Page Denied

Approved For Release 2008/06/27 : CIA-RDP80T00246A005800550002-6

The Stabil ity of Motion in Journal Bearings ~~with Dyan~~ Subjected to Dynamic Forces, by N. Tipei, Ref. 349NN, Rev. de Mecanique Appliquee, v. 1, no. 2, pp. 115-122.



For very large speeds of rotation, the solution of bearings/ films, based on the modern hydrodynamic theory, needs more of a ~~verifiat~~ verification of the stability of motion than is ~~usa~~ usually assured. It is possible that such a journal may produce excessive motions rapidly, resulting in frictional wear. By utilizing the results found here, one is able to study the stability problem for journal bearings of ~~infinite~~ finite length, having three-dimensional motion.

Considera/ a system of fixed axes $O_1x_1\ y_1\ z_1$ (Fig. 1) chosen such that the axis ~~Ø1~~ $O_1\ z_1$ is normal to the plane of the figure and parallel to the axis of rotation (1) of the journal, and of the bearing (2). Let Oxyz be a ~~mobile~~ moving axis system chosen such that the origin is at the point O and the axis Ox coincides with the line of centers $O_1\ O_2$ and Oz is parallel to $O_1\ z_1$.

Assume, in addition, that the geometrical axes of surfaces 1 and 2 are always parallel and that $O_1$ and $O_2$ represent the points where the axes cross the plane Oxy. Let $e_1$ and $e_2$ be ~~dix~~ the distances from the origin O to $O_1$ and $O_2$. Then one is able to write the velocities ~~df~~ for surfaces (1) and (2)

(1)

Let $\overline{F}_i$ be the resultant of the applied force $\overline{P}_i$ and the pressures on the surface (i). Let ~~capital~~ Omega$_i$ be the speed of rotation of about the ~~axx~~ axes $O_i$ and $\overline{V}_0$ the velocity of motion of point O. Then one may write the equations of motion of the two bodies (journal and bearing) in which $M_i$ is the mass of ~~ox~~ each (1)

(2)

In addition, the axes $O_i$ are such that the centers of gravity of the ~~respedx~~ respective bodies move such that the moments of inertia of the bodies and the applied moments must be considered. Let $M_{mi}$ be the applied moment and $M_{fi}$ be the frictional moment due to the fluid film on the surfaces (i). Then $M_i = M_{mi} \cdot M_{fi}$. Thus,

(3)

Let it be assumed that the moment of rotation are parallel to Oz as given in (3) so that they have vector characteristics. Consider the original system to move with respect ~~with~~ to point $O_2$. If ~~$d/_2$~~ $\overline{E}_2 = 0$, and ~~$E$~~ $\overline{E}_1 = -E$, the equations of motion are

(4)

~~ofx~~ or
~~for~~ respectively for axes Ox and Oy

(5)

In Figure 1 it may be seen that, existing between the speed of rotation, gamma with a dot over it (Omega$_1$, Omega$_2$, T) of the load $\overline{P}$, the speed of rotation $\dot{P}$ of the line of centers, and the relative speed of rotation theta with a dot above it and an asterisk following it) of the load relative to the line of centers, there exists a relation

(6)

Consider ~~perturb-~~ perturbations of the variables $V_{Ox}$ $V_{Oy}$, theta asterisk and alpha = E/Delta (in which Delta is the radial clearance) to have the forms

(7)

By using these relations in th e equation of motion and linearizing the results with ~~xxx~~ respect to the perturbations, it follows that

(8)

In case the perturbations permit, one may consider alpha asterisk, theta asterisk, asterisk, Omega$_1$ asterisk, ~~Q~~ Theta$_2$ asterisk, ~~V/Oxy~~ $V_{Ox}$*, $V_{Oy}$* are ~~d~~ independent of time. The system (8) must ~~b~~ satify the condition of compatibility. It follows that, if D is the determinant of the coefficients,

(9)

the result is an equation of the eighth degree in nu.

(10)

Stability exists if the ~~x~~ real ~~pars~~ parts of ~~thr-~~ the roots nu$_j$ (j = 1, 2, . . . 8) are negative. This may be determined by the Rooth-Hurwitz criterion. Thus, the successive determinants $D_j$ included by the horizontal and vertical lines of the following table must have the sign of $C_1$

(11)

Now it should be noted that in the majority of the cases, one may consider that the perturbation velocities ~~Rxltax~~ delta $\text{Omega}_1$ and delta $\text{Omega}_2$ are 0 respectively, $\text{Omega}_1 * = \text{Omega}_2 * = 0$. In this case, the last two equstions of the system (8) necessarily require that the total variation of the moment due to the perturbations of ~~xalphax~~ theta*, $V_{Ox}$, $V_{Oy}$, are 0, and the moment varies in this case with the moment of friction. For rapid motion, this condition is difficult to realize because it is necessary to note that the perturbations have little ~~effeti~~ effective influence on the motion about the center of gravity and that the variations of $\text{Omega}_1$ and $\text{Omega}_2$ are therefore negligible.

Continuing this hypothesis, equation (10) is of the sixth degree since $C_0 =$ ~~Cxx~~ $C_1 = 0$, and the stability conditions require

(12)

The derivatives of the functions $F_{ix}$, $F_{iy}$ and $M_i$ taken with respect to alpha, ~~xkx~~ theta*, $\text{Omega}_1$, $\text{Omega}_2$, ~~V0xx~~ $V_{Ox}$, $V_{Oy}$, may be very easily found and the results expressed as ~~xnx~~ in (3) ~~xdx~~ and (4) for cases of variable speed and for slight misalignment (?).

Assume in particular that $\bar{V}_0 = 0$ and that the point $O_2$ is fixed with ~~respectlt~~ respect to the origin O, $\text{Omega}_0 = 0$ and gamma with a dot over it $= -\text{Omega}_1$. One has, therefore, a bearing with a centrifugal-like force such as is ~~x~~ often encountered. The characteristic equation (10) is now of the fourth degree

(13)

Conditions (11) simplify considerably for this case since one may set $C_0 = C_1 = C_2 = C_3 = 0.$ in equation (10). It follows that

(14)

From references (2), (3), (4), it is possible to write previously obtained results

(15)

Finally, one must consider

(un)

with

(16)

If, ((alpha with a dot over it)$_0$ is greater than 0, that is the initial moment of the surfaces have the tendency to approach each other, an undesirable situation in practice, $C_5$ and $C_6$ are positive. Assuming finally that ~~Theta~~/ theta with two dots above it, folowed by an asterisk, is greater than 0, is it possible to note that partial($F_1$ $_y$/partial alpha/$M_1$ Delta, and also (Omega$_1$ plus theta with a dot over it and an asterisk)$^2$ , it follows that immediately that $C_8$ is greater than 0 and the sign of coefficient $C_7$

depends ~~oxxt~~ upon the sign of the sum,

(17)

By virtue of the preceding hypothesis, the second parenthesis of the first ~~xxxx~~ term and of the second term in Equation (17) are positive. When the speed of rotation is great, the first parenthesis of the first term may be taken to be positive if alpha approaches 1. Similarly, at very large speeds, and alpha approach 1, the second term predominates such that s is greater than 0 even if the first parenthesis becomes negative. On the other hand, if alpha approaches 0, s is negative and the motion will be unstable such that it is necessary to examine the two last conditions of (14). It is evident, finally, that as the rotational speed reduces, stability conditions improve for reduced values of the relative eccentricity ~~x~~ ratio, but the conclusions which concern ~~x~~ the regions of favorable values of alpha for stability are the same.

It is necesaary to mention, finally, that the values of alpha which are taken for determining ~~the-eoff-~~ coefficients $C_i$ are those which correspond to the initial condition when they are more or less constant. Only when , under large loads, alpha approaches 1, does one have generally good stability. Similarly, for short periods of heavy loads, the derivatives (3) partial $F_1$ x / partial alpha and ~~a vertical straight line~~ | partial $F_1$ y/partial alpha | have very large values.

In the case of centrifugal loading, one may determine approximately the motion of rotation ~~///~~ by direct observation. By neglecting N(5), the derivatives

$\dot{e}$ and $\ddot{e}$ the system reduces to

(18)

If the load is large, (Omega$_1$ + ~~Theta~~ theta dot asterisk)$^2$ , and the rotational speed is very large such that small quantities ~~of~~ occurring in the second term are in the order of $10^{-1}$, and ~~h~~ theta with two dots above it * has also reduced values. In this case, one may make a first approximation from (18), $C_n/C_t$ = tangent theta asterisk; as a consequence, a ~~differentil~~ differential equation and ~~in~~ theta asterisk results

(19)

If theta with a dot over it asterisk is negligible in comparison to Omega$_1$ (at these speeds, high rotation,) and if one considers the tangent theta * to be approximately equal to $\alpha$ theta* ~~)/a~~ (a valuable ~~hypoth~~ hypothesis for ordinary loads), it results that theta$_0$* and ~~xtx~~ theta$_0$ with a ~~star~~ over it and an asterisk, correspond to the initial values

~~(30)~~

(20)

It is easy to deduce from the preceding equation that theta* may be reduced to near zero only if theta$_0$* and theta$_0$ with a dotover it* have contrary signs and if -theta$_0$*. Omega$_1$ /theta$_0$ with a dot over it asterisk is less than or equal to 1. Generally, this last condition does not occur since it results only with large loads and reduced values of theta$_0$*, and Omega$_1$ greater than theta$_0$ with a dot over it asterisk. Therefore, | theta*| must be diminished so that the moment --you can see this in the middle of page 121, starts with a t $\bar{-}$ 1 over Omega$_1$, a value which is continually increasing (non-periodic). If theta$_0$ with a dot over it, asterisk, is less than 0, theta$_0$* and theta$_0$ with a dot over it* are of the same sign and |theta*| continually increase. Then the simplified sort of hypotheses introduced in (19) are not valid. It is important to note that this situation is less dangerous in the operation of bearings because ~~they~~ it corres-pond generally to a contact (?) of bodies ~~(1)~~ (1), (2), in the region where the film thickness is minimum. Finally, if the value of the initial ~~sped~~ speed is theta$_0$ dot asterisk $\bar{=}$ - Omega$_1$ theta$_0$*, it follows that

next to the last paragraph
(page 7)

As the result of this analysis, using another method than the preceding result indicates that for certain values for theta$_0$ dot asterisk, the consequence of including the effect of small perturbation is that the motion is limited in amplitude because of the direction of ~~rotational~~ rotational loading, and this varies ~~radpi~~ rapidly with time. The final position (theta*)$_t$ approach infinity $\bar{=}$ 0 is independent of theta$_0$* and theta$_0$ dot asterisk, as a consequence of the perturbations Delta theta$_0$* and Delta theta$_0$ dot asterisk. Therefore, the resulting motion is characterized as being stable.

Tipei, N. 7346 Gr

La stabilite du mouvement dans les paliers a charge dynamique
Revue de mecanique appliquee, Tome I, 1956 No. 2, pp.1-8.

REVUE DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE
Tome I, 1956, N° 2

LUBRIFICATION

# LA STABILITÉ DU MOUVEMENT DANS LES PALIERS À CHARGE DYNAMIQUE*)

PAR

N. TIPEI

Pour des vitesses de rotation très grandes, le calcul des paliers, ayant à la base les théories hydrodynamiques modernes, demande en plus une vérification de la stabilité du mouvement, qui n'est pas toujours assurée et peut produire rapidement des usures excessives ou des accidents de fonctionnement. Utilisant les résultats trouvés antérieurement, on fera l'étude du problème de la stabilité pour les paliers circulaires de largeur finie (mouvement tridimensionnel).

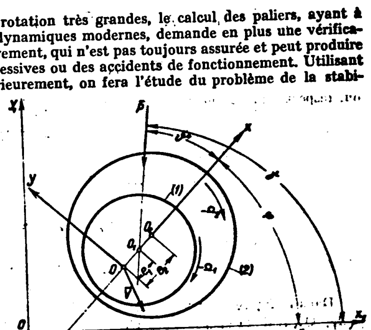



Fig. 1

Soit un système fixe d'axes $O_1x_1y_1z_1$ (fig. 1) choisi de sorte que l'axe $O_1z_1$ soit normal au plan de la figure parallèle aux axes du tourillon (1) et du coussinet (2) et $Oxyz$ un système mobile ayant l'origine dans un point $O$ quelconque ; l'axe $Ox$ coïncide avec la ligne des centres $O_1O_2$ et $Oz$ est parallèle à $O_1z_1$.

On suppose, ensuite, que les axes géométriques des surfaces (1) et (2) sont toujours parallèles, et $O_1$ et $O_2$ représentent les points où elles percent le plan $Oxy$. Notant $e_1$ et $e_2$ les distances à l'origine $O$ de $O_1$ et $O_2$ on peut écrire les vitesses des corps (1) et (2)

$$\overline{V}_i = \dot{\bar{e}}_i + \overline{V}_0 + \dot{\bar{\varphi}} \wedge \bar{e}_i, \qquad (i = 1, 2). \tag{1}$$

*) Cette étude a été publiée en roumain dans « Comunicările Academiei R.P.R. », 1955, 5, 12, 1723.



Approved For Release 2008/06/27 : CIA-RDP80T00246A005800550002-6

Tipei, N. 7346
La stabilité du mouvement dans les paliers à charge dynamique.
Revue de mécanique appliquée, Tome I, 1956 No. 2, pp.1-8.



Soit $\overline{F}_i$ la résultante de la force appliquée $\overline{P}_i$ et des pressions sur la surface (*i*), $\Omega_i$ les vitesses de rotation autour des axes $O_i$ et $\overline{V}_0$ la vitesse d'entraînement du point $O$; on peut écrire les équations du mouvement des deux corps, si $m_i$ est la masse de chacun [1]

$$\ddot{\overline{e}}_i + \dot{\overline{V}}_0 + \dot{\overline{\varphi}} \wedge (2\dot{\overline{e}}_i + \overline{V}_0) + \ddot{\overline{\varphi}} \wedge \overline{e}_i - \overline{e}_i \dot{\varphi}^2 = \frac{\overline{F}_i}{m_i}. \tag{2}$$

Autour des axes $O_i$, dont on admet qu'elles passent par les centres de gravité des corps respectifs, on obtient, aussi, les équations du mouvement suivantes, où $I_i$ sont les moments d'inertie par rapport à ces axes, $M_{mi}$ les moments moteurs appliqués, $M_{fi}$ les moments de frottement exercés par le fluide sur les surfaces (*i*), et $M_i = M_{mi} - M_{fi}$ la différence respective

$$- I_i \dot{\Omega}_i = M_i. \tag{3}$$

Etant donné que les moments et les rotations sont parallèles à $Oz$, la relation (3) n'a plus un caractère vectoriel. Si l'on considère l'origine du système mobile au point $O_2$, $\overline{e}_2 = 0$, $e_1 = - e$, on obtient les équations de mouvement

$$\left.\begin{aligned} - \ddot{\overline{e}} + \dot{\overline{V}}_0 + \dot{\overline{\varphi}} \wedge (- 2\dot{\overline{e}} + \overline{V}_0) - \ddot{\overline{\varphi}} \wedge \overline{e} + \overline{e}\dot{\varphi}^2 &= \frac{\overline{F}_1}{m_1}, \\ \dot{\overline{V}} + \dot{\overline{\varphi}} \wedge \overline{V}_0 &= \frac{\overline{F}_2}{m_2}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

ou, respectivement, pour les axes $Ox$ et $Oy$

$$\left.\begin{aligned} - \ddot{e} + \dot{V}_{0x} - \dot{\varphi} V_{0y} + e\dot{\varphi}^2 &= \frac{F_{1x}}{m_1}, \\ \dot{V}_{0y} + \dot{\varphi} V_{0x} - 2\dot{\varphi}\dot{e} - \ddot{\varphi} e &= \frac{F_{1y}}{m_1}, \\ \dot{V}_{0x} - \dot{\varphi} V_{0y} &= \frac{F_{2x}}{m_2}, \\ \dot{V}_{0y} + \dot{\varphi} V_{0x} &= \frac{F_{2y}}{m_2}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Dans la figure 1 on voit aisément qu'il existe entre la vitesse de rotation $\dot{\gamma}(\Omega_1, \Omega_2, t)$ de la charge $\overline{P}$, la vitesse de rotation $\dot{\varphi}$ de la ligne des centres et la vitesse relative de rotation $\dot{\vartheta}^*$ de la charge par rapport à la ligne des centres, la relation

$$\dot{\varphi} = \dot{\gamma} - \dot{\vartheta}^*. \tag{6}$$

En considérant les perturbations des variables $V_{0x}$, $V_{0y}$, $\theta^*$ et $\alpha = \dfrac{e}{\Delta}$ ($\Delta$ étant le jeu radial) de la forme

$$\left.\begin{aligned} &\delta V_{0x} = V_{0x}^* e^{\nu t}; \quad \delta V_{0y} = V_{0y}^* e^{\nu t}; \quad \delta\vartheta^* = \vartheta^{**} e^{\nu t}; \\ &\delta\alpha = \alpha^* e^{\nu t}; \quad \delta\Omega_1 = \Omega_1^* e^{\nu t}; \quad \delta\Omega_2 = \Omega_2^* e^{\nu t}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$



on arrive aux équations qui définissent les valeurs $V_{0x}^*$, $V_{0y}^*$, $\vartheta^{**}$, $\alpha^*$, si l'on écrit que les solutions (7) vérifient le système (5) et si l'on linéarise les équations par rapport aux valeurs des perturbations

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\Delta\nu^2 - (\dot{\gamma} - \dot{\vartheta}^*)^2 \Delta + \frac{1}{m_1} \cdot \frac{\partial F_{1x}}{\partial \alpha}\right]\alpha^* - \left\{\left[V_{0y} - 2\alpha\Delta(\dot{\gamma} - \dot{\vartheta}^*) - \frac{1}{m_1} \cdot \frac{\partial F_{1x}}{\partial \dot{\vartheta}^*}\right]\nu - \right. \\
&\left. - \frac{1}{m_1}\frac{\partial F_{1x}}{\partial \vartheta^*}\right\}\vartheta^{**} + [V_{0y} - 2\alpha\Delta(\dot{\gamma} - \dot{\vartheta}^*)]\left(\frac{\partial\dot{\gamma}}{\partial\Omega_1}\Omega_1^* + \frac{\partial\dot{\gamma}}{\partial\Omega_2}\Omega_2^*\right) + \frac{1}{m_1}\frac{\partial F_{1x}}{\partial \Omega_1}\Omega_1^* + \\
&+ \frac{1}{m_1}\frac{\partial F_{1x}}{\partial\Omega_2}\Omega_2^* - \left(\nu - \frac{1}{m_1}\frac{\partial F_{1x}}{\partial V_{0x}}\right)V_{0x}^* + \left(\dot{\gamma} - \dot{\vartheta}^* + \frac{1}{m_1} \cdot \frac{\partial F_{1x}}{\partial V_{0y}}\right)V_{0y}^* = 0, \\
&- \left[2(\dot{\gamma} - \dot{\vartheta}^*)\Delta\nu + (\ddot{\gamma} - \ddot{\vartheta}^*)\Delta + \frac{1}{m_1}\frac{\partial F_{1y}}{\partial\alpha}\right]\alpha^* + \left[\alpha\Delta\nu^2 + \left(2\dot{\alpha}\Delta - V_{0x} - \right.\right. \\
&\left.\left. - \frac{1}{m_1}\frac{\partial F_{1y}}{\partial\dot{\vartheta}^*}\right)\nu - \frac{1}{m_1}\frac{\partial F_{1y}}{\partial\vartheta^*}\right]\vartheta^{**} + \left[(V_{0x} - 2\dot{\alpha}\Delta)\frac{\partial\dot{\gamma}}{\partial\Omega_1} - \alpha\Delta\left(\frac{\partial\ddot{\gamma}}{\partial\Omega_1} + \frac{\partial\dot{\gamma}}{\partial\dot{\Omega}_1}\nu\right) - \right. \\
&\left. - \frac{1}{m_1}\frac{\partial F_{1y}}{\partial\Omega_1}\right]\Omega_1^* + \left[(V_{0x} - 2\dot{\alpha}\Delta)\frac{\partial\dot{\gamma}}{\partial\Omega_2} - \alpha\Delta\left(\frac{\partial\ddot{\gamma}}{\partial\Omega_2} + \frac{\partial\ddot{\gamma}}{\partial\dot{\Omega}_2}\nu\right) - \frac{1}{m_1}\frac{\partial F_{1y}}{\partial\Omega_2}\right]\Omega_2^* + \\
&\qquad + \left(\dot{\gamma} - \dot{\vartheta}^* - \frac{1}{m_1}\frac{\partial F_{1y}}{\partial V_{0x}}\right)V_{0x}^* + \left(\nu - \frac{1}{m_1}\frac{\partial F_{1y}}{\partial V_{0y}}\right)V_{0y}^* = 0, \\
&- \frac{1}{m_2}\frac{\partial F_{2x}}{\partial\alpha}\alpha^* + \left[\left(V_{0y} - \frac{1}{m_2}\frac{\partial F_{2x}}{\partial\dot{\vartheta}^*}\right)\nu - \frac{1}{m_2}\frac{\partial F_{2x}}{\partial\vartheta^*}\right]\theta^{**} - \left(V_{0y}\frac{\partial\dot{\gamma}}{\partial\Omega_1} + \frac{1}{m_2}\frac{\partial F_{2x}}{\partial\Omega_1}\right)\Omega_1^* - \\
&- \left(V_{0y}\frac{\partial\dot{\gamma}}{\partial\Omega_2} + \frac{1}{m_2}\frac{\partial F_{2x}}{\partial\Omega_2}\right)\Omega_2^* + \left(\nu - \frac{1}{m_2}\frac{\partial F_{2x}}{\partial V_{0x}}\right)V_{0x}^* - \left(\dot{\gamma} - \dot{\vartheta}^* + \frac{1}{m_2}\frac{\partial F_{2x}}{\partial V_{0y}}\right)V_{0y}^* = 0, \\
&- \frac{1}{m_2}\frac{\partial F_{2y}}{\partial\alpha}\alpha^* - \left[\left(V_{0x} + \frac{1}{m_2}\frac{\partial F_{2y}}{\partial\dot{\vartheta}^*}\right)\nu + \frac{1}{m_2}\frac{\partial F_{2y}}{\partial\vartheta^*}\right]\vartheta^{**} + \left(V_{0x}\frac{\partial\dot{\gamma}}{\partial\Omega_1} - \frac{1}{m_2} \cdot \frac{\partial F_{2y}}{\partial\Omega_1}\right)\Omega_1^* + \\
&+ \left(V_{0x}\frac{\partial\dot{\gamma}}{\partial\Omega_2} - \frac{1}{m_2}\frac{\partial F_{2y}}{\partial\Omega_2}\right)\Omega_2^* + \left(\dot{\gamma} - \dot{\vartheta}^* = \frac{1}{m_2} \cdot \frac{\partial F_{2y}}{\partial V_{0x}}\right)V_{0x}^* + \left(\nu - \frac{1}{m_2}\frac{\partial F_{2y}}{\partial V_{0y}}\right)V_{y0}^* = 0, \\
&\frac{\partial M_1}{\partial\alpha}\alpha^* + \left(\frac{\partial M_1}{\partial\vartheta^*} + \frac{\partial M_1}{\partial\dot{\vartheta}^*}\nu\right)\vartheta^{**} + \left(\frac{\partial M_1}{\partial\Omega_1} + I_1\nu\right)\Omega_1^* + \frac{\partial M_1}{\partial\Omega_2}\Omega_2^* + \frac{\partial M_1}{\partial V_{0x}}V_{0x}^* + \\
&\qquad + \frac{\partial M_1}{\partial V_{0y}}V_{0y}^* = 0, \\
&\frac{\partial M_2}{\partial\alpha}\alpha^* + \left(\frac{\partial M_2}{\partial\vartheta^*} + \frac{\partial M_2}{\partial\dot{\vartheta}^*}\nu\right)\vartheta^{**} + \frac{\partial M_2}{\partial\Omega_1}\Omega_1^* + \left(\frac{\partial M_2}{\partial\Omega_2} + I_2\nu\right)\Omega_2^* + \\
&\qquad + \frac{\partial M_2}{\partial V_{0x}}V_{0x}^* + \frac{\partial M_2}{\partial V_{0y}}V_{0y}^* = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Au cas où les perturbations gardent des valeurs réduites, on peut admettre des valeurs moyennes pour les coefficients des inconnues $\alpha^*$, $\vartheta^{**}$, $\Omega_1^*$, $\Omega_2^*$, $V_{0x}^*$, $V_{0y}^*$, qui sont définies de cette manière comme indépendantes du temps,

Tipei, N. 7346
La stabilite du mouvement dans les paliers a charge dynamique
Revue de mecanique appliquee, Tome I, 1956 No. 2, pp.1-8.



Le système (8) doit satisfaire à la condition de compatibilité; si $D$ est le détermi) nant des coefficients, on a

$$D = 0 \tag{9}$$

d'où résulte ensuite une équation du huitième degré en $\nu$

$$C_0\nu^8 + C_1\nu^7 + C_2\nu^6 + C_3\nu^5 + C_4\nu^4 + C_5\nu^3 + C_6\nu^2 + C_7\nu + C_8 = 0. \tag{10}$$

La condition de stabilité exige que la partie réelle des racines $\nu_j\,(j = 1, 2, \ldots, 8)$ soit négative et s'exprime par les critères connus, Rooth-Hurwitz, c'est-à-dire que les déterminants successifs $D_j$ inclus par les lignes horizontales et verticales du tableau suivant, doivent avoir le signe de $C_1$

$$\begin{array}{cccccccc}
C_1 & C_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
C_3 & C_2 & C_1 & C_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
C_5 & C_4 & C_3 & C_2 & C_1 & C_0 & 0 & 0 \\
C_7 & C_6 & C_5 & C_4 & C_3 & C_2 & C_1 & C_0 \\
0 & C_8 & C_7 & C_6 & C_5 & C_4 & C_3 & C_2 \\
0 & 0 & 0 & C_8 & C_7 & C_6 & C_5 & C_4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_8 & C_7 & C_6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_8
\end{array} \tag{11}$$

Toutefois, on remarque que, dans la majorité des cas, on peut considérer que les vitesses de perturbation $\delta\,\Omega_1$ et $\delta\,\Omega_2$ sont nulles, respectivement $\Omega_1^* = \Omega_2^* = 0$. Dans ce cas, les deux dernières équations du système (8) expriment le fait que la variation totale du moment due aux perturbations de $\alpha$, $\vartheta^*$, $V_{0x}$ $V_{0y}$ est nulle, le moment moteur variant à cette fin avec le moment de frottement. Pour des mouvements rapides, cette condition est difficilement réalisable, pourtant on peut admettre que les perturbations n'ont pas d'influence sensible sur les mouvements autour des centres de gravité, et que les variations de $\Omega_1$ et de $\Omega_2$ sont donc négligeables.

En partant de cette hypothèse, l'équation (10) est du sixième degré $C_0 = C_1 = 0$, et les conditions de stabilité sont

$$\left.\begin{array}{l}
C_3 > 0, \quad C_5 > 0, \quad D_2 = C_3\,C_4 - C_2 C_5 > 0, \\
D_3 = C_5\,D_2 - C_6\,C_3^2 + C_2\,C_3\,C_7 > 0, \\
D_4 = C_6\,D_3 - C_7[C_4\,D_2 - C_2(C_3\,C_6 - C_2\,C_7)] + C_2\,C_8\,D_2 > 0, \\
D_5 = C_7\,D_4 - C_8[C_5\,D_3 - C_3(C_7\,D_2 - C_8\,C_3^2)] > 0.
\end{array}\right\} \tag{12}$$

Les dérivées des fonctions $F_{1x}$, $F_{1y}$ et $M_1$ par rapport à $\alpha$, $\vartheta^*$, $\Omega_1$, $\Omega_2$, $V_{0x}$ et $V_{0y}$ peuvent être facilement tirées des expressions établies antérieurement [3], [4] pour le cas des forces et des vitesses variables et pour n'importe quel allongement $\lambda$.

Soit le cas particulier $\overline{V}_0 = 0$, le point $O_2$ fixe se confondant avec l'origine $O$, $\Omega_2 = 0$ et $\dot{\varphi} = -\Omega_1$. On a ainsi le palier à charge centrifuge, souvent



rencontré en pratique. L'équation caractéristique (10) est dans ce cas du quatrième degré et a l'expression

$$\begin{aligned}
&\nu^4 + \frac{1}{\alpha}\left(2\dot{\alpha} - \frac{1}{m_1\Delta}\frac{\partial F_{1y}}{\partial \dot{\vartheta}^*}\right)\nu^3 + \left\{3(\Omega_1 + \dot{\vartheta}^*)^2 + \frac{1}{m_1\Delta}\left[\frac{\partial F_{1x}}{\partial \alpha} - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial F_{1y}}{\partial \vartheta^*} - \right.\right.\\
&\left.\left. - \frac{2}{\alpha}(\Omega_1 + \dot{\vartheta}^*)\frac{\partial F_{1x}}{\partial \dot{\vartheta}^*}\right]\right\}\nu^2 - \frac{1}{\alpha}\left\{2\left\{(\Omega_1 + \dot{\vartheta}^*)\left[\frac{1}{m_1\Delta}\frac{\partial F_{1x}}{\partial \vartheta^*} + \alpha\left(\frac{1}{m_1\Delta}\frac{\partial F_{1y}}{\partial \alpha} - \ddot{\vartheta}^*\right)\right] + \right.\right.\\
&\left.\left. + \dot{\alpha}\left[(\Omega_1 + \dot{\vartheta}^*)^2 - \frac{1}{m_1\Delta}\frac{\partial F_{1x}}{\partial \alpha}\right]\right\}\right. + \frac{1}{m_1\Delta}\left\{\left[\frac{1}{m_1\Delta}\cdot\frac{\partial F_{1x}}{\partial \alpha} - (\Omega_1 + \dot{\vartheta}^*)^2\right]\frac{\partial F_{1y}}{\partial \dot{\vartheta}^*} + \right.\\
&\left.\left. + \left(\ddot{\vartheta}^* - \frac{1}{m_1\Delta}\frac{\partial F_{1y}}{\partial \alpha}\right)\frac{\partial F_{1x}}{\partial \dot{\vartheta}^*}\right\}\right\}\nu + \frac{1}{\alpha m_1\Delta}\left[(\Omega_1 + \dot{\vartheta}^*)^2\frac{\partial F_{1y}}{\partial \vartheta^*} - \ddot{\vartheta}^*\frac{\partial F_{1x}}{\partial \vartheta^*} + \right.\\
&\qquad\qquad \left. + \frac{1}{m_1\Delta}\left(\frac{\partial F_{1x}}{\partial \vartheta^*}\cdot\frac{\partial F_{1y}}{\partial \alpha} - \frac{\partial F_{1x}}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial F_{1y}}{\partial \vartheta^*}\right)\right] = 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Les conditions (11) se simplifient considérablement pour ces paliers; en tenant compte du fait que $C_0 = C_1 = C_2 = C_3 = 0$ dans l'équation (10), respectivement (13), elles sont,

$$C_5 > 0,\ C_6 > 0,\ C_7 > 0,\ C_8 > 0,\ D_2 = C_5C_6 - C_4C_7 > 0, \tag{14}$$

$$C_7D_2 > C_8C_5^2.$$

En tenant compte ensuite des résultats trouvés dans des études antérieures [2], [3], [4], on peut écrire

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial F_{1x}}{\partial \alpha} = -\dfrac{12\mu_1\,\lambda\,r_1^2}{\psi^2}(\Omega_1 + 2\dot{\vartheta}^*)\dfrac{\partial}{\partial \alpha}\left(\dfrac{C_t}{1+\alpha}\right); \ \dfrac{\partial F_{1x}}{\partial \vartheta^*} = P\sin\vartheta^*, \\[2ex]
\dfrac{\partial F_{1x}}{\partial \dot{\vartheta}^*} = -\dfrac{12\mu_1\,\lambda\,r_1^2}{\psi^2}\dfrac{C_t}{1+\alpha}; \ \dfrac{\partial F_{1y}}{\partial \alpha} = -\dfrac{12\mu_1\,\lambda\,r_1^2}{\psi^2}(\Omega_1 + 2\dot{\vartheta}^*)\dfrac{\partial}{\partial \alpha}\left(\dfrac{C_n}{1+\alpha}\right) \\[2ex]
\dfrac{\partial F_{1y}}{\partial \vartheta^*} = -P\cos\vartheta^*; \ \dfrac{\partial F_{1y}}{\partial \dot{\vartheta}^*} = -\dfrac{12\mu_1\,\lambda\,r_1^2}{\psi^2}\cdot\dfrac{C_n}{1+\alpha}, \\[2ex]
C_t < 0; \ C_n > 0; \ -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \vartheta^* \leqslant 0; \ \alpha > 0.
\end{array}\right\} \tag{15}$$

On peut considérer, ensuite,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{C_t}{1+\alpha}\right) < 0,\ \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{C_n}{1+\alpha}\right) > 0,\ |\dot{\vartheta}^*| < \Omega_1$$

donc

$$\frac{\partial F_{1x}}{\partial \alpha} > 0,\ \frac{\partial F_{1x}}{\partial \vartheta^*} < 0,\ \frac{\partial F_{1x}}{\partial \dot{\vartheta}^*} > 0,\ \frac{\partial F_{1y}}{\partial \alpha} < 0,\ \frac{\partial F_{1y}}{\partial \vartheta^*} < 0,\ \frac{\partial F_{1y}}{\partial \dot{\vartheta}^*} < 0. \tag{16}$$

Si $(\dot{\alpha})_0 > 0$, c'est-à-dire au moment initial les surfaces ont la tendance de s'approcher, cas désavantageux en pratique, $C_5$ et $C_6$ sont positifs. En considé-

Tipei, N. 7346 G
La stabilite du mouvement dans les paliers a charge dynamique
Revue de mecanique appliquee, Tome 1, 1956 No. 2, pp.1-8.



rant ensuite $\ddot{\vartheta}^* > 0$, ou petit par rapport à $\frac{1}{m_1\Delta}\frac{\partial F_{1y}}{\partial \alpha}$ et à $(\Omega_1 + \dot{\vartheta}^*)^2$, on voit immédiatement que $C_8 > 0$ et le signe du coefficient $C_7$ dépend du signe de la somme

$$s = \left[\frac{1}{m_1\Delta}\frac{\partial F_{1x}}{\partial \alpha} - (\Omega_1 + \dot{\vartheta}^*)^2\right]\left(2\dot{\alpha} - \frac{1}{m_1\Delta}\frac{\partial F_{1y}}{\partial \dot{\vartheta}^*}\right) + \\ + \left(\frac{1}{m_1\Delta}\frac{\partial F_{1y}}{\partial \alpha} - \ddot{\vartheta}^*\right)\left[\frac{\partial F_{1x}}{\partial \dot{\vartheta}^*}\frac{1}{m_1\Delta} - 2\alpha(\Omega_1 + \dot{\vartheta}^*)\right]. \tag{17}$$

Conformément aux hypothèses, la seconde parenthèse du premier terme et le deuxième terme de $s$ sont positifs. Au cas des grandes vitesses de rotation, la première parenthèse du premier terme peut à son tour être positive, si $\alpha \to 1$. De même, aux très grandes vitesses et $\alpha \to 1$, le second terme peut devenir prépondérant, de sorte que $s > 0$, même si la première parenthèse reste négative. Au contraire, si $\alpha \to 0$, $s$ est négatif, et le mouvement s'avère instable, même sans qu'il soit nécessaire d'examiner les deux dernières conditions de (14). Il est évident ensuite, qu'aux vitesses de rotation réduites, les conditions de stabilité s'améliorent pour des valeurs réduites de l'excentricité relative, mais les conclusions, en ce qui concerne le domaine des valeurs d'$\alpha$ favorables à la stabilité, sont les mêmes.

Il faut mentionner ensuite que par les valeurs d'$\alpha$ on entend celles qui entrent dans le calcul des coefficients $C_i$, c'est-à dire les valeurs correspondantes au moment initial, ou les valeurs moyennes constantes. Il en résulte que les paliers à charge élevée où $\alpha \to 1$ ont généralement une bonne stabilité. De même, sont avantageux les petits allongements où pour une charge $\zeta$ donnée, [3], les dérivées $\frac{\partial F_{1x}}{\partial \alpha}$ et $\left|\frac{\partial F_{1y}}{\partial \alpha}\right|$ ont des valeurs élevées.

Au cas des charges centrifugales, on peut facilement déterminer le mouvement approximatif du tourillon, par voie directe. En négligeant en (5) les dérivées $\dot{e}$ et $\ddot{e}$, on en déduit le système

$$\left.\begin{aligned} (\Omega_1 + \dot{\vartheta}^*)^2 &= \frac{F_{1x}}{e m_1} = -\frac{12\mu_1\lambda r_1^2}{m_1\psi^2\Delta}(\Omega_1 + 2\dot{\vartheta}^*)\frac{C_t}{\alpha(1+\alpha)} - \frac{P}{e m_1}\cos\vartheta^*, \\ \ddot{\vartheta}^* &= \frac{F_{1y}}{e m_1} = -\frac{12\mu_1\lambda r_1^2}{m_1\psi^2\Delta}(\Omega_1 + 2\dot{\vartheta}^*)\frac{C_n}{\alpha(1+\alpha)} - \frac{P}{e m_1}\sin\vartheta^*. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Si la charge est élevée, $(\Omega_1 + \dot{\vartheta}^*)^2$, même à des vitesses de rotation très grandes, est de l'ordre $10^{-1}$ ou plus petit par rapport aux termes du second membre, et $\ddot{\vartheta}^*$ a des valeurs encore plus réduites. En ce cas on peut poser en (18), en première approximation, $\frac{C_n}{C_t} = \text{tg}\,\vartheta^*$ ; on obtient ainsi l'équation différentielle en $\vartheta^*$ :

$$\ddot{\vartheta}^* - (\Omega_1 + \dot{\vartheta}^*)^2\,\text{tg}\,\vartheta^* = 0. \tag{19}$$



Si $\dot{\vartheta}^*$ est négligé par rapport à $\Omega_1$ (à des vitesses de rotation élevées) et si l'on considère $\text{tg}\,\vartheta^* \sim \vartheta^*$ (hypothèse valable pour les charges importantes), il en résulte, en notant $\vartheta_0^*$ et $\dot{\vartheta}_0^*$ les valeurs initiales correspondantes:

$$\vartheta^* = \frac{\dot{\vartheta}_0^*}{\Omega_1}\,\text{sh}\,\Omega_1 t + \vartheta_0^*\,\text{ch}\,\Omega_1 t. \tag{20}$$

De cette équation, on déduit facilement que $\vartheta^*$ ne peut être annulé que si $\vartheta_0^*$ et $\dot{\vartheta}_0^*$ ont des signes contraires, et $-\vartheta_0^*\frac{\Omega_1}{\dot{\vartheta}_0^*} \leqslant 1$. Généralement, cette dernière condition n'est pas remplie, étant donné qu'aux charges élevées $\vartheta_0^*$ a des valeurs réduites, et $\Omega_1 > \dot{\vartheta}_0^*$, donc $|\vartheta^*|$ peut diminuer, jusqu'au moment $t = \frac{1}{\Omega_1}\,\text{arg th}\left(-\frac{\dot{\vartheta}_0^*}{\vartheta_0^*\Omega_1}\right)$, à partir duquel il augmente continuellement. Si $\dot{\vartheta}_0^* < 0$, $\vartheta_0^*$ et $\dot{\vartheta}_0^*$ sont du même signe et $|\vartheta^*|$ peut augmenter continuellement, de sorte que les hypothèses simplificatrices introduites en (19) ne sont plus valables. Toutefois, on remarque que cette situation est moins dangereuse dans le fonctionnement des paliers parce qu'elle correspond généralement à un écartement des corps (1) et (2) dans la région où l'épaisseur de la pellicule de lubrifiant est minime. Enfin, si la valeur de la vitesse initiale est $\dot{\vartheta}_0^* = -\Omega_1\vartheta_0^*$, il en résulte $\vartheta^* = \vartheta_0^* e^{-\Omega_1 t}$, $\dot{\vartheta}^* = \dot{\vartheta}_0^* e^{-\Omega_1 t}$.

On trouve ainsi, par une autre voie, le résultat précédent, c'est-à-dire qu'aux charges élevées, pour certaines valeurs de $\dot{\vartheta}_0^*$ où se trouve aussi inclus l'effet d'une perturbation quelconque, le mouvement est limité en amplitude par rapport à la direction de la charge rotative et varie très rapidement avec le temps. La position finale $(\vartheta^*)_{t\to\infty} = 0$ est indépendante de $\vartheta_0^*$ et $\dot{\vartheta}_0^*$, où peuvent entrer aussi les perturbations $\delta\vartheta_0^*$, $\delta\dot{\vartheta}_0^*$, donc le mouvement présente un caractère stable.

## STABILITÄT DER BEWEGUNG VON LAGERN MIT DYNAMISCHER BELASTUNG

### (ZUSAMMENFASSUNG)

Es werden die Bewegungsgleichungen der Teile eines Lagers mit veränderlicher Belastung und Geschwindigkeit aufgestellt und die Lineargleichungen der dynamischen Stabilität abgeleitet.

Weiterhin werden die allgemeinen Stabilitätsbedingungen bestimmt, wobei der Bewegung fester Körper entsprechenden Gravitätszentren Rechnung getragen ist.

Es werden einfachere Fälle dynamischer Stabilität dargestellt und die verschiedenen Fälle zentrifugaler Belastung in einem Lager mit unbeweglicher Lagerschale untersucht.

Tipei, N. 7346 G

La stabilite du mouvement dans les paliers a charge dynamique
Revue de mecanique appliquee, Tome I, 1956 No. 2, pp.1-8.



## BIBLIOGRAPHIE

1. T. LEVI CIVITA, UGO AMALDI, *Lezioni di meccanica razionale*. Zanichelli, Bologna, 1930.
2. N. TIPEI, *O metodă generală pentru studiul mişcării în pelicula de lubrifiant dintre două suprafeţe de dimensiuni finite* (Une méthode générale pour l'étude du mouvement dans la pellicule de lubrifiant entre deux surfaces de dimensions finies). Studii şi cercetări de mecanică şi metalurgie, 1951, 2, *1—4*, 27—84.
3. — *Consideraţii asupra calculului lagărelor prin alunecare* (Considérations sur le calcul des paliers lisses). Buletin ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţiunea de ştiinţe tehnice şi chimice, 1952, 4, *3—4*, 291.
4. — *Calculul lagărelor cu alunecare supuse la forţe variabile* (Le calcul des paliers lisses à charge variable). Studii şi cercetări de mecanică şi metalurgie, 1953, 4, *1—4*, 125—143.

Tipei, N. 7342 Gross, V
O metoda generala pentru studiul miscarii in pelicula de...
Studii si cercetari de mecanica si metalurgie, Tom II, 1951, pp.1-58


[redacted]

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ ŞI METALURGIE
Tom. II, 1951

[redacted]



# O METODĂ GENERALĂ PENTRU STUDIUL MIŞCĂRII ÎN PELICULA DE LUBRIFIANT DINTRE DOUĂ SUPRAFEŢE DE DIMENSIUNI FINITE

DE

N. TIPEI

Pentru a se asigura o lubrificaţie în bune condiţiuni între două suprafeţe solide în contact şi supuse la forţe exterioare, este necesară existenţa unei pelicule de uleiu suficient de groasă între aceste suprafeţe, astfel ca nu numai coeficientul de frecare să fie scăzut, dar să se poată evacua şi căldura desvoltată prin travaliul forţelor de frecare, asigurându-se în acest scop un debit suficient de lubrifiant. In această situaţie, mişcarea din interiorul peliculei este supusă legilor hidrodinamicei, pe baza cărora ea poate fi studiată în întregime.

Faţă de un sistem oarecare de axe de coordonate $O, x, y, z$, ecuaţiile generale de mişcare ale unui fluid vâscos incompresibil sunt

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\Delta u \\ \frac{dv}{dt} &= f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\Delta v \\ \frac{dw}{dt} &= f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\Delta w \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (2)$$

în care $u, v, w$ sunt componentele vitesei pe cele trei axe, $f_x, f_y, f_z$ sunt forţele exterioare raportate la unitatea de massă, iar $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ este viscozitatea cinematică a fluidului, adică raportul dintre coeficientul de viscozitate $\mu$ şi densitatea $\rho$. Ecuaţiile (1) sunt ecuaţiile propriu zise ale mişcării, iar (2) este relaţia de continuitate care exprimă conservarea massei de fluid.

Pentru cazul peliculei de lubrifiant se poate observa imediat că atât forţele exterioare (greutatea uleiului din peliculă), cât şi forţele de inerţie, respectiv acceleraţiile care figurează în membrul întâiu al ecuaţiilor (1) sunt foarte mici faţă de efectul presiunilor şi al viscozităţii, care joacă rolul preponderent.

Tipei, N. 7342 Gross, W
O metoda generala pentru studiul miscarii in pelicula de...
Studii si cercetari de mecanica si metalurgie, Tom II, 1951, pp.1-58



Intr'adevăr, vitesele variază dela un punct la altul în pelicula de uleiu, ceea ce face să apară acceleraţii a căror mărime este însă redusă, vitesele respective nefiind, la rândul lor, însemnate, iar variaţiile cu punctul sunt de asemenea lente. Totodată, mişcarea în pelicula de uleiu se poate considera staţionară, ea nedepinzând direct de timp decât în cazuri speciale cum ar fi articulaţiile oscilante dintre biela şi capul de cruce sau bolţul pistonului la motoare.

Pentru studiul în trei dimensiuni al mişcării uleiului dintre palier şi cuzinet se poate neglija, fără eroare, curbura suprafeţelor, deoarece grosimea filmului de uleiu este foarte mică faţă de razele de curbură corespunzătoare. In consecinţă, aceste raze, raportate la grosimea stratului de lubrifiant, se pot considera în mod practic ca infinite. In acest caz, vom alege originea axelor de coordonate într'un punct pe suprafaţa în mişcare, axa $Ox$ după direcţia mişcării şi situată pe suprafaţa mobilă, $Oy$ normală pe aceasta, iar $Oz$ după direcţia axului de rotaţie.

