y_0 так, чтобы $b + y_0 < z_{max}$. Коэффициент k определяем согласно неравенству (11). Подставляем далее в (10) $s = H$ и $\varphi = \Phi$

$$H = \frac{\pm\varepsilon + ky_0}{k}\left(e^{\pm k\Phi} - 1\right), \qquad (13)$$

откуда

$$\pm\varepsilon = k\left(\frac{H}{e^{\pm k\Phi} - 1} - y_0\right); \qquad (14)$$

$$R_0 = \sqrt{y_0^2 + \varepsilon^2}.$$

Найденные R_0 и ε можно несколько изменить, но так, чтобы соответствующее значение k удовлетворяло условию (11). Если нам задано R_0, то для ε получаем квадратное уравнение

$$\varepsilon^2(1 + k^2) \pm 2\varepsilon\frac{kH}{e^{\pm k\Phi} - 1} + \frac{k^2H^2}{(e^{\pm k\Phi} - 1)^2} - k^2R_0^2 = 0. \qquad (15)$$

Для центрального механизма R_0 можно выбирать независимо от k.

Как мы уже указывали, соотношение (1) для определения критического значения угла подъема выведено в предположении, что самозаклинивание механизма происходит при контактном усилии $N = \infty$. Кроме того, коэффициент трения в точке контакта щупа и кулачка принимался равным нулю.

В общем случае, когда допустимое контактное усилие $N \neq \infty$ и коэффициент трения в точке контакта равен μ_2, получаем следующее уравнение для определения допустимого угла подъема кулачка:

$$\gamma_{доп} = \arccos\frac{\dfrac{1}{n} + \mu_1(1 + 2l_1)\sqrt{1 + \mu_1^2(1 + 2l_1)^2 - \dfrac{1}{n^2}}}{1 + \mu_1^2(1 + 2l_1)^2} - \operatorname{arctg}\mu_2, \qquad (16)$$

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2012/01/10 : CIA-RDP80T00246A064300230001-2

$$l_1 = \frac{r + H + s}{2b}; \quad n = \frac{N}{Q};$$

Q — суммарная нагрузка на щуп.*

Наименьшее значение допустимого угла подъема получим при $s=0$. При расчете кулачка постоянного угла подъема коэффициент k должен удовлетворять условию

$$k \leqslant (\text{tg}\,\gamma_{\text{доп}})_{s=0}. \tag{17}$$

* Л. Н. Преснухин, Кулачковые механизмы, МВТУ, Юбилейный сб., вып. 49, Счетно-решающие приборы, Оборонгиз, 1955. (В уравнениях (6) на стр. 82 и (7) на стр. 83 допущены ошибки (см. ниже). Табл. 2, 3 и 4 соответствуют верным формулам.)

Примечание. По просьбе Л. Н. Преснухина — автора статьи «Кулачковые механизмы» (труды МВТУ, вып. 49, Оборонгиз, 1955) приводятся формулы (8) и (9) его статьи в исправленном виде и даются исправления формул (6) и (7).

$$\vartheta = \arccos \frac{1}{n(1-\mu_1{}^0)\sqrt{1+\mu_2{}^2}} - \text{arc tg}\,\mu_2, \tag{8}$$

$$\vartheta = \arccos \frac{1}{n(1-\mu_1{}^0)} - \text{arc tg}\,\mu_2. \tag{9}$$

В формуле (6) в выражении для косинуса в числителе в круглых скобках вместо $\left(1+\frac{l_2}{l_1}\right)$ должно быть $\left(1-2\frac{l_2}{l_1}\right)$.