Se observă în acest caz că filmul de uleiu fiind foartes ubţire, vitesele după normala $Oy$ la suprafaţă sunt nule sau extrem de mici şi, ca urmare, neglijabile faţă de componentele $u$ şi $w$ (în sensul mişcării şi axială). De asemenea se pot neglija şi derivatele componentei $v$. Pe grosimea foarte mică a filmului de uleiu $u$ variază dela zero la valoarea maximă $V$ şi $w$ de asemenea, deci derivatele $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ sunt mult mai mari decât pe direcţiile $Ox$ sau $Oz$.

După aceste direcţiuni, variaţiile sunt foarte lente, deoarece lungimile după care ele au loc sunt considerabil mai mari, iar limitele de variaţie mai restrânse. Urmează că se pot neglija derivatele lui $u$ şi $w$ după $Ox$ şi $Oz$, faţă de acelea după $Oy$.

Având în vedere observaţiile de mai sus, ecuaţiile (1) se simplifică mult, reducându-se la forma următoare:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

iar ecuaţia (2) se poate păstra sub forma iniţială, deoarece derivatele după $Ox$ şi $Oz$ ale lui $u$ şi $w$ sunt mici, însă de acelaşi ordin de mărime ca şi derivata componentei $v$ după $Oy$.

Dacă $f(x, z)$ este curba care limitează suprafeţele de contact ale arborelui şi cuzinetului, se vede imediat că soluţiile ecuaţiilor (2) şi (3) trebue să satisfacă următoarele condiţii la limită, $\delta$ fiind grosimea peliculei de uleiu într'un punct oarecare, iar $V$ vitesa suprafeţei mobile:

$$\left.\begin{array}{lll} y = 0 & u = V,\ v = 0,\ w = 0 \\ y = \delta & u = 0,\ v = 0,\ w = 0 \\ \text{Pe curba } f(x, z) = 0 & & p = p_0 \end{array}\right\} \tag{4}$$

$p_0$ fiind o constantă (presiunea în mediul exterior).



Prima şi ultima ecuaţie a sistemului (3) se pot integra imediat dacă avem în vedere că a doua ecuaţie (3) arată că $p$ este independent de $y$:

$$\left.\begin{aligned} u &= V\left(1-\frac{y}{\delta}\right)-\frac{1}{2\mu}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}y\delta\left(1-\frac{y}{\delta}\right) \\ w &= -\frac{1}{2\mu}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}y\delta\left(1-\frac{y}{\delta}\right) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Diferenţiind prima ecuaţie (5) în raport cu $x$ şi a doua în raport cu $z$ şi introducând aceste valori în (2), rezultă

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2\mu}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}y\delta\left(1-\frac{y}{\delta}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial z}y\delta\left(1-\frac{y}{\delta}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial x}V\left(1-\frac{y}{\delta}\right). \tag{6}$$

Să integrăm această ecuaţie în raport cu $y$ între 0 şi $\delta$, ţinând seama că $p$ nu depinde de $y$ şi că la limite trebue satisfăcute condiţiunile (4). Se obţine:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta^3}{\mu}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\delta^3}{\mu}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}\right) = 6\,V\frac{\partial \delta}{\partial x} \tag{7}$$

relaţie cunoscută în teoria lubrificaţiei şi care dă repartiţia de presiune într'un palier oarecare de lungime finită. Ne vom ocupa în cele ce urmează de soluţionarea acestei ecuaţii, deoarece cunoscând presiunile în fiecare punct, ecuaţiile (5) dau imediat vitesele în pelicula de uleiu, după care se pot calcula toate elementele mişcării.

Viscozitatea uleiului variază în lungul filmului, începând dela secţiunea de intrare. Dacă $\delta_1$ este grosimea maximă a peliculei se poate pune

$$\mu = \mu_1\left(\frac{\delta}{\delta_1}\right)^q \tag{8}$$

relaţie care este în acord cu experienţele executate (Freudenreich).

Exponentul $q$ este de obiceiu egal cu unitatea, pentru uleiurile obişnuite. Efectiv, viscozitatea $\mu$ depinde de temperatura uleiului şi de presiunea locală; cum însă acestea sunt în directă legătură cu variaţia grosimii $\delta$ a peliculei de uleiu, aşa după cum se va vedea mai departe, $\mu$ se poate scrie sub forma (8), care traduce suficient de bine fenomenul fizic. In orice caz, (8) reprezintă o relaţie mai exactă decât ipoteza care se face în mod curent pentru aceste calcule şi anume $\mu$ = constant.

Exponentul $q$ apare astfel legat de indicele Dean-Davis al uleiului, iar pentru alte lubrifiante poate căpăta valori foarte variate, in unele cazuri chiar negative (aer), schimbând prin aceasta întregul aspect al fenomenului ungerii. Cu deosebire în aceste cazuri speciale, este util să se introducă în calcule expresia (8), care urmăreşte mai exact acest fenomen.

Pentru a găsi soluţia generală a ecuaţiei (7), se va considera întâi numai ecuaţia (7) fără membrul al doilea

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta^3}{\mu}\cdot\frac{\partial p^*}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\delta^3}{\mu}\cdot\frac{\partial p^*}{\partial z}\right) = 0 \tag{9}$$

Tipei, N. 7342 Gross, W
O metoda generala pentru studiul miscarii in pelicula de...
Studii si cercetari de mecanica si metalurgie, Tom II, 1951, pp.1-58



a cărei soluţie se poate pune sub forma

$$p^* = f_{1m}(x) \times f_{1m}(z) \tag{10}$$

unde $f_{1m}(x)$ este o funcţie numai de $x$, iar $f_{2m}(z)$ depinde numai de $z$. In acest caz (9) se scrie,

$$\frac{1}{f_{1m}} \cdot \frac{d^2 f_{1m}}{dx^2} + \frac{3-q}{\delta} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial x} \cdot \frac{1}{f_{1m}} \cdot \frac{df_{1m}}{dx} + \frac{1}{f_{2m}} \cdot \frac{d^2 f_{2m}}{dz^2} = 0 \tag{11}$$

şi alegând axul $Ox$ astfel ca $\delta$ să fie o funcţie numai de $x$ se deduce din (11) sistemul de ecuaţii următor, în care $\chi_m$ este o constantă arbitrară.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 f_{1m}}{dx^2} + \frac{3-q}{\delta}\frac{d\delta}{dx}\frac{df_{1m}}{dx} + \chi_m f_{1m} = 0 \\ &\frac{d^2 f_{2m}}{dz^2} - \chi_m f_{2m} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Dacă, pe de altă parte, se cunoaşte soluţia $p_\infty$ a ecuaţiei

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\delta^3}{\mu} \cdot \frac{dp_\infty}{dx}\right) = 6\,V\,\frac{d\delta}{dx} \tag{13}$$

care reprezintă cazul mişcării plane, în palierul de lungime infinită fără scăpări de uleiu pe la capete, mişcare ce a fost studiată şi este bine cunoscută, se poate pune soluţia generală a ecuaţiei complete (7) sub forma

$$p = p_\infty - p^* + az \tag{14}$$

cu condiţiile la limită, $b = b_1 + b_2$ fiind lăţimea palierului constantă de-a-lungul axei $Ox$

$$\left.\begin{aligned} &p = p_a \text{ pentru } z = -b_1 \\ &p = p_b \quad \text{»} \quad z = b_2 \\ &p = p_1 \quad \text{»} \quad x = x_1,\ z = z_1 \\ &p = p_2 \quad \text{»} \quad x = x_2,\ z = z_2 \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

unde $p_a$ reprezintă presiunea în mediul exterior pe o parte a palierului ($z = -b_1$) a cărui suprafaţă a fost presupusă de o lăţime constantă după axul $Ox$, ipoteză întotdeauna realizată în practică atât la palierele circulare cât şi la acelea plane (patină-glisieră), iar $p_b$ este presiunea exterioară de cealaltă parte ($z = b_2$) (fig. 1). De asemenea, $p_1$ este în general presiunea de alimentare cu uleiu într'un punct dat $x_1, z_1$; iar $p_2$, în punctul $x_2, z_2$ rezultă din condiţiunile de funcţionare dela caz la caz, după cum se va vedea.

Dacă suprafaţa palierului este limitată de o curbă oarecare închisă $ABCD$, presiunea este de obiceiu constantă de-a-lungul acestei curbe $p_a = p_b$. Când $AB$ şi $CD$ coincid, $BD$ şi $AC$ formează două curbe închise deosebite, în lungul cărora presiunile pot fi de asemenea constante şi diferite, aşa după cum s'a presupus pentru generalitate în condiţiunile (15).



Fie

$$b_1 = b_2 = \frac{b}{2} \tag{16}$$

adică axul $Ox$ desparte suprafaţa $ABCD$ care se deplasează cu viteza relativă $V$ faţă de suprafaţa $A'B'C'D'$, în două jumătăţi egale, lucru care nu scade cu nimic generalitatea problemei.

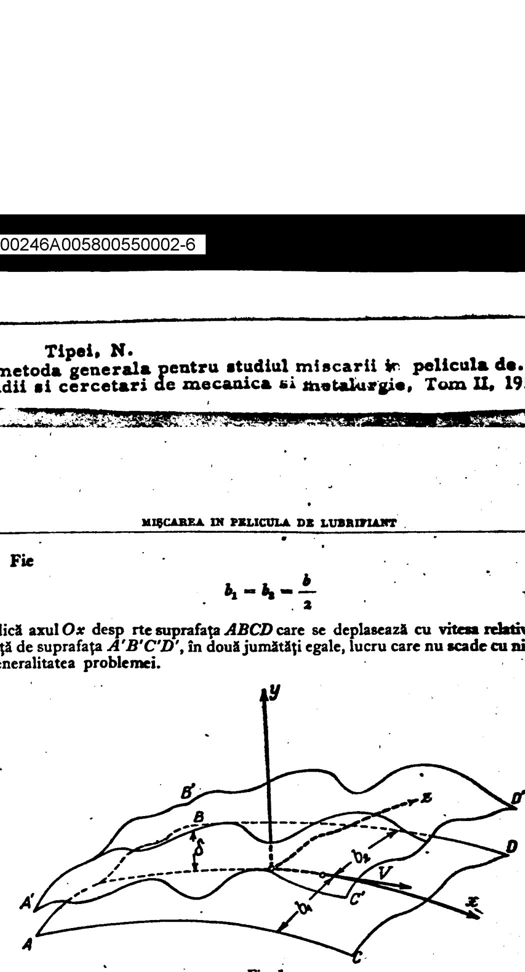



Fig. 1

Dând valori diferite lui $\chi_m$, se obţine o infinitate de soluţiuni $p^*$, de tipul (10). Astfel (14) se scrie, dacă $c_m$ este o constantă arbitrară

$$p = p_\infty - \sum_{m=1}^{\infty} c_m f_{1m}(x) \times f_{2m}(z) + az. \tag{17}$$

Să presupunem de asemenea că $f_{2m}(z)$ este o funcţiune pară, deci

$$f_{2m}(-b_1) = f_{2m}(b_2) = f_{2m}\left(\pm\frac{b}{2}\right) = \frac{1}{c_m} \tag{18}$$

Fiind date valorile $\chi_m$ se scrie identitatea

$$p_\infty \equiv \frac{1}{2}(p_a + p_b) + \sum_{m=1}^{\infty} f_{1m}(x) \tag{19}$$

lucru întotdeauna posibil cunoscând soluţia completă pentru palierul infinit şi desvoltând în serie $f_{1m}(x)$ dată de (12); este suficient apoi să se identifice coeficienţii termenilor de acelaşi grad în $x$. Să presupunem în general că $p_\infty$ şi $f_{1m}(x)$ sunt puse sub forma

$$\left.\begin{aligned} &p_\infty - \frac{1}{2}(p_a + p_b) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots \\ &f_{1m}(x) = a_{m0} + a_{m1} x + a_{m2} x^2 + \ldots + a_{mn} x^n + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Tipei, N. 7342 Gross, W
O metoda generala pentru studiul miscarii in pelicula de...
Studii si cercetari de mecanica si metalurgie, Tom II, 1951, pp.1-58



în care coeficienţii $a_{mn}$ sunt funcţiuni de $\chi_m$. In acest caz, rezultă din cele arătate mai sus condiţiile:

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = a_{10} + a_{20} + \ldots + a_{m0} + \ldots \\ a_1 = a_{11} + a_{21} + \ldots + a_{m1} + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n = a_{1n} + a_{2n} + \ldots + a_{mn} + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} . \tag{21}$$

După cum se va vedea mai departe, seriile definite de (20) sunt întotdeauna convergente şi, pentru uşurinţa calculelor, se pot pune după o transformare simplă, sub formă de serii trigonometrice. Fiecare soluţie particulară $f_{1m}$ cuprinde două constante arbitrare, fie $a_{m0}$ şi $a_{m1}$. Sistemul (21) este astfel un sistem infinit de ecuaţii cu un număr infinit de necunoscute $a_{10}, a_{20} \ldots a_{m0}$, $a_{11}, a_{21} \ldots a_{m1} \ldots$, care se pot deci calcula. Presupunând determinate aceste constante (17), se scrie

$$p = \frac{1}{2}(p_a + p_b) + \sum_{m=1}^{\infty}\left(1 - \frac{f_{2m}(z)}{f_{2m}\left(\frac{b}{2}\right)}\right) \cdot f_{1m}(x) + az. \tag{22}$$

Pentru $z = \pm\frac{b}{2}$ suma este nulă, având în vedere condiţiile (18).

Primele două condiţii la limită (15) vor fi îndeplinite dacă se ia

$$a = \frac{p_b - p_a}{b} \tag{23}$$

iar ultimele două pot fi de asemenea uşor satisfăcute, dacă se ţine seama că potrivit ecuaţiei diferenţiale (13) $p_\infty$ conţine două constante arbitrare. Inlocuind succesiv în (22) valorile $x_1$, $z_1$ şi $x_2$, $z_2$, se pot defini aceste constante, spre a răspunde condiţiunilor la limită impuse. Se obţine astfel soluţiunea generală a presiunilor şi conform ecuaţiilor (5) a întregei mişcări în pelicula de uleiu dintr'un arbore şi un cuzinet de dimensiuni limitate, adică a mişcării după trei direcţiuni:

$$p = \frac{1}{2}(p_a + p_b) + \frac{p_b - p_a}{b}z + \sum_{m=1}^{\infty}\left(1 - \frac{f_{2m}(z)}{f_{2m}\left(\frac{b}{2}\right)}\right) \cdot f_{1m}(x) \tag{24}$$

unde nu s'au făcut decât următoarele ipoteze restrictive:

1. Grosimea $\delta$ a peliculei este o funcţiune oarecare numai de $x$.
2. Vitesa $V$ este tangentă la $Ox$.
3. Suprafaţa lubrificată are o lăţime constantă, iar a patra condiţiune că $f_{2m}$ să fie o funcţiune pară nu restrânge cu nimic generalitatea problemei. In aceste condiţiuni, soluţia (24) se poate aplica la toate cazurile întâlnite în practică.

Este de remarcat că într'o lucrare anterioară, Duffing a utilizat de asemenea, pentru soluţia generală, forma $p = p_\infty - p^*$, dar rezolvarea, pe o cale cu totul diferită, este numai aproximativă, ea presupunând în cele din urmă neglijarea termenului în $\frac{df_{1m}}{dx}$ din (11) şi aplicându-se numai la valori



particulare ale lui $q$ din (8). In metodele de rezolvare a ecuaţiilor (12) folosite mai departe, niciuna din aceste aproximaţii nu este necesară, iar generalitatea soluţiei (24) este menţinută în întregime.

Soluţia ecuaţiei (13) este bine cunoscută pentru cazul viscozităţii constante. Introducând relaţia (8), se găseşte uşor şi pentru $\mu$ variabil

$$p_\infty = \frac{1}{2}(p_a + p_b) + \frac{6\mu_1 V}{\delta_1^{\varepsilon}}\int\left(\frac{1}{\delta^{2-\varepsilon}} + \frac{C_1}{\delta^{3-\varepsilon}}\right)dx \tag{25}$$

Pentru diferitele paliere se ştie apoi cum variază $\delta$ cu distanţa $x$, astfel că găsirea lui $p_\infty$ nu prezintă dificultăţi, reducându-se la o simplă quadratură. Constantele $p_0$ şi $C_1$ se deduc apoi introducându-se ultimele două condiţiuni la limită din (15) în soluţiunea generală (24). In calculele următoare se va explicita expresia lui $p_\infty$, atât pentru paliere circulare cât şi pentru patină-glisieră.

Pe de altă parte, ecuaţia a doua din sistemul (12) se poate integra imediat; având în vedere că $f_{2m}(z)$ trebue să fie o funcţie pară, rezultă, ţinând seama şi de (18),

$$\left.\begin{array}{l} f_{2m}(z) = \mathrm{ch}\sqrt{\chi_m}\, z, \text{ sau, mai general dacă } b_1 \neq b_2 \\ f_{2m}(z) = \mathrm{ch}\sqrt{\chi_m}\left[z + \frac{1}{2}(b_1 - b_2)\right] \\ \frac{1}{c_m} = \mathrm{ch}\,\frac{1}{2}\sqrt{\chi_m}\,(b_1 + b_2) \end{array}\right\} \tag{26}$$

în care caz $f_{2m}$ nu mai este o funcţie pară.

## Paliere circulare

Se ia ca origine a axelor de coordonate punctul $O$ (fig. 2), unde distanţa dintre fus şi cuzinet este maximă, axul $Oy$ după rază, $Oz$ paralel cu axul de rotaţie; conform celor arătate mai înainte, se poate considera axul $Ox$ de-a-lungul periferiei fusului. Aproximaţia introdusă în calcule prin aceasta este complet neglijabilă.

In acest caz, $\delta$ depinde numai de unghiul $\theta$ cuprins între raza ce trece prin originea $O$ (axul $Oy$) şi raza dusă din centrul $B$ al cuzinetului prin punctul $P$ oarecare, unde se măsoară $\delta$. Notând

$$\Delta = R - r \tag{27}$$

diferenţa celor două raze, adică jocul radial şi cu $e$ excentricitatea (distanţa dintre centrele $A$ şi $B$ ale fusului şi palierului) se poate scrie

$$r = e\cos\theta + (R - \delta)\cos\varepsilon \tag{28}$$

şi cum $e$ este de ordinul de mărime $r/1000$, $\varepsilon$ este extrem de mic, iar $\cos\varepsilon = 1$. Astfel rezultă

$$\delta = R - r + e\cos\theta = \Delta + e\cos\theta = \Delta(1 + \alpha\cos\theta) \tag{29}$$

unde $\alpha = \frac{e}{\Delta}$ este excentricitatea relativă.

Punând

$$x = r\theta \tag{30}$$

şi introducând un nou parametru $\beta_m$ în locul lui $\chi_m$, legat de acesta prin relaţia

$$\beta_m = r^2\chi_m \tag{31}$$

Tipei, N. 7342 Gross, W

O metoda generala pentru studiul miscarii in pelicula de...
Studii si cercetari de mecanica si metalurgie, Tom II, 1951, pp.1-58



ecuaţiile (12) admit ca soluţiuni expresiile

$$\left.\begin{aligned} f_{1m} &= \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(A_{mn}\sin n\theta + B_{mn}\cos n\theta)}{(1+\alpha\cos\theta)^{\varkappa}} \\ f_{2m} &= \mathrm{ch}\,\frac{\sqrt{\beta_m}}{r}\,z \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

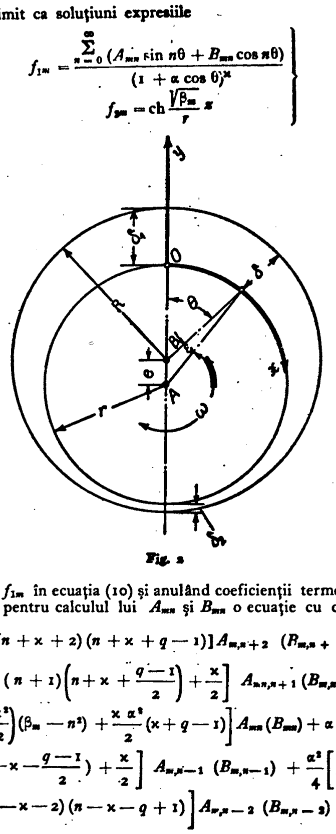



**Fig. 2**

Inlocuind pe $f_{1m}$ în ecuaţia (10) şi anulând coeficienţii termenilor în sin $n\theta$, cos $n\theta$ se obţine pentru calculul lui $A_{mn}$ şi $B_{mn}$ o ecuaţie cu diferenţe finite.

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha^2}{4}[\beta_m-(n+\varkappa+2)(n+\varkappa+q-1)]A_{m,n+2}\ (B_{m,n+2})+ \\ &+\alpha\left[\beta_m-(n+1)\left(n+\varkappa+\frac{q-1}{2}\right)+\frac{\varkappa}{2}\right]A_{m,n+1}\,(B_{m,n+1})+ \\ &+\left[\left(1+\frac{\alpha^2}{2}\right)(\beta_m-n^2)+\frac{\varkappa\,\alpha^2}{2}(\varkappa+q-1)\right]A_{mn}\,(B_{mn})+\alpha\Big[\beta_m- \\ &-(n-1)\left(n-\varkappa-\frac{q-1}{2}\right)+\frac{\varkappa}{2}\Big]\ A_{m,n-1}\ (B_{m,n-1})\ +\frac{\alpha^2}{4}\Big[\beta_m- \\ &-(n-\varkappa-2)(n-\varkappa-q+1)\Big]A_{m,n-2}\ (B_{m,n-2})=0 \end{aligned} \tag{33}$$



Soluţia generală a ecuaţiunii (33) de ordinul 4, va depinde de 4 constante arbitrare; numărul acestora poate fi redus la $4-k$ în cazul când există $k$ relaţiuni suplimentare între necunoscute. Observând că avem

$$\left\{\begin{aligned} A_{m,-1} &= -A_{m1} \\ A_{m,-2} &= -A_{m2} \end{aligned}\right. \quad \text{şi} \quad \begin{aligned} B_{m,-1} &= B_{m1} \\ B_{m,-2} &= B_{m2} \end{aligned} \tag{34}$$

rămân astfel încă 2 constante arbitrare de care vor depinde coeficienţii $A_{mn}$ şi $B_{mn}$.

Rezolvarea directă a acestei ecuaţiuni omogene, cu coeficienţi variabili de gradul 2, prin metodele obişnuite, fie folosind integralele lui Laplace, fie utilizând seriile de facultăţi, este anevoioasă, iar rezultatele nu se prezintă sub o formă concisă, uşor utilizabilă în calculele ulterioare. Pe de altă parte, interesează în problema de faţă numai valorile întregi ale lui $n$, ceea ce permite a se considera (33) ca o simplă relaţie de recurenţă. De aceea se preferă o metodă indirectă de soluţionare. Pentru aceasta vom face succesiv $n = 0, 1, 2, \ldots$ în (33) formând un sistem infinit de ecuaţiuni cu tot atâtea necunoscute. Rezultă

$$\left.\begin{aligned} &A_{m0}=0 \\ &\frac{\alpha^2}{4}[\beta_m-(\varkappa+3)(\varkappa+q)]A_{m3}+\alpha\left(\beta_m-\frac{3}{2}\varkappa-q-1\right)A_{m2}+ \\ &+\left\{\left(1+\frac{\alpha^2}{4}\right)\beta_m-1+\alpha^2\left[\frac{3\varkappa}{4}(\varkappa+q-1)-1+\frac{q}{4}\right]\right\}A_{m1}=0 \\ &\frac{\alpha^2}{4}[\beta_m-(\varkappa+4)(\varkappa+q+1)]A_{m4}+\alpha\left[\beta_m-\frac{1}{2}(9+5\varkappa-3q)\right]A_{m3}+ \\ &+\left[\left(1+\frac{\alpha^2}{2}\right)(\beta_m-4)+\frac{\varkappa\alpha^2}{2}(\varkappa+q-1)\right]A_{m2}+\alpha\left[\beta_m+\frac{1}{2}(3\varkappa+q-5)\right]A_{m1}=0 \\ &\frac{\alpha^2}{4}[\beta_m-(\varkappa+5)(\varkappa+q+2)]A_{m5}(B_{m5})+\alpha\left(\beta_m-\frac{7}{2}\varkappa-2q-10\right)A_{m4}(B_{m4})+ \\ &+\left[\left(1+\frac{\alpha^2}{2}\right)(\beta_m-9)+\frac{\varkappa\alpha^2}{2}(\varkappa+q-1)\right]A_{m3}(B_{m3})+\alpha\Big(\beta_m+\frac{5}{2}\varkappa+ \\ &+q-7\Big)A_{m2}(B_{m2})+\frac{\alpha^2}{4}[\beta_m-(1-\varkappa)(4-\varkappa-q)]A_{m1}(B_{m1})=0 \\ &\frac{\alpha^2}{4}[\beta_m-(\varkappa+6)(\varkappa+q+3)]A_{m6}(B_{m6})+\alpha\left[\beta_m-\frac{1}{2}(9\varkappa+5q+35)\right]A_{m5}(B_{m5})+ \\ &+\left[\left(1+\frac{\alpha^2}{2}\right)(\beta_m-16)+\frac{\varkappa\alpha^2}{2}(\varkappa+q-1)\right]A_{m4}(B_{m4})+ \\ &+\alpha\left[\beta_m+\frac{1}{2}(7\varkappa+3q-27)\right]A_{m3}(B_{m3})+\frac{\alpha^2}{4}[\beta_m-(2-\varkappa)(5-\varkappa-q)]A_{m2}(B_{m2})=0 \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Tipei, N. 7342 Gross, W

O metoda generala pentru studiul miscarii in pelicula de...
Studii si cercetari de mecanica si metalurgie, Tom II, 1951, pp.1-58



Pentru coeficienţii $B_{mn}$ primele trei ecuaţiuni vor fi diferite, din cauza relaţiilor (34) şi anume:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\alpha^2}{2}[\beta_m-(\varkappa+2)(\varkappa+q-1)]B_{m2}+2\alpha(\beta-\varkappa-q+1)B_{m1}+\\
&+\left[\left(1+\frac{\alpha^2}{2}\right)\beta_m+\frac{\varkappa\alpha^2}{2}(\varkappa+q-1)\right]B_{m0}=0\\
&\frac{\alpha^2}{4}[\beta_m-(\varkappa+3)(\varkappa+q)]B_{m3}+\alpha\left(\beta_m-\frac{3}{2}\varkappa-q-1\right)B_{m2}+\\
&+\left\{\left(1+\frac{3}{4}\alpha^2\right)\beta_m-1+\frac{\alpha^2}{4}[\varkappa(\varkappa+q-1)-q]\right\}B_{m1}+\alpha\left(\beta_m+\frac{\varkappa}{2}\right)B_{m0}=0\\
&\frac{\alpha^2}{4}[\beta_m-(\varkappa+4)(\varkappa+q+1)]B_{m4}+\alpha\left[\beta_m-\frac{1}{2}(5\varkappa+3q+9)\right]B_{m3}+\\
&+\left[\left(1+\frac{\alpha^2}{4}\right)(\beta_m-4)+\frac{\varkappa\alpha^2}{2}(\varkappa+q-1)\right]B_{m2}+\alpha\left[\beta_m+\frac{1}{2}(3\varkappa+q-5)\right]B_{m1}+\\
&+\frac{\alpha^2}{4}[\beta_m+\varkappa(3-\varkappa-q)]B_{m0}=0
\end{aligned}\right\} \quad (36)$$

Când $n \to \infty$ ecuaţia (33) devine o ecuaţie cu coeficienţi constanţi

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha^2}{4}A_{m,n+2}\,(B_{m,n+2})+\alpha A_{m,n+1}\,(B_{m,n+1})+\left(1+\frac{\alpha^2}{2}\right)A_{mn}\,(B_{mn})+\\
&\qquad+\alpha A_{m,n-1}(B_{m,n-1})+\frac{\alpha^2}{4}A_{m,n-2}(B_{m,n-2})=0
\end{aligned} \quad (37)$$

a cărei rezolvare se efectuează imediat. Fie

$$A_{mn}=K_m\rho^n \quad (38)$$

Inlocuind în (20), se obţine ecuaţia

$$\frac{\alpha^2}{4}\rho^2+\alpha\rho+1+\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha}{\rho}+\frac{\alpha^2}{4}\cdot\frac{1}{\rho^2}=\frac{\alpha^2}{4}\left(\rho^2+\frac{2}{\alpha}\rho+1\right)^2\frac{1}{\rho^2}=0 \quad (39)$$

care dă, mai departe

$$\rho=-\frac{1}{\alpha}\pm\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}-1}\quad\text{sau}\quad\frac{A_{m,n+1}}{A_{m,n}}=\frac{B_{m,n+1}}{B_{m,n}}=-\frac{1}{\alpha}+\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}-1} \quad (40)$$

Cum $0<\alpha<1$, rezultă că şirul $A_{m1}$, $A_{m2}$, ..., respectiv $B_{m1}$, $B_{m2}$, ... este format din termeni alternaţi cu o valoare absolută descrescătoare, când $n$ este suficient de mare. Acest rezultat este de asemenea independent de $\beta_m$. Sistemul (35), (36) poate fi apoi rezolvat pe o cale aproximativă, considerându-se $\beta_m$ necunoscut şi determinându-se printr'o condiţiune suplimentară valoarea acestuia, sau admiţând dela început o valoare pentru $\beta_m$.



In primul caz se poate considera că, dată fiind alura descrescătoare a coeficienţilor $A_{mn}$, $B_{mn}$, dela o anumită valoare $n=i$ se pot neglija $A_{m,i+1}$, $B_{m,i+1}$, $A_{m,i+2}$, $B_{m,i+2}$ în ultimele două ecuaţii, deduse din (17) făcând $n=i-1$ şi $n=i$.

Se obţine astfel un sistem de $i+1$ ecuaţiuni omogene, care se reduce la $i$ ecuaţiuni pentru coeficienţii $A_{mn}$, deoarece prima dă direct $A_0=0$. Punând condiţiunea de compatibilitate, anularea determinantului acestui sistem dă o ecuaţie de gradul $i+1$, respectiv $i$ în $\beta_m$, care se poate calcula pe această cale. Valorile găsite verifică, în general, ipoteza că şirurile $A_{m1}$, $A_{m2}$ ... $A_{mi}$ şi $B_{m0}$, $B_{m1}$, $B_{m2}$, ... $B_{mi}$ descresc repede, pe care am introdus-o dela început neglijând termenii de indici $i+1$, $i+2$. Acest lucru se va vedea mai departe din verificările numerice efectuate. Se pot calcula astfel, coeficienţii $A_{m2}$ ($B_{m2}$), ... $A_{mi}$ ($B_{mi}$), păstrând $A_{m1}$ ($B_{m1}$) ca o constantă arbitrară. Mai departe, $\beta_m$ fiind cunoscut, calculul se poate extinde la grupul format de restul ecuaţiunilor pentru determinarea celorlalţi termeni, pe aceeaşi cale, introducând în aceste ecuaţii valorile $A_{m,i-1}$ ($B_{m,i-1}$), $A_{mi}$ ($B_{mi}$) şi $\beta_m$ găsite; se obţine astfel că într'adevăr coeficienţii de indici superiori sunt descrescători şi neglijabili faţă de primii $i$ termeni, iar dela o anumită valoare a lui $n$, ei se pot deduce direct din relaţia (40). Modul de lucru este indicat mai jos.

In al doilea caz, când $\beta_m$ este dat, primele $i+1$ ecuaţiuni se rezolvă direct în funcţiune de $A_{m1}$, ($B_{m1}$), neglijându-se numai termenul $A_{m,i+2}$ ($B_{m,i+2}$), ultima ecuaţiune corespunzând la $n=i$ în (33). Convergenţa şirului format de coeficienţii astfel calculaţi este obţinută întotdeauna, deoarece la limită ($n\to\infty$) este valabilă relaţia (40); totuşi ea poate fi mai rapidă sau mai înceată după valorile lui $\beta_m$. Cunoscând astfel primii $i+1$ termeni, ceilalţi se pot determina rezolvând pe aceeaşi cale grupul format de următoarele $k$ ecuaţiuni, în care se introduc valorile lui $A_{mi}$ ($B_{mi}$) şi $A_{m,i+1}$ ($B_{m,i+1}$). Se va vedea că şi aceşti termeni de ordin superior sunt mici faţă de primii $i$ calculaţi, astfel că neglijarea lui $A_{m,i+2}$ ($B_{m,i+2}$) este justificată pentru primele $i+1$ ecuaţiuni. Pentru o verificare mai rapidă se pot rezolva din aproape în aproape ecuaţiile următoare obţinute din (33) cu valori $n>i$, neglijând în fiecare din acestea ultimii doi coeficienţi de ordin superior, faţă de ceilalţi trei, dintre care unul singur apare astfel ca necunoscut.

In acest mod se obţin două serii de soluţiuni. Prima folosind valorile lui $\beta_m$ definite prin condiţia de compatibilitate a sistemului de $i+1$ ecuaţii omogene, care presupune la rândul său o convergenţă rapidă a valorilor $A_{mn}$ ($B_{mn}$). Această ipoteză verificată de calculele numerice, arată că într'adevăr valorile $\beta_m$ respective asigură cea mai bună convergenţă a şirului.

A doua serie de soluţiuni se deduce dând lui $\beta_m$ valori arbitrare. Aceste valori pot fi pozitive sau negative; pentru $\beta_m$ negativ va trebui să fie satisfăcută condiţiunea

$$\sqrt{|\beta_m|}\neq(2k+1)\pi\frac{r}{b} \quad (41)$$

aşa după cum se poate vedea uşor din (24).

Se observă că coeficienţii $A_{mn}$ ($B_{mn}$) astfel determinaţi depind numai de o constantă arbitrară $A_{m1}$ sau $B_{m1}$. Aceasta se datoreşte faptului că prin metoda de soluţionare indicată se neglijează, dacă se consideră dat $\beta_m$, termenul

Tipei, N. 7342 Gross, W
O metoda generala pentru studiul miscarii in pelicula de...
Studii si cercetari de mecanica si metalurgie, Tom II, 1951, pp.1-58



$A_{m,i+2}$ sau $B_{m,i+2}$ care se admite deci nul şi prin aceasta se fixează valoarea celei de a doua constante arbitrare. Se calculează astfel primii $i+1$ termeni, apoi, $n$ fiind destul de mare, se poate aplica relaţia (40). Un procedeu mai exact ar fi să se determine a doua constantă a fiecărei soluţiuni $f_{1m}$, astfel încât convergenţa primilor termeni să fie maximă. Din cauza complicaţiei ecuaţiilor (35), (36), este însă greu de exprimat această condiţiune, ţinând seama şi de faptul că $i$ trebue să fie o funcţiune de $\alpha$, deoarece convergenţa şirurilor $A_{mn}$, $B_{mn}$ variază cu excentricitatea relativă. Pe de altă parte, folosind procedeele indicate mai sus, se va demonstra că într'adevăr convergenţa este complet satisfăcătoare, chiar pentru cazurile cele mai desavantajoase, când $\alpha \to 1$, astfel că din punctul de vedere al calculului numeric nu este nevoie să se treacă la o analiză mai exactă a acestei convergenţe.

Cunoscând soluţiunile $f_{1m}$, $f_{2m}$ ale ecuaţiilor (12) date de formulele (32), se poate scrie ecuaţia presiunilor (24)

$$p = \frac{1}{2}(p_a + p_b) + \frac{p_b - p_a}{b} z + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{\sqrt{\beta_{mA}}}{r} z}{\operatorname{ch} \frac{\sqrt{\beta_{mA}}\, b}{2r}} \right) \frac{A_{mn} \sin n\theta}{(1 + \alpha \cos\theta)^{\varkappa_A}} + \right.$$

$$\left. + \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{\sqrt{\beta_{mB}}}{r} z}{\operatorname{ch} \frac{\sqrt{\beta_{mB}}\, b}{2r}} \right) \frac{P_{mn} \cos n\theta}{(1 + \alpha \cos\theta)^{\varkappa_B}} \right] \tag{42}$$

exponenţii $\varkappa_A$ şi $\varkappa_B$ fiind oarecare.

*Palierul circular de alungire infinită.* In cazul palierului circular, ecuaţia (25) dă valoarea lui $p_\infty$ înlocuind pe $\delta$ şi $x$ din (29) şi (30)

$$p_\infty = \frac{1}{2}\left(p_a + p_b\right) + \frac{6\mu_1 Vr}{(1+\alpha)^q \Delta^2} \int \left[ \frac{1}{(1 + \alpha\cos\theta)^{2-q}} + \frac{C_1}{\Delta(1 + \alpha\cos\theta)^{3-q}} \right] d\theta. \tag{43}$$

Dacă se fac substituţiile introduse de Sommerfeld

$$1 + \alpha\cos\theta = \frac{1-\alpha^2}{1-\alpha\cos\gamma}; \; d\theta = \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{1-\alpha\cos\gamma} d\gamma \tag{44}$$

(43) se transformă

$$p_\infty = \frac{1}{2}\left(p_a + p_b\right) + \frac{6\mu_1 Vr}{\Delta^2 (1+\alpha)^q (1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}-q}} \int (1 - \alpha\cos\gamma)^{1-q} \left[ 1 + \right.$$

$$\left. + \frac{C_1}{\Delta(1-\alpha^2)}(1 - \alpha\cos\gamma) \right] d\gamma. \tag{45}$$



Funcţia de variabilă $\gamma$ care se găseşte sub integrală se poate desvolta în serie

$$(1 - \alpha\cos\gamma)^{1-q}\left(1 + \frac{C_1}{\Delta(1-\alpha^2)} - \frac{C_1\alpha}{\Delta(1-\alpha^2)}\cos\gamma\right) = 1 + \frac{C_1}{\Delta(1-\alpha^2)} -$$

$$-\left(1 - q + \frac{2-q}{1-\alpha^2}\cdot\frac{C_1}{\Delta}\right)\alpha\cos\gamma - \sum_{n=2}^{\infty} \Xi_n \cos^n\gamma \tag{46}$$

unde

$$\Xi_n = -\frac{(q-1)\,q\,(q+1)\ldots(q+n-3)}{(n-1)!}\alpha^n \left[ \left(1 + \frac{C_1}{\Delta(1-\alpha^2)}\right)\frac{q+n-2}{n} - \right.$$

$$\left. - \frac{C_1}{\Delta(1-\alpha^2)} \right]. \tag{47}$$

Valorile coeficientului $\Xi_n$ sunt nule pentru $q = 0$ şi $q = 1$. La uleiurile curente, $q$ este efectiv cuprins între aceste valori; în acest caz, $\Xi_n$ descreşte repede pentru valorile $n > 2$. Astfel, admiţând $q = 0{,}5$, $\alpha = 0{,}9$, $n = 3$ se găseşte

$$\Xi_3 = 0{,}0455\left(1 - \frac{C_1}{\Delta(1-\alpha^2)}\right) \tag{48}$$

Deoarece condiţiunile la limită care determină valoarea lui $C_1$ fac ca valoarea parantezei să nu fie, în general, mai mare de 2, $\Xi_3$ este mic faţă de primii doi termeni din (46). Se observă de asemenea că paranteza mare din expresia lui $\Xi_n$ tinde către unitate numai când $n \to \infty$.

Dacă se ţine seama de expresia completă (46), se găseşte valoarea integralei:

$$I = \int (1 - \alpha\cos\gamma)^{1-q}\left(1 + \frac{C_1}{\Delta(1-\alpha^2)} - \frac{C_1\alpha}{\Delta(1-\alpha^2)}\cos\gamma\right) d\gamma =$$

$$= C_2 + \left[1 + \frac{C_1}{\Delta(1-\alpha^2)} - \sum_{n=1}^{\infty} \Xi_{2n} \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right]\gamma -$$

$$-\left[\alpha\left(1 - q + \frac{2-q}{1-\alpha^2}\cdot\frac{C_1}{\Delta}\right) + \sum_{n=3,5}^{\infty} \Xi_n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \binom{n}{\frac{n-1}{2}}\right]\sin\gamma - \tag{49}$$

$$- \sum_{\nu=3,5}^{\infty} \sum_{n=3,5}^{\infty} \Xi_n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \binom{n}{\frac{n-\nu}{2}} \frac{1}{\nu}\sin\nu\gamma - \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \Xi_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\binom{2n}{n-\nu}\frac{1}{2\nu}\sin 2\nu\gamma$$

Notând

$$\frac{1}{\nu}\sum_{n=3,5}^{\infty} \Xi_n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\binom{n}{\frac{n-\nu}{2}} = P_{1\nu}; \; \frac{1}{2\nu}\sum_{n=1}^{\infty} \Xi_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\binom{2n}{n-\nu} = P_{2\nu} \tag{50}$$

Tipei, N. 7342 Gross, W
O metoda generala pentru studiul miscarii ir pelicula de...
Studii si cercetari de mecanica si metalurgie, Tom II, 1951, pp.1-58



desvoltând $\sin \nu\gamma$, $\sin 2\nu\gamma$ în serie de puteri şi înlocuind $\sin\gamma$, $\cos\gamma$ în funcţie de $\sin\theta$ şi $\cos\theta$ după (44), se găseşte, în cele din urmă, notând cu $C_2$ constanta de integrare

$$
\begin{aligned}
p_\infty = {} & \frac{1}{2}\left(p_a + p_b\right) + \frac{6\mu_1 V r}{\Delta^2 (1+\alpha)^q (1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}-q}} \left\{ C_2 + \left[1 + \frac{C_1}{\Delta(1-\alpha^2)} - \right.\right. \\
& \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \Xi_{2n} \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} \right] \cdot \arcsin \frac{\sqrt{1-\alpha^2}\sin\theta}{1+\alpha\cos\theta} - \left[\alpha\left(1 - q + \frac{2-q}{1-\alpha^2}\cdot\frac{C_1}{\Delta}\right) + \right. \\
& \left. + \sum_{n=3,5}^{\infty} \Xi_n \frac{1}{2^{n-1}} \binom{n}{\frac{n-1}{2}} \right] \frac{\sqrt{1-\alpha^2}\sin\theta}{1+\alpha\cos\theta} - \\
& - \sum_{\nu=3,5}^{\infty} P_{1\nu} \frac{\sum_{\sigma=1,3}^{\infty} (-1)^{\frac{\sigma-1}{2}} (1-\alpha^2)^{\frac{\sigma}{2}} \binom{\nu}{\sigma} \sin^\sigma\theta\,(\alpha + \cos\theta)^{\nu-\sigma}}{(1+\alpha\cos\theta)^\nu} - \\
& \left. - \sum_{\nu=1}^{\infty} P_{2\nu} \frac{\sum_{\sigma=1,3}^{\infty} (-1)^{\frac{\sigma-1}{2}} (1-\alpha^2)^{\frac{\sigma}{2}} \binom{2\nu}{\sigma} \sin^\sigma\theta\,(\alpha + \cos\theta)^{2\nu-\sigma}}{(1+\alpha\cos\theta)^{2\nu}} \right\}
\end{aligned} \tag{51}
$$

Această formulă se poate pune apoi sub forma unei serii trigonometrice în funcţiune de unghiurile $n\theta$ şi păstrând la numitor pe $(1 + \alpha\cos\theta)^{\varkappa_A}$ în care $\varkappa_A$ se poate alege astfel încât coeficienţii termenilor în $\sin n\theta$ să aibă convergenţa cea mai bună. Dacă se desvoltă de asemenea în serie trigonometrică expresia

$$
\begin{aligned}
\arcsin \frac{\sqrt{1-\alpha^2}\sin\theta}{1+\alpha\cos\theta} = {} & \sqrt{1-\alpha^2}\,\frac{\sin\theta}{1+\alpha\cos\theta} + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3 \ldots (2\sigma-1)}{2\cdot 4 \ldots 2\sigma} \cdot \\
& \cdot \frac{(1-\alpha^2)^{\sigma+\frac{1}{2}}}{2\sigma+1} \cdot \frac{\sin^{2\sigma+1}\theta}{(1+\alpha\cos\theta)^{2\sigma+1}}
\end{aligned} \tag{52}
$$

se obţine în cele din urmă desvoltarea lui $p_\infty$ analoagă cu (20)

$$
p_\infty - \frac{1}{2}(p_a + p_b) = \frac{b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta)}{(1+\alpha\cos\theta)^{\varkappa_A}} \tag{53}
$$

Din ecuaţiile (19), (32), (42) şi (53) se deduce $\varkappa_A = \varkappa_B$, iar sistemul (21) se desparte în două grupe independente, identificând coeficienţii termenilor în $\sin n\theta$ şi $\cos n\theta$

$$
\left.
\begin{aligned}
a_1 &= A_{11} + A_{21} + A_{31} + \ldots + A_{m1} + \ldots \\
a_2 &= A_{12} + A_{22} + A_{32} + \ldots + A_{m2} + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_n &= A_{1n} + A_{2n} + A_{3n} + \ldots + A_{mn} + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right\} \tag{54}
$$



şi

$$
\left.
\begin{aligned}
b_0 &= B_{10} + B_{20} + B_{30} + \ldots + B_{m0} + \ldots \\
b_1 &= B_{11} + B_{21} + B_{31} + \ldots + B_{m1} + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
b_n &= B_{1n} + B_{2n} + B_{3n} + \ldots + B_{mn} + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right\} \tag{55}
$$

In felul acesta se obţine soluţia cea mai generală a problemei. Această soluţie prezintă avantajul de a fi în acelaşi timp riguroasă, însă este greu de utilizat în calculele numerice. O simplificare importantă se poate aduce neglijând în expresia lui $p_\infty$ termenii superiori ($\nu \geqslant 2$), care conţin ca factori (50) coeficienţii $\Xi_n$ de indice $n > 2$, deoarece s'a arătat că aceşti coeficienţi sunt mici faţă de primii doi termeni, iar factorii $P_{1\nu}$, $P_{2\nu}$ descresc şi mai repede, după cum se vede uşor din (50).