В формуле (7) в выражении для косинуса в числителе под знаком радикала вместо $\mu_2{}^2$, нужно $\mu_1{}^2$. *Ред.*

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2012/01/10 : CIA-RDP80T00246A064300230001-2

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

Утверждена
Учебно-методическим управлением
по высшим учебным заведениям

ПРОГРАММА
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

ДЛЯ ВЫСШИХ ТЕХНИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

(120—140 часов)

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА»
Москва — 1960

ОБЪЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

В связи с изменением системы высшего образования в соответствии с решениями XXI съезда КПСС и с Законом от 24 декабря 1958 г. об укреплении связи школы с жизнью и о дальнейшем развитии системы народного образования Министерством высшего и среднего специального образования СССР утверждены новые учебные планы высших учебных заведений.

Программно-методической комиссией по теоретической механике составлены программы основного курса теоретической механики в трех вариантах в зависимости от объема курса, а именно программы:

1) на 220 учебных час.,
2) на 160—190 учебных час.,
3) на 120—140 учебных час.

Объем и содержание курса теоретической механики для каждой специальности устанавливаются вариантом программы, соответствующим числу часов, отводимых на курс теоретической механики по учебному плану этой специальности на заочных, вечерних и очных факультетах и отделениях.

Указанное в программах число часов, отводимых на каждый из трех разделов курса теоретической механики (статика, кинематика, динамика), является лишь ориентировочным.

Порядок изложения программы также не является строго обязательным и может быть изменен по усмотрению кафедры.

При этом кафедрам предоставляется право углубить отдельные темы программы за счет некоторых сокращений при изложении остальных тем в зависимости от профиля данной специальности. Более простые вопросы программы можно совсем не излагать на лекциях, рекомендуя студентам проработать эти вопросы по учебнику, что будет способствовать развитию у студентов навыков в самостоятельной работе над книгой.

При прохождении курса теоретической механики особое внимание следует обращать на выработку у студентов диалектико-материалистического мировоззрения. Необходимо иметь в виду, что теоретическая механика наряду с математикой и физикой представляет собой дисциплину, развивающую и организующую мышление учащихся. Следует, кроме того, с достаточной убедительностью показать учащимся, что теоретическая механика является научной базой современной техники.

Помимо лекционного метода обучения, в преподавании теоретической механики не менее важную роль играют практические занятия. Кафедрам необходимо обратить серьезное внимание на методику практических занятий с тем, чтобы эти занятия, во-первых, показывали студентам практическое значение механики и, во-вторых, приучали студентов не пассивно воспринимать изучаемый теоретический материал, а уметь применять его к решению конкретных задач. В целях усиления связи теоретического обучения с практикой кафедрам рекомендуется на практических занятих и в домашних заданиях давать студентам и такие задачи, содержание которых было бы связано с профилем данной специальности. В приказе Министра высшего образования СССР за № 784 от 26 июля 1958 г. о поднятии уровня преподавания теоретической механики в высших технических учебных заведениях предусмотрено изготовление специальным конструкторским бюро Министерства в первую очередь типового оборудования кабинетов теоретической механики, а затем и оборудования лабораторий по динамике. В связи с этим кафедрам следует принять меры к пополнению оборудования своих кабинетов для того, чтобы демонстрировать на лекциях опыты, иллюстрирующие законы механики, а также применять (и на лекциях, и на практических занятиях) показ отдельных моделей и приборов.

Программы содержат основные исторические сведения, относящиеся к развитию механики.

Излагать все эти сведения полностью во введении к курсу механики, как это указано в программах, нет необходимости. В вводной лекции достаточно осветить развитие механики в самых общих чертах. Более подробные исторические сведения о развитии механики и о наиболее важных работах выдающихся ученых-механиков следует сообщать учащимся там, где это уместно, при изложении той или другой темы программы, а также в заключительных лекциях, где можно познакомить слушателей с основными направлениями научных исследований в области механики в настоящее время в связи с семилетним планом развития народного хозяйства СССР.

Если по новому учебному плану данной специальности предусмотрено изучение части учебного материала (например, статики) в период заочного обучения студентов, то кафедрам необходимо обеспечить студентов на период их заочного обучения учебными заданиями с соответствующими методическими указаниями.