Formula (51) va fi astfel

$$
\begin{aligned}
p_\infty = {} & \frac{1}{2}(p_a + p_b) + \frac{6\mu_1 V r}{\Delta^2 (1+\alpha)^q (1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}-q}} \left\{ C_2 + \left[1 + \frac{C_1}{\Delta(1-\alpha^2)} \frac{1}{2}\Xi_2\right] \times \right. \\
& \times \arcsin \frac{\sqrt{1-\alpha^2}\sin\theta}{1+\alpha\cos\theta} - \alpha\sqrt{1-\alpha^2}\left(1 - q + \frac{2-q}{1-\alpha^2}\cdot\frac{C_1}{\Delta}\right)\frac{\sin\theta}{1+\alpha\cos\theta} - \\
& \left. - \frac{1}{2}\Xi_2\sqrt{1-\alpha^2}\,\frac{\sin\theta\,(\alpha + \cos\theta)}{(1+\alpha\cos\theta)^2} \right\}
\end{aligned} \tag{56}
$$

unde

$$
\Xi_2 = \alpha^2 (1-q)\left[\frac{q}{2} - \left(1 - \frac{q}{2}\right)\frac{C_1}{\Delta(1-\alpha^2)}\right] \tag{57}
$$

Pe de altă parte, pentru uleiurile obişnuite se poate considera valoarea $q = 1$ ca fiind aproape de realitate, aşa cum rezultă din experienţele lui F r e u d e n r e i c h. In acest caz, din (47) rezultă $\Xi_n = 0$ şi integrala (49) apare sub o formă foarte simplă, cu ajutorul căreia se găseşte imediat din (51):

$$
\begin{aligned}
p_\infty = {} & \frac{1}{2}(p_a + p_b) + \frac{6\mu_1 V r}{\Delta^2 (1+\alpha)(1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}} \left[ C_2 + \left(1 + \right.\right. \\
& \left.\left. + \frac{C_1}{\Delta(1-\alpha^2)}\right) \arcsin \frac{\sqrt{1-\alpha^2}\sin\theta}{1+\alpha\cos\theta} - \frac{C_1 \alpha}{\Delta\sqrt{1-\alpha^2}} \cdot \frac{\sin\theta}{1+\alpha\cos\theta} \right]
\end{aligned} \tag{58}
$$

De multe ori se obişnueşte a se considera viscozitatea constantă şi anume se ia valoarea sa medie, sau aceea corespunzătoare temperaturii medii a palierului. In acest caz, în loc de $\mu_1$ se ia $\mu = \mu_m$, $q = 0$. Din (47) şi (50) se deduce

$$
\left.
\begin{aligned}
& \Xi_2 = -\frac{\alpha^2 C_1}{\Delta(1-\alpha^2)}\,;\quad \Xi_3 = \Xi_4 = \ldots = \Xi_n = 0, \\
& P_{21} = -\frac{\alpha^2 C_1}{4\Delta(1-\alpha^2)}\quad P_{1\nu} = P_{2\nu} = 0
\end{aligned}
\right. \tag{59}
$$

Tipei, N. 7342 Gross, W
O metoda generala pentru studiul miscarii in pelicula de...
Studii si cercetari de mecanica si metalurgie, Tom II, 1951, pp.1-58



şi expresia (51) ia o formă de asemenea mai simplă

$$p_\infty = \frac{1}{2}(p_a + p_b) + \frac{6\mu_m V r}{\Delta^2 (1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ C_2 + \left[1 + \frac{(2+\alpha^2)C_1}{2(1-\alpha^2)\Delta}\right] \arcsin \frac{\sqrt{1-\alpha^2}\sin\theta}{1+\alpha\cos\theta} - \alpha(1-\alpha^2)\left[1 + \frac{2C_1}{\Delta(1-\alpha^2)}\right] \times \right. \tag{60}$$
$$\left. \times \frac{\sin\theta}{1+\alpha\cos\theta} + \frac{\alpha^2 C_1}{2\Delta\sqrt{1-\alpha^2}} \cdot \frac{\sin\theta(\alpha+\cos\theta)}{(1+\alpha\cos\theta)^2} \right\}$$

Se regăseşte astfel, cu ajutorul soluţiei generale (51), formula cunoscută (60) pentru palierul de lungime infinită, în cazul când viscozitatea este constantă.

Se remarcă mai departe că pentru un interval $0{,}9 \leqslant \beta_m \leqslant 8$ avem, la două valori $\beta_1$ şi $\beta_m$ oarecare, relaţia

$$1 - \frac{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\beta_m}}{r}z}{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\beta_m}\,b}{2r}} \cong \frac{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\beta_m}\,b}{2r}}}{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\beta_1}\,b}{2r}}} \cdot \left(1 - \frac{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\beta_1}}{r}z}{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\beta_1}\,b}{2r}}\right) \tag{61}$$

valabilă cu o aproximaţie foarte bună (fig. 3) pentru palierele scurte, la care raportul $\frac{b}{2r}$ este mic (în jurul unităţii). Pentru valori mai mari ale acestui raport, diferenţele dintre curbele trasate pentru $\beta_m$ cuprins între 0,9 şi 8 (fig. 4) sunt mai mari. Rezultă că pentru mai multă rigoare este necesar să se reducă intervalul fixat pentru $\beta_m$; în exemplele numerice care urmează se va vedea însă că în realitate valorile lui $\beta_m$ adoptate depind de excentricitatea $\alpha$ şi în cazul cel mai defavorabil (pentru valori mari $\alpha = 0{,}9$), $1{,}149 < \beta_m < 7{,}5$.

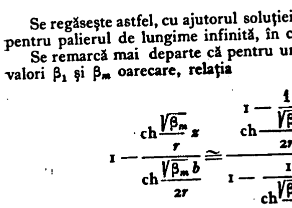


Fig. 3

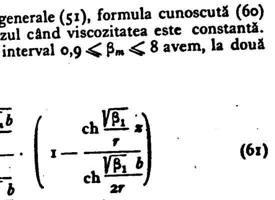


Fig. 4



Şi acest domeniu poate fi însă mult mai restrâns, dacă se foloseşte un număr mai mare de integrale particulare pentru construirea soluţiei căutate.

Pe de altă parte, aceste soluţiuni $f_{1m}$, în care $\beta_n$ are valori mai ridicate, sunt numai termeni de corecţie ai unora din coeficienţii $A_{mn}$ ($B_{mn}$), pe lângă o soluţie principală. In consecinţă, ele sunt afectate de constante cu valori foarte reduse (de ordinul 1/10 faţă de coeficientul soluţiei principale sau mai mici), iar eroarea care se face folosind relaţia (61) este neglijabilă, chiar în cazurile cele mai desavantajoase.

Deoarece primele două ecuaţiuni ale sistemelor (35) şi (36) diferă din cauza condiţiunilor (34) diferite, se obţin două serii de valori $\beta_{mA}$ şi $\beta_{mB}$ atunci când se rezolvă ecuaţia în $\beta_m$ formată după procedeul indicat mai sus, prin anularea determinantului primelor $i + 1$ ecuaţiuni. Fie $\beta_{1A}$ şi $\beta_{1B}$ valorile cele mai mici ale rădăcinilor $\beta_m$. Ecuaţia (42) se poate scrie astfel

$$p = \frac{1}{2}(p_a + p_b) + \frac{p_b - p_a}{b} z + \frac{1}{(1+\alpha\cos\theta)^{x4}} \left[ \left(1 - \frac{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\beta_{1A}}}{r}z}{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\beta_{1A}}\,b}{2r}}\right) \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} k_{mA} A_{mn} \sin n\theta + \right. \tag{62}$$
$$\left. + \left(1 - \frac{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\beta_{1B}}}{r}z}{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\beta_{1B}}\,b}{2r}}\right) \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} k_{mB} B_{mn} \cos n\theta) \right]$$

unde, notând cu $\lambda = \frac{b}{2r}$ alungirea palierului

$$k_{mA} = \frac{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\beta_{mA}}}}{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\beta_{1A}}}};\; k_{mB} = \frac{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\beta_{mB}}}}{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\beta_{1B}}}};\; k_{1A} = k_{1B} = 1 \tag{63}$$

*Condiţiuni la limită.* In interiorul filmului însă, la fiecare valoare $\theta$ şi $z$ rezultă o anumită presiune. In particular, aceasta se anulează pentru $\theta = \theta_1$, $z = z_1$ şi $\theta = \theta_2$, $z = z_2$ după ce s'au determinat constantele de integrare $C_1$ şi $C_2$, iar pentru $\theta_2 \leqslant \theta \leqslant 2\pi + \theta_1$ $p - p_a$ este negativ ($p_a < p_b$). Tensiunile dirijate după axele $Ox$, $Oy$, $Oz$ şi normale pe suprafeţele perpendiculare pe aceste axe sunt (fig. 1 şi 2)

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= p - 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \\ p_{yy} &= p - 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \\ p_{zz} &= p - 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

Tipei, N. 7342 Gross, V
O metoda generala pentru studiul miscarii in pelicula de...
Studii si cercetari de mecanica si metalurgie, Tom II, 1951, pp.1-58



iar tensiunile de forfecare, dacă se notează, ca şi pentru acelea normale, cu primul indice normala la suprafaţa pe care ele se exercită şi cu al doilea direcţia în care lucrează

$$\left.\begin{aligned} p_{yz} &= -\mu\frac{\partial w}{\partial y} \\ p_{zx} &= -\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ p_{xy} &= -\mu\frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

In aceste relaţii, derivatele vitezelor $u$, $v$, $w$ sunt date de ecuaţiile (5) şi (6), din care se vede imediat că există puncte în interiorul filmului de uleiu unde $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ sau $\frac{\partial w}{\partial z}$ sunt nule sau pozitive. Astfel, pentru $y = \delta$ (pe suprafaţa cuzinetului) şi $y = 0$ (pe suprafaţa arborelui) aceste derivate sunt nule. In consecinţă, tensiunile normale date de (64) în punctele acestor suprafeţe au semnul lui $p$ şi devin negative când $p < 0$.

Cercetările experimentale arată însă că în fluide incompresibile, aşa cum se poate considera uleiul, nu pot apare tensiuni negative importante, deoarece sub acţiunea acestor solicitări, volumul de uleiu care nu-şi poate mări dimensiunile se rupe, formând un spaţiu de conexiune multiplă, în interiorul căruia se stabileşte presiunea din exterior.

Ca urmare, pe toată porţiunea cuprinsă între valorile $\theta_2 \leqslant \theta \leqslant 2\pi + \theta_1$ ecuaţia (51) nu se mai aplică, iar presiunea se consideră, în această regiune, constantă şi egală cu aceea exterioară.

Această eliminare a presiunilor negative nu poate rezulta direct din ecuaţiile de mişcare (1), (2) şi (3), care nu mai sunt valabile în punctele unde $p < p_a$, astfel că, din acest punct de vedere, ecuaţia (51) nu-şi pierde generalitatea sa; este necesar însă a se aplica această ecuaţie numai între $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$.

In realitate, unghiurile $\theta_1$ şi $\theta_2$ sunt funcţiuni de $z$, astfel încât curba de suprapresiune nulă pe suprafaţa arborelui nu este o dreaptă, aşa după cum se vede uşor din ecuaţia (42). Totuşi această curbă nu diferă mult de un arc de elice dacă $p_a \neq p_b$ sau de o dreaptă paralelă cu axul arborelui când $p_a = p_b = p_0$. Ecuaţia (62) care este foarte apropiată de soluţia exactă (42) arată imediat acest lucru; punând ca şi în expresia (61)

$$1-\frac{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\beta_{1B}}}{r}z}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\beta_{1B}}} \cong \frac{1-\frac{1}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\beta_{1B}}}}{1-\frac{1}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\beta_{1A}}}}\left(1-\frac{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\beta_{1A}}}{r}z}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\beta_{1A}}}\right) = k\left(1-\frac{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\beta_{1A}}}{r}z}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\beta_{1A}}}\right) \tag{66}$$

(62) se mai poate scrie

$$p = \frac{1}{2}(p_a + p_b) + \frac{p_b - p_a}{b}z + \frac{1-\frac{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\beta_{1A}}}{r}z}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\beta_{1A}}}}{(1+\alpha\cos\theta)^{\varkappa A}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(k_{mA}A_{mn}\sin n\theta + kk_{mB}B_{mn}\cos n\theta) \tag{67}$$



şi dacă $p_a = p_b = p_0$ rezultă $p = p_0$ pentru valorile $\theta_1$ şi $\theta_2$ obţinute prin anularea sumei duble care este o funcţiune numai de $\theta$, independentă de $z$. Când $p_a \neq p_b$, presiunea în secţiunea mediană $z = 0$ este egală cu media $p_0$ a celor două presiuni exterioare, pentru aceleaşi valori $\theta_1$ şi $\theta_2$. Curba de

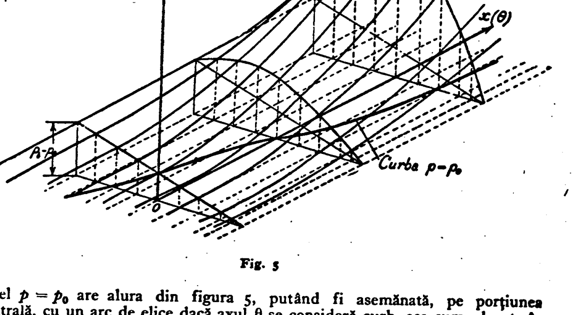



Fig. 5

nivel $p = p_0$ are alura din figura 5, putând fi asemănată, pe porţiunea centrală, cu un arc de elice dacă axul $\theta$ se consideră curb, aşa cum el este în realitate (fig. 2).

Pentru calculul constantelor $C_1$ şi $C_2$ se admit în cazul obişnuit când $p_a = p_b = p_0$ următoarele condiţiuni

$$\left.\begin{aligned} &(p)_{z=} = p_0 \text{ pentru } \theta_1 = 0 \\ &\text{şi} \\ &\left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)_{z=0} = 0 \text{ pentru } (p)_{z=0} = p_0 \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

A doua condiţiune, deşi corespunde la aceeaşi valoare a presiunii, are loc însă pentru un $\theta_2 \neq 0$ diferit de $\theta_1$ şi ea exprimă că în pelicula de uleiu, neputând exista presiuni negative, minimul lui $p$ este egal cu $p_0$, presiunea din mediul exterior. Deoarece însă $p_{\theta=0} \neq p_{\theta=2\pi}$ ecuaţiile (42), (62), (67) cât şi acelea stabilite pentru $p_\infty$ rămân valabile numai în intervalul $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$, iar între $\theta_2$ şi $2\pi + \theta_1$ $p = p_0$ constant.

Dacă palierul circular nu are cuzinetul pe toată periferia, ci acesta îmbracă arborele pe un unghiu $(\Theta)$, rezultă condiţia

$$\Theta = \theta_2 - \theta_1 \tag{69}$$

Tipei, N. 7342 Gross, W.
O metoda generala pentru studiul miscarii in pelicula de...
Studii si cercetari de mecanica si metalurgie, Tom II, 1951, pp.1-58



în locul primei relaţii din (68), $\theta_1$ fiind în general diferit de zero pentru aceste paliere.

In cazul când alimentarea se face cu uleiu sub o presiune $p_i > p_0$ la un unghiu $\vartheta$ (fig. 6) faţă de linia centrelor, condiţia aceasta înlocueşte pe prima din (68). Unghiul $\vartheta$ se poate determina odată cu excentricitatea $\alpha$ şi cu unghiul $\theta^*$ dintre linia centrelor şi forţa exterioară $F$ care lucrează asupra palierului. Pe lângă condiţiile la limită fixate pentru palierul cu cuzinet complet, trebue ca rezultanta presiunilor să fie egală cu $F$ şi dirijată după aceeaşi direcţiune. In cazul când cuzinetul este parţial, nu mai subsistă nici a doua condiţie din (68), astfel că vom avea alte legături şi anume

$$\left.\begin{array}{l} p = p_i \text{ pentru } \theta = \vartheta \\ p = p_0 \text{ pentru } \theta = \theta_1 \text{ şi } \theta = \theta_2 \\ \theta_2 \leqslant \Theta + \theta_1 \end{array}\right\} \tag{70}$$

Aceste condiţiuni la limită sunt complicate, iar soluţia generală (42), chiar simplificată sub formele (62) şi (67), nu permite un calcul numeric comod. Pentru palierele cu cuzinet complet, se pot admite condiţiunile simplificate (G ü m b e l)

$$p = p_0 \text{ pentru } \theta_1 = 0 \text{ şi } \theta_2 = \pi \tag{71}$$

care se aplică chiar când alimentarea se face sub presiune, punctul de alimentare fiind de obiceiu la cca $\frac{\pi}{2}$ faţă de direcţia forţei exterioare. Poziţia liniei centrelor corespunde astfel în mod satisfăcător cu direcţia pentru care $p = p_0$ (fig. 6). Pe de altă parte se poate admite că presiunea de alimentare, foarte redusă faţă de valorile maxime care iau naştere în filmul de uleiu, serveşte numai la învingerea pierderilor în circuitul de uleiu şi la intrarea în zona dintre arbore şi cuzinet, fără a influenţa asupra poziţiei axului $AB$. Experienţele au arătat că nu se produc creşteri de presiune în zona divergentă a filmului de uleiu ($\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, astfel că presiunea $p_0$ se găseşte de obiceiu în punctul $\theta \cong 0$. De asemenea se constată experimental că presiunea revine la valoarea $p_0$ în apropierea unghiului $\theta = \pi$, astfel încât condiţiunile (71) sunt apropiate de realitate. Aplicaţiunile numerice făcute pentru palierul infinit cu viscozitatea constantă arată totodată că diferenţele dintre forţele $F$ rezultante ale presiunilor, în cazul condiţiunilor (68) şi pentru relaţiile (71), diferă până la 20% fiind mai mici în ultimul caz, care se prezintă astfel acoperitor pentru aplicaţiile numerice.

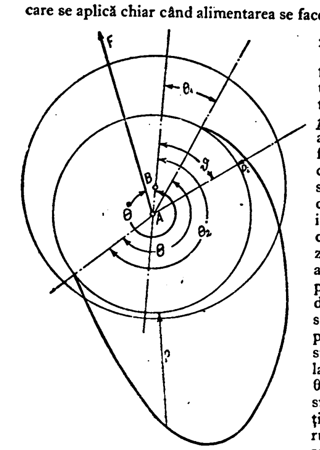


Fig. 6



Se remarcă de asemenea că relaţiile (71) reproduc aproape exact condiţiunile de funcţionare din palierele cu ungere prin inel (S e l l e r s), din palierele lucrând în baie de uleiu şi ţinând seamă de direcţia încărcării şi de poziţia curent adoptată pentru admisiunea uleiului, din majoritatea palierelor pentru arbori motori.

Formula presiunilor se prezintă astfel mult mai simplă. Din (51) se deduc constantele

$$C_2 = 0 \text{ şi } C_1^- = -\Delta(1-\alpha^2)\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \Xi_{\iota n} \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}}\right] \tag{72}$$

iar expresia presiunilor pentru palierul de alungire infinită va fi

$$p_\infty = p_0 + \frac{6\mu_1 Vr}{\Delta^2 (1+\alpha)^q (1-\alpha^2)^{1-q}} \cdot \frac{\alpha}{1 + \frac{1}{2}\alpha^2 (1-q)\left(1 - \frac{q}{2}\right)} \times$$

$$\times \frac{\left[1 - \frac{\alpha^2}{2}(1-q)\left(2 - \frac{q}{2}\right)\right] \sin\theta + \frac{\alpha}{2}\left\{1 - \frac{1}{2}(1-q)\left[1 + \alpha^2\left(1 - \frac{q}{2}\right)\right]\right\} \sin 2\theta}{(1+\alpha\cos\theta)^2} \tag{73}$$

Comparând această ecuaţie cu (53), se vede imediat că avem

$$\varkappa_A = 2;\ b_0 = c_2 = c_4 = \ldots = c_n = b_n = 0;$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = \dfrac{6\mu_1 Vr\alpha \cdot \left[1 - \frac{\alpha^2}{2}(1-q)\left(2 - \frac{q}{2}\right)\right]}{\Delta^2 (1+\alpha)^q (1-\alpha^2)^{1-q}\left[1 + \frac{1}{2}\alpha^2(1-q)\left(1 - \frac{q}{2}\right)\right]} \\ a_2 = \dfrac{3\mu_1 Vr\alpha^2 \left\{1 - \frac{1}{2}(1-q)\left[1 + \alpha^2\left(1 - \frac{q}{2}\right)\right]\right\}}{\Delta^2 (1+\alpha)^q (1-\alpha^2)^{1-q}\left[1 + \frac{1}{2}\alpha^2(1-q)\left(1 - \frac{q}{2}\right)\right]} \end{array}\right. \tag{74}$$

*Influenţa variaţiei viscozităţii.* Rezultă din cele de mai sus că atât $p_\infty$ cât şi presiunile în palierul de lungime finită depind de parametrul $q$ care redă variaţia viscozităţii cu grosimea peliculei (8). Pentru uleiurile normale se poate considera $q \cong \frac{2}{3} - 1$. Deoarece însă nu se cunoaşte *a priori*, la proiectarea unui palier, legea exactă de variaţie a viscozităţii (valoarea lui $q$), se consideră de multe ori $\mu$ = constant = $\mu_m$, egal cu viscozitatea medie a uleiului din palier, iar $q = 0$.

Dacă se ia $q = 1$, ecuaţia (73) dă

$$p_\infty = p_0 + \frac{6\mu_1 Vr\alpha}{\Delta^2(1+\alpha)} \cdot \frac{\sin\theta + \frac{\alpha}{2}\sin 2\theta}{(1+\alpha\cos\theta)^2} = p_0 + \frac{6\mu_1 Vr\alpha}{\Delta^2(1+\alpha)} \cdot \frac{\sin\theta}{1+\alpha\cos\theta} \tag{75}$$

Tipei, N. 7342 Gross, W
O metoda generala pentru studiul miscarii in pelicula de...
Studii si cercetari de mecanica si metalurgie, Tom II, 1951, pp.1-58



iar pentru $q = 0$, $\mu = \mu_m$

$$p_\infty = p_0 + \frac{12\mu_m Vr\alpha}{\Delta^2(2+\alpha^2)} \cdot \frac{\sin\theta + \frac{\alpha}{4}\sin 2\theta}{(1+\alpha\cos\theta)^2} \tag{76}$$

Spre a pune în evidenţă diferenţa dintre formulele (75) şi (76) s'a calculat repartiţia de presiuni pe un palier având următoarele caracteristice:
$\alpha = 0{,}7$; $\mu_1 = 175$ cp. corespunzând unei temperaturi la intrare $t_1 = 30°$; $\mu_2 = 30{,}9$ cp. corespunzând temperaturii la ieşire $t_2 = 58°{,}3$

— Raportul $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 0{,}1765 = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = \frac{\delta_2}{\delta_1}$, deci $q = 1$.

— Viscozitatea medie se poate considera ca media viscozităţilor la intrare şi ieşire $\mu_{IIm} = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} = 102{,}95$ cp., sau se poate lua viscozitatea corespunzătoare temperaturii medii. In acest caz, $t_m = \frac{1}{2}(t_1 + t_2) = 44{,}15°$ şi viscozitatea corespunzătoare de pe curba de variaţie a acesteia cu temperatura, rezultă $\mu_{IIIm} = 69$ cp.

Cu aceste date s'a calculat coeficientul fără dimensiuni $Cp_\infty$ în care s'a notat $\psi = \frac{\Delta}{r}$ jocul radial relativ

$$Cp_\infty = \frac{(p - p_0)\psi^2}{\mu_1\omega} \tag{77}$$

Aplicând formulele (75) şi (76) se găsesc următoarele expresii

$$\left.\begin{aligned} Cp_{\infty I} &= 2{,}47\,\frac{\sin\theta}{1+0{,}7\cos\theta} \quad \text{pentru } q = 1. \\ Cp_{\infty II} &= 1{,}984\,\frac{\sin\theta + 0{,}175\sin 2\theta}{(1+0{,}7\cos\theta)^2} \quad \text{pentru } q = 0,\ \mu_{IIm} = 102{,}95 \text{ cp.} \\ Cp_{\infty III} &= 1{,}33\,\frac{\sin\theta + 0{,}175\sin 2\theta}{(1+0{,}7\cos\theta)^2} \quad \text{pentru } q = 0, \mu_{IIIm} = 69 \text{ cp.} \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

cu ajutorul cărora s'a calculat tabloul Nr. 1.

TABLOUL Nr. 1

| $\theta$ | 0 | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 160° | 170° | 180° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\mu}{\mu_1}$ | 1 | 0,946 | 0,88 | 0,795 | 0,588 | 0,382 | 0,297 | 0,2305 | 0,2005 | 0,1822 | 0,1765 |
| $Cp_{\infty I}$ | 0 | 0,768 | 1,169 | 1,588 | 2,47 | 3,297 | 3,46 | 3,148 | 2,48 | 1,388 | 0 |
| $Cp_{\infty II}$ | 0 | 0,5 | 0,782 | 1,11 | 1,983 | 3,36 | 4,14 | 4,40 | 3,92 | 2,355 | 0 |
| $Cp_{\infty III}$ | 0 | 0,336 | 0,525 | 0,744 | 1,33 | 2,255 | 2,78 | 3,015 | 2,63 | 1,580 | 0 |



Cu aceste date s'au trasat diagramele din figura 7, din care rezultă că deosebirile dintre cele două cazuri (viscozitate constantă şi viscozitate variabilă) sunt importante. Rezultanta presiunilor (diferită de suprafaţa curbelor figurate), nu este totuşi mult deosebită în cele 3 cazuri.

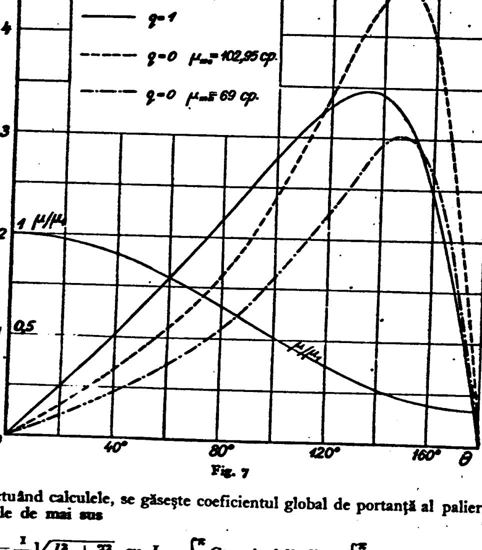



Fig. 7

Efectuând calculele, se găseşte coeficientul global de portanţă al palierului, cu datele de mai sus

$$\zeta_\infty = \frac{1}{2}\sqrt{I_\infty^2 + J_\infty^2} \text{ cu } I_\infty = \int_0^\pi Cp_\infty \sin\theta d\theta;\ J_\infty = \int_0^\pi Cp_\infty \cos\theta\, d\theta \tag{79}$$

s'au pentru cele trei cazuri

$$\zeta_{\infty I} = 3{,}175;\ \zeta_{\infty II} = 3{,}72;\ \zeta_{\infty III} = 2{,}495. \tag{80}$$

Faţă de $\zeta_{\infty I}$, portanţa palierului cu viscozitatea variabilă, diferenţa este de $+17{,}18\%$ dacă se consideră viscozitatea constantă egală cu media acelora

Tipei, N. 7342 Gross, W
O metoda generala pentru studiul miscarii in pelicula de...
Studii si cercetari de mecanica si metalurgie, Tom II, 1951, pp.1-58



dela intrare şi ieşire şi de $-21,4\%$ dacă se ia viscozitatea corespunzătoare temperaturii medii. Eroarea prin exces dată de $\zeta_{\infty II}$ se accentuează dacă $\alpha > 0,7$ şi scade odată cu $\alpha$, iar pentru $\zeta_{\infty III}$ situaţia se prezintă invers, rezultatele fiind cu atât mai bune cu cât excentricitatea este mai mare.

In realitate, nu se poate afirma că valoarea parametrului $q = 1$ este cea mai bună, decât după ce s'a făcut calculul termic al palierului, determinându-se exact temperaturile la intrare şi ieşire. Valoarea lui $q$ depinde astfel de posibilităţile de evacuare a căldurii desvoltate în palier, variabile dela caz la caz cu genul de construcţie al acestuia, cu temperaturile din mediul exterior, cu debitul de uleiu asigurat prin circuitul de alimentare, cu sistemul de răcire a uleiului în exterior, etc. Totodată $q$ depinde de curba de variaţie a viscozităţii uleiului cu temperatura, sau de indicele Dean-Davis al acestuia. De asemenea $q$ este influenţat şi de variaţia presiunii care modifică viscozitatea, într'o măsură mult mai redusă însă decât temperatura

Problema fixării parametrului $q$ este astfel foarte complexă. Se poate totuşi admite în general $q = 1$ sau $q = 0$, dacă se alege valoarea medie a viscozităţii după cum s'a arătat. De multe ori, este greu să se calculeze însă viscozitatea medie, acest lucru implicând o evaluare a temperaturilor $t_1$ şi $t_2$, astfel încât poate fi preferabil să se admită $q = 1$ şi să se aprecieze numai $t_1$ la intrare pentru calculul lui $\mu_1$, ceea ce este mai uşor, eventual $t_1$ fiind chiar temperatura din mediul exterior. Rămâne bineînţeles să se verifice apoi dacă $\mu_2$ rezultat corespunde cu valoarea dela temperatura $t_2$ de ieşire. In cazul când deosebirea este mare, se poate calcula $q$ din relaţia (8), în care $\mu_2$ se ia pentru temperatura $t_2$ şi apoi se reface calculul până la încadrarea rezultatului final cu aproximaţia dorită.

Totuşi, pentru calculul rezultantei presiunilor se poate renunţa la aceste aproximaţii succesive care sunt laborioase, admiţând $q = 1$ sau o viscozitate medie constantă.

Pe diagrama din figura 7 s'a trasat de asemenea variaţia viscozităţii în funcţiune de $\theta$, aşa cum rezultă din formula (8). Curba $\mu = f(\theta)$ este suficient de aproape de o linie dreaptă şi corespunde astfel în mod satisfăcător cu ipoteza simplificatoare care se face uneori prin admiterea unei variaţii lineare a lui $\mu$ în lungul filmului de uleiu.

*Exemple numerice.* Spre a pune în evidenţă rezultatele găsite şi valoarea aproximaţiilor pentru rezolvarea ecuaţiei cu diferenţe (33), s'au efectuat calculele pentru două cazuri limită $\alpha = 0,4$ şi $\alpha = 0,9$, precum şi pentru valoarea intermediară $\alpha = 0,6$.

Intr'adevăr, se vede din (35), (36), (42) şi (56) că, pentru un palier de dimensiuni date şi o anumită viteză periferică, parametrul $\alpha$ este acela de care depinde mărimea şi repartiţia presiunilor. Cu excentricitatea relativă cresc şi presiunile maxime atinse, portanţa totală a palierului, iar grosimea minimă $\delta_2$ a filmului de uleiu scade (fig. 1). Cum această grosime, pentru un joc radial dat, nu poate coborî sub o anumită limită spre a se evita contactul direct între suprafeţele metalice, şi cum între $\delta_2$, $\Delta$ şi $\alpha$ există relaţia

$$\delta_2 = (1 - \alpha)\Delta$$

urmează că $\alpha$ nu poate depăşi o valoare maximă, în jurul lui $\alpha \sim 0,9$.

Exponentul $q$ care dă variaţia viscozităţii în lungul filmului de uleiu se admite egal cu unitatea, în acord cu rezultatele măsurătorilor experimentale



pentru uleiuri (Freudenreich). S'a găsit apoi (74) valoarea lui $\varkappa = 2$.

I. $\alpha = 0,4$. Se vor aplica mai departe normele de calcul expuse mai sus. Fie $i = 3$. Ecuaţiile (35) devin

$$\left.\begin{aligned} &A_{m0} = 0 \\ &0,04(\beta_{mA} - 15)A_{m3} + 0,4(\beta_{mA} - 5)A_{m2} + (1,04\beta_{mA} - 0,64)A_{m1} = 0 \\ &0,4(\beta_{mA} - 11)A_{m3} + (1,08\beta_{mA} - 4)A_{m2} + 0,4(\beta_{mA} + 1)A_{m1} = 0 \\ &(1,08\beta_{mA} - 9,4)A_{m3} + 0,4(\beta_{mA} - 1)A_{m2} + 0,04(\beta_{mA} + 1)A_{m1} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (81)$$

Anulând determinantul coeficienţilor necunoscutelor $A_{m1}$, $A_{m2}$, $A_{m3}$, se obţine ecuaţia în $\beta_{mA}$

$$\beta_{mA}^3 - 13,16\beta_{mA}^2 + 45,43\beta_{mA} - 33,9 = 0 \quad (82)$$

ale cărei rădăcini sunt

$$\beta_{1A} = 1,028; \ \beta_{2A} = 4,104 \ \text{şi} \ \beta_{3A} = 8,028. \quad (83)$$

Pentru găsirea integralei $p$ vom folosi, în vederea simplificării calculelor, numai primele două valori $\beta_{1A}$ şi $\beta_{2A}$. Inlocuind în sistemul (81) pe $\beta_{1A} = 1,028$ se obţine

$$\frac{A_{12}}{A_{11}} = 0,2665; \ \frac{A_{13}}{A_{11}} = 0,01015 \quad (84)$$

Pentru calculul coeficienţilor de ordin superior, se consideră următoarele 3 ecuaţii, în care se neglijează termenii $A_{m7}$ şi $A_{m8}$,

$$\left.\begin{aligned} &0,04(\beta_{mA} - 48)A_{m6} + 0,4(\beta_{mA} - 29)A_{m5} + (1,08\beta_{mA} - 16,96)A_{m4} + \\ &\qquad + 0,4(\beta_{mA} - 5)A_{m3} + 0,04\beta_{mA}A_{m2} = 0 \\ &0,4(\beta_{mA} - 41)A_{m6} + (1,08\beta_{mA} - 26,68)A_{m5} + 0,4(\beta_{mA} - 11)A_{m4} + \\ &\qquad + 0,04(\beta_{mA} - 3)A_{m3} = 0 \\ &(1,08\beta_{mA} - 38,56)A_{m6} + 0,4(\beta_{mA} - 19)A_{m5} + 0,04(\beta_{mA} - 8)A_{m4} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (85)$$

cu valoarea $\beta_{1A} = 1,028$ şi coeficienţii $A_{12}$, $A_{13}$ din (84) se găseşte, rezolvând sistemul (85)

$$\frac{A_{14}}{A_{11}} = -0,000343; \quad \frac{A_{15}}{A_{11}} = 0,0000234; \ \frac{A_{16}}{A_{11}} = -0,00000192 \quad (86)$$

De asemenea, pentru $\beta_{2A} = 4,104$, ecuaţiile (81) şi (85) dau

$$\frac{A_{22}}{A_{21}} = 7,74; \ \frac{A_{23}}{A_{21}} = 1,975; \ \frac{A_{24}}{A_{21}} = 0,0467; \ \frac{A_{25}}{A_{21}} = -0,00221; \ \frac{A_{26}}{A_{21}} = 0,0001725 \quad (87)$$

Din aceste şiruri de valori se observă convergenţa rapidă a termenilor $A_{mn}$ care justifică pe deplin neglijarea necunoscutelor $A_{m4}$, $A_{m5}$ ... în primele trei ecuaţii, precum şi deplasarea maximului $A_{mn}$ odată cu creşterea lui $\beta_{mA}$.

Tipei, N. 7342 Gross, V
O metoda generala pentru studiul miscarii in pelicula de...
Studii si cercetari de mecanica si metalurgie, Tom II, 1951, pp.1-58



Pentru $\beta_{1A} = 1{,}028$ se vede că $A_{11}$ are valoarea cea mai mare, pentru $\beta_{2A} = 4{,}104$ $A_{22}$ au valoarea cea mai mare, ordinea în mărime absolută fiind $A_{22} > A_{23} > A_{21} > A_{24} > A_{25} \ldots$ Această alură a coeficienţilor $A_{mn}$ în funcţie de $\beta_{mA}$ se regăseşte pentru toate valorile lui $\alpha$ şi este foarte utilă pentru construirea soluţiei căutate cu ajutorul unui număr redus de integrale particulare $f_{1m}$.

Sistemul (54) se reduce astfel la 2 ecuaţii. Utilizând valorile lui $a_1$ şi $a_2$ din (74) se găseşte

$$\left.\begin{aligned} A_{11} + A_{21} &= a_1 = \frac{1{,}715\mu_1 Vr}{\Delta^2} \quad ; A_{11} = 1{,}009\frac{1{,}715\mu_1 Vr}{\Delta^2} \\ 0{,}2665\, A_{11} + 7{,}74\, A_{21} &= a_2 = 0{,}2\frac{1{,}715\mu_1 Vr}{\Delta^2} \; ; A_{21} = -0{,}009\frac{1{,}715\mu_1 Vr}{\Delta^2} \end{aligned}\right\} \quad (88)$$

Mai departe, cu ajutorul valorilor (84), (86) şi (87) ale coeficienţilor $A_{mn}$ de ordin superior, se deduc coeficienţii $a_3, a_4 \ldots$ din sistemul (54)

$$\left.\begin{aligned} a_3 &= -0{,}00753\frac{1{,}715\mu_1 Vr}{\Delta^2} \; ; a_5 = 0{,}0000435\frac{1{,}715\mu_1 Vr}{\Delta^2} \\ a_4 &= -0{,}000766\frac{1{,}715\mu_1 Vr}{\Delta^2} \; ; a_6 = -0{,}000003487\frac{1{,}715\mu_1 Vr}{\Delta^2} \end{aligned}\right\} \quad (89)$$

cel mai mare din aceştia reprezintă $7{,}53‰$ din $a_1$ şi $3{,}77\%$ din $a_2$, iar termenii următori formează o progresie geometrică descrescătoare cu raţia sub $-\frac{1}{10}$; deci toţi termenii dela $a_3$ înainte sunt neglijabili faţă de $a_1$, $a_2$. Soluţia găsită folosind numai două integrale particulare $f_{11}$ şi $f_{12}$ coincide astfel aproape riguros cu $p_\infty$, pentru care $a_1$, $a_2$ au exact aceleaşi valori, iar $a_n = 0$ când $n > 2$.

S'a arătat că un mijloc rapid de calcul al coeficienţilor de ordin superior constă în a neglija în fiecare ecuaţie de ordin $n > i = 3$ ultimii doi termeni. Astfel, sistemul (85) se rezolvă din aproape în aproape, suprimând $A_{m5}$ şi $A_{m6}$ în prima ecuaţie, pe $A_{m6}$ în a doua, etc. Se găseşte pe această cale, cu $\beta_{1A} = 1{,}028$

$$\frac{A_{14}}{A_{11}} = -0{,}000326; \frac{A_{15}}{A_{11}} = 0{,}00001956; \frac{A_{16}}{A_{11}} = -0{,}000001327 \quad (90)$$

iar pentru $\beta_{2A} = 4{,}104$

$$\frac{A_{24}}{A_{21}} = 0{,}045; \frac{A_{25}}{A_{21}} = -0{,}00188; \frac{A_{26}}{A_{21}} = 0{,}000122 \quad (91)$$

care corespund în mod satisfăcător cu valorile mai exacte date de (86) şi (87).

II. $\alpha = 0{,}9$. Deoarece pentru valorile mari ale lui $\alpha$ convergenţa coeficienţilor $A_{mn}$ este mai mică şi deoarece este necesar să se determine rădăcinile $\beta_{mA}$ cât mai exact, s'a folosit un număr mai mare de ecuaţiuni. Fie



$i = 6$; ca şi în exemplul precedent, se pot scrie ecuaţiile (35) în care se înlocueşte $\alpha = 0{,}9$, $q = 1$, $x = 2$

$$\left.\begin{aligned} &A_{m0} = 0 \\ &0{,}2025(\beta_{mA} - 15)A_{m3} + 0{,}9(\beta_{mA} - 5)A_{m2} + (1{,}2025\,\beta_{mA} + \\ &\qquad + 0{,}8225)A_{m1} = 0 \\ &0{,}2025(\beta_{mA} - 24)A_{m4} + 0{,}9(\beta_{mA} - 11)A_{m3} + (1{,}405\,\beta_{mA} - \\ &\qquad - 4)A_{m2} + 0{,}9(\beta_{mA} + 1)A_{m1} = 0 \\ &0{,}2025(\beta_{mA} - 35)A_{m5} + 0{,}9(\beta_{mA} - 19)A_{m4} + (1{,}405\,\beta_{mA} - \\ &\qquad - 11{,}025)A_{m3} + 0{,}9(\beta_{mA} - 1)A_{m2} + 0{,}2025(\beta_{mA} + 1)A_{m1} = 0 \\ &0{,}2025(\beta_{mA} - 48)A_{m6} + 0{,}9(\beta_{mA} - 29)A_{m5} + (1{,}405\,\beta_{mA} - \\ &\qquad - 20{,}85)A_{m4} + 0{,}9(\beta_{mA} - 5)A_{m3} + 0{,}2025\,\beta_{mA} A_{m2} = 0 \\ &0{,}9(\beta_{mA} - 41)A_{m6} + (1{,}405\,\beta_{mA} - 33{,}5)A_{m5} + 0{,}9(\beta_{mA} - \\ &\qquad - 11)A_{m4} + 0{,}2025(\beta_{mA} - 3)A_{m3} = 0 \\ &(1{,}405\,\beta_{mA} - 48{,}93)A_{m6} + 0{,}9(\beta_{mA} - 19)A_{m5} + 0{,}2025(\beta_{mA} - \\ &\qquad - 8)A_{m4} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (92)$$

Din condiţia de compatibilitate a sistemului (92) se găseşte ecuaţia în $\beta_{mA}$

$$\beta_{mA}^6 - 71{,}3\,\beta_{mA}^5 + 2006\,\beta_{mA}^4 - 28320\,\beta_{mA}^3 + 191900\,\beta_{mA}^2 - 552300\,\beta_{mA} + 420200 = 0 \quad (93)$$

cu rădăcinile

$$\beta_{1A} = 1{,}149; \; \beta_{3A} = \beta_{4A} = 6{,}2; \; \beta_{5A} = 27{,}5 \quad (94)$$

şi încă două valori imaginare.

Procedând ca şi pentru $\alpha = 0{,}4$, se înlocuesc pe rând valorile $\beta_{1A}$, $\beta_{3A}$ în sistemul (92), obţinându-se două serii de coeficienţi $\frac{A_{mn}}{A_{m1}}$. Deoarece rădăcina $\beta_{5A} = 27{,}5$ este prea mult diferită de primele, nu s'a utilizat această valoare spre a nu se introduce aproximaţii însemnate în cazul când se foloseşte ecuaţia (62) în locul relaţiei exacte (42); totodată la $\beta_{5A} = 27{,}5$ se obţin valori prea mari pentru termenii superiori $A_{54}$, $A_{55}$, astfel că soluţia corespunzătoare nu prezintă interes pentru construirea integralei căutate.

Se vor utiliza în acest scop încă două valori ale lui $\beta_{mA}$ alese arbitrar, fie $\beta_{2A} = 4$ şi $\beta_{6A} = 7{,}5$, procedându-se aşa după cum s'a arătat anterior. In acest scop, este suficient să se suprime ultima ecuaţiune din (92) şi să se rezolve acest sistem unde s'a înlocuit $\beta_{mA} = \beta_{2A}$ apoi $\beta_{mA} = \beta_{6A}$.

Se determină astfel patru grupe de valori $\frac{A_{m2}}{A_{m1}} \ldots \frac{A_{m6}}{A_{m1}}$. Spre a deduce şi termenii următori $\frac{A_{m7}}{A_{m1}}, \frac{A_{m8}}{A_{m1}}, \frac{A_{m9}}{A_{m1}}$ se rezolvă mai departe sistemul de ecuaţiuni corespunzând lui $n = 7$, $n = 8$ şi $n = 9$, în care se înlocueşte $\beta_{1A} = 1{,}149$ şi $\beta_{2A} = 6{,}2$ şi se neglijează $A_{m10}$, $A_{m11}$; apoi se consideră sistemul de ecuaţiuni derivat din (35) în care $n = 6$, $n = 7$ şi $n = 8$, $A_{m10}$ se neglijează, iar $\beta_{2A} = 4$ şi $\beta_{6A} = 7{,}5$, deducându-se ultimele două serii de valori ale termenilor căutaţi. S'a obţinut astfel tabloul Nr. 2.

TABLOUL Nr. 2

| $m$ | $\beta_{mA}$ | $\frac{A_{m2}}{A_{m1}}$ | $\frac{A_{m3}}{A_{m1}}$ | $\frac{A_{m4}}{A_{m1}}$ | $\frac{A_{m5}}{A_{m1}}$ | $\frac{A_{m6}}{A_{m1}}$ | $\frac{A_{m7}}{A_{m1}}$ | $\frac{A_{m8}}{A_{m1}}$ | $\frac{A_{m9}}{A_{m1}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,149 | 0,584 | 0,0646 | −0,00648 | 0,001336 | −0,000264 | 0,0000495 | −0,00000595 | −0,00000046 |
| 2 | 4 | 2,86 | 1,3741 | 0,116 | −0,03795 | 0,01826 | −0,0101 | 0,00588 | −0,0029 |
| 3 | 6,2 | 10,22 | 10,831 | 2,1474 | −0,1048 | 0,01056 | 0,00036 | −0,0009938 | 0,0004025 |
| 6 | 7,5 | 54,3 | 87 | 26,372 | 0,56 | −0,545 | 0,38 | −0,2575 | 0,1505 |

Se observă convergenţa rapidă a termenilor $A_{mn}$, cu deosebire pentru valorile $\beta_{1A} = 1{,}149$ şi $\beta_{3A} = 6{,}2$, care au fost deduse din ecuaţia (93), rezultată la rândul său din sistemul (92), unde s'a admis ca ipoteză tocmai această scădere rapidă a coeficienţilor de ordin superior; se vede imediat că presupunerea apare pe deplin justificată.