В этих заданиях необходимо отметить, какие теоремы и формулы в данной части курса являются наиболее важными, какие задачи рекомендуются для самостоятельного решения, а также указать материал, который нужно проработать студентам по учебнику. Для студентов, обучающихся без отрыва от производства, особенно важное значение приобретают консультации преподавателей. Поэтому кафедрам необходимо обеспечить таких студентов планомерно организованными консультациями.

Новыми учебными планами для некоторых специальностей на старших семестрах предусмотрено изучение дополнительных глав по курсу теоретической механики. Учитывая особо важное значение для современной техники таких вопросов, как теория малых колебаний, теория устойчивости движения, динамика материальной точки переменной массы и др., программно-методической комиссией Министерства составлена отдельная программа по дополнительным главам курса теоретической механики. Кафедрам предоставляется право выбора из этой программы соответствующих разделов в зависимости от профиля данной специальности и от числа часов, отводимых учебным планом на чтение дополнительных глав.

Конечно, разработанная методической комиссией программа по дополнительным главам курса теоретической механики не является исчерпывающей.

Принимая во внимание современные требования, предъявляемые к подготовке инженера данной специальности, кафедры теоретической механики при чтении дополнительных глав могут выбрать ту или иную тему, не содержащуюся в указанной программе, с согласия совета вуза или совета факультета.

Помимо чтения дополнительных глав, предусмотренных учебным планом, кафедрам теоретической механики необходимо проявлять должную инициативу в организации небольших факультативных курсов, как это указано в приказе Министра высшего образования СССР за № 784 от 26 июля 1958 г.

Объем и содержание факультативных курсов устанавливаются советом факультета или советом вуза по представлению кафедры.

Программа по дополнительным главам может быть использована и при чтении таких факультативных курсов

СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ

Введение

Теоретическая механика (общая механика) и ее место среди естественных наук.

Объективный характер законов механики. Метод диалектического материализма в механике. Роль и значение аксиом и абстракций в механике. Механика как теоретическая база современной техники.

Основные исторические этапы развития механики: Архимед, Коперник, Галилей, Ньютон, Даламбер, Лагранж и др. Основные этапы развития механики в России: Эйлер, М. В. Ломоносов, М. В. Остроградский, П. Л. Чебышев, Н. Е. Жуковский, С. А. Чаплыгин, А. М. Ляпунов, И. В. Мещерский и др.

Статика твердого тела

1. Введение в статику. Предмет статики и краткий очерк ее развития. Основные понятия статики: абсолютно твердое тело, материальная точка, сила, эквивалентные системы сил, уравновешенная система сил. Аксиомы статики. Несвободное твердое тело. Связи и реакции связей.

2. Система сходящихся сил. Силы, сходящиеся в одной точке. Геометрический метод приведения системы сходящихся сил к равнодействующей. Разложение данной силы на составляющие. Проекции силы на ось и на плоскость. Аналитический способ нахождения равнодействующей системы сходящихся сил. Условия равновесия системы сходящихся сил в геометрической и в аналитической форме. Теорема об уравновешивании двух сходящихся сил третьей силой.

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2012/01/10 : CIA-RDP80T00246A064300230001-2

3. **Параллельные силы. Теория пар на плоскости.** Приведение двух параллельных сил, направленных в одну и в противоположные стороны, к равнодействующей. Пара сил. Разложение данной силы на две, ей параллельные. Условие равновесия рычага и возникновение понятия момента силы. Момент силы относительно точки. Момент пары как сумма моментов сил пары относительно любой точки ее плоскости. Теоремы об эквивалентных парах, лежащих в одной плоскости. Сложение пар, лежащих в одной плоскости. Условие равновесия плоской системы пар.

4. **Плоская система сил.** Приведение плоской системы сил к данному центру (метод Пуансо). Главный вектор и главный момент. Приведение плоской системы сил к равнодействующей. Теорема Вариньона. Случай приведения плоской системы сил к одной паре. Условия равновесия плоской системы сил. Различные виды систем уравнений равновесия. Условия равновесия плоской системы параллельных сил.