Pentru celelalte două şiruri de valori ($m = 2$ şi $m = 6$), în care $\beta_{mA}$ a căpătat valori arbitrare, descreşterea termenilor $A_{mn}$ este mai lentă, totuşi suficient de bună spre a justifica neglijarea lui $A_{m7}$ în (92). Totodată, valorile extreme ale lui $\beta_{mA}$ rămân în limite suficient de restrânse, astfel că aproximaţia ce se introduce în cazul când se foloseşte soluţia (67) în locul aceleia exacte (42) să fie admisibilă.

Utilizând aceste patru soluţii $f_{11}, f_{12}, f_{13}$ şi $f_{16}$ primele patru ecuaţii ale sistemului (54) sunt

$$\left.\begin{aligned} &A_{11} + A_{21} + A_{31} + A_{61} = a_1 = \frac{2{,}84\,\mu_1 Vr}{\Delta^2} \\ &0{,}584\,A_{11} + 2{,}86\,A_{21} + 10{,}22\,A_{31} + 54{,}3\,A_{61} = a_2 = 0{,}45\frac{2{,}84\,\mu_1 Vr}{\Delta^2} \\ &0{,}0646\,A_{11} + 1{,}3741\,A_{21} + 10{,}831\,A_{31} + 87\,A_{61} = a_3 = 0 \\ &-0{,}00648\,A_{11} + 0{,}116\,A_{21} + 2{,}1474\,A_{31} + 26{,}372\,A_{61} = a_4 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{95}$$

Din care se găseşte

$$\left.\begin{aligned} &A_{11} = 1{,}016\,\frac{2{,}84\,\mu_1 Vr}{\Delta^2} \qquad &A_{21} = 0{,}00181\,\frac{2{,}84\,\mu_1 Vr}{\Delta^2} \\ &A_{31} = -0{,}0201\,\frac{2{,}84\,\mu_1 Vr}{\Delta^2} \qquad &A_{61} = 0{,}00171\,\frac{2{,}84\,\mu_1 Vr}{\Delta^2} \end{aligned}\right\} \tag{96}$$

Cu aceste valori se deduc din (54) termenii $a_n$ pentru $n > 4$

$$\left.\begin{aligned} &a_5 = 0{,}0043584\,a_1 \qquad a_6 = -0{,}00138195\,a_1 \\ &a_7 = 0{,}00067679\,a_1 \qquad a_8 = -0{,}00041744\,a_1;\; a_9 = 0{,}000244193\,a_1 \end{aligned}\right\} \tag{97}$$



Pentru a satisface exact condiţiunile (74), aceşti termeni $(a_5, a_6 \dots)$ trebue să fie nuli. Utilizând un număr cât mai mare de integrale particulare $f_{1m}$ se poate scobori valoarea lor sub o limită fixată, oricât de mică. Faţă de $a_1$ şi de $a_2 = 0{,}45\,a_1$ se observă însă că termenii din (97) nu reprezintă nici 1%, de aceea se poate considera că soluţia generală (42) sau (67) construită cu aceste patru integrale particulare este aproape riguroasă.

In realitate, se pot folosi numai două integrale particulare, fie $f_{11}$ şi $f_{12}$. Procedând ca mai sus se găseşte uşor sistemul

$$\left.\begin{aligned} &A_{11} + A_{21} = a_1 = \frac{2{,}84\,\mu_1 Vr}{\Delta^2} \qquad\qquad A_{11} = 1{,}058\,a_1 \\ &0{,}584\,A_{11} + 2{,}86\,A_{21} = a_2 = 0{,}45\,a_1 = 0{,}45\frac{2{,}84\,\mu_1 Vr}{\Delta^2};\; A_{21} = -0{,}058\,a_1 \end{aligned}\right\} \tag{98}$$

In continuare rezultă coeficienţii de ordin superior

$$\left.\begin{aligned} &a_3 = -0{,}0114\,a_1 \qquad a_6 = -0{,}001338\,a_1 \qquad a_8 = -0{,}0003473\,a_1 \\ &a_4 = -0{,}01359\,a_1 \qquad a_7 = 0{,}0006374\,a_1 \qquad a_9 = 0{,}000167513\,a_1 \\ &a_5 = 0{,}003617\,a_1 \end{aligned}\right\} \tag{99}$$

care de asemenea pot fi neglijaţi faţă de $a_1$ şi $a_2$, astfel încât şi pentru $\alpha = 0{,}9$ sunt suficiente două integrale pentru a satisface condiţiunile (74).

Spre a evalua eroarea introdusă neglijând termenii $a_n$ de ordin superior, se va presupune că începând dela $A_{m7}$ înainte se poate aplica relaţia (40) pentru cele patru grupe de coeficienţi corespunzând lui $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$ şi $m = 6$. In acest caz se poate scrie, înlocuind $\alpha = 0{,}9$ în (40)

$$\rho = \frac{A_{m,n+1}}{A_{mn}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = -0{,}628 \tag{100}$$

Se remarcă imediat că în realitate $a_7$, $a_8$, $a_9$ descresc mai repede decât rezultă din această relaţie, care începe să fie valabilă pentru valori mai mari ale lui $n$.

Cu ajutorul relaţiei (100) se poate forma astfel o serie care majorează şirul coeficienţilor reali. Fie această serie

$$s = a\sum_{1}^{\infty}\rho^{n-1}\sin n\theta \tag{101}$$

Coeficientul $a$ se calculează din condiţia ca termenul $a_7$ să corespundă cu valoarea din şirul real (99)

$$a_7 = a\rho^6 = 0{,}0006374 \text{ sau } a = \frac{0{,}0006374\,a_1}{(-0{,}628)^6} = 0{,}0104\,a_1 \tag{102}$$

Rezultă astfel suma termenilor neglijaţi dela $a_7$ înainte

$$\varepsilon = s - a(\sin\theta + \rho\sin 2\theta + \rho^2\sin 3\theta + \rho^3\sin 4\theta + \rho^4\sin 5\theta + \rho^5\sin 6\theta) \tag{103}$$

Tipei, N. 7342 Gross, W
O metoda generala pentru studiul miscarii in pelicula de...
Studii si cercetari de mecanica si metalurgie, Tom II, 1951, pp.1-58



Observând mai departe că avem

$$s = \frac{a \sin \theta}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \theta} \tag{104}$$

şi strângând termenii din paranteza (103) se găseşte

$$\varepsilon = a \left[ \left( \frac{1}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \theta} - 1 \right) \sin \theta - \rho (\sin 2\theta + \rho \sin 3\theta)(1 + \right.$$

$$\left. + 2\rho^2 \cos 2\theta + 2\rho^3 \cos 3\theta) \right] - \rho^4 \sin 5\theta \tag{105}$$

Valoarea absolută maximă a acestei expresii are loc pentru $\theta = 125°$ şi este

$$\varepsilon_{max} = 0{,}00\text{[illegible]}\, a_1.$$

Urmează că toţi termenii neglijaţi dela $a_7$ înainte au o sumă maximă mai mică decât această valoare majorantă. Cum însă $\varepsilon_{max}$ este neglijabil faţă de $a_1$, ca şi termenii precedenţi $a_5$, $a_6$, rezultă că soluţia $p_\infty$ găsită cu ajutorul acestor două valori particulare ale lui $\beta_{1m}$ corespunde cu formula (73), cu o eroare mai mică de 3%.

III. $\alpha = 0{,}6$. Ca şi în exemplele precedente, luând $i = 4$ se găseşte ecuaţia în $\beta_{mA}$

$$\beta_{mA}^4 - 27{,}27\, \beta_{mA}^3 + 239{,}5\, \beta_{mA}^2 - 730{,}5\, \beta_{mA} + 538{,}5 = 0 \tag{106}$$

cu rădăcinile

$$\beta_{1A} = 1{,}07\ ;\ \beta_{2A} = 4{,}23\ ;\ \beta_{3A} = 10{,}6\ ;\ \beta_{4A} = 11{,}2 \tag{107}$$

Pentru construirea soluţiei generale (42) sau (67) se vor folosi primele două valori care dau integralele particulare $f_{11}$ şi $f_{12}$. Coeficienţii $A_{mn}$ apar în tabloul Nr. 3.

TABLOUL Nr. 3

| $m$ | $\beta_{mA}$ | $\frac{A_{m2}}{A_{m1}}$ | $\frac{A_{m3}}{A_{m1}}$ | $\frac{A_{m4}}{A_{m1}}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,07 | 0,384 | 0,0253 | −0,001496 |
| 2 | 4,23 | 5,275 | 2,0462 | 0,0807 |

Sistemul (54) dă pentru primele două ecuaţii

$$\left.\begin{aligned} A_{11} + A_{21} &= a_1 = \frac{2{,}25 \mu_1 V r}{\Delta^2} \\ 0{,}384\, A_{11} + 5{,}275\, A_{21} &= a_2 = 0{,}3 \frac{2{,}25 \mu_1 V r}{\Delta^2} \end{aligned}\right\} \tag{108}$$



de unde

$$\left.\begin{aligned} A_{11} &= 1{,}017\, a_1 = 1{,}017 \frac{2{,}25 \mu_1 V r}{\Delta^2} \\ A_{21} &= -0{,}017\, a_1 = -0{,}017 \frac{2{,}25 \mu_1 V r}{\Delta^2} \end{aligned}\right\} \tag{109}$$

apoi

$$a_3 = -0{,}0091\, a_1\ ;\ a_4 = -0{,}002892\, a_1, \ldots \tag{110}$$

ca şi în cazurile precedente $a_3, a_4 \ldots a_n$ pot fi consideraţi nuli faţă de $a_1$, $a_2$, deci condiţiunile (74) sunt îndeplinite de asemenea cu două integrale particulare.

*Ecuaţia presiunilor în palierul circular cu cuzinet pe toată periferia fusului.* Din calculele anterioare rezultă că valorile parametrului $\beta_{1A}$ sunt aproape de unitate pentru toată gama de excentricităţi $\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$. Dacă se consideră mai exact $\beta_{1A}$ ca o funcţiune de $\alpha$, variaţia în funcţie de excentricitate este aproape riguros o linie dreaptă de ecuaţie:

$$\beta_{1A} = 0{,}9312 + 0{,}242\, \alpha \tag{111}$$

Totodată se observă că sunt suficiente în toate cazurile numai două integrale particulare $f_{1m}$ pentru soluţia generală (42) şi că a doua valoare a parametrului $\beta_{mA}$ este aproape constantă şi egală cu 4. Termenul din soluţiile (42), (62) sau (67) care conţine pe $\beta_{2A}$ este de importanţă secundară faţă de primul şi s'a arătat de asemenea că influenţa lui $\beta_{mA}$ asupra soluţiei $f_{2m}$ este mică dacă $\beta_{mA}$ nu ia valori mult prea diferite. Admiţând condiţiunile la limită simplificate (71), ecuaţia exactă a presiunilor (42) are o formă deosebit de simplă pentru palierul de alungire finită $\lambda$, când $q = 1$

$$p = p_0 + \frac{1 - \dfrac{\operatorname{ch} \dfrac{\sqrt{\beta_{1A}}}{r} z}{\operatorname{ch} \lambda \sqrt{\beta_{1A}}}}{(1 + \alpha \cos \theta)^2} \left[ (A_{11} + k_{2A} A_{21}) \sin \theta + (A_{12} + k_{2A} A_{22}) \sin 2\theta \right] \tag{112}$$

unde după (63)

$$k_{2A} = \frac{1 - \dfrac{1}{\operatorname{ch} 2\lambda}}{1 - \dfrac{1}{\operatorname{ch} \lambda}} \tag{113}$$

Tipei, N. 7342 Gross, W
O metoda generala pentru studiul miscarii in pelicula de...
Studii si cercetari de mecanica si metalurgie, Tom II, 1951, pp.1-58



iar coeficienţii $A_{11}$ şi $A_{21}$ se deduc uşor din primele două ecuaţiuni (54). In ceea ce priveşte rapoartele $\frac{A_{12}}{A_{11}}$ şi $\frac{A_{22}}{A_{21}}$ s'au găsit următoarele valori:

TABLOUL Nr. 4

| $\alpha$ | 0,4 | 0,6 | 0,9 |
|---|---|---|---|
| $\frac{A_{12}}{A_{11}}$ | 0,2665 | 0,384 | 0,584 |
| $\frac{A_{22}}{A_{21}}$ | 7,74 | 5,275 | 2,86 |

Pentru intervalul $\alpha = 0,3 - 0,95$ care cuprinde toate cazurile practice de funcţionare a palierelor, rezultă din diagramele din figurile 8 şi 9 că rapoartele

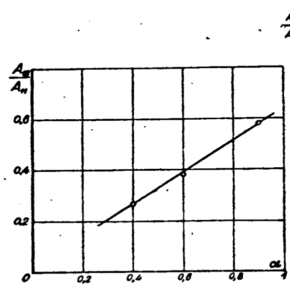


Fig. 8

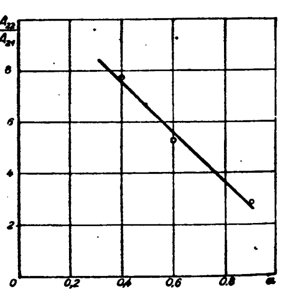


Fig. 9

$\frac{A_{12}}{A_{11}}$ şi $\frac{A_{22}}{A_{21}}$ au o variaţie, în funcţie de excentricitate, aproape riguros lineară, ele fiind date de ecuaţiile

$$\left.\begin{aligned} \frac{A_{12}}{A_{11}} &= 0,0157 + 0,627\,\alpha \\ \frac{A_{22}}{A_{21}} &= 11,34 - 9,6\,\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (114)$$

de unde rezultă aceste rapoarte fără a fi nevoie să se mai rezolve sistemul (35) pentru fiecare $\alpha$.

Valorile lui $k_{2A}$ variază de asemenea dela $k_{2A} = 3,11$ pentru $\lambda = 0,5$ la $k_{2A} = 1$ pentru $\lambda = \infty$, aceste valori ale alungirii putând fi considerate ca extreme



în construcţiile mecanice. Pe de altă parte, $A_{21}$ nu depăşeşte $-6\%$ din $A_{11}$ ($A_{21}$ este întotdeauna negativ când se folosesc numai două soluţii particulare $f_{1m}$); cum $p$ dat de formula (112) aproximează formula exactă (42) prin lipsă se poate considera coeficientul lui $\sin\theta$ egal cu unitatea, astfel că rezultă în cele din urmă, ţinând seama şi de relaţiile (114)

$$p = p_0 + \frac{6\mu_1 Vr}{\Delta^2} \cdot \frac{\alpha}{1+\alpha} \cdot \left(1 - \frac{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\beta_{1A}}}{r} z}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\beta_{1A}}}\right) \cdot \frac{\sin\theta}{(1+\alpha\cos\theta)^2} \times$$
$$\times \left\{1 + \left[0,0314 + 1.254\,\alpha + k_{2A}\,(22,68 - 19,2\,\alpha)\frac{A_{21}}{A_{11}}\right]\cos\theta\right\} \qquad (115)$$

iar raportul $\frac{A_{21}}{A_{11}}$ se poate calcula direct în funcţie de $\alpha$ din (54), (74) şi (114) pentru $q = 1$

$$\frac{A_{21}}{A_{11}} = -\frac{0,0157 + 0,127\,\alpha}{11,34 - 10,10\,\alpha} \qquad (116)$$

Ecuaţia (115) reprezintă astfel o expresie simplă pentru repartiţia de presiuni într'un palier de lungime finită cu cuzinet complet, cu ajutorul căreia se pot deduce uşor mai departe caracteristicele globale de funcţionare. Aproximaţia cea mai importantă în această relaţie este datorită valorii $q = 1$ admisă; totuşi eroarea nu este mare, chiar faţă de cazul limită când $q = 0$, după cum s'a arătat.

*Palierul plan (patină-glisieră)*

Se poate trata problema în mod analog cu palierul cilindric. Dacă $l$ este lungimea suprafeţei mobile măsurată după direcţia mişcării ($Ox$) se face substituţia (fig. 10)

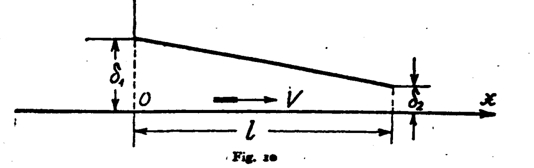



Fig. 10

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{l}{2}(1 - \cos\theta)\ ; \ \alpha = \frac{\delta_1 - \delta_2}{\delta_1 + \delta_2} \\ \Delta &= \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \ \text{ şi } \ \delta = \Delta(1 + \alpha\cos\theta) \end{aligned}\right\} \qquad (117)$$

Tipei, N. 7342 Gross, W
O metoda generala pentru studiul miscarii in pelicula de...
Studii si cercetari de mecanica si metalurgie, Tom II, 1951, pp.1-58



iar ecuaţiile (12) vor fi astfel

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2 f_{1m}}{d\theta^2} - \frac{(3-q)\,\alpha\sin\theta}{1+\alpha\cos\theta}\cdot\frac{df_{1m}}{d\theta} + \beta_m \sin^2\theta f_{1m} = 0 \\ &\frac{d^2 f_{2m}}{dz^2} - \frac{4\beta_m}{l^2} f_{2m} = 0 \end{aligned}\right. \qquad (118)$$

Sistemul (118) admite soluţii de aceeaşi formă cu (32), cu singura deosebire că $r$ din expresia $f_{1m}$ se înlocueşte prin $\frac{l}{2}$. Ecuaţia cu diferenţe (33) capătă o formă deosebită:

$$\begin{aligned} &-\frac{\alpha^2}{16}\beta_m A_{m,n+4}(B_{m,n+4}) - \frac{\alpha}{4}\beta_m A_{m,n+3}(B_{m,n+3}) - \frac{1}{4}\Big[\beta_m + \alpha^2(n+ \\ &\qquad + \varkappa)(n+\varkappa-3+q)\Big] A_{m,n+2}(B_{m,n+2}) + \\ &+ \alpha\left[\frac{\beta_m}{4} - n^2 - \left(\varkappa - \frac{3-q}{2}\right)n + \frac{\varkappa}{2}\right] A_{m,n+1}(B_{m,n+1}) + \\ &+ \left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha^2}{4}\right)\beta_m - \left(1+\frac{\alpha^2}{2}\right)n^2 + \frac{\alpha^2}{2}\varkappa(\varkappa+q-1)\right] A_{mn}(B_{mn}) + \\ &\qquad + \alpha\left[\frac{\beta_m}{4} - n^2 + \left(\varkappa - \frac{3-q}{2}\right)n + \frac{\varkappa}{2}\right] A_{m,n-1}(B_{m,n-1}) \\ &- \frac{1}{4}\Big[\beta_m + \alpha^2(n-\varkappa)(n-\varkappa+3-q)\Big] A_{m,n-2}(B_{m,n-2}) - \\ &\qquad - \frac{\alpha}{4}\beta_m A_{m,n-3}(B_{m,n-3}) - \frac{\alpha^2}{16}\beta_m A_{m,n-4}(B_{m,n-4}) = 0 \end{aligned} \qquad (119)$$

Această ecuaţie de ordinul 8 este mai complicată decât (33).

Soluţia generală va depinde de patru constante arbitrare, deoarece există legăturile suplimentare între coeficienţii

$$\left.\begin{aligned} A_{m,-4} &= -A_{m4} \\ A_{m,-3} &= -A_{m3} \\ A_{m,-2} &= -A_{m2} \\ A_{m,-1} &= -A_{m1} \end{aligned} \quad \text{şi} \quad \begin{aligned} B_{m,-4} &= B_{m4} \\ B_{m,-3} &= B_{m3} \\ B_{m,-2} &= B_{m2} \\ B_{m,-1} &= B_{m1} \end{aligned}\right\} \qquad (120)$$

Înafară de termenii $A_1$ şi $B_0$ care rămân constante arbitrare, celelalte 3 constante pot fi alese astfel ca să se asigure şirului de coeficienţi $A_{mn}$, $B_{mn}$ o descreştere rapidă. Ca şi în cazul palierului cilindric, ecuaţia (119) interesând



numai valori discrete ale lui $n$ ($n$ întreg şi pozitiv) poate fi tratată ca o simplă relaţie de recurenţă pe aceeaşi cale. Sistemele (35) şi (36) vor fi în acest caz:

$$\left.\begin{aligned} &A_0 = 0 \\ &-\frac{\alpha^2}{16}\beta_{mA} A_{m5} - \frac{\alpha}{4}\beta_{mA} A_{m4} - \frac{1}{4}\left[\left(1-\frac{\alpha^2}{4}\right)\beta_{mA} + \alpha^2(1+\varkappa)(\varkappa+ \right. \\ &\left. + q - 2)\right] A_{m3} + \frac{\alpha}{2}(\beta_{mA} + 1 - \varkappa - q)\, A_{m2} + \left\{\frac{1}{4}\left(3+\frac{\alpha^2}{2}\right)\beta_{mA} - \right. \\ &\left. - 1 + \frac{\alpha^2}{2}\left[\varkappa(\varkappa+q-1) - 1 + \frac{1}{2}(1-\varkappa)(4-\varkappa-q)\right]\right\} A_{m1} = 0 \\ &-\frac{\alpha^2}{16}\beta_{mA} A_{m6} - \frac{\alpha}{4}\beta_{mA} A_{m5} - \frac{1}{4}\Big[\beta_{mA} + \alpha^2(2+\varkappa)(\varkappa+q-1)\Big] A_{m4} + \\ &\qquad + \alpha\left(\frac{\beta_{mA}}{4} - 1 - \frac{3}{2}\varkappa - q\right) A_{m3} + \left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{8}\alpha^2\right)\beta_{mA} - 4 + \right. \\ &\left. + \frac{\alpha^2}{2}[\varkappa(\varkappa+q-1) - 4]\right\} A_{m2} + \alpha\left(\frac{\beta_{mA}}{2} + \frac{5}{2}\varkappa + q - 7\right) A_{m1} = 0 \\ &-\frac{\alpha^2}{16}\beta_{mA} A_{m7} - \frac{\alpha}{4}\beta_{mA} A_{m6} - \frac{1}{4}\Big[\beta_{mA} + \alpha^2(3+\varkappa)(\varkappa+q)\Big] A_{m5} + \\ &\qquad + \frac{\alpha}{2}\left(\frac{\beta_{mA}}{2} - 5\varkappa - 3q - 9\right) A_{m4} + \left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha^2}{4}\right)\beta_{mA} - 9 + \right. \\ &\left. + \frac{\alpha^2}{2}\Big[\varkappa(\varkappa+q-1) - 9\Big]\right\} A_{m3} + \frac{\alpha}{2}\left(\frac{\beta_{mA}}{2} + 7\varkappa + 3q - 27\right) A_{m2} - \\ &\qquad - \frac{1}{4}\left[\left(1-\frac{\alpha^2}{4}\right)\beta_{mA} + \alpha^2(3-\varkappa)(6-\varkappa-q)\right] A_{m1} = 0 \\ &-\frac{\alpha^2}{16}\beta_{mA} A_{m8} - \frac{\alpha}{4}\beta_{mA} A_{m7} - \frac{1}{4}\Big[\beta_{mA} + \alpha^2(4+\varkappa)(\varkappa+q+1)\Big] A_{m6} + \\ &\qquad + \alpha\left(\frac{\beta_{mA}}{4} - \frac{7}{2}\varkappa - 2q - 10\right) A_{m5} + \left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha^2}{4}\right)\beta_{mA} - 16 + \right. \\ &\left. + \frac{\alpha^2}{2}\Big[\varkappa(\varkappa+q-1) - 16\Big]\right\} A_{m4} + \alpha\left(\frac{\beta_{mA}}{4} + \frac{9}{2}\varkappa + 2q - 22\right) A_{m3} - \\ &\qquad - \frac{1}{4}\Big[\beta_{mA} + \alpha^2(4-\varkappa)(7-\varkappa-q)\Big] A_{m2} - \frac{\alpha}{4}\beta_{mA} A_{m1} = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \qquad (121)$$

Tipei, N. 7342 Gross, W
O metoda generala pentru studiul miscarii in pelicula de...
Studii si cercetari de mecanica si metalurgie, Tom II, 1951, pp.1-58



şi

$$
\left.\begin{aligned}
&-\frac{\alpha^2}{8}\beta_{mB}B_{m4}-\frac{\alpha}{2}\beta_{mB}B_{m3}-\frac{1}{2}[\beta_{mB}+\alpha^2\varkappa(\varkappa+q-3)]B_{m2}+\\
&\quad+\alpha\left(\frac{\beta_{mB}}{2}+\varkappa\right)B_{m1}+\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{\alpha^2}{4}\right)\beta_{mB}+\alpha^2\varkappa(\varkappa+q-1)\right]B_{m0}=0\\
&-\frac{\alpha^2}{16}\beta_{mB}B_{m5}-\frac{\alpha}{4}\beta_{mB}B_{m4}-\frac{1}{4}\left[\left(1+\frac{\alpha^2}{4}\right)\beta_{mB}+\alpha^2(1+\varkappa)(\varkappa+\right.\\
&\quad\left.+q-2)\right]B_{m3}+\frac{1}{2}(1-\varkappa-q)B_{m2}+\left\{\frac{1}{4}\left(1+\frac{\alpha^2}{2}\right)\beta_{mB}-1+\right.\\
&\quad\left.+\frac{\alpha^2}{2}\left[\varkappa(\varkappa+q-1)-1-\frac{1}{2}(1-\varkappa)(4-\varkappa-q)\right]\right\}B_{m1}+\\
&\quad+\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\beta_{mB}}{2}+3\varkappa+q-5\right)B_{m0}=0\\
&-\frac{\alpha^2}{16}\beta_{mB}B_{m6}-\frac{\alpha}{4}\beta_{mB}B_{m5}-\frac{1}{4}[\beta_{mB}+\alpha^2(2+\varkappa)(\varkappa+q-1)]B_{m4}+\\
&\quad+\alpha\left(\frac{\beta_{mB}}{4}-\frac{3}{2}\varkappa-q-1\right)B_{m3}+\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha^2}{8}\right)\beta_{mB}-4+\right.\\
&\quad\left.+\frac{\alpha^2}{2}[\varkappa(\varkappa+q-1)-4]\right\}B_{m2}+\alpha\left(\frac{5}{2}\varkappa+q-7\right)B_{m1}-\frac{1}{4}[\beta_{mB}+\\
&\quad+\alpha^2(2-\varkappa)(5-\varkappa-q)]B_{m0}=0\\
&-\frac{\alpha^2}{16}\beta_{mB}B_{m7}-\frac{\alpha}{4}\beta_{mB}B_{m6}-\frac{1}{4}[\beta_{mB}+\alpha^2(3+\varkappa)(\varkappa+q)]B_{m5}+\\
&\quad+\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\beta_{mB}}{2}-5\varkappa-3q-9\right)B_{m4}+\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha^2}{4}\right)\beta_{mB}-9+\right.\\
&\quad\left.+\frac{\alpha^2}{2}[\varkappa(\varkappa+q-1)-9]\right\}B_{m3}+\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\beta_{mB}}{2}+7\varkappa+3q-27\right)B_{m2}-\\
&\quad-\frac{1}{4}\left[\left(1+\frac{\alpha^2}{4}\right)\beta_{mB}+\alpha^2(3-\varkappa)(6-\varkappa-q)\right]B_{m1}-\frac{\alpha}{4}\beta_{mB}B_{m0}=0\\
&-\frac{\alpha^2}{16}\beta_{mB}B_{m8}-\frac{\alpha}{4}\beta_{mB}B_{m7}-\frac{1}{4}[\beta_{mB}+\alpha^2(4+\varkappa)(\varkappa+q+1)]B_{m6}+\\
&\quad+\alpha\left(\frac{\beta_{mB}}{4}-\frac{7}{2}\varkappa-2q-10\right)B_{m5}+\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha^2}{4}\right)\beta_{mB}-16+\right.\\
&\quad\left.+\frac{\alpha^2}{2}[\varkappa(\varkappa+q-1)-16]\right\}B_{m4}+\alpha\left(\frac{\beta_{mB}}{4}+\frac{9}{2}\varkappa+2q-22\right)B_{m3}-\\
&\quad-\frac{1}{4}[\beta_{mB}+\alpha^2(4-\varkappa)(7-\varkappa-q)]B_{m2}-\frac{\alpha}{4}\beta_{mB}B_{m1}-\\
&\quad-\frac{\alpha^2}{16}\beta_{mB}B_{m0}=0\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\quad(122)
$$



Ecuaţiile (121) şi (122) pot fi soluţionate pe calea indicată la palierul cilindric, neglijând în ecuaţia de ordinul $i$ ($i = n$) termenii $A_{i+1} \ldots A_{i+4}$, $B_{i+1} \ldots B_{i+4}$ în cazul când se consideră $\beta_m$ necunoscut, sau numai 3 termeni $A_{i+2} \ldots A_{i+4}$, respectiv $B_{i+2} \ldots B_{i+4}$ dacă se dau valorile lui $\beta_m$. Rezolvând primele $i + 1$ ecuaţiuni în raport cu $A_1 \ldots A_i$ sau $B_0 \ldots B_i$ se găsesc valorile acestor coeficienţi, faţă de care următorii sunt neglijabili.

Când $n \to \infty$, relaţia (119) se reduce la expresia găsită (37), iar coeficienţii de ordin superior satisfac şi pentru suprafeţele plane egalităţile (40), formând un şir absolut convergent.

Se remarcă apoi că la patină-glisieră, condiţiunile la limită sunt mai simple decât la palierul cilindric, deoarece relaţiile (71) sunt riguros exacte.

Valoarea lui $p_\infty$ se deduce de asemenea din (25), ($p_a = p_b$).

$$
\begin{aligned}
p_\infty = p_0 + \frac{6\mu_1 V}{\delta_1^q}\int\Bigg[&\frac{1}{\Delta^{2-q}(1+\alpha\cos\theta)^{2-q}}+\\
&+\frac{C_1}{\Delta^{3-q}(1+\alpha\cos\theta)^{3-q}}\Bigg]\frac{l}{2}\sin\theta\, d\theta
\end{aligned}
\tag{123}
$$

Efectuând calculele se găseşte

$$
\begin{aligned}
p_\infty = p_0 + \frac{3\mu_1 Vl}{\alpha(1+\alpha)^q\Delta^2}\cdot\frac{1}{(1+\alpha\cos\theta)^{1-q}}\Bigg[&\frac{1}{1-q}+\\
&+\frac{C_1}{(2-q)\Delta}\cdot\frac{1}{1+\alpha\cos\theta}\Bigg]_0^\theta
\end{aligned}
\tag{124}
$$

şi ţinând seama de condiţiile (71) şi de (8)

$$
\begin{aligned}
C_1 &= -\frac{2-q}{1-q}(1-\alpha)\Delta\frac{1-\left(\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{1-q}}{1-\left(\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{2-q}} = -\\
&-\frac{2-q}{1-q}(1-\alpha)\Delta\frac{1-\dfrac{\mu_1}{\mu_2}\cdot\dfrac{\delta_2}{\delta_1}}{1-\dfrac{\mu_1}{\mu_2}\cdot\left(\dfrac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2}
\end{aligned}
\tag{125}
$$

Rezultă astfel formula generală a presiunilor în palierul de alungire infinită.

$$
\begin{aligned}
p_\infty = p_0 + \frac{3\mu_1 Vl}{\alpha(1+\alpha)^q(1-q)\Delta^2}\Bigg\{&\frac{1}{(1+\alpha\cos\theta)^{1-q}}\Bigg[1-\frac{1-\left(\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{1-q}}{1-\left(\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{2-q}}\cdot\\
&\cdot\frac{1-\alpha}{1+\alpha\cos\theta}\Bigg]-\frac{1}{(1+\alpha)^{1-q}}\cdot\frac{1-\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}}{1-\left(\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{2-q}}\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{126}
$$

Tipei, N. 7342 Gross, W
O metoda ... ...tru studiul miscarii ... pelicula de...
Studi... ...talurgie, Tom II, 1951, pp.1-58



Pentru $q = 1$, $p_\infty$ este nedeterminat. In acest caz, integrala (123) se efectuează direct

$$p_\infty = p_0 + \frac{3\,\mu_1 Vl}{\alpha(1+\alpha)\Delta^2}\left[\mathrm{Log}\,\frac{1-\alpha}{1+\alpha\cos\theta} + \frac{1+\alpha}{2}\left(\mathrm{Log}\,\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)\cdot\frac{1+\cos\theta}{1+\alpha\cos\theta}\right] \quad (127)$$

iar în cazul $q = 0$ (126) se reduce la o formă foarte simplă

$$p_\infty = p_0 + \frac{3\,\mu_1 Vl\alpha}{2\,\Delta^2}\cdot\frac{\sin^2\theta}{(1+\alpha\cos\theta)^2} \quad (128)$$

Plecând dela ecuaţiile (126), (127) sau (128) se găsesc apoi, direct din (128) sau desvoltând în serie (126) sau (127), coeficienţii $a_n$ şi $b_n$ cu ajutorul cărora se formează sistemul de ecuaţii (54), (55). Din acest sistem se deduc în cele din urmă constantele $a_{1m}$, $b_{0m}$ cu care se formează soluţia exactă (42) sau aproximativă (67).

Ca şi la palierul cilindric, formula (126) poate fi pusă sub o formă mai simplă dacă se scrie desvoltarea:

$$\frac{1}{(1+\alpha\cos\theta)^{1-q}} = \frac{1}{1+\alpha\cos\theta}\left[1 + q\alpha\cos\theta + \frac{q(q-1)}{2!}\alpha^2\cos^2\theta + \ldots\right] \cong$$

$$\cong \frac{1 + q\alpha\cos\theta + \frac{q(q-1)}{2}\alpha^2\cos^2\theta}{1+\alpha\cos\theta} \quad (129)$$

cu ajutorul căreia se deduce din (124)

$$p_\infty = p_0 + \frac{3\,\mu_1 Vl}{\alpha(1+\alpha)^q\,\Delta^2}\left[\frac{1 + q\alpha\cos\theta\left(1 + \frac{q-1}{2}\alpha\cos\theta\right)}{1+\alpha\cos\theta}\left(1 - \frac{K_1}{1+\alpha\cos\theta}\right) - K_2\right] \quad (130)$$

unde

$$K_1 = (1-\alpha^2)\frac{1 - q\left[1 + \frac{\alpha^2}{2}(1-q)\right]}{2\left[1 - \frac{\alpha^2}{2}q(q-1)\right] - q(1+\alpha^2)};$$

$$K_2 = \frac{1 + q\alpha\left(1 + \frac{q-1}{2}\alpha\right)}{1+\alpha}\left(1 - \frac{K_1}{1+\alpha}\right) \quad (131)$$

Se poate pune astfel expresia lui $p_\infty$ sub forma

$$p_\infty = p_0 + \frac{b_0 + b_1\cos\theta + b_2\cos 2\theta + b_3\cos 3\theta}{(1+\alpha\cos\theta)^2} \quad (132)$$



unde

$$\left.\begin{aligned}
b_0 &= \left[1 - K_1 - K_2 + \alpha^2\frac{q\left[1 + (1-K_1)\frac{q-1}{2}\right] - K_2}{2}\right]\frac{3\,\mu_1 Vl}{\alpha(1+\alpha)^q\Delta^2}\\
b_1 &= \left[1 + q(1-K_1) - 2K_2 + \frac{3}{8}\alpha^2 q(q-1)\right]\frac{3\mu_1 Vl}{(1+\alpha)^q\Delta^2}\\
b_2 &= \alpha\frac{q\left[1 + (1-K_1)\frac{q-1}{2}\right] - K_2}{2}\cdot\frac{3\mu_1 Vl}{(1+\alpha)^q\Delta^2}\\
b_3 &= q(q-1)\cdot\frac{3\alpha^2\mu_1 Vl}{8(1+\alpha)^q\Delta^2}
\end{aligned}\right\} \quad (133)$$

$$b_4 = b_5 = \ldots = b_n = \ldots = 0;\ a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \ldots = 0$$

Formula (132) nu dă erori mai mari de 15% faţă de aceea exactă (126), în schimb permite calculul rapid al coeficienţilor $b_n$ (133). Se remarcă de asemenea că şi la palierul plan, exponentul $\varkappa$ din (42) şi (67) este $\varkappa = 2$. Spre deosebire de palierul cilindric unde termenii $b_n$ sunt neglijabili (cu excepţia lui $b_0$), pentru patină-glisieră $p_\infty$ nu conţine decât termeni în cos $n\theta$.

Se observă pentru palierul plan o analogie completă în ceea ce priveşte tratarea problemei şi forma rezultatelor cu cazul palierului cilindric; suprafeţele plane constituesc astfel numai o soluţie particulară a relaţiilor generale (42) şi (67).

De asemenea, dacă în formula (19) se consideră expresia mai completă a lui $p_\infty$ ţinând seama şi de forţele de inerţie, se obţine cu ajutorul expresiei (24) formula generală aproximativă şi pentru mişcările nepermanente, neglijându-se forţele de inerţie numai în ecuaţia (11).

Relaţiile (133) pentru palierul plan arată că, în cazul când se admite expresia (130) a lui $p_\infty$, (54) este un sistem omogen de ecuaţii în raport cu necunoscutele $A_{11}, A_{21}, \ldots A_{m1} \ldots$ Cum determinantul acestui sistem nu este zero, necunoscutele sunt toate nule deci şi soluţiile complete (42), (62), (67), pentru palierul finit nu vor conţine termeni în sin $n\theta$.

Dimpotrivă, s'a văzut că la palierul circular nu apar termenii în cos $n\theta$, dacă se admit condiţiunile la limită simplificate (71), pentru aceeaşi cauză.

## ОБЩИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ПЛЕНКЕ СМАЗЫВАЮЩЕГО ВЕЩЕСТВА МЕЖДУ ДВУМЯ ПОВЕРХНОСТЯМИ ФИНИТНЫХ РАЗМЕРОВ

### (КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Скорости и давления в любой точке, расположенной между двумя поверхностями в относительном движении, разделенные слоем смазывающего вещества, подчиняются общим законам гидродинамики. Исходя из

7342 Gross, W
O ... pelicula de...
... II, 1951, pp.1-58



уравнений вязких жидкостей и пренебрегая силами инерции и тяготения, получаем при помощи известных предельных условий

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \quad u=V,\ v=0,\ w=0 \\ v=\delta \quad u=0,\ v=0,\ w=0 \end{array}\right\} \tag{1}$$

уравнение давлений

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\delta^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}\right)=6V\frac{\partial\delta}{\partial x} \tag{2}$$

где ось $Oy$ перпендикулярна подвижной поверхности, движущейся с общей скоростью $V$ относительно неподвижной поверхности, направленной вдоль $Ox$, $\delta$ — толщина пленки смазывающего вещества, $v$ и $w$ — местные скорости вдоль $Oy$ и $Oz$ ($Oz$ перпендикулярна плоскости $xOy$) (рис. 1). Далее автор допускает, что $Ox$ и $Oz$ полностью опираются на подвижную поверхность. Это предположение оправдывается чрезвычайно малыми размерами $\delta$. Наконец, $\mu$ представляет собой вязкость в рассматриваемой точке.

Общее решение уравнения (2) можно получить при помощи решений $p_\infty$ и $p^*$ уравнений

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\delta^3}{\mu}\frac{dp_\infty}{dx}\right)=6V\frac{d\delta}{dx} \tag{3}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta^3}{\mu}\cdot\frac{\partial p^*}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\delta^3}{\mu}\cdot\frac{\partial p^*}{\partial z}\right)=0 \tag{4}$$

Предположим еще вариацию $\mu$

$$\mu=\mu_1\left(\frac{\delta}{\delta_1}\right)^q \tag{5}$$

где $\delta_1$ — наибольшее значение $\delta$, $\mu_1$ — соответствующая вязкость и $q$ — какой-либо параметр. Если ширина соприкасающихся (по $Oz$) поверхностей $b$ постоянна и если $-b_1$, $b_2$ — расстояния от пределов до $Oz$ ($b_1+b_2=b$), $p^*$, то

$$p^*=\sum_{m=1}^{\infty}c_m f_{1m}(x)\cdot \operatorname{ch}\sqrt{\chi_m}\left[z+\frac{1}{2}(b_1-b_2)\right] \tag{6}$$

при $\chi_m$ — произвольной постоянной и $f_{1m}$ — функции только $x$. Другое решение — следующее:

$$p_\infty=\frac{1}{2}(p_a+p_b)+\frac{6\mu_1 V}{\delta_1^q}\int\left(\frac{1}{\delta^{2-q}}+\frac{C_1}{\delta^{3-q}}\right)dx \tag{7}$$

где $p_a$ — давление на границе $z=-b_1$ и $p_b$ при $z=b_2$.

Пусть

$$\left.\begin{array}{l} p_\infty-\frac{1}{2}(p_a+p_b)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \\ f_{1m}(x)=a_{m0}+a_{m1}x+a_{m2}x^2+\ldots\ldots+a_{mn}x^n+\ldots \end{array}\right\} \tag{8}$$



Каждое решение $f_{1m}$ содержит две произвольные постоянные $a_{m0}$ и $a_{m1}$, от которых зависят остальные коэффициенты. Рассматривая эти постоянные как неизвестные, можно составить бесконечную систему линейных уравнений

$$\left.\begin{array}{l} a_0=a_{10}+a_{20}+\ldots\ldots+a_{m0}+\ldots \\ a_1=a_{11}+a_{21}+\ldots\ldots+a_{m1}+\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n=a_{1n}+a_{2n}+\ldots\ldots+a_{mn}+\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{9}$$

позволяющую написать общее решение, в котором

$$c_m=\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{1}{2}\sqrt{\chi_m}\,(b_1+b_2)} \tag{10}$$

$$p=\frac{1}{2}(p_a+p_b)+\frac{p_b-p_a}{b}z+\sum_{m=1}^{\infty}\left[1-\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\chi_m}\left[z+\frac{1}{2}(b_1-b_2)\right]}{\operatorname{ch}\frac{1}{2}\sqrt{\chi_m}\,(b_1+b_2)}\right]f_{1m} \tag{11}$$

или, в более общем виде, если $b_1=b_2$ и $f_{2m}(z)$ является четной функцией переменной $z$:

$$p=\frac{1}{2}(p_a+p_b)+\frac{p_b-p_a}{b}z+\sum_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{f_{2m}(z)}{f_{2m}\left(\frac{b}{2}\right)}\right)f_{1m}(x) \tag{12}$$

Выражения (8) всегда сходятся, и часто бывает выгодно выразить их тригонометрическими рядами, производя изменение переменной.

Формула (12) содержит следующие ограничения.

1. Толщина $\delta$ зависит только от $x$.
2. Скорость $V$ касательна к оси $Ox$ в любой точке.
3. Ширинав в смазанной поверхности постоянна.

### *Круглые подшипники*

Если $\Delta$ — радиальный зазор, $e$ — эксцентричность (рис. 2), $\alpha=\frac{e}{\Delta}$ — относительная эксцентричность, $\theta$ — угол радиуса $AP$ с прямой $AB$, $R$ — радиус подшипника и $r$ — радиус вала, то

$$\Delta=R-r;\ \delta=\Delta(1+\alpha\cos\theta);\ x=r\theta;\ \beta_m=r^2\chi_m \tag{13}$$

и решение $f_{1m}(\theta)$ дано выражением

$$f_{1m}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}(A_{mn}\sin n\theta+B_{mn}\cos n\theta)}{(1+\alpha\cos\theta)^{\varkappa}} \tag{14}$$



Approved For Release 2008/06/27 : CIA-RDP80T00246A005800550002-6

7342 Gross, W
... pelicula de...
... II, 1951, pp.1-58



Коэффициенты $A_{mn}$, $B_{mn}$ определяются общим соотношением

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha^2}{4}[\beta_m-(n+\varkappa+2)(n+\varkappa+q-1)]\,A_{m,n+2}\,(B_{m,n+2})+\\
&+\alpha\left[\beta_m-(n+1)\left(n+\varkappa+\frac{q-1}{2}\right)+\frac{\varkappa}{2}\right]A_{m,n+1}\,(B_{m,n+1})+\\
&+\left[\left(1+\frac{\alpha^2}{2}\right)(\beta_m-n^2)+\frac{\varkappa\alpha^2}{2}(\varkappa+q-1)\right]A_n\,(B_n)+\\
&+\alpha\left[\beta_m-(n-1)\left(n-\varkappa-\frac{q-1}{2}\right)+\frac{\varkappa}{2}\right]A_{m,n-1}\,(B_{m,n-1})+\\
&+\frac{\alpha^2}{4}[\beta_m-(n-\varkappa-2)(n-\varkappa-q+1)]\,A_{m,n-2}\,(B_{m,n-2})=0
\end{aligned}\tag{15}$$

при дополнительных условиях

$$\left.\begin{aligned}
A_{m,-1}&=-A_{m1} \qquad & B_{m,-1}&=B_{m1}\\
A_{m,-2}&=-A_{m2} \qquad & B_{m,-2}&=B_{m2}
\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

Решение (15) содержит две произвольные постоянные, кроме параметра $\beta_m$. Для вычисления коэффициентов $A_{mn}$, $B_{mn}$, последовательно берем $n=0, 1, 2, \ldots, i\ldots$, таким образом получается бесконечная система уравнений, с произвольными постоянными в качестве неизвестных. Если в первых $i+1$ уравнениях пренебречь $A_{m,i+1}, A_{m,i+2}$ и $B_{m,i+1}, B_{m,i+2}$, то эти уравнения составят однородную систему, условия совместимости которой допускают вычисление $\beta_m$. Далее можно получить значения неизвестных $A_{mn}$, $B_{mn}$ в зависимости от $A_{m1}$, $B_{m0}$. Эти значения будут всегда сходящимися; при $n\to\infty$ пределом их соотношения является

$$\frac{A_{m,n+1}}{A_{mn}}=\frac{B_{m,n+1}}{B_{mn}}=-\frac{1}{\alpha}+\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}-1}\tag{17}$$

Если допустить значения $\beta_m$, то пренебрегаем лишь $A_{m,i+2}$, $B_{m,i+2}$ в первых $i+1$ уравнениях, которые можно решить непосредственно; таким образом совершенная погрешность быстро убывает при увеличении $i$; ее можно всегда удержать ниже известного, заранее установленного предела.

*Круглый подшипник бесконечного удлинения.* Уравнение (7) можно интегрировать в общем случае

$$\begin{aligned}
p_\infty=&\frac{1}{2}(p_a+p_b)+\frac{6\mu_1 Vr}{\Delta^2(1+\alpha)^q(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}-q}}\left\{C_2+\left[1+\frac{C_1}{\Delta(1-\alpha^2)}-\right.\right.\\
&\left.-\sum_{n=1}^{\infty}\Xi_{2n}\binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}}\right]\times\arc\sin\frac{\sqrt{1-\alpha^2}\sin\theta}{1+\alpha\cos\theta}-\left[\alpha\left(1-q+\frac{2-q}{1-\alpha^2}\cdot\frac{C_1}{\Delta}\right)+\right.\\
&\left.+\sum_{n=3,5}^{\infty}\Xi_n\frac{1}{2^{n-1}}\binom{n}{\frac{n-1}{2}}\right]\frac{\sqrt{1-\alpha^2}\sin\theta}{1+\alpha\cos\theta}-\\
&-\sum_{\nu=3,5}^{\infty}P_{1\nu}\frac{\sum\limits_{\sigma=1,3}^{\infty}(-1)^{\frac{\sigma-1}{2}}(1-\alpha^2)^{\frac{\sigma}{2}}\binom{\nu}{\sigma}\sin^\sigma\theta\,(\alpha+\cos\theta)^{\nu-\sigma}}{(1+\alpha\cos\theta)^\nu}-\\
&\left.-\sum_{\nu=1}^{\infty}P_{2\nu}\frac{\sum\limits_{\sigma=1,3}^{\infty}(-1)^{\frac{\sigma-1}{2}}(1-\alpha^2)^{\frac{\sigma}{2}}\binom{2\nu}{\sigma}\sin^\sigma\theta\,(\alpha+\cos\theta)^{2\nu-\sigma}}{(1+\alpha\cos\theta)^{2\nu}}\right\}=\\
&=\frac{1}{2}(p_a+p_b)+\frac{b_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\sin n\theta+b_n\cos n\theta}{(1+\alpha\cos\theta)^{\varkappa_A}}
\end{aligned}\tag{18}$$



где

$$P_{1\nu}=\frac{1}{\nu}\sum_{n=3,5}^{\infty}\Xi_n\frac{1}{2^{n-1}}\binom{n}{\frac{n-\nu}{2}};\; P_{2\nu}=\frac{1}{2\nu}\sum_{n=1}^{\infty}\Xi_{2n}\frac{1}{2^{2n-1}}\binom{2n}{n-\nu}\ \text{и}$$

$$\Xi_n=-\frac{(q-1)\,q\,(q+1)\ldots(q+n-3)}{(n-1)!}\alpha^n\left[\left(1+\frac{C_1}{\Delta(1-\alpha^2)}\right)\frac{q+n-2}{n}-\frac{C_1}{\Delta(1-\alpha^2)}\right]\tag{19}$$

Замечая, что $\Xi_n$ быстро убывает при $n>2$, можно упростить (18)

$$\begin{aligned}
p_\infty=&\frac{1}{2}(p_a+p_b)+\frac{6\mu_1 Vr}{\Delta^2(1+\alpha)^q(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}-q}}\left\{C_2+\left[1+\frac{C_1}{\Delta(1-\alpha^2)}-\frac{1}{2}\Xi_2\right]\times\right.\\
&\times\arc\sin\frac{\sqrt{1-\alpha^2}\sin\theta}{1+\alpha\cos\theta}-\alpha\sqrt{1-\alpha^2}\left(1-q+\frac{2-q}{1-\alpha^2}\cdot\frac{C_1}{\Delta}\right)\frac{\sin\theta}{1+\alpha\cos\theta}-\\
&\left.-\frac{1}{2}\Xi_2\sqrt{1-\alpha^2}\frac{\sin\theta(\alpha+\cos\theta)}{(1+\alpha\cos\theta)^2}\right\}
\end{aligned}\tag{20}$$

Таким образом, система (9) разлагается на две самостоятельные группы

$$a_n=\sum_{m=1}^{\infty}A_{mn}\quad \text{и}\quad b_n=\sum_{m=1}^{\infty}B_{mn}\tag{21}$$

которые полностью разрешают задачу. Далее, замечаем, что при $0{,}9<\beta_m<7{,}5$ можно допустить соотношение (рис. 3 и 4)

$$1-\frac{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\beta_m}\,z}{r}}{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\beta_m}\,b}{2r}}\cong\frac{1-\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\beta_m}\,b}{2r}}}{1-\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\beta_1}\,b}{2r}}}\left(1-\frac{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\beta_1}\,z}{r}}{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\beta_1}\,b}{2r}}\right)\tag{22}$$

i, N. 7342 Gross, V
...pelicula de...
1951, pp.1-58



тогда общее решение

$$p=\frac{1}{2}(p_a+p_b)+\frac{p_b-p_a}{b}z+$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{\mathrm{ch}\frac{\sqrt{\beta_m}}{r}z}{\mathrm{ch}\frac{\sqrt{\beta_m}b}{2r}}\right)\left[\frac{A_{mn}\sin n\theta}{(1+\alpha\cos\theta)^{\varkappa_A}}+\frac{B_{mn}\cos n\theta}{(1+\alpha\cos\theta)^{\varkappa_B}}\right] \tag{23}$$

становится при $\varkappa_A=\varkappa_B=\varkappa$, $\lambda=\frac{b}{2r}$

$$p=\frac{1}{2}(p_a+p_b)+\frac{p_b-p_a}{b}z+\frac{1-\frac{ch\frac{\sqrt{\beta_{1A}}}{r}z}{ch\lambda\sqrt{\beta_{1A}}}}{(1+\alpha\cos\theta)^{\varkappa}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(k_{mA}A_{mn}\sin n\theta+$$
$$+k\,k_{mB}B_{mn}\cos n\theta) \tag{24}$$

где

$$k_{mA}=\frac{1-\frac{1}{\mathrm{ch}\lambda\sqrt{\beta_{mA}}}}{1-\frac{1}{\mathrm{ch}\lambda\sqrt{\beta_{1A}}}};\ k_{mB}=\frac{1-\frac{1}{\mathrm{ch}\lambda\sqrt{\beta_{mB}}}}{1-\frac{1}{\mathrm{ch}\lambda\sqrt{\beta_{1B}}}};\ k=\frac{1-\frac{1}{\mathrm{ch}\lambda\sqrt{\beta_{1B}}}}{1-\frac{1}{\mathrm{ch}\lambda\sqrt{\beta_{1A}}}} \tag{25}$$

где $\beta_{1A}$, $\beta_{1B}$ близкие к единице корни уравнения в $\beta_m$, выведенного из условия совместимости системы, составленной при помощи уравнения (15).

*Предельные условия.* Решения (23) и (24) содержат две произвольные постоянные $C_1$ и $C_2$, от которых зависит $p_\infty$ (18). В основном, можно определить эти постоянные, если известны давления в двух точках $\theta_1$, $z_1$, и $\theta_2$, $z_2$. Обычно допускается (рис. 6)

$$\left.\begin{array}{l} p=\frac{1}{2}(p_a+p_b)=p_0 \text{ при } \theta_1=0 \text{ и } z=0 \\ \frac{\partial p}{\partial\theta}=0,\ p=p_0 \text{ при значениях } z=0 \text{ и } \theta \text{ произвольной.} \end{array}\right\} \tag{26}$$

Для подшипника с частичной подушечкой, если $\Theta$ полный угол подушечки, а $p_i$ давление подходящего масла, соответствующее данному расположению $\vartheta$, имеем (рис. 6)

$$\left.\begin{array}{l} p=p_i \text{ при } \theta=\vartheta \\ p=p_0 \text{ при } \theta=\theta_1 \text{ и } \theta=\theta_2 \\ \theta_2<\Theta+\theta_1 \end{array}\right\} \tag{27}$$



Для подшипника с полной подушечкой эти условия обычно заменяются более простыми соотношениями

$$p=p_0 \text{ при } \theta_1=0 \text{ и } \theta_2=\pi \tag{28}$$

Положим $p=p_0$ в области, где, согласно предыдущим формулам, $p=p_0$ отрицательна; действительное явление несовместимо с этими отрицательными значениями.

*Вариация вязкости.* Для оценки влияния $q$, на основании (18), нанесены кривые

$$Cp_\infty=\frac{(p_\infty-p_0)\,\psi}{\mu_1\,\omega} \tag{29}$$

где $\psi=\frac{\Delta}{r}$ и $\omega$ скорость вращения вала, при $\alpha=0{,}7$, $q=1$ и $q=0$. Для последнего значения ($q=0$) следует допустить среднее $\mu=\mu_m$, вычисленное на основании экспериментальных кривых вязкость — температура с учетом температуры масла при поступлении в подшипник и выходе из него. Наконец, $\mu_m$ рассматривалась последовательно как средняя величина крайних значений вязкости ($\mu_{m\,\mathrm{II}}$) или вязкость, соответствующая средней температуре подшипника ($\mu_{m\,\mathrm{III}}$). Три, таким образом, нанесенные кривые обладают значительными расхождениями, выявляя (рис. 7) как влияние $q$, так и значение выбора $\mu_m$. Однако, коэффициент несущей силы

$$\zeta_\infty=\frac{1}{2}\sqrt{I_\infty^2+J_\infty^2};\ I_\infty=\int_0^\pi Cp_\infty\sin\theta\,d\theta;\ J_\infty=\int_0^\pi Cp_\infty\cos\theta\,d\theta \tag{30}$$

не представляет значительных различий в этих трех случаях. Последовательно находим $\zeta_{\infty\mathrm{I}}=3{,}175$ ($q=1$), $\zeta_{\infty\mathrm{II}}=3{,}72$ ($q=0$, $\mu=\mu_{m\,\mathrm{II}}$) и $\zeta_{\infty\,\mathrm{III}}=2{,}495$ ($q=0$, $\mu=\mu_{m\,\mathrm{III}}$). Эти значения показывают, что можно положить $q=1$ для упрощения вычисления и во избежание трудности оценки параметра $q$, зависящего не только от физических характеристик масла, но и от термических условий работы и давлений, достигнутых в отдельных точках.

*Числовые примеры.* Положив $q=1$, $\varkappa=2$, автор применил предыдущие формулы к трем значениям эксцентричности $\alpha=0{,}4$, $\alpha=0{,}6$ и $\alpha=0{,}9$ при предельных условиях (28).

При $\alpha=0{,}4$, положив $i=3$, он находит условие совместимости системы уравнений, составленной из (15):

$$\beta_{1A}=1{,}028;\ \beta_{2A}=4{,}104 \text{ и } \beta_{3A}=8{,}028 \tag{31}$$

При помощи первых двух значений получаются решения $f_{11}$ и $f_{12}$, коэффициенты которых следующие:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{A_{12}}{A_{11}}=0{,}2665;\ \frac{A_{13}}{A_{11}}=0{,}01015;\ \frac{A_{14}}{A_{11}}=-0{,}000343;\ \frac{A_{15}}{A_{11}}=0{,}0000234; \\ \frac{A_{16}}{A_{11}}=-0{,}00000192; \\ \frac{A_{22}}{A_{21}}=7{,}74;\ \frac{A_{23}}{A_{21}}=1{,}975;\ \frac{A_{24}}{A_{21}}=0{,}0467;\ \frac{A_{25}}{A_{21}}=-0{,}00221;\ \frac{A_{26}}{A_{21}}=0{,}0001725 \end{array}\right\} \tag{32}$$

, N. ...pelicula de...
1951, pp.1-58



Эти коэффициенты позволяют установить затем общее решение (24). Система (21) сводится к двум уравнениям, дающим $A_{11}$ и $A_{21}$. Составляя затем $a_3$, $a_4$..., находим соответствующие практически нулевые значения относительно $a_1$ и $a_2$, согласно формуле (18).

Аналогичные результаты получаются при $\alpha = 0{,}9$ и $\alpha = 0{,}6$, при значениях $i$, соответственно $i = 6$ и $i = 4$. Рассматривая, начиная с члена $a_7$ мажорантный ряд $p_\infty$

$$s = a\sum_{1}^{\infty} \rho^{n-1} \sin n\theta \tag{33}$$

находим, что максимальная погрешность, совершенная при использовании только двух решений $f_{11}$ и $f_{12}$ для составления общего интеграла (23) и (24) и пренебрежении членами высшего порядка $(n > 3)$, не превосходит 3% первого коэффициента $a_1$; следовательно, она вполне допустима, даже в самом неблагоприятном случае, то есть при $\alpha = 0{,}9$.

Легко вывести, что $\beta_{1A}$, $\frac{A_{12}}{A_{11}}$ и $\frac{A_{22}}{A_{21}}$ обладают линейной вариацией относительно эксцентричности (рис. 8 и 9); то есть:

$$\left.\begin{aligned} &\beta_{1A} = 0{,}9312 + 0{,}242\,\alpha \\ &\frac{A_{12}}{A_{11}} = 0{,}0157 + 0{,}627\,\alpha \qquad \frac{A_{21}}{A_{11}} = -\frac{0{,}0157 + 0{,}127\,\alpha}{11{,}34 - 10{,}10\,\alpha} \\ &\frac{A_{22}}{A_{21}} = 11{,}34 - 9{,}6\,\alpha \end{aligned}\right| \tag{34}$$

что позволяет установить простую формулу для подшипника конечного удлинения $\lambda$ и с полной подушечкой:

$$\begin{aligned} p = p_0 + \frac{6\mu_1 Vr}{\Delta^2}\cdot\frac{\alpha}{1+\alpha}\left(1 - \frac{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\beta_{1A}}\,z}{r}}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\beta_{1A}}}\right)\times \\ \times\left\{1 + \left[0{,}0314 + 1{,}254\,\alpha + k_{2A}\,(22{,}68 - 19{,}2\,\alpha)\frac{A_{21}}{A_{11}}\right]\cos\theta\right\}\frac{\sin\theta}{(1+\alpha\cos\theta)^2} \end{aligned} \tag{35}$$

где

$$k_{2A} = \frac{1 - \frac{1}{\operatorname{ch} 2\lambda}}{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\lambda}}\,. \tag{36}$$

*Плоские поверхности.* Задачу можно решить аналогичным путем, применяя общий метод. Таким образом, больше не приходится рассматривать отдельно этот случай, как это обычно делают. Положим (рис. 10)

$$\left.\begin{aligned} &x = \frac{l}{2}(1 - \cos\theta);\ \alpha = \frac{\delta_1 - \delta_2}{\delta_1 + \delta_2};\ \Delta = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2};\ \delta = \Delta(1 + \alpha\cos\theta) \\ &\chi_m = \frac{4}{l^2}\beta_m \end{aligned}\right\} \tag{37}$$



уравнение с разностями (15) становится:

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{\alpha^2}{16}\beta_m A_{m,n+4}(B_{m,n+4}) - \frac{\alpha}{4}\beta_m A_{m,n+3}(B_{m,n+3}) - \\ &\quad -\frac{1}{4}[\beta_m + \alpha^2(n+\varkappa)(n+\varkappa-3+q)]\times \\ &\times A_{m,n+2}(B_{m,n+2}) + \alpha\left[\frac{\beta_m}{4} - n^2 - \left(\varkappa - \frac{3-q}{2}\right)n + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varkappa}{2}\right]A_{m,n+1}(B_{m,n+1}) + \left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\alpha^2}{4}\right)\beta_m - \left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right)n^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha^2}{2}\varkappa(\varkappa + q - 1)\right]A_{mn}(B_{mn}) + \alpha\left[\frac{\beta_m}{4} - n^2 + \left(\varkappa - \frac{3-q}{2}\right)n + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varkappa}{2}\right]A_{m,n-1}(B_{m,n-1}) - \\ &\quad -\frac{1}{4}[\beta_m + \alpha^2(n-\varkappa)(n-\varkappa+3-q)]A_{m,n-2}(B_{m,n-2}) - \\ &\quad -\frac{\alpha}{4}\beta_m A_{m,n-3}(B_{m,n-3}) - \frac{\alpha^2}{16}\beta_m A_{m,n-4}(B_{m,n-4}) \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

при дополнительных условиях

$$A_{m,-n} = -A_{mn} \text{ и } B_{m,-n} = B_{mn} \tag{39}$$

При $n \to \infty$ выражение (17) остается действительным.

Система линейных уравнений, выведенных из (38), решается, как это было показано в случае системы производной от (15), с той лишь разницей, что (38) зависит от четырех произвольных постоянных; три из них можно выбрать так, чтобы получить наибольшую сходимость членов $A_{mn}$, $B_{mn}$. Практически, решение содержит $A_{m1}$ или $B_{mo}$ в качестве произвольных постоянных; пренебрегаем членами $A_{m,i+1}, \dots A_{m,i+4}$ или $B_{m,i+1}, \dots B_{m,i+4}$ в уравнении порядка $i+1$, если $\beta_m$ рассматривается как неизвестное и $i$ как достаточно большое, соответственно $A_{m,i+2}(B_{m,i+2}) \dots \dots A_{m,i+4}(B_{m,i+4})$ при заранее установленном значении $\beta_m$.

Решением $p_\infty$ является

$$\begin{aligned} p_\infty = p_0 + \frac{3\mu_1 Vl}{\alpha(1+\alpha)^q(1-q)\Delta^2}\left\{\frac{1}{(1+\alpha\cos\theta)^{1-q}}\left[1 - \frac{1 - \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{1-q}}{1 - \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{2-q}}\cdot\frac{1-\alpha}{1+\alpha\cos\theta}\right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{(1+\alpha)^{1-q}}\cdot\frac{1 - \frac{1-\alpha}{1+\alpha}}{1 - \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{2-q}}\right\} \end{aligned} \tag{40}$$

7342 Grose,

p.1-58



В частности, при $q = 1$, $p_\infty$ становится

$$p_\infty = p_0 + \frac{3\mu_1 Vl}{\alpha(1+\alpha)\Delta^2}\left[\mathrm{Log}\frac{1-\alpha}{1+\alpha\cos\theta} + \frac{1+\alpha}{2}\left(\mathrm{Log}\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)\frac{1+\cos\theta}{1+\alpha\cos\theta}\right] \tag{41}$$

Как и для цилиндрического подшипника, можно упростить (40), и выразить $p_\infty$ в виде

$$p_\infty = p_0 + \frac{b_0 + b_1\cos\theta + b_2\cos 2\theta + b_3\cos 3\theta}{(1+\alpha\cos\theta)^2} \tag{42}$$

при

$$\left.\begin{aligned}
b_0 &= \left[1 - K_1 - K_2 + \alpha^2\frac{q\left[1+(1-K_1)\frac{q-1}{2}\right]-K_2}{2}\right]\frac{3\mu_1 Vl}{\alpha(1+\alpha)^q\Delta^2}\\
b_1 &= \left[1 + q(1-K_1) - 2K_2 + \frac{3}{8}\alpha^2 q(q-1)\right]\frac{3\mu_1 Vl}{(1+\alpha)^q\Delta^2}\\
b_2 &= \alpha\frac{q\left[1+(1-K_1)\frac{q-1}{2}\right]-K_2}{2}\cdot\frac{3\mu_1 Vl}{(1+\alpha)^q\Delta^2}\\
b_3 &= q(q-1)\frac{3\alpha^2\mu_1 Vl}{8(1+\alpha)^q\Delta^2}\\
b_4 &= b_5 = \cdots = b_n = \cdots = 0;\ a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \cdots = 0\\
K_1 &= (1-\alpha^2)\frac{1-q\left[1+\frac{\alpha^2}{2}(1-q)\right]}{2\left[1-\frac{\alpha^2}{2}q(q-1)\right]-q(1+\alpha^2)};\\
K_2 &= \frac{1+q\alpha\left(1+\frac{q-1}{2}\alpha\right)}{1+\alpha}\left(1-\frac{K_1}{1+\alpha}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Автор находит еще $\varkappa = 2$ и формулы (23), (24) выражают распределение давлений с учетом удлинения $\lambda = \frac{b}{l}$. Отмечаем также, что предельные условия (28) строго применяются в этом случае.

## UNE MÉTHODE GÉNÉRALE POUR L'ÉTUDE DU MOUVEMENT DANS LA PELLICULE DE LUBRIFIANT ENTRE DEUX SURFACES DE DIMENSIONS FINIES

### (RÉSUMÉ)

Les vitesses et les pressions en tout point situé entre deux surfaces en mouvement relatif et séparées par une couche de fluide lubrifiant sont régies par les lois générales de l'hydrodynamique.



En partant des équations des fluides visqueux et négligeant les forces d'inertie et de la gravitation, on obtient avec les conditions à la frontière connues

$$\left.\begin{aligned}
y &= 0 \qquad u = V,\ v = 0,\ w = 0\\
y &= \delta \qquad u = 0,\ v = 0,\ w = 0
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

l'équation des pressions

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\delta^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}\right) = 6V\frac{\partial\delta}{\partial x} \tag{2}$$

où l'axe $Oy$ est normal à la surface mobile animée d'une vitesse totale $V$ par rapport à la surface fixe, dirigée suivant $Ox$, $\delta$ l'épaisseur de la pellicule lubrifiante, $v$ et $w$ les vitesses locales suivant $Oy$ et $Oz$ ($Oz$ perpendiculaire au plan $xy$) (fig. 1). On admet encore que $Ox$ et $Oz$ reposent entièrement sur la surface mobile, hypothèse justifiée par les dimensions extrêmement réduites de $\delta$. Enfin, $\mu$ représente la viscosité en un point considéré.

La solution générale de (2) peut être formée à l'aide des solutions $p_\infty$ et $p^*$ des équations

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\delta^3}{\mu}\frac{dp_\infty}{dx}\right) = 6V\frac{d\delta}{dx} \tag{3}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta^3}{\mu}\cdot\frac{\partial p^*}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\delta^3}{\mu}\cdot\frac{\partial p^*}{\partial z}\right) = 0 \tag{4}$$

Admettons encore une variation de $\mu$

$$\mu = \mu_1\left(\frac{\delta}{\delta_1}\right)^q \tag{5}$$

où $\delta_1$ est la valeur maximum de $\delta$, $\mu_1$ la viscosité correspondante et $q$ un paramètre quelconque. Si la largeur $b$ des surfaces en contact (suivant $Oz$) est constante et si $-b_1$, $b_2$ sont les distances des frontières à $Oz$ ($b_1 + b_2 = b$), $p^*$ est

$$p^* = \sum_{m=1}^{\infty} c_m f_{1m}(x).\mathrm{ch}\sqrt{\gamma_m}\left[z + \frac{1}{2}(b_1 - b_2)\right] \tag{6}$$

$\gamma_m$ étant une constante arbitraire et $f_{1m}$ une fonction de $x$ seulement. L'autre solution sera:

$$p_\infty = \frac{1}{2}(p_a + p_b) + \frac{6\mu_1 V}{\delta_1^q}\int\left(\frac{1}{\delta^{2-q}} + \frac{C_1}{\delta^{3-q}}\right)dx \tag{7}$$

$p_a$ étant la pression sur la frontière $x = -b_1$ et $p_b$ pour $x = b_2$

Soient

$$\left.\begin{aligned} p_\infty - \frac{1}{2}(p_a + p_b) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \\ f_{1m}(x) &= a_{m0} + a_{m1} x + a_{m2} x^2 + \cdots + a_{mn} x^n + \cdots \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Chaque solution $f_{1m}$ comprend deux constantes arbitraires $a_{m0}$, $a_{m1}$, dont dépendent les autres coefficients. En considérant ces constantes inconnues, on peut former le système infini d'équations linéaires:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= a_{10} + a_{20} + \cdots + a_{m0} + \cdots \\ a_1 &= a_{11} + a_{21} + \cdots + a_{m1} + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n &= a_{1n} + a_{2n} + \cdots + a_{mn} + \cdots \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

ce qui permet d'écrire la solution générale avec

$$c_m = \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{1}{2}\sqrt{\chi_m}\,(b_1 + b_2)} \qquad (10)$$

$$p = \frac{1}{2}(p_a + p_b) + \frac{p_b - p_a}{b} z + \sum_{m=1}^{\infty}\left[1 - \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\chi_m}\left[z + \frac{1}{2}(b_1 - b_2)\right]}{\operatorname{ch}\frac{1}{2}\sqrt{\chi_m}\,(b_1 + b_2)}\right] f_{1m} \qquad (11)$$

ou plus généralement si $b_1 = b_2$ et $f_{2m}(z)$ est une fonction paire de la variable $z$

$$p = \frac{1}{2}(p_a + p_b) + \frac{p_b - p_a}{b} z + \sum_{m=1}^{\infty}\left(1 - \frac{f_{2m}(z)}{f_{2m}\left(\frac{b}{2}\right)}\right) f_{1m}(x) \qquad (12)$$

Les expressions (8) sont toujours convergentes et il est souvent avantageux de les exprimer en séries trigonométriques, en effectuant un changement de variable.

La formule (12) comprend les restrictions suivantes:
1. L'épaisseur $\delta$ dépend de $x$ seulement.
2. La vitesse $V$ est tangente à $Ox$ en tout point.
3. La largeur $b$ de la surface lubrifiée est constante.

### *Paliers circulaires*

Si $\Delta$ est le jeu radial, $e$ l'excentricité (fig. 2), $\alpha = \frac{e}{\Delta}$ l'excentricité relative, $\theta$ l'angle du rayon $AP$ avec la droite $AB$, $R$ le rayon du coussinet et $r$ le rayon du tourillon, on a

$$\Delta = R - r \;;\; \delta = \Delta(1 + \alpha\cos\theta) \;;\; x = r\theta \;;\; \beta_m = r^2\chi_m . \qquad (13)$$



et la solution $f_{1m}(\theta)$ est donnée par l'expression

$$f_{1m} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty}(A_{mn}\sin n\theta + B_{mn}\cos n\theta)}{(1 + \alpha\cos\theta)^{\varkappa}} \qquad (14)$$

Les coefficients $A_{mn}$, $B_{mn}$ sont définis par la relation générale

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha^2}{4}[\beta_m - (n + \varkappa + 2)(n + \varkappa + q - 1)]\, A_{m,n+2}(B_{m,n+2}) + \\ &+ \alpha\left[\beta_m - (n+1)\left(n + \varkappa + \frac{q-1}{2}\right) + \frac{\varkappa}{2}\right] A_{m,n+1}(B_{m,n+1}) + \\ &+ \left[\left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right)(\beta_m - n^2) + \frac{\varkappa\alpha^2}{2}(\varkappa + q - 1)\right] A_n(B_n) + \\ &+ \alpha\left[\beta_m - (n-1)\left(n - \varkappa - \frac{q-1}{2}\right) + \frac{\varkappa}{2}\right] A_{m,n-1}(B_{m,n-1}) + \\ &+ \frac{\alpha^2}{4}[\beta_m - (n - \varkappa - 2)(n - \varkappa - q + 1)]\, A_{m,n-2}(B_{m,n-2}) = 0 \end{aligned} \qquad (15)$$

avec les conditions supplémentaires

$$\left.\begin{aligned} A_{m,-1} &= -A_{m1} \qquad & B_{m,-1} &= B_{m1} \\ A_{m,-2} &= -A_{m2} \qquad & B_{m,-2} &= B_{m2} \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

La solution de (15) comprend deux constantes arbitraires, en plus du paramètre $\beta_m$. Pour calculer les coefficients $A_{mn}$, $B_{mn}$, on fait successivement $n = 0, 1, 2, \ldots i \ldots$, obtenant ainsi un système infini d'équations, ayant comme inconnues les constantes arbitraires. Si on néglige dans les premières $i + 1$ équations $A_{m,i+1}$, $A_{m,i+2}$ et $B_{m,i+1}$, $B_{m,i+2}$ ces équations forment un système homogène, dont la condition de compatibilité permet le calcul de $\beta_m$. Ensuite, on peut tirer les valeurs des inconnues $A_{mn}$, $B_{mn}$ en fonction de $A_{m1}$, $B_{m0}$. Ces valeurs sont toujours convergentes, leur rapport ayant pour limite, lorsque $n \to \infty$.

$$\frac{A_{m,n+1}}{A_{mn}} = \frac{B_{m,n+1}}{B_{mn}} = -\frac{1}{\alpha} + \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - 1} \qquad (17)$$

Si on admet les valeurs de $\beta_m$, on néglige seulement $A_{m,i+2}$, $B_{m,i+2}$ dans les premières $i + 1$ équations qu'on peut résoudre directement et l'erreur ainsi commise décroît rapidement lorsque $i$ croît, pouvant être toujours maintenue sous une certaine limite fixée d'avance.

Tipei, N. 7342 Gross, W
O metoda generala pentru studiul miscarii in pelicula de...
Studii ... mecanica si metalurgie, Tom II, 1951, pp.1-58



*Palier circulaire d'allongement infini.* L'équation (7) peut être intégrée dans le cas général

$$p_\infty = \frac{1}{2}(p_a + p_b) + \frac{6\mu_1 Vr}{\Delta^2 (1+\alpha)^q (1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}-q}} \left\{ C_2 + \left[ 1 + \frac{C_1}{\Delta(1-\alpha^2)} - \right.\right.$$

$$\left. - \sum_{n=1}^{\infty} \Xi_{2n} \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} \right] \times \arcsin \frac{\sqrt{1-\alpha^2}\sin\theta}{1+\alpha\cos\theta} - \left[ \alpha \left( 1 - q + \frac{2-q}{1-\alpha^2} \cdot \frac{C_1}{\Delta} \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=3,5}^{\infty} \Xi_n \frac{1}{2^{n-1}} \binom{n}{\frac{n-1}{2}} \right] \frac{\sqrt{1-\alpha^2}\sin\theta}{1+\alpha\cos\theta} -$$

$$- \sum_{\nu=3,5}^{\infty} P_{1\nu} \frac{\sum\limits_{\sigma=1,3}^{\infty} (-1)^{\frac{\sigma-1}{2}} (1-\alpha^2)^{\frac{\sigma}{2}} \binom{\nu}{\sigma} \sin^\sigma\theta \, (\alpha+\cos\theta)^{\nu-\sigma}}{(1+\alpha\cos\theta)^\nu} - \tag{18}$$

$$\left. - \sum_{\nu=1}^{\infty} P_{2\nu} \frac{\sum\limits_{\sigma=1,3}^{\infty} (-1)^{\frac{\sigma-1}{2}} (1-\alpha^2)^{\frac{\sigma}{2}} \binom{2\nu}{\sigma} \sin^\sigma\theta \, (\alpha+\cos\theta)^{2\nu-\sigma}}{(1+\alpha\cos\theta)^{2\nu}} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}(p_a + p_b) + \frac{b_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta}{(1+\alpha\cos\theta)^{\varkappa_A}}$$

où

$$P_{1\nu} = \frac{1}{\nu} \sum_{n=3,5}^{\infty} \Xi_n \frac{1}{2^{n-1}} \binom{n}{\frac{n-\nu}{2}} \; ; \; P_{2\nu} = \frac{1}{2\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \Xi_{2n} \frac{1}{2^{2n-1}} \binom{2n}{n-\nu} \text{ et}$$

$$\Xi_n = - \frac{(q-1)\, q\, (q+1) \cdots (q+n-3)}{(n-1)!} \alpha^n \left[ \left( 1 + \frac{C_1}{\Delta(1-\alpha^2)} \right) \frac{q+n-2}{n} - \frac{C_1}{\Delta(1-\alpha^2)} \right] \tag{19}$$

En remarquant que $\Xi_n$ décroît rapidement pour $n > 2$, (18) peut être simplifiée:

$$p_\infty = \frac{1}{2}(p_a + p_b) + \frac{6\mu_1 Vr}{\Delta^2 (1+\alpha)^q (1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}-q}} \left\{ C_2 + \left[ 1 + \frac{C_1}{\Delta(1-\alpha^2)} - \frac{1}{2}\Xi_2 \right] \times \right.$$

$$\times \arcsin \frac{\sqrt{1-\alpha^2}\sin\theta}{1+\alpha\cos\theta} - \alpha\sqrt{1-\alpha^2} \left( 1 - q + \frac{2-q}{1-\alpha^2} \cdot \frac{C_1}{\Delta} \right) \frac{\sin\theta}{1+\alpha\cos\theta} - \tag{20}$$

$$\left. - \frac{1}{2} \Xi_2 \sqrt{1-\alpha^2} \frac{\sin\theta(\alpha+\cos\theta)}{(1+\alpha\cos\theta)^2} \right\}$$



Le système (9) se décompose ainsi en deux groupes indépendants

$$a_n = \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \quad \text{et} \quad b_n = \sum_{m=1}^{\infty} B_{mn} \tag{21}$$

qui résolvent complètement le problème.

En remarquant ensuite que pour $0{,}9 < \beta_m < 7{,}5$ on peut admettre la relation (fig. 3 et 4)

$$1 - \frac{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\beta_m}}{r} z}{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\beta_m}\, b}{2r}} \cong \frac{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\beta_m}\, b}{2r}}}{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\beta_1}\, b}{2r}}} \left( 1 - \frac{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\beta_1}}{r} z}{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\beta_1}\, b}{2r}} \right) \tag{22}$$

la solution générale

$$p = \frac{1}{2}(p_a + p_b) + \frac{p_b - p_a}{b} z +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\beta_m}}{r} z}{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\beta_m}\, b}{2r}} \right) \left[ \frac{A_{mn}\sin n\theta}{(1+\alpha\cos\theta)^{\varkappa_A}} + \frac{B_{mn}\cos n\theta}{(1+\alpha\cos\theta)^{\varkappa_B}} \right] \tag{23}$$

devient avec $\varkappa_A = \varkappa_B = \varkappa$, $\lambda = \frac{b}{2r}$

$$p = \frac{1}{2}(p_a + p_b) + \frac{p_b - p_a}{b} z +$$

$$+ \frac{1 - \frac{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\beta_{1A}}}{r} z}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\beta_{1A}}}}{(1+\alpha\cos\theta)^\varkappa} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (k_{mA} A_{mn} \sin n\theta + k\, k_{mB} B_{mn} \cos n\theta) \tag{24}$$

avec

$$k_{mA} = \frac{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\beta_{mA}}}}{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\beta_{1A}}}} \; ; \; k_{mB} = \frac{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\beta_{mB}}}}{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\beta_{1B}}}} \; ; \; k = \frac{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\beta_{1B}}}}{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\beta_{1A}}}} \tag{25}$$

$\beta_{1A}$, $\beta_{1B}$ étant les racines voisines à l'unité de l'équation en $\beta_m$, déduite de la condition de compatibilité du système formé à l'aide de l'équation (15).

*Conditions aux limites.* Les solutions (23) ou (24) comprennent deux constantes arbitraires $C_1$ et $C_2$ dont dépend $p_\infty$ (18). En général, ces constantes peuvent

Tipei, N. 7342 Gross, V
O metoda generala pentru studiul miscarii in pelicula de...
Studii si cercetari de mecanica si metalurgie, Tom II, 1951, pp.1-58



être déterminées si l'on connaît les pressions en deux points $\theta_1$, $z_1$ et $\theta_2$, $z_2$ On admet ordinairement (fig. 6)

$$\left.\begin{array}{l} p = \frac{1}{2}(p_a + p_b) = p_0 \text{ pour } \theta_1 = 0 \text{ et } z = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \,,\, p = p_0 \quad \text{pour les valeurs } z = 0 \text{ et } \theta \text{ quelconque.} \end{array}\right\} \qquad (26)$$

Pour le palier à coussinet incomplet, si $\Theta$ est l'angle total du coussinet et $p_i$ la pression d'admission du lubrifiant correspondant à une position $\delta$ donnée, on a (fig. 6)

$$\left.\begin{array}{l} p = p_i \quad \text{pour} \quad \theta = \vartheta \\ p = p_0 \quad \text{pour} \quad \theta = \theta_1 \text{ et } \theta = \theta_2 \\ \quad \theta_2 < \Theta + \theta_1 \end{array}\right\} \qquad (27)$$

Ces conditions sont souvent remplacées pour le palier à coussinet complet par les relations plus simples

$$p = p_0 \quad \text{pour} \quad \theta_1 = 0 \text{ et } \theta_2 = \pi \qquad (28)$$

et on prend $p = p_0$ dans le domaine où d'après les formules précédentes $p - p_0$ résulterait négatif, le phénomène réel étant incompatible avec ces valeurs négatives.

*Variation de la viscosité.* Afin d'évaluer l'influence de $q$ on a tracé d'après (18) les courbes

$$Cp_\infty = \frac{(p_\infty - p_0)\,\psi}{\mu_1\,\omega} \qquad (29)$$

où $\psi = \frac{\Delta}{r}$ et $\omega$ est la vitesse de rotation du tourillon, pour $\alpha = 0{,}7$, $q = 1$ et $q = 0$. A cette dernière valeur ($q = 0$) on doit admettre une moyenne de $\mu = \mu_m$ qui a été calculée d'après les courbes viscosité-température expérimentales, en connaissant les températures de l'huile à l'entrée et à la sortie du palier. Enfin, $\mu_m$ a été considéré successivement la moyenne des valeurs extrêmes de la viscosité ($\mu_{m\,\mathrm{II}}$) ou la viscosité correspondant à la température moyenne du palier ($\mu_{m\,\mathrm{III}}$). Les trois courbes ainsi tracées présentent des écarts appréciables, mettant en évidence (fig. 7) l'influence de $q$ ainsi que l'importance du choix de $\mu_m$. Toutefois, le coefficient total de portance

$$\zeta_\infty = \frac{1}{2}\sqrt{I_\infty^2 + J_\infty^2} \,;\; I_\infty = \int_0^\pi Cp_\infty \sin\theta\, d\theta \,;\; J_\infty = \int_0^\pi Cp_\infty \cos\theta\, d\theta \qquad (30)$$

ne diffère pas d'une manière considérable dans les trois cas.

On trouve successivement $\zeta_{\infty\mathrm{I}} = 3{,}175$ ($q = 1$), $\zeta_{\infty\mathrm{II}} = 3{,}72$ ($q = 0$, $\mu = \mu_{m\,\mathrm{II}}$) et $\zeta_{\infty\mathrm{III}} = 2{,}495$ ($q = 0$, $\mu = \mu_{m\,\mathrm{III}}$). Ces valeurs montrent qu'il est permis de considérer $q = 1$ pour simplifier le calcul et pour éviter la difficulté d'apprécier le paramètre $q$ qui dépend non seulement des caractéristiques physiques de l'huile, mais encore des conditions thermiques de fonctionnement et des pressions atteintes aux divers points.



*Exemples numériques.* On applique les formules précédentes en prenant $q = 1$, $\varkappa = 2$ à trois valeurs de l'excentricité $\alpha = 0{,}4$, $\alpha = 0{,}6$ et $\alpha = 0{,}9$ avec les conditions à la limite (28).

Pour $\alpha = 0{,}4$, admettant $i = 3$, on trouve de la condition de compatibilité du système d'équations formé de (15)

$$\beta_{1A} = 1{,}028;\; \beta_{2A} = 4{,}104 \text{ et } \beta_{3A} = 8{,}028 \qquad (31)$$

Avec les deux premières valeurs, on obtient les solutions $f_{11}$ et $f_{12}$ dont les coefficients sont

$$\left.\begin{array}{l} \frac{A_{12}}{A_{11}} = 0{,}2665;\; \frac{A_{13}}{A_{11}} = 0{,}01015;\; \frac{A_{14}}{A_{11}} = -0{,}000343; \\ \frac{A_{15}}{A_{11}} = 0{,}0000234\,;\; \frac{A_{16}}{A_{11}} = -0{,}00000192 \\ \frac{A_{22}}{A_{21}} = 7{,}74\,;\; \frac{A_{23}}{A_{21}} = 1{,}975;\; \frac{A_{24}}{A_{21}} = 0{,}0467; \\ \frac{A_{25}}{A_{21}} = -0{,}00221\,;\; \frac{A_{26}}{A_{21}} = 0{,}0001725 \end{array}\right\} \qquad (32)$$

Ces coefficients permettent ensuite de former la solution générale (24). Le système (21) se réduit à deux équations qui donnent $A_{11}$ et $A_{21}$. En formant ensuite $a_3$, $a_4 \ldots$, on trouve les valeurs correspondantes pratiquement nulles par rapport à $a_1$ et $a_2$, en accord avec la formule (18).

Des résultats analogues sont obtenus pour $\alpha = 0{,}9$ et $\alpha = 0{,}6$, avec les valeurs de $i$ respectivement $i = 6$ et $i = 4$. En considérant la série majorante de $p_\infty$ à partir du terme $a_7$

$$s = a \sum_1^\infty \rho^{n-1} \sin n\theta \qquad (33)$$

on trouve que l'erreur maximum commise en utilisant deux solutions seulement $f_{11}$ et $f_{12}$ pour former l'intégrale générale (23) et (24) et en négligeant les termes d'ordre supérieur ($n > 3$) ne dépasse pas 3% du premier coefficient $a_1$ donc parfaitement admissible, même dans le cas le plus désavantageux, c'est-à-dire $\alpha = 0{,}9$.

On déduit aisément que $\beta_{1A}$, $\frac{A_{12}}{A_{11}}$ et $\frac{A_{22}}{A_{21}}$ ont une variation linéaire par rapport à l'excentricité (fig. 8 et 9), soit

$$\left.\begin{array}{ll} \beta_{1A} = 0{,}9312 + 0{,}242\,\alpha & \\ \frac{A_{12}}{A_{11}} = 0{,}0157 + 0{,}627\,\alpha & \frac{A_{21}}{A_{11}} = -\frac{0{,}0157 + 0{,}127\,\alpha}{11{,}34 - 10{,}10\,\alpha} \\ \frac{A_{22}}{A_{21}} = 11{,}34 - 9{,}6\,\alpha & \end{array}\right\} \qquad (34)$$

Tipei, N. 7342 Gross, W
O metoda generala pentru studiul miscarii in pelicula de...
Studii si cercetari de mecanica si metalurgie, Tom II, 1951, pp.1-58



ce qui permet d'établir une formule simple pour le palier d'allongement fini $\lambda$ et à coussinet complet:

$$p = p_0 + \frac{6\mu_1 Vr}{\Delta^2}\cdot\frac{\alpha}{1+\alpha}\left(1-\frac{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\beta_{1A}}}{r}x}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\beta_{1A}}}\right)\times\left\{1+\left[0{,}0314+1{,}254\,\alpha+ +k_{2A}(22{,}68-19{,}2\,\alpha)\frac{A_{21}}{A_{11}}\right]\cos\theta\right\}\frac{\sin\theta}{(1+\alpha\cos\theta)^2} \tag{35}$$

où

$$k_{2A} = \frac{1-\frac{1}{\operatorname{ch}2\lambda}}{1-\frac{1}{\operatorname{ch}\lambda}} \tag{36}$$

*Surfaces planes.* Le problème peut être traité d'une manière identique, en appliquant la méthode générale. De ce fait il n'y a plus lieu de considérer ce cas indépendamment, ainsi qu'on l'a souvent fait. Posons (fig. 10)

$$\left.\begin{aligned} &x=\frac{l}{2}(1-\cos\theta)\,;\ \alpha=\frac{\delta_1-\delta_2}{\delta_1+\delta_2}\ ;\ \Delta=\frac{\delta_1+\delta_2}{2}\ ;\ \delta=\Delta(1+\alpha\cos\theta)\\ &\chi_m=\frac{4}{l^2}\beta_m \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

l'équation à différences (15) devient

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{\alpha^2}{16}\beta_m A_{m,n+4}(B_{m,n+4})-\frac{\alpha}{4}\beta_m A_{m,n+3}(B_{m,n+3})-\\ &-\frac{1}{4}[\beta_m+\alpha^2(n+\varkappa)(n+\varkappa-3+q)]\times\\ &\times A_{m,n+2}(B_{m,n+2})+\alpha\left[\frac{\beta_m}{4}-n^2-\left(\varkappa-\frac{3-q}{2}\right)n+\right.\\ &\left.+\frac{\varkappa}{2}\right]A_{m,n+1}(B_{m,n+1})+\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha^2}{4}\right)\beta_m-\left(1+\frac{\alpha^2}{2}\right)n^2+\right.\\ &\left.+\frac{\alpha^2}{2}\varkappa(\varkappa+q-1)\right]A_{mn}(P_{mn})+\alpha\left[\frac{\beta_m}{4}-n^2+\left(\varkappa-\frac{3-q}{2}\right)n+\right.\\ &\left.+\frac{\varkappa}{2}\right]A_{m,n-1}(B_{m,n-1})-\\ &-\frac{1}{4}[\beta_m+\alpha^2(n-\varkappa)(n-\varkappa+3-q)]A_{m,n-2}(B_{m,n-2})-\\ &-\frac{\alpha}{4}\beta_m A_{m,n-3}(P_{m,n-3})-\frac{\alpha^2}{16}\beta_m A_{m,n-4}(B_{m,n-4}) \end{aligned}\right\} \tag{38}$$



avec les conditions supplémentaires

$$A_{m,-n}=-A_{mn}\quad\text{et}\quad B_{m,-n}=B_{mn} \tag{39}$$

Pour $n\to\infty$ l'expression (17) demeure valable.