Статически определенные и статически неопределенные задачи.

Трение скольжения. Коэффициент трения. Угол трения. Равновесие твердого тела при наличии сил трения.

5. **Произвольная система сил.** Момент силы относительно точки как вектор. Момент силы относительно оси и его связь с моментом силы относительно точки, лежащей на этой оси. Аналитические выражения моментов силы относительно координатных осей.

Теорема о переносе пары в другую плоскость, параллельную плоскости этой пары.

Момент пары как вектор. Сложение пар, лежащих в пересекающихся плоскостях. Условие равновесия системы пар. Приведение произвольной системы сил к данному центру. Главный вектор и главный момент. Условия равновесия системы сил в общем случае в векторной и в аналитической форме. Условия равновесия системы параллельных сил, не лежащих в одной плоскости.

6. **Центр параллельных сил и центр тяжести.** Приведение системы параллельных сил к равнодействующей. Центр параллельных сил. Центр тяжести. Общие формулы для координат центра параллель-

ных сил и центра тяжести. Центр тяжести простейших линий, плоских фигур и тел. Определение центра тяжести тел и фигур сложной формы.

Кинематика

1. Введение в кинематику. Пространство и время как формы существования материи. Различные формы движения материи. Механическое движение. Система отсчета. Предмет кинематики и ее значение для техники. Краткие исторические сведения о развитии кинематики.

2. Кинематика точки. Естественный способ определения движения точки. Траектория точки и уравнение движения точки по данной траектории. График движения. Понятие скорости точки. Скорость как вектор. Численное значение и направление скорости. Скорость как производная от радиуса вектора точки по времени.

Понятие ускорения точки. Ускорение как производная от вектора скорости по времени. Касательное и нормальное ускорения точки. Координатный способ определения движения точки. Нахождение траектории в этом случае. Проекции скорости на неподвижные оси декартовых координат. Формулы, определяющие численное значение и направление скорости по ее проекциям на оси декартовых координат.

Проекции ускорения на неподвижные оси декартовых координат. Формулы, определяющие численное значение и направление ускорения по его проекциям на оси декартовых координат.

3. Поступательное и вращательное движения твердого тела. Поступательное движение твердого тела. Теорема о траекториях, скоростях и ускорениях точек тела в этом движении. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси. Угловая скорость и угловое ускорение тела. Равномерное и равнопеременное вращение твердого тела. Траектории, скорости и ускорения точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

4. Составное движение. Относительное и переносное движение. Относительные и переносные скорости и ускорение точки. Теоремы параллелограмма ско-

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2012/01/10 : CIA-RDP80T00246A064300230001-2

ростей и параллелограмма ускорений точки. Понятие о разложении движения на переносное и относительное.

5. Плоскопараллельное движение твердого тела. Плоскопараллельное движение твердого тела и движение плоской фигуры в ее плоскости. Разложение движения плоской фигуры на поступательное движение и вращение вокруг полюса. Уравнения движения плоской фигуры. Независимость угловой скорости фигуры от выбора полюса. Скорости точек плоской фигуры.

Теорема о проекциях скоростей двух точек плоской фигуры на прямую, соединяющую эти точки. Мгновенный центр скоростей и мгновенный центр вращающейся плоской фигуры.

Динамика

1. Введение в динамику. Предмет динамики. Краткий исторический очерк развития динамики. Основные законы механики Галилея—Ньютона. Инерциальная система отсчета. Две меры механического движения: количество движения и кинетическая энергия материальной точки. Свободная и несвободная материальная точка. Система материальных точек. Связи и реакции связей. Внешние и внутренние силы.