Le système d'équations linéaires engendrées par (38) se résoud comme il vient d'être indiqué pour celui dérivé de (15), avec la seule différence que (38) dépend de quatre constantes arbitraires dont trois peuvent être choisies afin d'obtenir une convergence maximum des termes $A_{mn}$, $B_{mn}$. Pratiquement la solution comprend $A_{m1}$ ou $B_{m0}$ comme constantes arbitraires et on néglige $A_{m,i+1},\ldots A_{m,i+4}$ ou $B_{m,i+1},\ldots B_{m,i+4}$ dans l'équation d'ordre $i+1$ si $\beta_m$ est considéré inconnu et $i$ suffisamment grand, respectivement $A_{m,i+2}$ $(B_{m,i+2})\ldots A_{m,i+4}$ $(B_{m,i+4})$ si $\beta_m$ a une valeur fixée d'avance.

La solution $p_\infty$ est

$$p_\infty=p_0+\frac{3\mu_1 Vl}{\alpha(1+\alpha)^q(1-q)\Delta^2}\left\{\frac{1}{(1+\alpha\cos\theta)^{1-q}}\left[1-\frac{1-\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{1-q}}{1-\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{2-q}}\cdot\frac{1-\alpha}{1+\alpha\cos\theta}\right]-\frac{1}{(1+\alpha)^{1-q}}\cdot\frac{1-\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}{1-\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{2-q}}\right\} \tag{40}$$

Particulièrement pour $q=1$, $p_\infty$ devient

$$p_\infty=p_0+\frac{3\mu_1 Vl}{\alpha(1+\alpha)\Delta^2}\left[\operatorname{Log}\frac{1-\alpha}{1+\alpha\cos\theta}+\frac{1+\alpha}{2}\left(\operatorname{Log}\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)\frac{1+\cos\theta}{1+\alpha\cos\theta}\right] \tag{41}$$

Tout comme pour le palier cylindrique, on peut simplifier (40) et $p_\infty$ peut être mis sous la forme

$$p_\infty=p_0+\frac{b_0+b_1\cos\theta+b_2\cos2\theta+b_3\cos3\theta}{(1+\alpha\cos\theta)^2} \tag{42}$$

avec

$$\left.\begin{aligned} &b_0=\left[1-K_1-K_2+\alpha^2\frac{q\left[1+(1-K_1)\frac{q-1}{2}\right]-K_2}{2}\right]\frac{3\mu_1 Vl}{\alpha(1+\alpha)^q\Delta^2}\\ &b_1=\left[1+q(1-K_1)-2K_2+\frac{3}{8}\alpha^2q(q-1)\right]\frac{3\mu_1 Vl}{(1+\alpha)^q\Delta^2}\\ &b_2=\alpha\frac{q\left[1+(1-K_1)\frac{q-1}{2}\right]-K_2}{2}\cdot\frac{3\mu_1 Vl}{(1+\alpha)^q\Delta^2}\\ &b_3=q(q-1)\ \frac{3\alpha^2\mu_1 Vl}{8(1+\alpha)^q\Delta^2} \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

6*

Tipei, N. 7342 Grosb, W

O metoda generala pentru studiul miscarii ...

Studii si cercetari de m...



$$b_4 = b_5 = \cdots = b_n = \cdots = 0 \; ; \; a_1' = a_2 = \cdots = a_n = \cdots = 0$$

$$K_1 = (1 - \alpha^2) \frac{1 - q\left[1 + \frac{\alpha^2}{2}(1 - q)\right]}{2\left[1 - \frac{\alpha^2}{2} q(q - 1)\right] - q(1 + \alpha^2)} \; ;$$

$$K_2 = \frac{1 + q\alpha\left(1 + \frac{q - 1}{2}\alpha\right)}{1 + \alpha}\left(1 - \frac{K_1}{1 + \alpha}\right).$$

On trouve encore $\varkappa = 2$ et les formules (23), (24) donnent la répartition des pressions en tenant compte de l'allongement $\lambda = \frac{b}{l}$ · On remarque aussi que les conditions à la limite (28) s'appliquent rigoureusement dans ce cas.

Tipei, N. 7343 Gr

Asupra conditilor la limita in problema lubrificatiei
Studii si cercetari de mecanica aplicata, Tomul VIII, nr. 1, 1957
pp. 1-11.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 1, 1957

*UNGERE — FRECARE — UZURĂ*

# ASUPRA CONDIŢIILOR LA LIMITĂ ÎN PROBLEMA LUBRIFICAŢIEI

DE

N. TIPEI şi AL. NICA

Fixarea condiţiilor la limită şi determinarea începutului şi sfîrşitului zonei de suprapresiuni în stratul lubrifiant condiţionează valabilitatea rezultatelor date de teoria hidrodinamică a ungerii. Cum pe de altă parte este stabilit că această teorie corespunde fenomenelor reale, rezultă că de o justă alegere a condiţiilor amintite va depinde posibilitatea unui calcul pe baze ştiinţifice a ansamblurilor de frecare folosite în construcţia de maşini.

Asupra acestor condiţii la limită există mai multe ipoteze şi anume:

1) Zona de presiuni începe în punctul de grosime $\delta$ maximă a peliculei şi se termină acolo unde $\delta$ este minim. Unghiul său la centru este $\pi$, iar presiunile sînt o funcţie periodică de perioadă $2\pi$.

2) Zona de presiuni începe în punctul unde $\delta = \delta_{max}$ şi se termină acolo unde presiunile au un minimum ($p - p_0 = 0$ pentru $\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$, $\theta$ fiind unghiul de poziţie al unui punct curent cu vîrful în centrul axului).

3) Suprapresiunile $p - p_0$ încep în punctul $\delta = \delta_{max}$ şi cresc continuu cînd $\delta$ scade fiind maxime în punctul $\delta = \delta_{min}$.

4) Se dă valoarea presiunilor la intrare $p = p_i$ într-un punct cunoscut $\theta = \theta_i$, iar pentru sfîrşitul zonei active se consideră una din ipotezele precedente.

Se va exclude de la început existenţa zonei de presiuni negative, pe care experienţa o infirmă în toate cazurile, o dată cu teoria care arată dificultatea obţinerii unor tensiuni negative la fluidele incompresibile, în condiţiile practic existente. Chiar dacă o mică zonă de depresiuni ar apare uneori, extinderea sa şi valorile reduse ale depresiunilor o fac fără importanţă practică.

Dacă se examinează comparativ cele patru cazuri se constată că 2) şi 3) introduc o dificultate, care din punct de vedere matematic şi fizic

Tipei, N. 7343 Gr
Asupra conditilor la limita in problema lubrificatiei
Studii si cercetari de mecanica aplicata, Tomul VIII, nr. 1, 1957
pp. 1-11.



apare inadmisibilă și anume că presiunile nu mai sînt o funcție uniformă cu perioada $2\pi$. Toate cele patru cazuri elimină presiunile $p-p_0$ negative și în regiunea corespunzătoare admit $p = p_0$, presiunea atmosferică, ipoteză valabilă fizic și verificată practic. În consecință, în punctele unde începe sau se sfîrșește zona de suprapresiuni intervine o modificare calitativă a fenomenului care în mod normal se traduce printr-o discontinuitate a variației presiunilor și vitezelor. De acest fapt ține seama numai prima ipoteză. A doua ipoteză caută, dimpotrivă, să elimine această realitate prin asigurarea continuității curbei presiunilor în punctul de ieșire. Ideia care stă la baza condițiilor 2) este că în zona divergentă a filmului, cu presiune constantă, repartiția vitezelor este liniară și în consecință trebuie racordate cele două mișcări, asigurîndu-se o valoare unică a debitului în punctul respectiv. În realitate se face astfel abstracție de mișcarea fluidului de-a lungul axului lagărului și de faptul că mișcarea generală suferă o discontinuitate în punctul $\delta_{min} = \delta_2$. Noua mișcare, dincolo de acest punct este caracterizată prin $p = p_0$ și o repartiție dată de viteza la intrare. În această regiune aproximațiile curent introduse $\frac{\partial v_j}{\partial x_k} = 0$; $\frac{\partial^2 v_j}{\partial^2 x_k} = 0$ $(j,k = 1,3)$, axele $Ox_1$ și $Ox_3$ fiind conținute într-una din suprafețele solide care mărginesc fluidul, nu mai sînt valabile. Cîmpul de viteze este dat de ecuațiile

$$\Delta v_1 = 0, \quad \Delta v_3 = 0 \tag{1}$$

care arată că acestea sînt funcții armonice, cu valori date pe frontiera corespunzătoare grosimii minime. După o zonă făcînd un unghi la centru foarte mic, aproximațiile inițiale devin din nou valabile, mișcarea stabilindu-se în noul regim. Astfel, ținînd seama de rezultatele obținute în alte lucrări [1], considerînd $\delta =$ const. în această zonă unde grosimea trece printr-un minimum se poate scrie, cu o aproximație foarte bună, viteza tangențială $v_1$ și axială $v_3$ sub forma

$$\left.\begin{aligned}
v_1 &= A_1 \cdot e^{-\pi\frac{r_1}{\delta}\theta} \times \cos\frac{\pi}{b}x_3 \cdot \sin\pi\frac{x_2}{\delta} + V\left(1 - \frac{x_2}{\delta}\right);\\
A_1 &= \frac{e^{\pi^2\frac{r_1}{\delta}}\delta^2\left(\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)_{\theta=\pi;\; x_3=\frac{b}{2}}}{8\mu_1 r_1},\\
v_3 &= \frac{b}{\delta}A_1 e^{-\pi\frac{r_1}{\delta}\theta} \times \sin\frac{\pi}{b}x_3 \cdot \sin\pi\frac{x_2}{\delta};\; v_2 = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Vitezele $v_3$ suferă o variație rapidă în dreptul secțiunii minime, de la 0 la valoarea (2), după care se amortizează repede, ca și primul termen al vitezei tangențiale. Se remarcă apoi că prin condiția (2) se asigură continuitatea curbei de presiuni numai la ieșirea din zona de suprapresiuni, iar la intrare nu numai că rămîne aceeași discontinuitate dar este încă agravată de faptul că teoretic punctul unghiulos de la intrare este înlocuit cu un salt ce face ca valorile măsurate, valorile teoretice și condițiile la limită impuse în acest punct să fie în complet dezacord între ele. Justificarea aparentă



prin existența unei surse de alimentare în regiunea corespunzătoare dispare de altfel complet dacă se consideră că ansamblul funcționează înecat în baia de fluid.

Primele trei condiții nu țin seama de presiunea de alimentare și de poziția punctului de alimentare cu lubrifiant. Acest neajuns apare însă numai în cazul construcțiilor neadecvate, la care alimentarea se face în regiunea de grosime minimă sau la care se realizează presiuni exagerate la intrare, fapt care mărește sensibil frecările, ridică temperatura și conduce la valori maxime mai ridicate a presiunilor pentru o aceeași încărcare. În consecință, pentru construcțiile bine executate și cu presiuni normale de alimentare, condițiile 1), 2), 3) sînt chiar preferabile cazului ultim 4), deoarece în practică $p_i$ poate varia foarte mult, la același ansamblu de frecare, fiind condiționat de temperatura ambiantă, de regimul de lucru, de starea dispozitivelor de filtrare a lubrifiantului etc.

În figurile 1,2 și 3 s-au reprezentat punctele în care începe și se sfîrșește zona activă (de suprapresiuni), pentru lagărele circulare cu diferite alungiri $\lambda = \frac{b}{2r_1}$, unde $b$ este lățimea zonei de acoperire și $2r_1$ diametrul fusului. Unghiurile $\theta^*$ de pe ordonată sînt măsurate față de direcția încărcării $P$, iar în abscisă s-a luat numărul lui Sommerfeld

$$S = \frac{1 + \frac{2}{3}\bar{a}\alpha}{2\pi(1+\alpha)\zeta}, \tag{3}$$

în care $\alpha$ este excentricitatea relativă $\alpha = \frac{e}{\Delta}$ ($e$ fiind distanța dintre axele fusului și cuzinetului, iar $\Delta$ jocul radial), $\bar{a}$ un coeficient depinzînd de $\alpha$ și $\lambda$ [1], iar $\zeta$ este coeficientul de încărcare [2]

$$\zeta = \frac{P\psi^2}{2\mu_1 bV}. \tag{4}$$

În această relație $\mu_1$ este viscozitatea la intrare, iar $V$ viteza periferică a fusului; viscozitatea medie, care intră de obicei în calculul numărului $S$ s-a obținut considerînd $\mu$ variabil de-a lungul filmului după o lege de forma $\mu = \mu_1\frac{\delta}{\delta_1}$ și notînd $Q_s$ debitul care scapă pe la capete [1], [2],

$$\mu_m = \frac{2}{Q_s}\int_0^{Q_s}\mu_1\frac{\delta}{\delta_1}dQ_s = -\frac{r_1}{Q_s}\int_0^{\pi}\int_0^{\delta} x_2(x_2-\delta)\frac{\sqrt{\beta_{14}}}{r_1}\operatorname{th}\lambda\sqrt{\beta_{14}}\cdot\frac{A_1\sin\theta + A_2\sin 2\theta}{(1+\alpha\cos\theta)^2}d\theta dx_2 =$$

$$= \frac{1 + \frac{2}{3}\bar{a}\alpha}{1+\alpha}\mu_1. \tag{5}$$

Tipei, N. 7343 Gr

Asupra conditilor la limita in problema lubrificatiei

Studii si cercetari de mecanica aplicata, Tomul VIII, nr. 1, 1957

pp. 1-11.



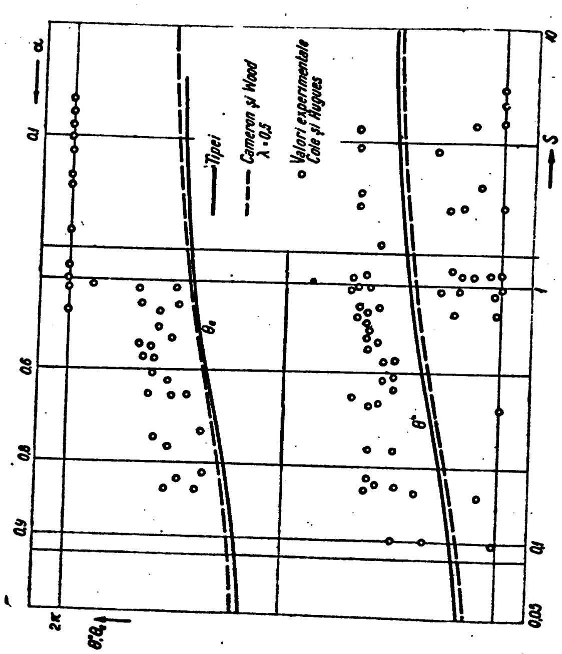



Fig. 1



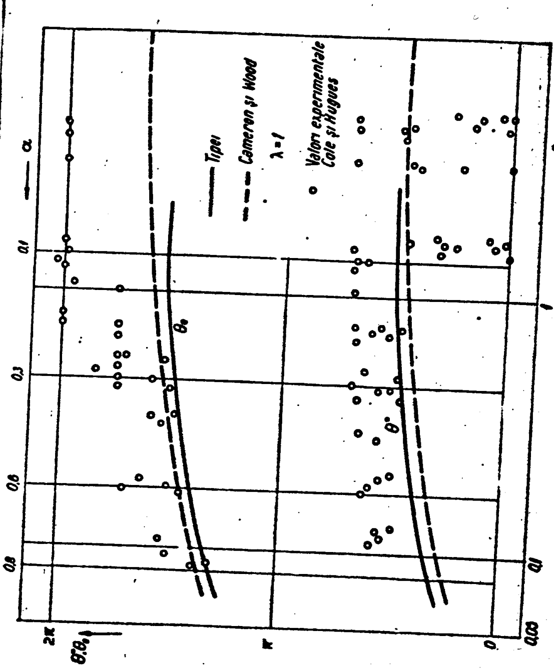



Fig. 2

Tipei, N. 7343 Gr

Asupra conditilor la limita in problema lubrificatiei

Studii si cercetari de mecanica aplicata, Tomul VIII, nr. 1, 1957

pp. 1-11.

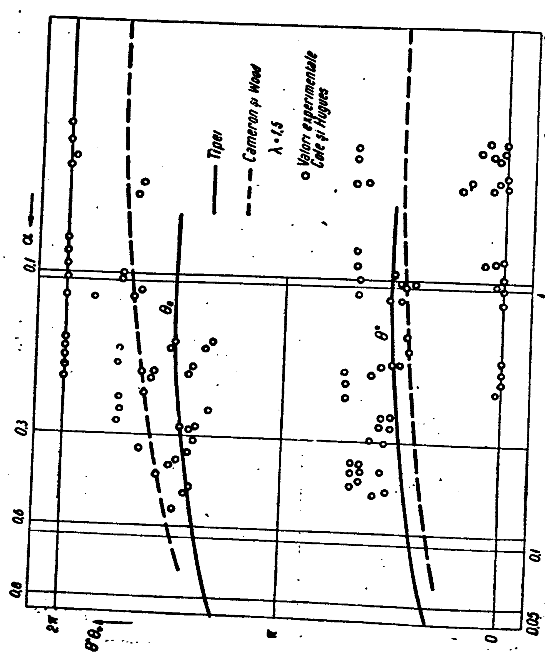



Fig. 3



Punctele din diagrame corespund valorilor experimentale după Cole şi Hughes [3], iar curbele au fost trasate după rezultatele obţinute prin metode cu totul diferite de Cameron şi Wood cu condiţiile 2) şi de Tipei cu condiţiile 1). Din diagrame se constată :

1. Că unghiul la centru al zonei de suprapresiuni este sensibil egal cu $\pi$.

2. Că între zonele active determinate teoretic şi experimental este un decalaj care apare în general mai accentuat pentru condiţiile 2), mai ales la unghiul corespunzător intrării în această zonă.

3. Că în general există o dispersiune accentuată a punctelor experimentale, indicînd o sensibilitate a regimurilor de lubrificaţie sub o sarcină dată, faţă de ceilalţi parametri (temperatură, viteză etc.).

4. Că în general teoria şi experienţa dau un acord satisfăcător, mai ales pentru condiţiile 1), arătînd astfel posibilităţile de aplicare ale teoriei hidrodinamice.

Decalajul semnalat mai sus se datoreşte în parte unei întîrzieiri a formării stratului portant din cauza condiţiilor experimentale care n-au asigurat alimentarea de-a lungul unei generatrice a suprafeţelor [3], aşa cum se prevede în formulele teoretice. Totodată valorile mai mari ale unghiurilor pentru ieşirea din zona activă se datoresc faptului că acestea au fost obţinute prin observaţie vizuală şi că ruperea filmului observată nu are loc exact în punctul unde $p = p_0$. Se precizează de asemenea că valorile $\alpha$ mai mici decît 0,1, la care apare o împrăştiere mai mare a rezultatelor, nu prezintă nici o importanţă practică (de obicei $\alpha > 0,3$).

Se obţine suprafaţa complet scăldată de lubrifiant şi importantă pentru calculul momentelor de frecare, observînd că ea cuprinde întreaga regiune de suprapresiuni, iar că pe restul suprafeţelor lăţimea efectivă a filmului lubrifiant se poate scrie

$$b_\theta = b\,\frac{\delta_2}{\delta}, \tag{6}$$

ţinînd seama de continuitatea debitelor şi de expresia lui $v_1$, din care rezultă că primul termen se amortizează aproape imediat lîngă punctul $\theta = \pi$, $\delta = \delta_2$, după care $v_1$ are o variaţie liniară, debitul de scăpări laterale este nul ($v_3 \to 0$), iar debitul longitudinal este $Q_1 = \frac{1}{2} b_\theta \delta V$. Relaţia (6) a fost de altfel obţinută anterior de Gümbel-Everling [4], pe o cale mai puţin riguroasă. Se deduce raportul dintre această suprafaţă $S_f$ şi suprafaţa totală $S_t = 2\pi r_1 b$, în cazul condiţiilor 1)

$$\frac{S_f}{S_t} = \frac{1}{2} + \frac{\int_\pi^{2\pi} b_\theta d\theta}{2\pi b} = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right). \tag{7}$$

Cu această valoare s-a construit curba din figura 4 care arată un bun acord cu valorile experimentale.

Tipei, N. 7343 Gr
Asupra conditilor la limita in problema lubrificatiei
Studii si cercetari de mecanica aplicata, Tomul VIII, nr. 1, 1957
pp. 1-11.



Coeficientul de debit al fluidului care scapă dintre suprafețe se scrie

$$c_{q_s} = \frac{\alpha}{\lambda}\sqrt{\beta_{14}}\,\mathrm{th}\,\lambda\sqrt{\beta_{14}} + \frac{\Delta^2 p_l}{6\lambda(1-\nu)\mu_1 b V}\left[\left(1+\frac{3}{2}\alpha^2\right)\theta^* + 3\alpha\left(1+\frac{\alpha^2}{4}\right)\sin\theta^* + \frac{3\alpha^2}{4}\sin 2\theta^* + \frac{\alpha^3}{12}\sin 3\theta^*\right], \tag{8}$$

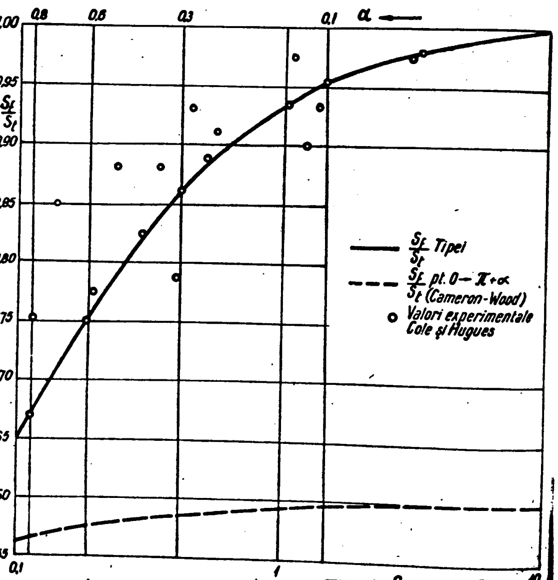



Fig. 4

în care $\beta_{14}$ este o funcție de excentricitatea relativă $\alpha$ [1], $\lambda = \frac{b}{2r_1}$ este alungirea, $\nu = \frac{b_1}{b}$, $\theta^*$ unghiul dintre încărcare și linia centrelor, iar

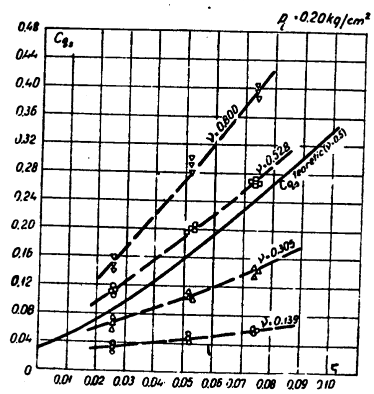



Fig. 5

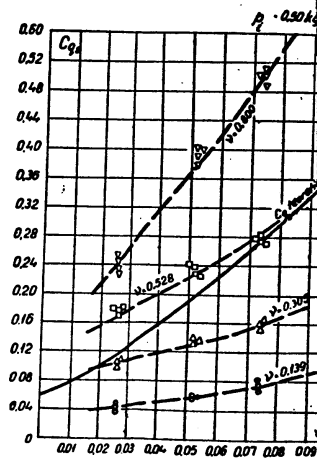
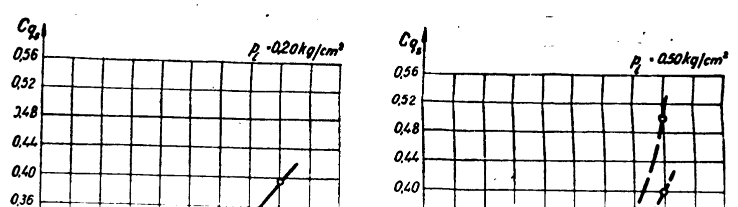


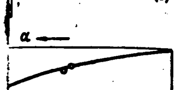

Fig. 6



Tipei, N. 7343 Gross, W.A.
Asupra conditiilor la limita in problema lubrificatiei
Studii si cercetari de mecanica aplicata, Tomul VIII, nr. 1, 1957
pp. 1-11.

pă dintre suprafeţe se scrie

$\ldots x^2)\theta' + 3\alpha\left(1 + \frac{\alpha^2}{4}\right)\sin\theta' + \ldots$ (8)




— $\frac{S_f}{S_t}$ Tipei
– – $\frac{S_f}{S_t}$ pt. $0 - \pi + \alpha$ (Cameron-Wood)
o Valori experimentale Cole şi Hugues

→ S 10

elativă α [1], $\lambda = \frac{b}{2r_1}$ este
are şi linia centrelor, iar

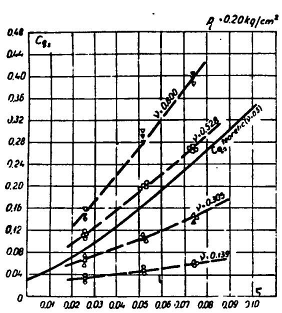



Fig. 5

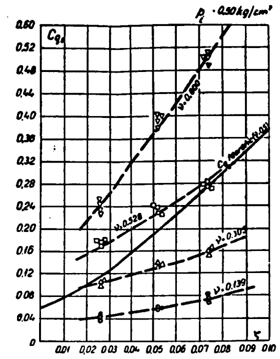



Fig. 6

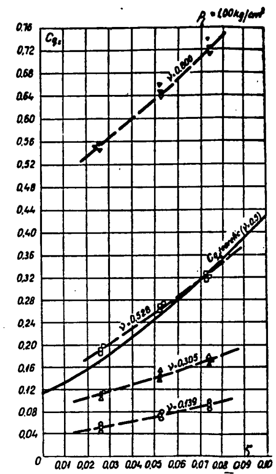



Fig. 7

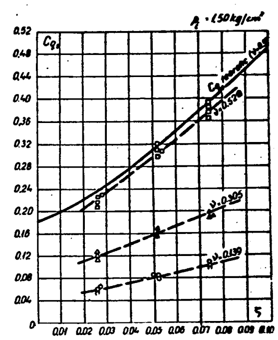



Fig. 8

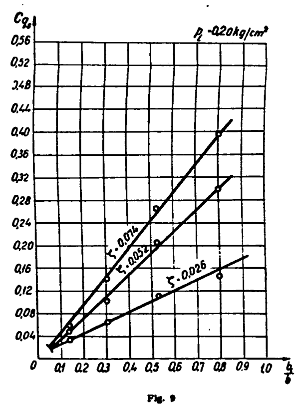



Fig. 9

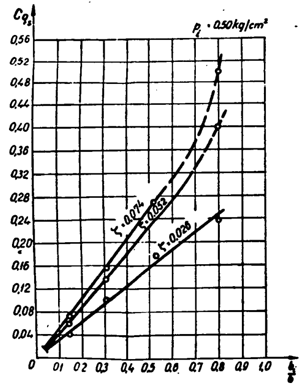



Fig. 10

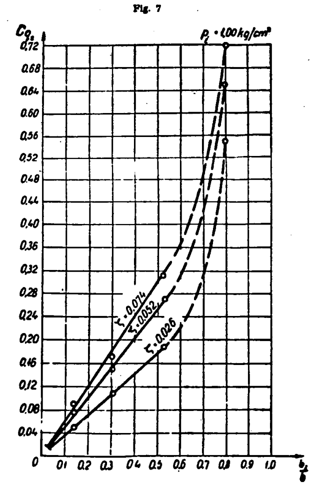



Fig. 11

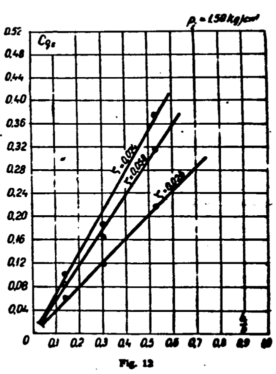



Fig. 12

Tipei, N. 7343. Gr
Asupra conditilor la limita in problema lubrificatiei
Studii si cercetari de mecanica aplicata, Tomul VIII, nr. 1, 1957.
pp. 1-II.



În concluzie:

1. Cele mai apropiate de realitate şi mai satisfăcătoare din punct de vedere teoretic şi practic, la presiuni normale de alimentare, sînt condiţiile 1).

2. Rezultatele prezentate în [1] şi [2] pe baza teoriei hidrodinamice sînt verificate practic în ceea ce priveşte condiţiile pe frontiere, suprafeţele


Fig. 14

reale de frecare şi coeficienţii de debit, cantităţi legate prin parametrii $\alpha, \zeta$ teoretici şi $S$ de valorile experimentale.

3. Debitele sînt direct proporţionale cu lungimea fantei de alimentare dacă aceasta este corect dimensionată în adîncime.


Fig. 15

4. Presiunile de alimentare pot varia practic în limite destul de largi, fără a influenţa substanţial valorile globale caracteristice $\zeta$, $\alpha$ deduse teoretic prin admiterea unei suprapresiuni nule în punctul de grosime maximă a filmului lubrifiant.

*Primită la redacţie la 5 iulie 1956.*



## О ПРЕДЕЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ ДЛЯ ПРОБЛЕМЫ СМАЗКИ

### (КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Излагаются гипотезы о предельных условиях для круглых подшипников с сплошным вкладышем и сравниваются с результатами опытов, произведенных Колем и Юзом [3], а также и авторами, относящихся к пределам зоны сверхдавлений, к общей площади смачиваемой смазкой, и к величине расхода смазки. Подтверждается гипотеза, что зона давлений начинается в точке максимальной толщины и оканчивается в точке минимальной толщины пленки смазочного вещества, причем результаты, приведенные в [1] и [2], наиболее приближаются к данным опытов. Констатируется, что расход пропорционален длине щели питания и что давления питания могут изменяться достаточно широко без серьезного влияния на значения, выведенные теретическим путем, при предположении нулевого сверхдавления в точке максимальной толщины пленки.

## SUR LES CONDITIONS AUX LIMITES DANS LE PROBLÈME DE LA LUBRIFICATION

### (RÉSUMÉ)

On présente les hypothèses, en ce qui concerne les conditions aux limites, pour les paliers circulaires à coussinet complet et on les compare avec des expériences concernant les limites de la couche de lubrifiant, la surface totale baignée par le lubrifiant et les valeurs du débit de lubrifiant, effectuées par Cole et Hughes [3] et par les auteurs. L'hypothèse que la zone des pressions commence au point de la plus grande épaisseur et finit au point de l'épaisseur minimum de la couche de lubrifiant est confirmée, les résultats présentés dans [1] et [2] étant les plus proches des données expérimentales. On constate que le débit est proportionnel à la longueur de la fente d'alimentation et que les pressions d'alimentation du lubrifiant peuvent varier entre des limites suffisamment larges, sans influencer essentiellement les valeurs déduites théoriquement, en admettant une surpression nulle au point de la plus grande épaisseur.

### BIBLIOGRAFIE

1. N. Tipei, *O metodă generală pentru studiul mişcării în pelicula de lubrifiant dintre două suprafeţe de dimensiuni finite.* Studii şi cercetări de mecanică şi metalurgie, t. II, 1951.
2. — *Consideraţii asupra calculului lagărelor cu alunecare.* Buletin ştiinţific, Secţiunea de ştiinţe tehnice şi chimice, t. IV, nr. 1–2, 1952.
3. Cole and Hughes, *Oil Flow and Film Extent in Complete Journal Bearings.* The Engineer, 16-23 martie 1956.
4. Gümbel-Everling, *Reibung und Schmierung in Maschinenbau.* M. Krayn, Berlin, 1925.

Tipei, N. 7345
Lubrificatia suprafetelor cilindrice cu miscare de rostogolire...
Studii si cercetari de mecanica aplicata, 4, Anul VIII, 1957,
pp. 1-11

UNGERE—FRECARE—UZURĂ

# LUBRIFICAŢIA SUPRAFEŢELOR CILINDRICE CU MIŞCARE DE ROSTOGOLIRE ŞI DE ALUNECARE

DE

N. TIPEI

Se va considera în cele ce urmează lubrificaţia hidrodinamică în straturi subţiri, pentru care ecuaţia presiunilor este, pentru lichide:

$$\operatorname{div}\left(\frac{\delta^3}{\mu}\operatorname{grad} p\right) = 6\,[2V_n - \overline{V}_t^{*}\operatorname{grad}\delta + \delta\operatorname{div}\overline{V}_t^{**}] = \mathcal{F}(x_1, x_3, t), \quad (1)$$

în care $p$ este presiunea, $\mu$ viscozitatea fluidului, $x_1$, $x_3$ lungimi măsurate de la o origine de-alungul suprafeţei solide (1), $x_2$ pe normala la aceasta, $V_n$ este diferenţa vitezelor normale la suprafeţe, $\overline{V}_t^{*}$ diferenţa componentelor celor două viteze, iar $\overline{V}_t^{**}$ suma acestora în planul tangent la (1), $\delta$ grosimea stratului fluid. În această ecuaţie s-au făcut simplificările bine cunoscute, derivînd din grosimea redusă a păturei fluide şi din ordinul de mărime al forţelor de inerţie.

Ca şi în alte probleme ale lubrificaţiei, elementele mişcării şi constantele de integrare pot conţine timpul ca parametru. Dacă se consideră două suprafeţe cilindrice de raze $r_1$, $r_2$ (fig. 1) vitezele tangenţiale a acestora în punctul de contact trebuie să fie egale $\overline{V}_1 = \overline{V}_2 = \overline{V}$ pentru a avea numai rostogolire. În cazul mai general cînd există şi alunecare relativă, dacă se notează prin al doilea indice ($j$) axa $x_j$ de-a lungul căreia se consideră componenta respectivă, condiţiile pe frontiere sînt

$$\left.\begin{array}{l} V_{11} = V_1;\; V_{12} = V_{13} = 0 \\ V_{21} = V_2\cos\varepsilon;\; V_{22} = V_2\sin\varepsilon;\; V_{23} = 0 \end{array}\right\} \quad (2)$$

Deoarece grosimea $\delta$ depinde numai de $\theta$ şi eventual de timp, rezultă $\operatorname{grad}\delta = \frac{1}{r_1}\frac{\partial\delta}{\partial\theta}$, iar membrul al doilea al ecuaţiei (1) este

$$\mathcal{F}(\theta, x_3, t) = 6\left[V_2\sin\varepsilon - (V_2\cos\varepsilon - V_1)\frac{1}{r_1}\frac{\partial\delta}{\partial\theta} + \frac{\delta}{2r_1}V_2\left(1 - \frac{r_1+\delta_0}{r_2}\right)^2\frac{\sin 2\theta}{\cos\varepsilon}\right]. \quad (3)$$

Tipei, N. 7345
Lubrificatia suprafetelor cilindrice cu miscare de rostogolire...
Studii si cercetari de mecanica aplicata, 4, Anul VIII, 1957, pp. 1-11



În această expresie $V_1 = V_2$ în cazul rostogolirii pure şi $V_2 = 0$ în cazul alunecării fără rostogolire.

Grosimea $\delta$ este (fig. 1)

$$\left.\begin{aligned} \delta &= r_2 \cos\theta\left[\sqrt{1+\frac{r_1+\delta_2}{r_2}\operatorname{tg}^2\theta\cdot\left(2-\frac{r_1+\delta_2}{r_2}\right)}-1+\frac{r_1+\delta_2}{r_2}\right]-r_1,\\ \frac{\partial\delta}{\partial\theta} &= \sin\theta\left(\frac{(r_1+\delta_2)\left(2-\frac{r_1+\delta_2}{r_2}\right)-r_2}{\sqrt{1+\frac{r_1+\delta_2}{r_2}\left(2-\frac{r_1+\delta_2}{r_2}\right)\operatorname{tg}^2\theta}}+r_2-r_1-\delta_2\right). \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Deoarece valorile maxime $\theta_1$ sau $\theta_2$ ale lui $\theta$ sînt mici şi nu depăşesc $\frac{\pi}{6}$, fiind în genere sensibil mai reduse, $r_1 < r_2$, iar $\delta_2$ este neglijabil faţă de $r_1, r_2$, expresia lui $\frac{\partial\delta}{\partial\theta}$ se poate simplifica în felul următor

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\delta}{\partial\theta} &\cong \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\, r_1\left\{1-\frac{r_1}{r_2}-\frac{1}{2}\frac{r_1}{r_2}\left[\left(2-\frac{r_1}{r_2}\right)^2-1\right]\sin^2\theta\right\}\\ &\cong \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\, r_1\left(1-\frac{r_1}{r_2}\right) \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

cu o eroare maximă sub 10%, deoarece în realitate $\frac{r_1}{r_2} < \frac{1}{4}$.

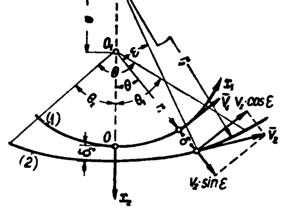


Fig. 1

De asemenea se vede din a doua formulă (4) că se poate înlocui radicalul cu o valoare medie $1+\epsilon$ ($\epsilon \ll 1$), sau

$$\frac{\partial\delta}{\partial\theta} \cong \frac{r_2-r_1-\delta_2}{1+\epsilon}\left(\epsilon+\frac{r_1+\delta_2}{r_2}\right)\cdot\sin\theta = K_\delta \sin\theta, \quad (6)$$

în care se poate neglija şi $\delta_2$. În aceste condiţii, dacă se observă că termenul care conţine $\frac{\delta}{r_1}$ ca factor în formula (3) este de asemenea aproape nul, iar $\sin\varepsilon = \frac{e}{r_2}\sin\theta = \left(1-\frac{r_1+\delta_2}{r_2}\right)\sin\theta$, se poate scrie

$$\mathfrak{F}(\theta, x_3, t) \cong 6\left[2\left(1-\frac{r_1+\delta_2}{r_2}\right)\frac{V_2}{K_\delta}+\frac{V_1-V_2\sqrt{1-\left(1-\frac{r_1+\delta_2}{r_2}\right)^2\sin^2\theta}}{r_1}\right]\frac{\partial\delta}{\partial\theta}. \quad (7)$$



Radicalul din paranteza mare reprezintă valoarea lui $\cos\varepsilon$. Această valoare, deoarece $\cos\varepsilon > \cos\theta$, este foarte apropiată de unitate, $0{,}9 < \cos\varepsilon \leqslant 1$; ca urmare, se poate admite o constantă $\cos\varepsilon \sim 0{,}95$ sau $\cos\varepsilon \sim 1$. Într-adevăr, se observă că în zona de grosime minimă $\delta = \delta_2$, $\theta = \varepsilon = 0$. În această regiune însă, de presiuni mari, este important ca $\mathfrak{F}(\theta, x_3, t)$ să fie evaluată cît mai exact, alegîndu-se eventual ultima valoare indicată pentru $\cos\varepsilon$. Totodată, în cazul rostogolirii primul termen din paranteza mare (7) este preponderant, astfel încît admiţînd $\cos\varepsilon$ = constant în al doilea termen se realizează o bună aproximaţie pentru $\mathfrak{F}(\theta, x_3, t)$. Se va scrie astfel

$$\mathfrak{F}(\theta, x_3, t) = A_\delta \frac{\partial\delta}{\partial\theta}. \quad (8)$$

În felul acesta se poate găsi soluţia $p_\infty$ a problemei plane pe calea obişnuită [1]. Pentru rezolvarea tridimensională, este necesar să se stabilească însă pentru $\delta$ o expresie mai simplă, dar suficient de exactă. În acest scop, se poate pune

$$\delta = \delta_2\,[1 + a_\delta(\operatorname{ch}\nu\theta - 1)]. \quad (9)$$

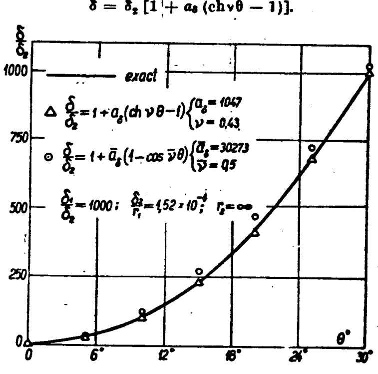


Fig. 2

Fie $\delta_1(\theta_1)$ şi $\delta_2(\theta_2)$ valorile grosimii $\delta$ în două puncte ($\theta_1$ fiind în genere valoarea maximă a lui $|\theta|$). Rezultă astfel $\nu$ şi $a_\delta$

$$\frac{\delta_1-\delta_2}{\delta_3-\delta_2} = \frac{1-\operatorname{ch}\nu\theta_1}{1-\operatorname{ch}\nu\theta_3}; \qquad a_\delta = \frac{\frac{\delta_1}{\delta_2}-1}{\operatorname{ch}\nu\theta_1-1}. \quad (10)$$

Tipei, N. 7345

Lubrificatia suprafetelor cilindrice cu miscare de rostogolire... Studii si cercetari de mecanica aplicata, 4, Anul VIII, 1957, pp. 1-11



În acest mod s-au calculat punctele din figura 2 pentru un caz defavorabil și anume $\frac{\delta_1}{\delta_2} = 1\,000$, $\theta_1 = 30°$, $\Theta = 60°$, $r_2 = \infty$. Se vede că aceste puncte reprezintă suprafața (2) față de (1), fără nici un fel de eroare apreciabilă.

Soluția $p_\infty$ se poate scrie apoi admițînd [1] o lege de variație a viscozității cu $\delta$ de forma $\mu = \mu_1 \left(\frac{\delta}{\delta_1}\right)^q$

$$p_\infty = \frac{A_\delta \, \mu_1 r_1}{\delta_1^q} (I_1 + C_1 I_2) + C_2 . \tag{11}$$

În aceasta $I_1$ și $I_2$ au expresiile următoare pentru $q = 0$ (viscozitate constantă) sau $q = 1$ (viscozitate variabilă):

$$\left.\begin{aligned} I_{1,q=0} &= \int \frac{d\theta}{\delta^3} = \frac{1}{\nu \delta_2^3} \left\{ \left\{ \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{2(2a_\delta - 1)} \left( \frac{1}{(2a_\delta - 1)^2} + \frac{5}{2} \right) - 1 \right] \cdot \right.\right. \\ &\cdot \frac{1 + \operatorname{ch} \nu\theta}{1 + a_\delta (\operatorname{ch} \nu\theta - 1)} - \left.\frac{3}{8(2a_\delta - 1)} \right\} \frac{\operatorname{sh} \nu\theta}{1 + a_\delta (\operatorname{ch} \nu\theta - 1)} + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{2a_\delta - 1}} \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{1}{(2a_\delta - 1)^2} + 1 \right) + \right. \\ &+ \left.\left. \frac{1}{2a_\delta - 1} \right] \operatorname{arc\,tg} \left( \sqrt{2a_\delta - 1} \operatorname{th} \frac{\nu}{2} \theta \right) \right\}, \\ I_{2,q=0} = I_{1,q=1} &= \int \frac{d\theta}{\delta^2} = \frac{1}{\nu \delta_2^2} \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2a_\delta - 1} \right) \frac{\operatorname{sh} \nu\theta}{1 + a_\delta (\operatorname{ch} \nu\theta - 1)} + \right. \\ &+ \left. \frac{2(a_\delta - 1)}{(2a_\delta - 1)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arc\,tg} \left( \sqrt{2a_\delta - 1} \operatorname{th} \frac{\nu}{2} \theta \right) \right], \\ I_{2,q=1} &= \int \frac{d\theta}{\delta} = \frac{2}{\nu \delta_2 \sqrt{2a_\delta - 1}} \operatorname{arc\,tg} \left( \sqrt{2a_\delta - 1} \operatorname{th} \frac{\nu}{2} \theta \right). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

În genere se poate admite pentru mișcarea de rostogolire că viscozitatea este constantă în toată pelicula, spre deosebire de cazul alunecării pentru care $q = 1$ este mai aproape de realitate.

Fie apoi $p^*$ soluția ecuației (1), fără membrul al doilea. Aceasta se poate pune sub forma [1]

$$p^* = \sum_{m=1}^{\infty} f_{1m}(\theta) \cdot f_{2m}(x_2). \tag{13}$$

Notînd cu $\chi_m$ un parametru arbitrar, se obține

$$f_{2m} = A_{2m} \operatorname{sh} \sqrt{\chi_m}\, x_2 + B_{2m} \operatorname{ch} \sqrt{\chi_m}\, x_2 \tag{14}$$

Funcțiile $f_{1m}(\theta)$ satisfac ecuația cu derivate totale

$$\frac{d^2 f_{1m}}{d\theta^2} + (3 - q) \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial \theta} \cdot \frac{d f_{1m}}{d\theta} + r_1^2 \chi_m f_{1m} = 0. \tag{15}$$



Fie

$$f_{1m} = \sum_{n=-n_{1m}}^{\infty} \frac{A_{1m,n}}{\operatorname{ch}^n \nu\theta} . \tag{16}$$

Coeficienții $A_{1m,n}$ sînt dați de relațiile de recurență

$$a_\delta \left[ (n+1)(n+4-q) + \frac{\chi_m r_1^2}{\nu^2} \right] A_{1m,n+1} - (a_\delta - 1) \left( n^2 + \frac{\chi_m r_1^2}{\nu^2} \right) A_{1m,n} - $$
$$- a_\delta (n-1)(n+3-q) A_{1m,n+1} + (a_\delta - 1)(n-2)(n-1) A_{1m,n-2} = 0. \tag{17}$$

Primele ecuații se scriu, observînd că toți coeficienții cu indice negativ mai mic decît $-n_1$ sînt nuli

$$\left.\begin{aligned} & a_\delta \left[ -n_{1m}(-n_{1m} + 3 - q) + \frac{\chi_m r_1^2}{\nu^2} \right] A_{1m,-n_{1m}} = 0, \\ & a_\delta \left[ (1 - n_{1m})(-n_{1m} + 4 - q) + \frac{\chi_m r_1^2}{\nu^2} \right] A_{1m,-n_{1m}+1} - \\ & \qquad - (a_\delta - 1) \left( n_{1m}^2 + \frac{\chi_m r_1^2}{\nu^2} \right) A_{1m,-n_{1m}} = 0 \\ & a_\delta \left[ (2 - n_{1m})(-n_{1m} + 5 - q) + \frac{\chi_m r_1^2}{\nu^2} \right] A_{1m,-n_{1m}+2} - (a_\delta - 1) \cdot \\ & \qquad \cdot \left[ (n_{1m} - 1)^2 + \frac{\chi_m r_1^2}{\nu^2} \right] A_{1m,-n_{1m}+1} + a_\delta n_{1m}(-n_{1m} + \\ & \qquad + 4 - q) A_{1m,-n_{1m}} = 0, \\ & a_\delta \left[ (3 - n_{1m})(-n_{1m} + 6 - q) + \frac{\chi_m r_1^2}{\nu^2} \right] A_{1m,-n_{1m}+3} - \\ & \qquad - (a_\delta - 1) \left[ (n_{1m} - 2)^2 + \frac{\chi_m r_1^2}{\nu^2} \right] \cdot A_{1m,-n_{1m}+2} - \\ & \qquad - a_\delta (-n_{1m} + 1)(-n_{1m} + 5 - q) A_{1m,-n_{1m}+1} + \\ & \qquad + (a_\delta - 1) n_{1m}(-n_{1m} + 1) A_{1m,-n_{1m}} = 0, \\ \hline & a_\delta \left( 4 - q + \frac{\chi_m r_1^2}{\nu^2} \right) A_{1m,1} - (a_\delta - 1) \frac{\chi_m r_1^2}{\nu^2} A_{1m,0} + \\ & \qquad + a_\delta (3 - q) A_{1m,-1} + 12 (a_\delta - 1) A_{1m,-2} = 0, \\ & a_\delta \left[ 2(5 - q) + \frac{\chi_m r_1^2}{\nu^2} \right] A_{1m,2} - (a_\delta - 1) \left( 1 + \frac{\chi_m r_1^2}{\nu^2} \right) A_{1m,1} = 0 \\ & a_\delta \left[ 3(6 - q) + \frac{\chi_m r_1^2}{\nu^2} \right] A_{1m,3} - (a_\delta - 1) \left( 4 + \right. \\ & \qquad \left. + \frac{\chi_m r_1^2}{\nu^2} \right) A_{1m,2} - a_\delta (5 - q) A_{1m,1} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Tipei, N. 7345
Lubrificatia suprafetelor cilindrice cu miscare de rostogolire...
Studii si cercetari de mecanica aplicata, 4, Anul VIII, 1957,
pp. 1-11



Coeficienții $A_{1m,-n_{1m}}$ sînt arbitrari și reprezintă constantele de integrare. În acest caz însă, este necesar ca în prima ecuație (18) coeficientul lui $A_{1m,-n_{1m}}$, să fie nul ceea ce determină valorile lui $\chi_m$ în funcție de $n_{1m}$ arbitrar ales

$$\chi_m = n_{1m}(-n_{1m} + 3 - q)\frac{\nu^2}{r_1^2}. \tag{19}$$

Astfel pentru $n_{1m} > 3 - q$, $\chi_m < 0$, iar soluția $f_{3m}$ (14) va cuprinde funcții trigonometrice în locul acelora hiperbolice.

Pentru a studia convergența soluției se va considera $n \to \infty$; ecuația (17) devine

$$A_{1m,n+1} - \left(1 - \frac{1}{a_8}\right)(A_{1m,n} - A_{1m,n-2}) - A_{1m,n-1} = 0. \tag{20}$$

Soluția acestei ecuații cu diferențe va fi, notînd prin $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ trei constante arbitrare

$$(A_{1m,n})_{n\to\infty} = \lambda_1\left(1 - \frac{1}{a_8}\right)^n + \lambda_2 + (-1)^n \lambda_3. \tag{21}$$

Raportul a doi termeni consecutivi ai soluției (16) pentru valori mari ale lui $n$ și restul $R$ al sumei începînd de la termenul $A_{1m,n_2}$ va fi, dacă se consideră $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$$\left(\frac{A_{1m,n+1}}{A_{1m,n}}\right)_{n\to\infty}\frac{1}{\operatorname{ch}\nu\theta} = \frac{1-\frac{1}{a_8}}{\operatorname{ch}\nu\theta};\quad R = \frac{A_{1m,n_2}}{1-\frac{1-\frac{1}{a_8}}{\operatorname{ch}\nu\theta}};\quad R_{max} = a_8 \cdot A_{1m,n_2} \tag{22}$$

Se vede astfel că soluția (16) este totdeauna convergentă, dacă $n_1$ este finit, iar pentru $n \to \infty$, $R \to 0$.

Soluția generală a ecuației (1) se poate scrie astfel [1]

$$\begin{aligned} p = p_\infty - p^* + ax_3 = \frac{A_8\mu_1 r_1}{\delta_1^q}(I_1 + C_1 I_2) - \\ -\sum_{m=1}^{\infty}[(A_{3m}\operatorname{sh}\sqrt{\chi_m}\,x_3 + B_{3m}\operatorname{ch}\sqrt{\chi_m}\,x_3)\cdot\sum_{n=-n_{1m}}^{\infty}\frac{A_{1m,n}}{\operatorname{ch}^n\nu\theta} + ax_3 + C_2\end{aligned} \tag{23}$$

După cum s-a arătat, toți coeficienții și constantele acestei soluții pot fi funcții de timp, în cazul cînd forțele exterioare sau vitezele variază. Soluția cuprinde $3m + 3$ constante arbitrare $A_{1m,-n_{1m}}$, $A_{3m}$, $B_{3m}$, $C_1$, $C_2$ și $a$, cu ajutorul cărora se pot îndeplini orice condiții pe frontiere, într-un număr oricît de mare de puncte. Dacă axele $O\,x_1\,x_3$ se află într-un plan



situat la distanțele $-b_1$ și $+b_2$ de la capetele suprafeței de lărgime cea mai mică $b = b_1 + b_2$, (22) se poate simplifica din cauza simetriei mișcării față de planul median. Cum, pentru $\lambda = \frac{b}{2r_1} \to \infty$, $p \to p_\infty$, iar suma din (22) trebuie să se anuleze, se va pune $\frac{A_{3m}}{\operatorname{sh}\sqrt{\chi_m}\frac{b_1 - b_2}{2}} = \frac{\mathfrak{A}_{3m}}{\operatorname{ch}\sqrt{|\chi_m|}\,r_1\lambda}$.

Astfel rezultă

$$\begin{aligned} p = \frac{A_8\mu_1 r_1}{\delta_1^q}(I_1 + C_1 I_2) - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mathfrak{A}_{3m}}{\operatorname{ch}\sqrt{|\chi_m|}\,r_1\lambda}\left(\frac{A_{1m,n_2+1}}{1-\frac{1-\frac{1}{a_8}}{\operatorname{ch}\nu\theta}}+\right. \\ \left. + \sum_{n=-n_{1m}}^{n=n_2}\frac{A_{1m,n}}{\operatorname{ch}^n\nu\theta}\right)\times\operatorname{ch}\sqrt{\chi_m}\left(x_3 + \frac{b_1 - b_2}{2}\right) + C_2\end{aligned} \tag{24}$$

Condițiile la limită $p = p_0$ pentru $x_3 = -b_1$ și $x_3 = b_2$ dau apoi

$$\begin{aligned} \frac{A_8\mu_1 r_1}{\delta_1}(I_1 + C_1 I_2) + C_2 = \sum_{m=1}^{\infty}\mathfrak{A}_{3m}\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\chi_m}\frac{b}{2}}{\operatorname{ch}\sqrt{|\chi_m|}\,r_1\lambda} \\ \left(\frac{A_{1m,n_2+1}}{1-\frac{1-\frac{1}{a_8}}{\operatorname{ch}\nu\theta}} + \sum_{n=-n_{1m}}^{n=n_2}\frac{A_{1m,n}}{\operatorname{ch}^n\nu\theta}\right) + p_0\end{aligned} \tag{25}$$

Se remarcă astfel că prima fracție din membrul al doilea este egală cu unitatea pentru $\chi_m > 0$, iar pentru $\chi_m < 0$ la numărător apare cos în loc de ch, ca și în formula (24). Deoarece $\mathfrak{A}_{3m}$ este un factor real de amplificare pentru $A_{1m,n}$, care la rîndul lor sînt funcții liniare de $A_{1m-n_{1m}}$ urmează că în total rămîn $m + 2$ constante distincte cu ajutorul cărora se pot îndeplini condițiile (25) și se poate impune, în plus, ca presiunile să aibă valori prescrise într-o serie de puncte arbitrare. Aceste puncte pot fi alese în secțiunea inițială $\theta = \theta_1$, unde, datorită simetriei față de planul median, se obțin în realitate un număr dublu de puncte corespunzătoare legii prescrise de distribuție a presiunilor, sau în genere ele se pot găsi pe o curbă dată, cu presiuni cunoscute în fiecare punct.

Se observă că o aproximare foarte bună a lui $\delta$ se obține dacă se consideră expresia cunoscută pentru suprafețele cilindrice cu joc radial, pusă însă sub o formă mai generală pentru a ține seama de erorile ce ar apare datorită mărimii neobișnuite a acestui joc (fig. 2)

$$\delta = \delta_2[1 + \bar{a}_8(1 - \cos\bar{\nu}\theta)]. \tag{26}$$

Tipei, N. 7345
Lubrificatia suprafetelor cilindrice cu miscare de rostogolire...
Studii si cercetari de mecanica aplicata, 4, Anul VIII, 1957, pp. 1-11



Punind apoi $\Delta = (1 + \bar{a}_8)\,\delta_2$, $\alpha = \frac{\bar{a}_8}{1 + \bar{a}_8}$ şi făcînd substituţia $\vartheta = \pi - \tilde{\nu}\theta$, se ajunge la problema lubrificaţiei suprafeţelor cilindrice cu alunecare şi cu joc radial, pentru care însă viteza relativă echivalentă de alunecare este dată de paranteza mare a expresiei (7). Toate rezultatele găsite cu această ocazie (1) pot fi apoi aplicate direct la cazul rostogolirii. Se remarcă totuşi că soluţia aceasta are o convergenţă sensibil mai redusă decît (24), deşi este asemănătoare ca structură. În adevăr, pentru $n \to \infty$ raportul a doi coeficienţi consecutivi pentru dezvoltările în $\sin n\vartheta$ şi $\cos n\vartheta$ cu ajutorul cărora se construieşte soluţia în acest caz, este

$$\left(\frac{A_{1m,n+1}}{A_{1m,n}}\right)_{n\to\infty} = 1 + \frac{1}{\bar{a}_8} - \sqrt{\frac{1}{\bar{a}_8}\left(2 + \frac{1}{\bar{a}_8}\right)}, \tag{27}$$

iar pentru exemplul din figura 2 $\bar{a}_8 = 30\,273$, faţă de $\bar{a}_8 = 1\,047$ din formula (22).

În cele precedente s-a ajuns la o rezolvare a problemei presupunînd că unghiul $\Theta$ (fig. 1) are valori foarte mari faţă de majoritatea cazurilor practice. Dacă se admite că $\Theta$, $\theta_1$, $\theta_2$ sînt mici, se poate aproxima grosimea peliculei de fluid cu ajutorul formulei

$$\delta = \delta_2\, e^{\tilde{\nu}\theta^2} \tag{28}$$

În figura 3, s-a reprezentat variaţia lui $\delta$ dată de formula (28) faţă de aceea exactă, într-un caz mai defavorabil, adică pentru un unghi la centru destul de mare ($\Theta \sim 40°$) al zonei fluide portante. La valori $\Theta$ mai reduse, aproximaţia se îmbunătăţeşte; de asemenea relaţia (28) poate reprezenta mai bine cazul cînd $r_1$ şi $r_2$ sînt de semne contrare (ambele suprafeţe convexe).

Această expresie are de altfel avantajul de a ţine seama într-o măsură oarecare de deformaţiile care intervin în zona de contact şi care sînt de acelaşi sens cu abaterile pe care (28) le dă faţă de suprafeţele perfect circulare. Soluţia $p_\infty$ (11) are aceeaşi expresie, $I_1$ şi $I_2$ pot fi date de (12) sau, dacă se introduce $\delta$ din (28), rezultă, notînd cu $\Phi$ funcţia erorilor,

$$\left.\begin{aligned} I_{1,s=0} &= \int_0^\Theta \frac{d\theta}{\delta^s} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{3}\,\tilde{\nu}^{\frac{1}{2}}\,\delta_2^3}\,\Phi\left(\sqrt{3\tilde{\nu}}\,\theta\right),\\ I_{2,s=0} &= I_{1,s=1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}\,\tilde{\nu}^{\frac{1}{2}}\,\delta_2^2}\,\Phi\left(\sqrt{2\tilde{\nu}}\,\theta\right),\\ I_{2,s=1} &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\tilde{\nu}^{\frac{1}{2}}\,\delta_2}\,\Phi\left(\sqrt{\tilde{\nu}}\,\theta\right). \end{aligned}\right\} \tag{29}$$



Ecuaţia (15) se scrie apoi

$$\frac{d^2 f_{1m}}{d\theta^2} + 2\,(3 - q)\,\tilde{\nu}\,\theta\,\frac{df_{1m}}{d\theta} + r_1^2\,\chi_m\,f_{1m} = 0. \tag{30}$$

Făcînd substituţiile [2]

$$\theta = \frac{\xi}{2\sqrt{5(3-q)\tilde{\nu}}};\; f_{1m} = u\,e^{-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(3-q)\tilde{\nu}}{5}}\,\xi^2} \tag{31}$$

ecuaţia (30) devine

$$4\,\frac{d^2\mu}{d\xi^2} = \left\{\xi^2 - \sqrt{\frac{4}{5\,(3-q)\,\tilde{\nu}}}\left[\chi_m r_1^2 - (3-q)\,\tilde{\nu}\right]\right\} u. \tag{32}$$

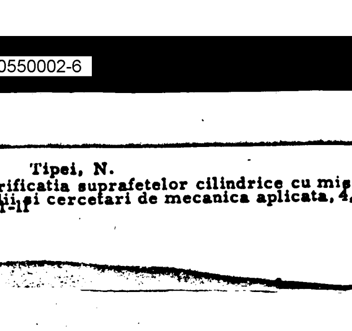



Fig. 3

Fie

$$\varkappa = \frac{2}{\sqrt{5\,(3-q)\tilde{\nu}}}\left[\chi_m r_1^2 - (3-q)\,\tilde{\nu}\right] - 1 = 4\,m + 1 \text{ sau } 2\,m \tag{33}$$

în care $m$ este un număr întreg, pozitiv. Soluţia $u$ se exprimă în acest caz cu ajutorul polinoamelor lui Hermite, $H_m(\xi)$, sau, trecînd din nou

Tipei, N. 7345
Lubrificatia suprafetelor cilindrice cu miscare de rostogolire...
Studii si cercetari de mecanica aplicata, 4, Anul VIII, 1957, pp. 1-11



la variabilele $f_{1m}$ şi $\theta$, se obţine

$$\left.\begin{aligned} f_{1m} &= 2^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{1}{2}\left[(3-q)\tilde{\nu}+\sqrt{5(3-q)\tilde{\nu}}\right]\theta^2} H_m\left(\sqrt[4]{5(3-q)\tilde{\nu}}\,\theta\right) \text{ pentru } \chi = 4m+1 \\ f_{1m} &= (-1)^m e^{-\frac{(3-q)\tilde{\nu}}{2}\theta^2} H_m\left(\sqrt[4]{20(3-q)\tilde{\nu}}\,\theta\right), \quad \text{,,} \quad \chi = 2m \\ H_m(\xi) &= (-1)^m e^{\xi^2} \frac{d^m}{d\xi^m} e^{-\xi^2} \end{aligned}\right\} \quad (34$$

În fine, din (33) se poate deduce imediat $\chi_m$, dînd diferite valori lui $m$. Soluţiile (34) sînt particulare, totuşi soluţia $p$ se poate construi cu ajutorul acestora. Ea are forma (23), unde suma în raport cu $n$ din paranteza mare trebuie înlocuită prin expresiile (34). Apar astfel $2m+3$ constante de integrare cu ajutorul cărora se pot pune orice condiţii pentru presiuni pe frontiere. Dacă, în afară de capetele rolei, presiunile au valorile $p_0$ la unghiurile $\theta_1$ şi $-\theta_2$, se vor determina mai întîi constantele $C_1$, $C_2$ punînd condiţii corespunzătoare pentru $p_\infty$

$$p_\infty(\theta_1) = p_\infty(-\theta_2) = p_0 \qquad (35)$$

Condiţiile de tipul (25) se scriu apoi

$$\frac{A_8 \mu_1 r_1}{\delta_1}(I_1 + C_1 I_2) + C_2 = \sum_{m=1}^{\infty} a_{3m} f_{1m} + p_0 \qquad (36)$$

din această relaţie, dezvoltînd în serii de acelaşi fel $p_\infty$ ca şi $f_{1m}$ se deduc valorile $a_{3m}$, iar $p$ se va scrie, deoarece $\chi_m$ este totdeauna pozitiv,

$$p = \sum_{m=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\chi_m}\left(x_2 + \frac{b_1 - b_2}{2}\right)}{\operatorname{ch}\sqrt{\chi_m}\, r_1 \lambda}\right) a_{3m} f_{1m} + p_0 \qquad (37)$$

În practică, este suficient pentru calcule să se considere un număr finit, $m$, de soluţii şi, scriind că relaţia (36) este verificată într-un număr egal de puncte ($\theta$), se pot deduce coeficienţii $a_{3m}$, fără alte dezvoltări. Evident că precizia calculelor creşte o dată cu $m$.

*Primită la redacţie la 28 iunie 1957.*

## СМАЗКА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРИ ДВИЖЕНИИ КАЧЕНИЯ И СКОЛЬЖЕНИЯ

### (КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Рассматривается тонкослойное течение вязкой жидкости между двумя цилиндрическими поверхностями с относительным движением качения и скольжения. Путем некоторых сокращений в правой части дифференциального уравнения давлений и апроксимации выражения



толщины жидкого слоя при помощи гиперболических функций получается решение трехмерного движения и соответственно величина давления в каждой точке.

Можно также рассматривать показательные выражение для той же толщины при небольших центральных углах несущей зоны, при твердых поверхностях с радиусом кривизны противоположного знака или при учете местных деформаций. В этих случаях решение можно представить в простом виде при помощи многочленов Эрмита.

## LUBRIFICATION DES SURFACES CYLINDRIQUES À MOUVEMENT DE ROULEMENT ET DE GLISSEMENT

### (RÉSUMÉ)

On envisage le mouvement en couches minces d'un fluide visqueux, limité par des parois ayant un mouvement relatif combiné de roulement et de glissement. En introduisant quelques simplifications dans le deuxième membre de l'équation differentielle des pressions et en approximant l'épaisseur de la couche fluide, au moyen de fonctions hyperboliques, on obtient la solution générale du mouvement, c'est-à-dire la valeur des pressions en tout point.

Si l'angle total, au centre de la zone portante est réduit, ou bien pour les surfaces solides dont les rayons de courbure sont de signes contraires ou encore si l'on tient compte des déformations élastiques locales, on peut admettre une expression exponentielle de la distance entre les deux surfaces. Dans ce cas, la solution générale peut être exprimée simplement au moyen des polynômes d'Hermite.

### BIBLIOGRAFIE

1. N. Tipei, *O metodă generală pentru studiul mişcării în pelicula de lubrifiant dintre două suprafeţe de dimensiuni finite*. Studii şi cercetări de mecanică şi metalurgie, t. II, 1951, p. 27.
2. E. Kamke, *Spravocinik po obiknovennim differentialnim uravneniam*. Moscova, 1951.

Tipei, N. 7341 Gro

Considerații asupra calculului lagarelor prin alunecare
Buletin stiintific - Sectiunea de stiinte tehnice si chimice, pp. 1-10
Tomul IV, nr. 3-4, 1952

BULETIN ŞTIINŢIFIC
SECŢIUNEA DE ŞTIINŢE TEHNICE ŞI CHIMICE
Tomul IV, Nr. 3—4, 1952

W. A. GROSS
252-M

# CONSIDERAŢII ASUPRA CALCULULUI LAGĂRELOR PRIN ALUNECARE

DE

N. TIPEI

*Comunicare prezentată de Academician E. CARAFOLI, în şedinţa din 18 Martie 1952*

Intr'o lucrare anterioară [1], s'a stabilit repartiţia de presiuni în interiorul unui lagăr prin alunecare. Formulele respective se pot aplica pentru diferite legi de variaţie a viscozităţii cu temperatura şi în condiţii la limită deosebite. Pentru majoritatea lagărelor, se poate admite că viscozitatea variază linear cu grosimea stratului de ulei şi că presiunile se anulează pe direcţiunile axului care uneşte linia centrelor. Ultima condiţie este îndeplinită destul de bine de palierele cu ungere prin inel, sau cu alimentare sub o presiune moderată în zona divergentă sau de grosime maximă a peliculei de ulei. Fie $\mu_1$, viscozitatea la intrare, $V$ viteza periferică a fusului şi $r$ raza sa, $\Delta$ jocul radial, $b$ lăţimea lagărului, $\lambda = \dfrac{b}{2r}$ alungirea acestuia $e$ distanţa dintre centrul fusului şi al cuzinetului, $\varepsilon = \dfrac{e}{\Delta}$ excentricitatea relativă, $\theta$ unghiul dintre linia centrelor şi raza care trece printr'un punct oarecare şi $z$ distanţa dela mijlocul palierului. Presiunea $p$ într'un punct pe fus, este, notând cu $p_0$, presiunea în mediul înconjurător (atmosferică)

$$p = p_0 + \frac{6\mu_1 V r}{\Delta^2}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\left(1 - \frac{\operatorname{ch}\frac{z}{r}\sqrt{\beta_{1,4}}}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\beta_{1,4}}}\right)\cdot\frac{\sin\theta + \bar{a}\sin 2\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2} \tag{1}$$

unde

$$\beta_{1,4} = 0{,}9312 + 0{,}242\,\varepsilon \tag{2}$$

şi

$$\bar{a} = 0{,}0157 + 0{,}0627\varepsilon - \frac{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}2\lambda}}{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\lambda}}\cdot\frac{(11{,}34 - 9{,}6\varepsilon)(0{,}0157 + 0{,}127\varepsilon)}{11{,}34 - 10{,}10\,\varepsilon} \tag{3}$$

Tipei, N.

7341 . Gro[illegible]

Consideratii asupra calculului lagarelor prin alunecare

Buletin stiintific - Sectiunea de stiinte tehnice si chimice, pp. 1-10
Tomul IV, nr. 3-4, 1952

[illegible]

Formula (1) se aplică pentru $0 \leq \theta \leq \pi$, iar pentru $\pi \leq \theta \leq 2\pi$, $p = p_0$. Componentele rezultantei presiunilor asupra fusului vor fi, dacă se pune $\psi = \frac{\delta}{r}$ jocul relativ. [illegible]

după acestă linie. Rezultanta este [illegible]

[illegible]



o valoare medie $\mu_m$ (8); înmulțind valorile $\zeta$ de pe curbele cu $\mu$ = constant cu raportul $\frac{\mu_m}{\mu_1}$, se găsește că diferențele nu sunt însemnate [1].

Dacă este dată valoarea grosimii minime $\delta_2$ a peliculei de lubrifiant, apare natural să se aleagă un alt coeficient de încărcare

$$\zeta' = \frac{F\delta_2^2}{6\mu_1 \omega r^4} = \lambda(1-\alpha)^2\zeta \qquad (9)$$

a cărui variație cu $\alpha$ este dată de diagramele din figura 2, în care s'au luat de asemenea $\lambda$ ca parametru. [illegible]

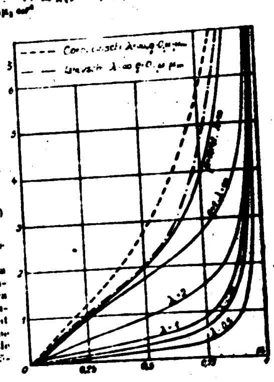


Fig. 1

[illegible]

Tipei, N. 7341 Gro

Consideratii asupra calculului lagarelor prin alunecare

Buletin stiintific - Sectiunea de stiinte tehnice si chimice, pp. 1-10

Tomul IV, nr. 3-4, 1952



$$+3\left(1-\frac{\text{th}\lambda\sqrt{\beta_{1A}}}{\lambda\sqrt{\beta_{1A}}}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\left(2\bar{a}\left(\alpha-\frac{2}{\alpha}\right)+1\right)-1+\frac{4a}{\alpha}\right]\right\} \quad (12)$$

sau

$$M=\frac{\pi\mu_1 Vbr}{\psi}C_m. \quad (13)$$

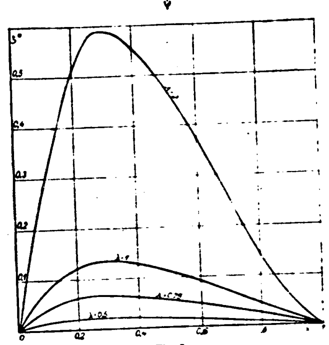



Fig. 2

Momentul de frecare lucrând asupra cuzinetului rezultă de asemenea

$$M_c=r^2\int_0 \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=h} d\sigma=$$

$$=-\frac{\pi\mu_1 Vbr^2}{\Delta(1-\alpha)}\left\{1-\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}-\right. \quad (14)$$

$$\left.-6\left(1-\frac{\text{th}\lambda\sqrt{\beta_{1A}}}{\lambda\sqrt{\beta_{1A}}}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\left(2a\left(\alpha-\frac{2}{\alpha}\right)+1\right)-1+\frac{4\bar{a}}{\alpha}\right]\right\}$$

respectiv

$$M_c=\frac{\pi\mu_1 Vbr}{\psi}C_{m_c} \quad (15)$$



Dacă alimentarea se face în zona divergentă a peliculei, sau la sfârșitul acesteia $(\theta=0)$ dar sub presiune, se poate considera $h_0=b=$ constant și rezultă, pentru acest caz,

$$C_m=\frac{1}{1-\alpha}\left\{2+3\left(1-\frac{\text{th}\lambda\sqrt{\beta_{1A}}}{\lambda\sqrt{\beta_{1A}}}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\left(2a\left(\alpha-\frac{2}{\alpha}\right)+1\right)-1+\frac{4a}{\alpha}\right]\right\} \quad (16)$$

sau:

$$C_{m_c}=\frac{1}{1-\alpha}\left\{2-3\left(1-\frac{\text{th}\lambda\sqrt{\beta_{1A}}}{\lambda\sqrt{\beta_{1A}}}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\left(2a\left(\alpha-\frac{2}{\alpha}\right)+1\right)-1+\frac{4a}{\alpha}\right]\right\} \quad (17)$$

Ca și pentru forțe, se consideră ca dată, în cazul proiectării unui lagăr valoarea $\delta_2$, iar coeficientul de moment va fi

$$k_m=\frac{6M}{\pi F\delta_2}=\frac{3C_m}{\zeta(1-\alpha)} \quad (18)$$

S'au trasat de asemenea în figurile 3 și 4 curbele $k_m=f(\alpha)$ cu $\lambda$ ca parametru, utilizându-se consecutiv pentru $C_m$ expresiile (14) sau (16). Din figurile 3 și 4 rezultă că având $F$, $\delta_2$ date, există la fiecare alungire o excentricitate optimă $\alpha^*$, pentru care cuplul de frecări este minim și, ca urmare, și căldura desvoltată în palier. Această excentricitate optimă crește când alungirea scade, potrivit curbelor indicate pe diagrame (fig. 3 și 4) care pot fi reprezentate exact printr'o relație de forma

$$\lambda=g_1+g_2\alpha^*-\frac{g_3}{\alpha^*-\alpha^*_m} \quad (19)$$

în care, pentru $h_0$ variind după (11),

$$g_1=1.439;\quad g_2=-1.434;\quad g_3=0.1869;\quad \alpha^*_m=0.457$$

sau, în cazul $h_0=b=$ constant,

$$g_1=1.4266;\quad g_2=-1.31;\quad g_3=0.1409;\quad \alpha^*_m=0.43$$

Diagramele (fig. 3 și 4) arată apoi că pierderile prin frecare cresc mult când alungirea scade, iar pentru a reduce la minimum căldura desvoltată este necesar, $\delta_2$ fiind dat, să se mărească jocul dintre fus și cuzinet, pe măsură ce se reduce $\lambda$

La fiecare punct al curbelor din figurile 3 și 4 corespunde, conform relației (9), o valoare a coeficientului de încărcare $\zeta^*$. Se pot trasa astfel pe aceleași diagrame (fig. 3 și 4) curbele $k_m=f(\alpha)$ având însă ca parametru $\zeta^*$ în loc de $\lambda$; acestea au fost reprezentate cu linie întreruptă pe figurile corespunzătoare. Ele presupun o valoare constantă a razei fusului, spre deosebire de curbele cu $\lambda=$ const., de-a-lungul cărora, la aceeași sarcină corespunde o variație continuă a diametrului.

Pentru $\alpha^*_m=0{,}457$ (fig. 3) corespunzător pierderilor minime în lagărul de elungire infinită, se poate deduce apoi raportul $\frac{F}{F_\infty}=\frac{\zeta}{\zeta_\infty}$ dintre sarcina to-

Tipei, N. 7341 Gro

Consideratii asupra calculului lagarelor prin alunecare

Buletin stiintific - Sectiunea de stiinte tehnice si chimice, pp. 1-10

Tomul IV, nr. 3-4, 1952



tolă la o alungire oarecare și încărcarea suportată de acelaș lagăr, dar fără scăpări laterale de ulei. Punctele calculate cu ajutorul formulei (8), (fig. 5), corespund aproape exact cu curba continuă obținută pe cale experimentală, prin metoda analogiilor electrice.

De asemenea, s'a calculat coeficientul adimensional

$$\frac{f}{\psi} = \frac{M}{\Delta F} = \frac{\pi}{6}(1-\alpha)\,k_m \tag{20}$$

a cărui variație în funcție de $\alpha$ este reprezentată în figura 6, odată cu curbele calculate de Corovcinschi [2] și de Ianovschi citate în [2], și cu

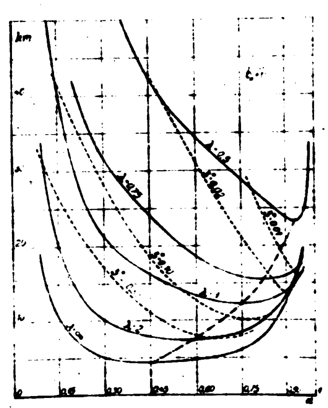


Fig. 5

rezultatele experimentale. Pe porțiunea $0{,}4 \leq \alpha \leq 1$, care interesează în practică, acordul între curbele teoretice este destul de bun, iar corespondența dintre formula propusă (20) în care s'a admis expresia (12) și datele experiențelor este satisfăcătoare în tot domeniul.



Debitul de ulei care scapă pe la capetele palierului, preluând o parte din căldura desvoltată prin frecare este

$$Q = 2r\int_0^{\pi}\int_0^{\lambda} w\,d\theta\,dy = 2\pi\sqrt{r\lambda_2}\,\frac{\sqrt{\beta_{14}}\,\mathrm{th}(\lambda\sqrt{\beta_{14}})}{1-\alpha} \tag{21}$$

în care s'a notat cu $w$ componenta axială a vitezei într'un punct.

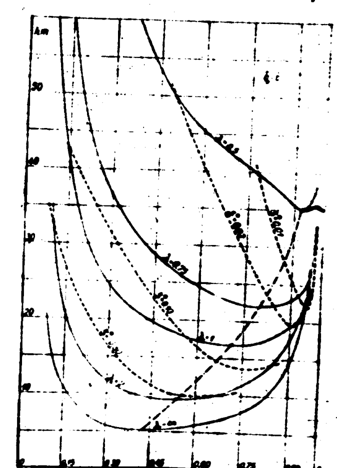


Fig. 6

Folosind relațiile de mai sus, se pot deduce norme și metode de calcul mai exacte pentru lagăre, în diferite ipoteze. Se presupune în toate cazurile

Tipei, N. 7341 Gro
Consideratii asupra calculului lagarelor prin alunecare
Buletin stiintific - Sectiunea de stiinte tehnice si chimice, pp. 1-10
Tomul IV, nr. 3-4, 1952



că se cunoaşte sarcina totală $F$, viteza de rotaţie $\omega$ sau viteza periferică $V$, viscozitatea $\mu_1$ a uleiului la temperatura normală de alimentare şi $\delta_2$, grosimea minimă admisibilă a peliculei de ulei.

1. Din diagramele din figurile 3 şi 4 rezultă că este avantajos să se ia alungirea $\lambda > 1$ spre a menţine în palier o temperatură cât mai scăzută. Avan-

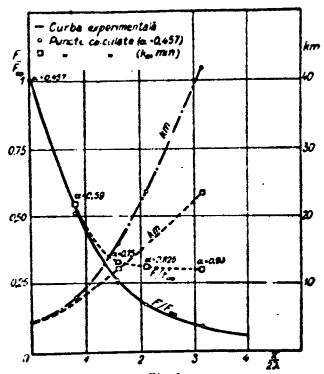



Fig. 5

tajul alungirilor mari creşte puţin cu $\lambda$, când acesta depăşeşte valoarea 2. Se pot admite deci $\lambda \sim 1,5$ şi alege punctul de funcţionare pe curba valorilor $km$ minime. Rezultă astfel coeficientul de moment $km$ şi $\alpha = \alpha^*$. Din (8) şi (9) se scoate $\zeta^*$ şi raza $r$ a fusului, apoi jocul radial

$$\Delta = \frac{\delta_2}{1 - \alpha} \tag{22}$$

Dacă lagărul lucrează mult în domeniul ungerii semifluide, prin porniri şi opriri repetate, $\Delta$ trebue să fie cât mai mic posibil şi în acest caz valorile $\alpha^*$ sunt prea mari pentru alungirile $\lambda \sim 1,5$. In acest caz, este avantajos să se adopte criteriile dela punctul următor.



Presiunea maximă corespunde unghiului $\theta_M$ dat de relaţia

$$\cos\theta_M = \frac{1 + 2\alpha a - \sqrt{(1 - 2\alpha a)^2 + 8(\alpha - 2a)^2}}{2(4a - \alpha)} \tag{23}$$

şi are valoarea

$$p_M = p_0 + \frac{6\mu_1 V r}{\delta_2^2} \cdot \frac{\alpha(1-\alpha)^2}{1-\alpha}\left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\zeta_{1A}}}\right)\frac{\sin\theta_M - a\sin 2\theta_M}{(1 + \alpha\cos\theta_M)^3} \tag{24}$$

care trebue să rămână sub limita elastică a materialului din care este construit cuzinetul. In cazul contrariu, se vor alege alte valori pentru $\lambda$ şi $\alpha$, modificându-se cel puţin unul din aceşti parametri.

Ţinându-se seama de (21) şi de condiţiile de echilibru termic rezultă apoi temperaturile medie şi maximă. In cazul când acestea sunt prea mari sau prea mici, trebue variat în consecinţă $k_m$, alegându-se o altă alungire.

2. Asigurându-se o răcire forţată, se poate găsi diametrul minim necesar al fusului. După cum s'a arătat, se va admite $\alpha \approx 0,3$. Din (9) rezultă produsul $\lambda r^4 \zeta = \frac{1}{2} b r^3 \zeta$. Din (18) sau din diagramele din figurile 3 şi 4 se poate deduce $k_m$ pentru diferite alungiri şi excentricitatea $\alpha$ aleasă. Concluziunile asupra valorii lui $\lambda$ sunt aceleaşi ca la punctul precedent şi permit să se ia o valoare a alungirii, după care rezultă raza şi toate celelalte elemente.

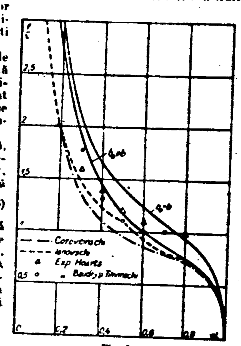



Fig. 6

3. Din calculul de rezistenţă a fusului se poate impune o valoare pentru rază; $\zeta^*$ rezultă din (9) şi se va admite pentru excentricitate valoarea care face minim pe $k_m$ (fig. 3 şi 4) pentru $\zeta^*$ corespunzător. Din (18) se scoate alungirea $\lambda$, sau se determină grafic şi se continuă ca la punctul (1).

4. Pentru evitarea vibraţiilor sau pentru asigurarea paralelismului dintre fus şi cuzinet, se prescrie alungirea $\lambda$. Din (19) sau grafic, rezultă $\alpha^* = \alpha$, apoi $\zeta^*$, $r$, etc.

5. Este important uneori să se realizeze o lungime minimă a arborelui. Aceasta variază după relaţia

$$b = \lambda\sqrt[6]{\frac{8F\delta_2^3}{\mu_1\omega\zeta^*}} = k_1\frac{\lambda}{\sqrt[6]{\zeta^*}} \tag{25}$$

Tipei, N. 7341 Gro

Consideratii asupra calculului lagarelor prin alunecare
Buletin stiintific - Sectiunea de stiinte tehnice si chimice, pp. 1-10
Tomul IV, nr. 3-4, 1952



şi descreşte continuu odată cu alungirea. Se va alege deci o valoare $\lambda$ cât mai mică, verificându-se temperaturile, deoarece pentru $\lambda<0,7$ coeficientul $k_m$ creşte mult. Excentricitatea se alege de asemenea $\varepsilon = 0,3$ spre a obţine $\zeta^*$ maxim.

6. Greutatea fusului şi a întregului lagăr se poate admite că depinde de produsul $br^2$, care este minim pentru $\varepsilon = 0,3$ şi alungirea dată de expresia

$$4\frac{\mathrm{th}\,\lambda\sqrt{\beta_{1A}}}{\lambda\sqrt{\beta_{1A}}} = 1 + \frac{3}{\mathrm{ch}^2\lambda\sqrt{\beta_{1A}}} \qquad (26)$$

sau $\lambda = 4$. Chiar dacă nu se admite această valoare, este bine, dacă prevalează reducerea greutăţii, să se ia $\lambda = 2$, având avantajul şi al unui coeficient de moment redus. Plecând dela $\lambda = 0,5$ greutatea fusului scade la jumătate pentru $\lambda = 1$ şi o treime pentru $\lambda = 2$.

7. Dacă posibilităţile de radiaţie a căldurii în exterior sunt reduse, această căldură trebue evacuată prin uleiul care spală spaţiul dintre fus şi cuzinet şi al cărui debit este $Q_s$ (21); acesta se mai poate scrie

$$Q_s = \omega\delta_2^2\sqrt{\frac{F}{\mu_1\omega}}\cdot\frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2}\sqrt{\frac{(1+\varepsilon)\beta_{1A}}{\lambda 3\sqrt{C_a^2+C_t^2}}}\cdot\frac{\mathrm{th}(\lambda\sqrt{\beta_{1A}})}{\lambda\sqrt{\beta_{1A}}} = \delta_2^2\sqrt{\frac{F\omega}{\mu_1}}\,C_q, \qquad (27)$$

şi se poate vedea că $Q_s$ creşte când $\varepsilon$ se măreşte şi $\lambda$ scade, fiind de două ori mai mare pentru $\lambda = 0,8$ decât pentru $\lambda = 2$ şi de 2,5 ori mai mare când $\lambda = 0,5$. In aceste cazuri este bine deci să se ia $\lambda \geqslant 0,75$. Sub această valoare, creşterea coeficientului $k_m$ anulează avantajul unui debit mare de ulei.

8. Presiunea specifică medie maximă se obţine pentru minimul suprafeţei $br$, corespunzând valorii

$$br = \sqrt{\frac{F\delta_2^2}{\mu_1\omega}}\cdot\frac{\lambda}{\sqrt{\zeta^*}} \qquad (28)$$

din care se deduce $\varepsilon = 0,3$ şi $\lambda = 1,2$. Cu această alungire se obţin dimensiunile cele mai reduse ale lagărului; totuşi, presiunile mai ridicate fac ca această valoare să nu fie recomandabilă pentru cazul funcţionării frecvente în regim semifluid (maşini cu porniri şi opriri dese). Este mai bine, în aceste condiţii, să se ia $\lambda < 1$, asigurându-se o zonă mai mare de contact între suprafeţe, în lipsa peliculei de ulei.

Din figura 5 se vede cum variază factorul de pierderi faţă de palierul fără scăpări laterale atunci când se aplică primul caz de calcul. Acest factor este mult mai ridicat (curba punctată) pentru alungirile mici, decât după normele obişnuite de calcul. Raza fusului rezultă de asemenea mai mare, ceea ce constitue un avantaj pentru evitarea vibraţiilor şi a deformaţiilor, iar căldura dezvoltată, direct proporţională cu $k_m$ (curba punctată) se reduce mult faţă de normele obişnuite (curba plină).

Constantinescu, V.N. 7344 Gross

Calculul lagarelor fara joc radial supuse la forte si viteze variabile

Studii si gercetari de mecanica aplicata, Tomul VIII, nr. 3, 1957, pp. 1-16

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 3, 1957

*UNGERE – FRECARE – UZURĂ*

# CALCULUL LAGĂRELOR FĂRĂ JOC RADIAL SUPUSE LA FORȚE ȘI VITEZE VARIABILE

DE

V. N. CONSTANTINESCU

Într-o lucrare anterioară [1] s-a arătat că ecuația diferențială a distribuției presiunilor în filmul de lubrifiant dintr-un lagăr fără joc radial, pentru regimuri nepermanente, este

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\delta^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)+r^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\delta^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}\right)=6r^2\left[(\Omega+2\,\dot{\varphi})\frac{\partial\delta}{\partial\theta}+2\dot{\delta}\right], \qquad (1)$$

în care $p$ este presiunea, $\delta$ grosimea stratului de lubrifiant,

$$\delta = e\cos\theta, \qquad (2)$$

$\mu$ viscozitatea (presupusă că variază invers proporțional cu grosimea $\delta$ : $\mu=\mu_1\frac{\delta_1}{\delta}=\frac{\mu_1}{\cos\theta}$, $\delta_1$ fiind grosimea maximă $\delta$), $r$ raza fusului, $\Omega$ viteza unghiulară a fusului, $e$ excentricitatea, iar $\varphi$ (fig. 1) este unghiul dintre linia centrelor și o direcție fixă $OX$.

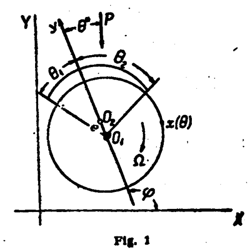



Fig. 1

Soluția problemei se pune sub forma

$$p=\overline{p}+\overline{\overline{p}}. \qquad (3)$$

Funcția $\overline{p}$ va satisface ecuația diferențială

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\delta^3}{\mu}\frac{\partial\overline{p}}{\partial\theta}\right)+r^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\delta^3}{\mu}\frac{\partial\overline{p}}{\partial z}\right)=6r^2(\Omega+2\,\dot{\varphi})\frac{\partial\delta}{\partial\theta} \qquad (4)$$

Constantinescu, V.N. 7344 Gross
Calculul lagarelor fara joc radial supuse la forte si viteze variabile
Studii și gercetari de mecanica aplicata, Tomul VIII, nr. 3, 1957, pp. 1-16



şi va avea aceeaşi expresie, ca şi pentru cazul regimurilor permanente [2], dacă se consideră pentru $\bar{\bar p}$ aceleaşi condiţii la limită ca şi pentru funcţia $p$ ($\bar{\bar p} = p_0$, presiunea din mediul înconjurător, la frontierele lagărului).

Funcţia $\bar{\bar p}$ va satisface atunci ecuaţia diferenţială

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\delta^3}{\mu}\frac{\partial\bar{\bar p}}{\partial\theta}\right)+r^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\delta^3}{\mu}\frac{\partial\bar{\bar p}}{\partial z}\right)=12\,r^2\,\dot\delta \tag{5}$$

şi condiţiile la limită $\bar{\bar p} = 0$ pe frontierele lagărului.

În cazul problemei bidimensionale, $\bar{\bar p}$ este

$$\bar{\bar p}_\infty=\frac{12r^2\mu_1\dot e}{e^3}\left(\frac{1}{\cos\theta}+C_1\mathrm{tg}\,\theta+C_2\right). \tag{6}$$

În cazul problemei tridimensionale, considerînd soluţia dezvoltată în serie trigonometrică în raport cu θ, se obţine [1]

$$\begin{aligned}\bar{\bar p}=&\frac{24\,\mu_1 r^2\dot e}{e^3\cos\theta}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg\{\pm\frac{4n}{4n^2-1}\left[C_2+\frac{2}{\pi}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{\sin(2m-1)\alpha_s\pi}{(2m-1)\alpha_s}\right]\times\\&\times\left[1-\frac{\mathrm{ch}\sqrt{4n^2-1}\,\frac{z}{r}}{\mathrm{ch}\lambda\sqrt{4n^2-1}}\right]\sin 2n\theta-\\&-\frac{1}{\pi}\sum_{s=1}^{\infty}\left[\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+n}\frac{2(2m-1)\alpha_s\sin(2m-1)\alpha_s\pi}{(2m-1)^2\alpha_s^2-n^2}\right]\times\\&\times\left\{\left[1-\frac{\mathrm{ch}\sqrt{\frac{n}{\alpha_s}\left(\frac{n}{\alpha_s}-2\right)}\frac{z}{r}}{\mathrm{ch}\lambda\sqrt{\frac{n}{\alpha_s}\left(\frac{n}{\alpha_s}-2\right)}}\right]\cos\left(\frac{n}{\alpha_s}-1\right)\theta+\left[1-\frac{\mathrm{ch}\sqrt{\frac{n}{\alpha_s}\left(\frac{n}{\alpha_s}+2\right)}\frac{z}{r}}{\mathrm{ch}\lambda\sqrt{\frac{n}{\alpha_s}\left(\frac{n}{\alpha_s}+2\right)}}\right]\cos\left(\frac{n}{\alpha_s}+1\right)\theta\right\}-\\&-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{C_{1s}}{\pi}\left[\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+n}\frac{n\sin 2m\alpha_s\pi}{4m^2\alpha_s^2-n^2}\right]\times\\&\times\left\{\left[1-\frac{\mathrm{ch}\sqrt{\frac{n}{\alpha_s}\left(\frac{n}{\alpha_s}-2\right)}\frac{z}{r}}{\mathrm{ch}\lambda\sqrt{\frac{n}{\alpha_s}\left(\frac{n}{\alpha_s}-2\right)}}\right]\sin\left(\frac{n}{\alpha_s}-1\right)\theta+\left[1-\frac{\mathrm{ch}\sqrt{\frac{n}{\alpha_s}\left(\frac{n}{\alpha_s}+2\right)}\frac{z}{r}}{\mathrm{ch}\lambda\sqrt{\frac{n}{\alpha_s}\left(\frac{n}{\alpha_s}+2\right)}}\right]\sin\left(\frac{n}{\alpha_s}+1\right)\theta\right\}\Bigg\},\end{aligned} \tag{7}$$

în care $\alpha_s$ este un parametru arbitrar $\frac{\theta_2}{\pi}\leqslant\alpha_s<0{,}5$, $\lambda=\frac{b}{2r}$ alungirea lagărului, iar $C_{1s}$ şi $C_2$ constante arbitrare care se determină punînd condiţiile la limită pentru $\bar{\bar p}$ la $\theta=-\theta_1,\ \theta_2$ (condiţiile la limită pentru $z=\pm\frac{b}{2}$



sînt satisfăcute în mod automat). Semnul (±), afectat la unii din termeni, se ia (+) pentru $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ şi (−) pentru $-\pi<\theta<0$.