2. Дифференциальные уравнения движения материальной точки. Дифференциальные уравнения движения материальной точки в декартовых координатах. Две основные задачи динамики материальной точки. Примеры интегрирования дифференциальных уравнений движения материальной точки в простейших случаях. Определение постоянных интегрирования по начальным условиям движения. Гармоническое колебание материальной точки под действием восстанавливающей силы, пропорциональной расстоянию; амплитуда, фаза, частота и период этих колебаний. Вынужденные колебания материальной точки при отсутствии сопротивления. Случай резонанса.

3. Теоремы о количестве движения материальной точки и системы. Количество движения материальной точки и количество движения системы и их проекции на координатные оси. Импульс силы. Теоремы об изменении количества движения

материальной точки и о количестве движения системы в векторной и координатной форме. Условия сохранения количества движения системы или его проекции на данную неподвижную ось. Центр масс системы. Выражение количества движения системы через массу системы и скорость ее центра масс. Теорема о движении центра масс системы.

4. Теоремы о моменте количества движения материальной точки и о кинетическом моменте системы. Момент количества движения материальной точки относительно центра или оси. Теорема о моменте количества движения материальной точки в векторной и координатной форме. Кинетический момент системы относительно центра или оси. Теорема о кинетическом моменте системы в векторной и координатной форме. Условия сохранения кинетического момента системы относительно неподвижного центра или неподвижной оси.

Кинетический момент вращающегося твердого тела относительно оси вращения. Момент инерции тела относительно оси; радиус инерции. Дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси. Момент инерции как мера инерции твердого тела в его вращательном движении вокруг данной оси. Примеры вычисления моментов инерции тел в простейших случаях. Теорема о моментах инерции тела относительно параллельных осей.

5. Теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки и системы. Кинетическая энергия материальной точки и системы. Кинетическая энергия твердого тела при поступательном, вращательном и плоскопараллельном движении тела. Элементарная работа силы и работа силы на конечном пути. Работа силы тяжести. Мощность. Теорема о работе равнодействующей сил, приложенных к одной точке. Теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки и системы.

6. Теория удара. Явление удара. Ударная сила и ударный импульс. Действие ударной силы на материальную точку.

Прямой центральный удар тела о неподвижную поверхность; упругий и неупругий удары. Коэффициент восстановления и его опытное определение.

Прямой центральный удар двух тел. Теорема Карно.

7. **Принцип Даламбера и принцип возможных перемещений.** Принцип Даламбера. Сила инерции материальной точки. Определение динамических реакций при несвободном движении материальной точки и системы материальных точек.

Возможные (виртуальные) перемещения системы. Совершенные (идеальные) связи. Принцип возможных перемещений. Применение принципа возможных перемещений к простейшим машинам. Общее уравнение динамики.

Примечания.

1. Для развития навыков в самостоятельном решении задач устанавливается не менее одной контрольной работы в каждом семестре.

2. Настоящая программа рассчитана на объем курса теоретической механики в 140 час.; из них на статику отводится примерно 40 час., на кинематику 30 час. и на динамику 70 час. При объеме курса в 120 час. из раздела программы «Динамика» могут быть исключены следующие вопросы:

1) вынужденные колебания материальной точки при отсутствии сопротивления. Случай резонанса (из пункта 2);

2) теория удара (пункт 6).

Литература

И. М. Воронков. Курс теоретической механики, Гостехиздат, 1954 и последующие издания.

И. В. Мещерский. Сборник задач по теоретической механике. Гостехиздат, 1952 и последующие издания.

С. М. Тарг. Краткий курс теоретической механики. Физматгиз, 1958.

Ответственный редактор профессор И. М. ВОРОНКОВ

Сдано в набор 1/IX—60 г. Подписано к печати 17/IX—60 г.
Бумага 84×108[1]/32=0,37 печ. л. 0,6 усл. печ. л. 0,55 уч.-изд. л.
Тираж 59 500 Издательство «Высшая школа»
Заказ 1038 Цена 15 коп.
Цена с 1 января 1961 г. — 2 коп.

Тип. изд-ва «Высшая школа», Неглинная, 29/14.