Relaţia (7), împreună cu expresia funcţiei $\bar p$ [3] reprezintă soluţia riguroasă a problemei, dar sub o formă greu utilizabilă în aplicaţii. Se pot aduce însă relaţiei (7) simplificări asemănătoare cu cele operate asupra funcţiei $p$ din cazul regimurilor de funcţionare permanente [3].

Astfel, parantezele care depind numai de $z$ din relaţia (7) sînt practic egale între ele pentru $n$ suficient de mare şi riguros egale cînd $n\to\infty$. Într-adevăr, considerînd aceste paranteze egale, se comite o eroare ce nu depăşeşte 5% la $n=3$; 1,8% la $n=4$; 0,6% la $n=5$; 0,3% la $n=6$ etc. În consecinţă, aceşti termeni pot fi consideraţi egali între ei pentru $n\geqslant n_1$, cu $n_1\geqslant 3$.

Dacă se consideră aceşti termeni ca fiind egali între ei chiar de la $n=1$, atunci, dînd factor comun pe unul dintre ei, se obţine o expresie ce se poate însuma (reprezentînd dezvoltarea în serie a lui $\bar{\bar p}_\infty$). Corectînd apoi termenii cu $1\leqslant n\leqslant n_1$ (scăzînd valorile admise şi adăugînd pe cele reale) expresia (7) se poate scrie sub forma

$$\begin{aligned}\bar{\bar p}=&\frac{12\mu_1 r^2\dot e}{e^3}a(z)\left[\frac{1}{\cos\theta}+C_1\mathrm{tg}\,\theta+C_2\right]+\\&+\frac{24\mu_1 r^2\dot e}{e^3\cos\theta}\sum_{s=1}^{1=\sigma}\sum_{n=1}^{n=n_1}\Big\{\gamma_n a_n(z)\sin 2n\theta-\frac{S_n'}{\pi}\left[b_n(z)\cos\left(\frac{n}{\alpha_s}-1\right)\theta+\right.\\&\left.+c_n(z)\cos\left(\frac{n}{\alpha_s}+1\right)\theta\right]-\frac{C_{1s}S_n}{\pi}\left[b_n(z)\sin\left(\frac{n}{\alpha_s}-1\right)\theta+c_n(z)\sin\left(\frac{n}{\alpha_s}+1\right)\theta\right]\Big\},\end{aligned} \tag{8}$$

în care $a(z)$, $a_n(z)$, $b_n(z)$, $c_n(z)$ sînt egale cu

$$\left.\begin{aligned}a(z)&=1-\frac{\mathrm{ch}\sqrt{4n_1^2-1}\,\frac{z}{r}}{\mathrm{ch}\lambda\sqrt{4n_1^2-1}},\quad a_n(z)=\frac{\mathrm{ch}\sqrt{4n_1^2-1}\,\frac{z}{r}}{\mathrm{ch}\lambda\sqrt{4n_1^2-1}}-\frac{\mathrm{ch}\sqrt{4n^2-1}\,\frac{z}{r}}{\mathrm{ch}\lambda\sqrt{4n^2-1}},\\b_n(z)&=\frac{\mathrm{ch}\sqrt{4n_1^2-1}\,\frac{z}{r}}{\mathrm{ch}\lambda\sqrt{4n_1^2-1}}-\frac{\mathrm{ch}\sqrt{\frac{n}{\alpha_s}\left(\frac{n}{\alpha_s}-2\right)}\frac{z}{r}}{\mathrm{ch}\lambda\sqrt{\frac{n}{\alpha_s}\left(\frac{n}{\alpha_s}-2\right)}},\\c_n(z)&=\frac{\mathrm{ch}\sqrt{4n_1^2-1}\,\frac{z}{r}}{\mathrm{ch}\lambda\sqrt{4n_1^2-1}}-\frac{\mathrm{ch}\sqrt{\frac{n}{\alpha_s}\left(\frac{n}{\alpha_s}+2\right)}\frac{z}{r}}{\mathrm{ch}\lambda\sqrt{\frac{n}{\alpha_s}\left(\frac{n}{\alpha_s}+2\right)}},\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

iar

$$\gamma_n=\pm\frac{4n}{4n^2-1}\left[C_2+\frac{2}{\pi}S''\right]. \tag{10}$$

Constantinescu, V.N. 7344 . Gross
Calculul lagarelor fara joc radial supuse la forte si viteze variabile
Studii si cercetari de mecanica aplicata, Tomul VIII, nr. 3, 1957, pp. 1-16



În aceste expresii sumele $S_n$, $S'_n$, $S''$ sînt respectiv egale cu

$$\left.\begin{aligned} S_n &= \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+n}\frac{n\sin 2m\alpha_s\pi}{4m^2\alpha_s^2-n^2},\\ S'_n &= \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+n}\frac{2(2m-1)\alpha_s\sin(2m-1)\alpha_s\pi}{(2m-1)^2\alpha_s^2-n^2},\\ S'' &= \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{\sin(2m-1)\alpha_s\pi}{(2m-1)\alpha_s} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

şi care au respectiv valorile

$$\left.\begin{array}{lll} S_1 = -1, & S'_1 = +0{,}16 & \text{pentru } n = 1\\ S_2 = 0{,}75, & S'_2 = -0{,}175 & \text{pentru } n = 2\\ S_3 = -0{,}4, & S'_3 = -0{,}34 & \text{pentru } n = 3 \text{ etc.}\\ & \text{şi } S'' = 3{,}35 & \end{array}\right\} \tag{12}$$

pentru

$$\alpha_1 = \alpha_s = \alpha_s = 0{,}45, \tag{13}$$

lucru posibil întotdeauna, deoarece $\alpha'_s = 0{,}45$ corespunde unui maxim de 81°, limită care în general nu trebuie depăşită pentru asigurarea unei funcţionări în regim hidrodinamic [3].

Prin limitarea parametrilor $\alpha_s$ la unul singur, rămîn ca nedeterminate numai două constante arbitrare $C_2$ şi $C_{1s} = C_{11} = C_1$. În consecinţă, ca şi pentru cazul regimurilor permanente, condiţiile la limită pe frontierele $\theta = -\theta_1$ şi $\theta = \theta_2$ nu vor fi riguros îndeplinite, ci numai aproximativ. Rezultate bune se vor obţine impunînd aceste condiţii nu la mijlocul lagărului ci pentru

$$\theta = -\theta_1,\ \theta = \theta_2 \text{ şi } z = 0{,}2\ b,\ \overline{\overline{p}} = 0. \tag{14}$$

În condiţiile arătate mai sus, distribuţia presiunilor $\overline{\overline{p}}$ (8) se scrie în mod explicit sub următoarea formă:

$$\begin{aligned} \overline{\overline{p}} = {} & \frac{12\mu_1 r^2\dot{\varepsilon}}{e^3}\left(1-\frac{\operatorname{ch} 5{,}916\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 5{,}916\lambda}\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}+C_1\operatorname{tg}\theta+C_2\right)+\\ & +\frac{24\mu_1 r^2\dot{\varepsilon}}{e^3\cos\theta}\left\{\pm\left(\frac{\operatorname{ch} 5{,}916\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 5{,}916\lambda}-\frac{\operatorname{ch} 1{,}732\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 1{,}732\lambda}\right)\frac{4}{3}C'_2\sin 2\theta\pm\right.\\ & \pm\left(\frac{\operatorname{ch} 5{,}916\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 5{,}916\lambda}-\frac{\operatorname{ch} 3{,}873\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 3{,}873\lambda}\right)\frac{8}{15}C'_2\sin 4\theta+\\ & +\frac{C_1}{\pi}\left[\left(\frac{\operatorname{ch} 5{,}916\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 5{,}916\lambda}-\frac{\operatorname{ch} 0{,}703\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 0{,}703\lambda}\right)\sin 1{,}222\theta+\right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \left.+\left(\frac{\operatorname{ch} 5{,}916\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 5{,}916\lambda}-\frac{\operatorname{ch} 3{,}063\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 3{,}063\lambda}\right)\sin 3{,}222\theta\right]-\\ & -0{,}75\frac{C_1}{\pi}\left[\left(\frac{\operatorname{ch} 5{,}916\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 5{,}916\lambda}-\frac{\operatorname{ch} 3{,}296\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 3{,}296\lambda}\right)\sin 3{,}444\theta+\right.\\ & \left.+\left(\frac{\operatorname{ch} 5{,}916\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 5{,}916\lambda}-\frac{\operatorname{ch} 5{,}352\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 5{,}352\lambda}\right)\sin 5{,}444\theta\right]-\\ & -\frac{0{,}16}{\pi}\left[\left(\frac{\operatorname{ch} 5{,}916\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 5{,}916\lambda}-\frac{\operatorname{ch} 0{,}703\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 0{,}703\lambda}\right)\cos 1{,}222\theta+\right.\\ & \left.+\left(\frac{\operatorname{ch} 5{,}916\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 5{,}916\lambda}-\frac{\operatorname{ch} 3{,}063\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 3{,}063\lambda}\right)\cos 3{,}222\theta\right]+\\ & +\frac{0.175}{\pi}\left[\left(\frac{\operatorname{ch} 5{,}916\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 5{,}916\lambda}-\frac{\operatorname{ch} 3{,}296\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 3{,}296\lambda}\right)\cos 3{,}444\theta+\right.\\ & \left.\left.+\left(\frac{\operatorname{ch} 5{,}916\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 5{,}916\lambda}-\frac{\operatorname{ch} 5{,}352\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 5{,}352\lambda}\right)\cos 5{,}444\theta\right]\right\}, \end{aligned} \tag{15}$$

în care s-a considerat $n_1 = 3$ şi $C_2 + S'' = C'_2$, iar constantele $C_1$ şi $C'_2$ se determină cu ajutorul condiţiilor la limită (14).

★

Cunoscînd repartiţia presiunilor se poate calcula şi rezultanta presiunilor ca şi momentele de frecare pe fus şi pe cuzinet, debitul de lubrifiant etc.

Astfel, alegînd două axe $t$ şi $n$ după linia centrelor şi normala la aceasta (fig. 2) şi notînd cu $P$ rezultanta presiunilor, atunci

$$\left.\begin{aligned} \overline{\overline{P}}_n &= \int_{-\theta_1}^{\theta_2}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\overline{\overline{p}}\sin\theta\, r\, d\theta\, dz,\\ \overline{\overline{P}}_t &= \int_{-\theta_1}^{\theta_2}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\overline{\overline{p}}\cos\theta\, r\, d\theta\, dz. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

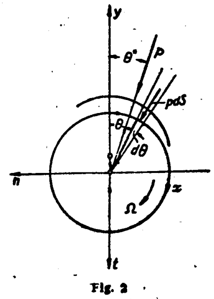


Fig. 2

Pentru calculul expresiilor (16) intervin integrale de forma

$$I_k = \int_{-\theta_1}^{\theta_2}\sin k\theta\operatorname{tg}\theta\, d\theta,\quad I_k^* = \int_{-\theta_1}^{\theta_2}\cos k\theta\operatorname{tg}\theta\, d\theta. \tag{17}$$

Constantinescu, V.N. 7344 Gross
Calculul lagarelor fara joc radial supuse la forte si viteze variabile
Studii si cercetari de mecanica aplicata, Tomul VIII, nr. 3, 1957, pp. 1-16



Prima din aceste integrale intervine şi în calculul rezultantei presiunilor pentru regimurile permanente (cu forţe şi viteze constante) [2]. Astfel, pentru $\operatorname{tg}\theta$ se poate întrebuinţa dezvoltarea aproximativă

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\theta &= a + b\theta - \frac{1}{\theta - \frac{\pi}{2}}, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{tg}\theta &= -a + b\theta - \frac{1}{\theta - \frac{\pi}{2}}, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < 0, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

cu

$$a = \frac{1}{2}\left(1 + \pi\frac{B_2}{2!}\right) - \frac{1}{1 - e^{-\pi/2}}, \quad b = \frac{1}{2} - \frac{B_2}{2!}, \quad B_2 = \frac{1}{6} \tag{19}$$

În acest mod [2]

$$I_h = 2\frac{a}{h} + \frac{b}{h^2}(\sin h\theta_2 + \sin h\theta_1) - \frac{1}{h}[(a + b\theta_2)\cos h\theta_2 + (a + b\theta_1)\cos h\theta_1] + \cos h\frac{\pi}{2}\left[-2\operatorname{si}h\frac{\pi}{2} - \operatorname{si}h\left(\theta_2 - \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{si}h\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right)\right] + \sin h\frac{\pi}{2}\left[2\operatorname{ci}h\frac{\pi}{2} - \operatorname{ci}h\left(\theta_2 - \frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{ci}h\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right)\right]. \tag{20}$$

De asemenea,

$$\int \cos h\theta \operatorname{tg}\theta d\theta = \frac{b}{h^2}\cos h\theta + \frac{1}{h}(a + b\theta)\sin h\theta + \sin h\frac{\pi}{2}\operatorname{si}h\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) - \cos h\frac{\pi}{2}\operatorname{ci}h\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \tag{21}$$

şi astfel

$$I_h^* = \frac{b}{h^2}(\cos h\theta_2 - \cos h\theta_1) + \frac{1}{h}[(a + b\theta_2)\sin h\theta_2 - (a + b\theta_1)\sin h\theta_1] + \sin h\frac{\pi}{2}\left[-2\operatorname{si}h\frac{\pi}{2} + \operatorname{si}h\left(\theta_2 - \frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{si}\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right)\right] - \cos h\frac{\pi}{2}\left[2\operatorname{ci}h\frac{\pi}{2} + \operatorname{ci}h\left(\theta_2 - \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{ci}h\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right)\right], \tag{22}$$

în care $h$ are succesiv valorile $h = 1{,}222;\ 3{,}222,\ 3{,}444;\ 5{,}444.$



Dacă se mai notează

$$\left.\begin{aligned} \overline{\overline{C}}_n &= \frac{c^3\overline{\overline{P}}_n}{12\mu_1 r^3 \dot{\varepsilon} b}, \\ \overline{\overline{C}}_t &= \frac{c^3\overline{\overline{P}}_t}{12\mu_1 r^3 \dot{\varepsilon} b}, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

coeficientul $\overline{\overline{C}}_n$ rezultă egal cu

$$\overline{\overline{C}}_n = \left(1 - \frac{\operatorname{th} 5{,}916\lambda}{5{,}916\lambda}\right)\Big\{\ln\cos\theta_1 - \ln\cos\theta_2 + C_1\left[\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta_1}{2}\right) - \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta_2}{2}\right) - (\sin\theta_2 + \sin\theta_1)\right] - C_2(\cos\theta_2 - \cos\theta_2)\Big\} + \frac{8}{3}C_2'\left(\frac{\operatorname{th} 5{,}916\lambda}{5{,}916\lambda} - \frac{\operatorname{th} 1{,}732\lambda}{1{,}732\lambda}\right)\left(\theta_2 - \theta_1 + \frac{\sin 2\theta_1}{2} - \frac{\sin 2\theta_2}{2}\right) + \frac{16}{5}C_2'\left(\frac{\operatorname{th} 5{,}916\lambda}{5{,}916\lambda} - \frac{\operatorname{th} 3{,}873\lambda}{3{,}873\lambda}\right)\left(\theta_2 - \sin 2\theta_2 + \frac{\sin 4\theta_2}{4} - \theta_1 + \sin 2\theta_1 - \frac{\sin 4\theta_1}{4}\right) + \frac{1}{\pi}\left(\frac{\operatorname{th} 5{,}916\lambda}{5{,}916\lambda} - \frac{\operatorname{th} 0{,}703\lambda}{0{,}703\lambda}\right)(2C_1 I_{1,222} - 0{,}32 I_{1,222}^*) + \frac{1}{\pi}\left(\frac{\operatorname{th} 5{,}916\lambda}{5{,}916\lambda} - \frac{\operatorname{th} 3{,}063\lambda}{3{,}063\lambda}\right)(2C_1 I_{3,222} - 0{,}32 I_{3,222}^*) - \frac{1}{\pi}\left(\frac{\operatorname{th} 5{,}916\lambda}{5{,}916\lambda} - \frac{\operatorname{th} 3{,}296\lambda}{3{,}296\lambda}\right)(1{,}5\, C_1 I_{3,444} - 0{,}35 I_{3,444}^*) - \frac{1}{\pi}\left(\frac{\operatorname{th} 5{,}916\lambda}{5{,}916\lambda} - \frac{\operatorname{th} 5{,}352\lambda}{5{,}352\lambda}\right)(1{,}5 C_1 I_{5,444} - 0{,}35 I_{5,444}^*), \tag{24}$$

iar coeficientul $C_t$

$$\overline{\overline{C}}_t = \left(1 - \frac{\operatorname{th} 5{,}916\lambda}{5{,}916\lambda}\right)[\theta_2 + \theta_1 - C_1(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) + C_2(\sin\theta_2 + \sin\theta_1)] + \frac{8}{3}C_2'\left(\frac{\operatorname{th} 5{,}916\lambda}{5{,}916\lambda} - \frac{\operatorname{th} 1{,}732\lambda}{1{,}732\lambda}\right)(\sin\theta_2 + \sin\theta_1) + \frac{8}{30}C_2'\left(\frac{\operatorname{th} 5{,}916\lambda}{5{,}916\lambda} - \frac{\operatorname{th} 3{,}873\lambda}{3{,}873\lambda}\right)(2 - \cos 4\theta_1 - \cos 4\theta_2) + \frac{1}{1{,}222\pi}\left(\frac{\operatorname{th} 5{,}916\lambda}{5{,}916\lambda} - \frac{\operatorname{th} 0{,}703\lambda}{0{,}703\lambda}\right)[2C_1(\cos 1{,}222\theta_1 - \cos 1{,}222\,\theta_2) - 0{,}32(\sin 1{,}222\,\theta_1 + \sin 1{,}222\,\theta_2)] + \frac{1}{3{,}222\pi}\left(\frac{\operatorname{th} 5{,}916\lambda}{5{,}916\lambda} - \frac{\operatorname{th} 3{,}063\lambda}{3{,}063\lambda}\right)[2C_1(\cos 3{,}222\,\theta_1 - \cos 3{,}222\,\theta_2) - 0{,}32(\sin 3{,}222\,\theta_1 +$$

Constantinescu, V.N. 7344 Gross
Calculul lagarelor fara joc radial supuse la forte si viteze variabile
Studii si cercetari de mecanica aplicata, Tomul VIII, nr. 3, 1957, pp. 1-16



$$+ \sin 3{,}222\,\theta_2)] - \frac{1}{3{,}444\pi}\left(\frac{\mathrm{th}\,5{,}916\,\lambda}{5{,}916\,\lambda} - \frac{\mathrm{th}\,3{,}296\,\lambda}{3{,}296\,\lambda}\right)[1{,}5\,C_1(\cos 3{,}444\,\theta_1 -$$

$$- \cos 3{,}444\,\theta_2) - 0{,}35(\sin 3{,}444\,\theta_2 + \sin 3{,}444\,\theta_1)] - \frac{1}{5{,}444\pi}\left(\frac{\mathrm{th}\,5{,}916\,\lambda}{5{,}916\,\lambda} -\right.$$

$$\left. - \frac{\mathrm{th}\,5{,}352\,\lambda}{5{,}352\,\lambda}\right)[1{,}5\,C_1(\cos 5{,}444\,\theta_1 - \cos 5{,}444\,\theta_2) - 0{,}35(\sin 5{,}444\,\theta_1 +$$

$$+ \sin 5{,}444\,\theta_2)]. \qquad (25)$$

Pentru rezultanta presiunilor $\bar{p}$, notînd

$$\left.\begin{aligned} \bar{C}_n &= \frac{\bar{P}_n c^2}{2\mu_1(\Omega + 2\dot{\varphi})br^3}, \\ \bar{C}_t &= \frac{\bar{P}_t c^2}{2\mu_1(\Omega + 2\dot{\varphi})br^3}, \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

coeficienții $\bar{C}_n$ și $\bar{C}_t$ au aceleași expresii ca și coeficienții $C_n$ și $C_t$ corespunzători regimului de lucru permanent, a căror expresie analitică este dată în lucrarea citată [2], unde au fost calculați în diferite cazuri, rezultatele fiind reprezentate sud formă de diag ame.

Astfel cele două proiecții ale rezultantei presiunilor vor fi

$$\left.\begin{aligned} P_n &= \bar{P}_n + \bar{\bar{P}}_n = \frac{2\mu_1(\Omega + 2\dot{\varphi})br^3}{c^2}\bar{C}_n + \frac{12\mu_1 r^3 b\dot{e}}{c^3}\bar{\bar{C}}_n, \\ P_t &= \bar{P}_t + \bar{\bar{P}}_t = \frac{2\mu_1(\Omega + 2\dot{\varphi})br^3}{c^2}\bar{C}_t + \frac{12\mu_1 r^3 b\dot{e}}{c^3}\bar{\bar{C}}_t. \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

Momentul forțelor de frecare pe fus și pe cuzinet [2]

$$M(M_c) = -\int_{-\theta_1}^{\theta_2}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} r^2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0,\delta} d\theta\, dz, \qquad (28)$$

cu

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}y(y-\delta) + V_{11}\left(1 - \frac{y}{\delta}\right) + V_{21}\frac{y}{\delta}, \qquad (29)$$

în care [1]

$$\left.\begin{aligned} V_{11} &= r\Omega, \\ V_{21} &= -\dot{e}\sin\theta - e\dot{\varphi}\cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

Deoarece $p = \bar{p} + \bar{\bar{p}}$, vom pune

$$u = \bar{u} + \bar{\bar{u}}. \qquad (31)$$



în care

$$\left.\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{1}{2\mu}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}y(y-\delta) + V_{11}\left(1 - \frac{y}{\delta}\right), \\ \bar{\bar{u}} &= \frac{1}{2\mu}\frac{\partial \bar{\bar{p}}}{\partial x}y(y-\delta) + V_{21}\frac{y}{\delta}, \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

iar momentele de frecare corespunzătoare le vom nota cu $\bar{M}(\bar{M}_c)$, respectiv cu $\bar{\bar{M}}(\bar{\bar{M}}_c)$.

Astfel, integrînd prin părți și ținînd seama că $\mu = \mu_1\frac{\delta}{c}$,

$$\bar{M}(\bar{M}_c) = \frac{\mu_1\Omega br^3}{c}(\theta_1 + \theta_2) \pm \frac{e}{2}\bar{P}_n \qquad (33)$$

și

$$\bar{\bar{M}}(\bar{\bar{M}}_c) = \frac{\mu_1 br^2}{c}[\dot{e}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) + e\dot{\varphi}(\sin\theta_2 + \sin\theta_1)] \pm \frac{e}{2}\bar{\bar{P}}_n. \qquad (34)$$

Momentul total al forțelor de frecare va fi dat de suma momentelor $\bar{M}$ și $\bar{\bar{M}}$, adică

$$M = \frac{\mu_1 br^2}{c}[r\Omega(\theta_1 + \theta_2) + \dot{e}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) + e\dot{\varphi}(\sin\theta_2 +$$

$$+ \sin\theta_1)] \pm \frac{e}{2}P_n. \qquad (35)$$

În sfîrșit, debitul de lubrifiant care trece prin lagăr este

$$Q = \int_0^{\delta}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}(u)_{\theta=-\theta_1}\,dy\,dz \qquad (36)$$

sau, ținînd seama de relația (28),

$$Q = (V_{11} + V_{21})_{\theta=-\theta_1}\frac{cb}{2}\cos\theta_1 - \frac{c^3}{12\mu_1}\cos^3\theta_1\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{\theta=-\theta_1}dz, \qquad (37)$$

ultima integrală efectuîndu-se fără dificultăți, dacă se ține seama de expresiile funcțiilor $\bar{p}$ [2] și $\bar{\bar{p}}$ (15) a căror sumă este egală cu presiunea $p$.

Dacă notăm acum cu $e_0$, $\Omega_0$, valori de referință, constante pentru excentricitatea și viteza unghiulară de rotație și cu

$$\zeta = \frac{p\,c_0^2}{2\mu_1\Omega_0 br^3} \qquad \left.\begin{aligned} C_n &= \frac{P_n c_0^2}{2\mu_1\Omega_0 br^3}, \\ C_t &= \frac{P_t c_0^2}{2\mu_1\Omega_0 br^3}, \end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

Constantinescu, V.N. 7344 Gross

Calculul lagarelor fara joc radial supuse la forte si viteze variabile .

Studii si gercetari de mecanica aplicata, Tomul VIII, nr. 3, 1957, pp. 1-16



atunci

$$\zeta = \sqrt{C_n^2 + C_t^2}, \tag{39}$$

iar coeficienţii $C_n$ şi $C_t$, în funcţie de coeficienţii calculaţi $\overline{C}_n$, $\overline{\overline{C}}_n$ şi $\overline{C}_t$, $\overline{\overline{C}}_t$ sînt ţinînd seama de relaţiile (27),

$$\left.\begin{aligned} C_n &= \left(\frac{\Omega}{\Omega_0} + \frac{2\dot\varphi}{\Omega_0}\right)\frac{e_0^2}{e^2}\overline{C}_n + 6\,\frac{e_0^2}{e^2}\,\frac{\dot e}{e\Omega_0}\,\overline{\overline{C}}_n, \\ C_t &= \left(\frac{\Omega}{\Omega_0} + \frac{2\dot\varphi}{\Omega_0}\right)\frac{e_0^2}{e^2}\overline{C}_t + 6\,\frac{e_0^2}{e^2}\,\frac{\dot e}{e\Omega_0}\,\overline{\overline{C}}_t. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

În mod analog, dacă se notează

$$C_m(C_{mc}) = \frac{M(M_c)\,e_0}{\pi\mu_1\Omega_0 br^3}, \tag{41}$$

atunci

$$\left.\begin{aligned} C_m &= \frac{e_0}{\pi e}\,\frac{\Omega}{\Omega_0}(\theta_1+\theta_2) + \frac{e_0}{\pi r}\left[\frac{\dot e}{e\Omega_0}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) + \right. \\ &\left. + \frac{\dot\varphi}{\Omega_0}(\sin\theta_1 + \sin\theta_2)\right] + \frac{e}{e_0}\,C_n, \\ C_{mc} &= \frac{e_0}{\pi e}\,\frac{\Omega}{\Omega_0}(\theta_1+\theta_2) + \frac{e_0}{\pi r}\left[\frac{\dot e}{e\Omega_0}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) + \right. \\ &\left. + \frac{\dot\varphi}{\Omega_0}(\sin\theta_1 + \sin\theta_2)\right] - \frac{e}{e_0}\,C_n. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Unghiul făcut de direcţia sarcinii cu linia centrelor este egal cu

$$\operatorname{tg}\theta^* = \frac{C_n}{C_t}. \tag{43}$$

★

În acest mod, toate elementele care interesează sînt determinate, dacă se cunosc :

— caracteristicile geometrice ale lagărului adică raza $r$ a fusului, lăţimea $b$ şi unghiul de înfăşurare al cuzinetului

$$\Theta = \theta_1 + \theta_2 \tag{44}$$

şi

— caracteristicile lui funcţionale, adică variaţia vitezei unghiulare de rotaţie a fusului în funcţie de timp $\Omega = \Omega(t)$, a excentricităţii $e = e(t)$ şi a parametrului

$$\frac{\varphi}{\Theta} = \nu = \nu(t). \tag{45}$$



Mărimile $\Theta$ şi $\nu$ înlocuiesc variabilele $\theta_1$ şi $\theta_2$, iar

$$\dot\nu = \frac{\dot\varphi}{\Theta}. \tag{46}$$

În cazurile reale se întîlneşte de cele mai multe ori problema inversă şi anume : se cunoaşte sarcina $P(t)$ şi direcţia ei, şi variaţia vitezei unghiulare $\Omega(t)$ în raport cu tîmpul. În schimb sînt necunoscute excentricitatea $e$ şi poziţia liniei centrelor $\nu$.

Pentru determinarea necunoscutelor problemei $e$ şi $\nu$ se pot scrie două condiţii de echilibru şi anume ca lagărul să suporte sarcina dată, adică rezultanta presiunilor să fie egală în fiecare moment cu sarcina dată şi să aibă aceeaşi direcţie cu a sarcinii. Aceste condiţii se scriu ţinînd seama de relaţiile (38), (40) şi (46), sub forma

$$\left.\begin{aligned} \frac{2\mu_1\Omega_0 br^3}{e_0^2}\left\{\left(\frac{\Omega}{\Omega_0} + \frac{2\Theta\dot\nu}{\Omega_0}\right)\frac{e_0^2}{e^2}\,\overline{C}_n + 6\,\frac{e_0^2}{e^2}\,\frac{\dot e}{e\,\Omega}\,\overline{\overline{C}}_n\right\} &= P\sin\theta^*, \\ \frac{2\mu_1\Omega_0 br^3}{e_0^2}\left\{\left(\frac{\Omega}{\Omega_0} + \frac{2\Theta\dot\nu}{\Omega_0}\right)\frac{e_0^2}{e^2}\,\overline{C}_t + 6\,\frac{e_0^2}{e^2}\,\frac{\dot e}{e\,\Omega}\,\overline{\overline{C}}_t\right\} &= P\cos\theta^*. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

În acelaşi timp, notînd de exemplu cu $\gamma(t)$ unghiul făcut de direcţia sarcinii cu marginea de intrare a cuzinetului ($\theta = -\theta_1$), atunci

$$\gamma = \theta_1 + \theta^*, \tag{48}$$

sau, ţinînd seama de relaţiile (44) şi (45),

$$\theta^* = \gamma - \Theta(1 - \nu). \tag{49}$$

Introducînd această expresie pentru $\theta^*$ în relaţiile (47) şi ţinînd seama că

$$\left.\begin{aligned} \overline{C}_n &= \overline{C}_n[\Theta, \lambda, \nu(t)], & \overline{\overline{C}}_n &= \overline{\overline{C}}_n[\Theta, \lambda, \nu(t)], \\ \overline{C}_t &= \overline{C}_t[\Theta, \lambda, \nu(t)], & \overline{\overline{C}}_t &= \overline{\overline{C}}_t[\Theta, \lambda, \nu(t)], \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

sistemul (47) rezultă ca fiind compus din două ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul I în raport cu necunoscutele $e$ şi $\nu$.

Acest sistem este neliniar şi în general greu de rezolvat în mod riguros. Înmulţind prima ecuaţie cu $\overline{\overline{C}}_t$, a doua cu $\overline{\overline{C}}_n$ şi scăzîndu-le, se obţine ecuaţia

$$\begin{aligned} &\frac{2\mu_1\Omega_0 br^3}{e_0^2}\left(\frac{\Omega}{\Omega_0} + \frac{2\Theta\dot\nu}{\Omega_0}\right)\frac{e_0^2}{e^2}\left(\overline{C}_n\overline{\overline{C}}_t - \overline{C}_t\overline{\overline{C}}_n\right) = \\ &= P\left\{\overline{\overline{C}}_t\sin[\gamma - \Theta(1-\nu)] - \overline{\overline{C}}_n\cos[\gamma - \Theta(1-\nu)]\right\}, \end{aligned} \tag{51}$$

sau

$$\dot\nu = \frac{e^2P\left\{\overline{\overline{C}}_t\sin[\gamma - \Theta(1-\nu)] - \overline{\overline{C}}_n\cos[\gamma - \Theta(1-\nu)]\right\}}{4\mu_1\Omega_0 br^3\Theta\left(\overline{C}_n\overline{\overline{C}}_t - \overline{C}_t\overline{\overline{C}}_n\right)} - \frac{\Omega}{2\Theta} = f_\nu(\nu, e, t). \tag{52}$$

7344 Gross
Constantinescu, V.N.
Calculul lagarelor fara joc radial supuse la forte si viteze variabile
Studii si gercetari de mecanica aplicata, Tomul VIII, nr. 3, 1957,
pp. 1-16



Sistemul format din ecuaţia (52) şi una din ecuaţiile (47) poate fi rezolvat prin aproximaţii succesive, în felul următor. În ecuaţia (52) se consideră o anumită valoare particulară pentru $e$, de exemplu $e = e_0$ (excentricitatea corespunzătoare sarcinii medii $P_m$). Atunci ecuaţia (52) este o ecuaţie diferenţială în $\nu$, $\dot{\nu} = f_\nu(\nu, e_0, t)$. Fie soluţia acestei ecuaţii $\nu = \nu_1(t)$. Introducînd această valoare de exemplu în prima ecuaţie (47), se obţine o ecuaţie diferenţială în $e$:

$$\dot{e} = \frac{c^3 P \sin[\gamma - \Theta(1-\nu)]}{12 \mu_1 b r^3 \overline{\overline{C}}_n(\nu_1)} - \left(\frac{\Omega}{\Omega_0} + \frac{2\dot{\Theta}\nu_1}{\Omega_0}\right)\frac{\varepsilon\Omega_0}{6}\frac{\overline{C}_n(\nu_1)}{\overline{\overline{C}}_n(\nu_1)} = f_e(e, t) \tag{53}$$

a cărei soluţie fie $e = e_1(t)$. Cu această valoare, introdusă în ecuaţia (52), vom obţine o nouă expresie $\nu = \nu_2(t)$, ş. a. m. d. Procedeul conduce însă la calcule laborioase.

★

Dat fiind că rezolvarea sistemului (47) conduce la calcule laborioase, pentru a găsi o metodă mai simplă de determinare a caracteristicilor mişcării să tratăm un exemplu pentru a ne da seama de ordinul de mărime şi de influenţa diferiţilor factori care intervin în ecuaţiile (47).

Astfel, fie pentru simplificare un lagăr cu $\lambda = \infty$ şi $\Theta = 120°$ şi să considerăm

$$\left.\begin{aligned} &\nu = 0{,}65 \ (\theta_1 = 42°,\ \theta_2 = 78°), \\ &\Omega = \Omega_0 = \text{const.}, \\ &e = e_0(1 + \varepsilon \sin \Omega_1 t),\ \varepsilon = 0{,}25,\ \Omega_1 = \frac{\Omega_0}{5}, \\ &\dot{\varphi} = \dot{\nu} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Aceste date presupun deci viteza unghiulară a fusului şi direcţia liniei centrelor constante în timp. Variaţia excentricităţii sub forma de mai sus, corespunde în primă aproximaţie unei sarcini pulsatorii periodice, cu o frecvenţă de acelaşi ordin de mărime, cu cea a şocurilor la lagărele de vagoane, datorită trecerii roţilor peste rosturile de la şinele de cale ferată.

În aceste condiţii, din relaţia (6) rezultă constantele care determină soluţia $\overline{\overline{p}}_\infty$, $C_1 = 0{,}618$, $C_2 = -1{,}902$. Formulele (24) şi (25) dau astfel $\overline{\overline{C}}_n = -0{,}00623$, $\overline{\overline{C}}_t = -0{,}70902$. Pentru coeficienţii corespunzători soluţiei $\overline{p}_\infty$ rezultă în mod analog [2], $\overline{C}_n = 1{,}26$, $\overline{C}_t = 1{,}80$.

Coeficienţii $C_n$ şi $C_t$ (40) sînt astfel egali cu

$$\left.\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{(1+\varepsilon\sin\Omega_1 t)^2}\left(\overline{C}_n + 6\varepsilon\frac{\Omega_1}{\Omega_0}\frac{\cos\Omega_1 t}{1+\varepsilon\sin\Omega_1 t}\overline{\overline{C}}_n\right), \\ C_t &= \frac{1}{(1+\varepsilon\sin\Omega_1 t)^2}\left(\overline{C}_t + 6\varepsilon\frac{\Omega_1}{\Omega_0}\frac{\cos\Omega_1 t}{1+\varepsilon\sin\Omega_1 t}\overline{\overline{C}}_t\right) \end{aligned}\right\} \tag{55}$$



Deoarece $6\varepsilon\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = 0{,}3$ pentru cazul considerat, iar de obicei $\left|\frac{\cos\Omega_1 t}{1+\varepsilon\sin\Omega_1 t}\right| \leq 1$, rezultă că influenţa coeficienţilor $\overline{\overline{C}}_n$ şi $\overline{\overline{C}}_t$ este redusă.

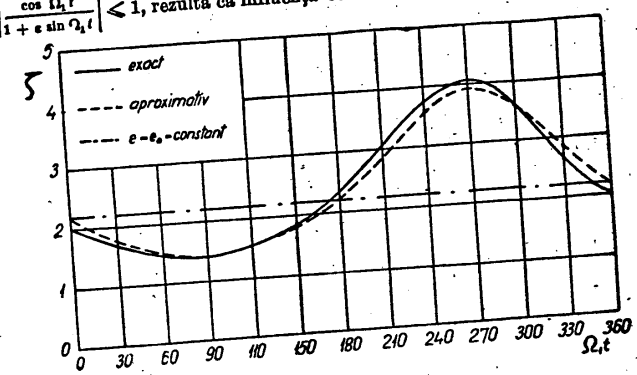



Fig. 3

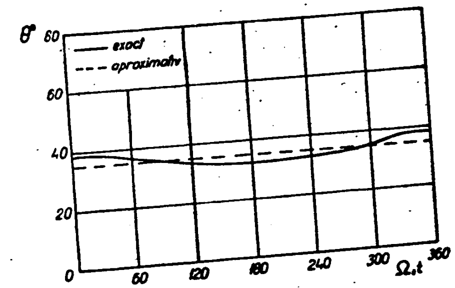



Fig. 4

Astfel în figura 3 şi figura 4 s-au reprezentat variaţia coeficientului de încărcare $\zeta = \sqrt{C_n^2 + C_t^2}$ (39) şi a unghiului $\theta^*$ în funcţie de $\Omega_1 t$ pentru un ciclu în două ipoteze: calculînd în mod exact cu ajutorul relaţiilor (55) sau neglijînd contribuţia coeficienţilor $\overline{\overline{C}}_t$ şi $\overline{\overline{C}}_n$. Se vede că diferenţele sînt mici şi, mai mult, dacă se urmăreşte problema inversă expusă

Approved For Release 2008/06/27 : CIA-RDP80T00246A005800550002-6

Constantinescu, V.N. 7344 Gross
Calculul lagarelor fara joc radial supuse la forte si viteze variabile
Studii si cercetari de mecanica aplicata, Tomul VIII, nr. 3, 1957, pp. 1-16



anterior (cînd se cunoaşte sarcina şi trebuie să se determine excentricitatea), eroarea făcută este acoperitoare. Într-adevăr, din figura 3 se constată că, neglijînd aportul termenilor $\overline{\overline{C}}_n$ şi $\overline{\overline{C}}_t$, se obţine o sarcină maximă mai redusă, adică soluţia $\overline{\overline{p}}$, contribuie la creşterea capacităţii portante atunci cînd fusul tinde să se apropie de cuzinet. Este evident deci că neglijarea soluţiei $\overline{\overline{p}}$ introduce astfel o aproximaţie în calcule acoperitoare.

Rezultă deci că, cel puţin într-o primă aproximaţie, se poate neglija influenţa termenilor $\overline{\overline{C}}_n$ şi $\overline{\overline{C}}_t$. În aceste condiţii, calculele se simplifică apreciabil.

Astfel relaţiile (49) şi (47) se scriu

$$\gamma(t) = \theta^*(\nu) + \Theta(1-\nu) \tag{56}$$

şi

$$\frac{2\mu_1 br^3(\Omega + 2\Theta\dot{\nu})}{e^2}\zeta = P(t). \tag{57}$$

Cunoscînd pe $\gamma(t)$, ecuaţia (56) permite determinarea parametrului $\nu(t)$. Rezolvarea acestei ecuaţii în $\nu$ se poate face prin încercări fără dificultăţi, cu ajutorul diagramei 10 din lucrarea [2] care dă variaţia unghiului $\theta^*$ în funcţie de $\nu$. Evident, dacă $\gamma(t) = \text{const.}$, $\theta^* = \text{const.}$, şi rezultă $\nu = \text{const.}$, $\dot{\nu} = 0$.

O dată cunoscut $\nu = \nu(t)$, din relaţia (57) rezultă variaţia excentricităţii:

$$e = \sqrt{\frac{2\mu_1 br^3(\Omega + 2\Theta\dot{\nu})}{P}\zeta} \tag{58}$$

şi se poate trasa variaţia grosimii minime $\delta_2$ a filmului de lubrifiant în funcţie de timp,

$$\delta_2 = e\cos\theta_2 = e\cos(\nu\Theta), \tag{59}$$

putînd verifica astfel dacă tot timpul $\delta_2$ rămîne mai mare decît o valoare minimă pînă la care regimul de ungere îşi mai păstrează caracterul hidrodinamic.

Dacă sarcina suportată de lagăr suferă variaţii rapide în mărime şi direcţie, este posibil ca aproximaţiile făcute să fie destul de mari. Acest lucru poate fi verificat, plecînd de la valorile calculate pentru $\nu$ şi $e$, şi determinînd cu ajutorul relaţiilor (47) influenţa termenilor neglijaţi. În acest mod se poate îmbunătăţi precizia calculului, efectuînd o a doua aproximaţie, considerînd în calculul termenilor care conţin soluţia $\overline{\overline{p}}$, variaţiile parametrilor $e$ şi $\nu$, determinaţi în modul simplu arătat mai sus.

Pentru o apreciere rapidă, ţinînd seama de expresia (58) rezultă că termenul $6\frac{\dot{e}}{e\Omega}$, de care depinde influenţa coeficienţilor $\overline{\overline{C}}_n$ şi $\overline{\overline{C}}_p$ este egal în prima aproximaţie cu

$$\frac{6\dot{e}}{e\Omega} \cong \frac{3}{\Omega}\left\{\frac{\dot{\Omega} + 2\Theta\ddot{\nu}}{\Omega + 2\Theta\dot{\nu}} + \frac{\dot{\zeta}}{\zeta} - \frac{\dot{P}}{P}\right\}, \tag{60}$$



iar dacă direcţia sarcinii rămîne constantă ($\dot{\nu} = \ddot{\nu} = \dot{\zeta} \cong 0$), termenul (60) poate fi calculat cu datele iniţiale ale problemei,

$$\frac{6\dot{e}}{e\Omega} \cong \frac{3}{\Omega}\left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} - \frac{\dot{P}}{P}\right). \tag{61}$$

Dacă acest termen are valori relativ reduse, de exemplu dacă sub 80 % din ciclu $\frac{6\dot{e}}{e\Omega} < 0{,}5$, metoda simplificată propusă este aplicabilă, obţinîndu-se aproximaţii comparabile cu cele din exemplul prezentat $\left(\text{în care } \frac{6\dot{e}}{e\Omega} < 0{,}3\right)$.

*Primită la redacţie la 24 aprilie 1957.*

## РАСЧЕТ ПОДШИПНИКОВ БЕЗ РАДИАЛЬНОГО ЗАЗОРА ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ НАГРУЗКАХ И СКОРОСТЯХ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Определяется распределение давлений на подшипниках без радиального зазора, подвергающихся действию переменных сил и скоростей, сначала в точной форме, а затем с некоторыми допущениями, в форме, применимой на практике. Рассчитывается равнодействующая давлений и моменты трения на шейке и на вкладыше, а затем при помощи этих результатов дается метод для расчета подшипника, когда известны относительные скорости поверхностей и их относительное положение, в зависимости от времени или нагрузки на подшипники в зависимости от времени.

## LE CALCUL DES PALIERS SANS JEU RADIAL, SOUMIS À DES CHARGES ET VITESSES VARIABLES

(RÉSUMÉ)

On obtient la distribution des pressions pour les paliers sans jeu radial soumis à des charges et vitesses variables, d'abord sous une forme rigoureuse, ensuite, sous une forme utilisable dans les applications pratiques. On détermine la résultante des pressions ainsi que les moments de frottement du tourillon et du coussinet et, à l'aide de ces résultats, on donne une méthode de calcul des paliers, quand on connaît les vitesses relatives des surfaces et leurs positions relatives, en fonction du temps, ou bien la charge supportée par le palier, en fonction du temps.

Constantinescu, V.N. 7344 Gros

Calculul lagarelor fara joc radial supuse la forte si viteze variabile.
Studii si gercetari de mecanica aplicata, Tomul VIII, nr. 3, 1957, pp. 1-16



## BIBLIOGRAFIE

1. V. N. Constantinescu. *Lagăre fără joc radial supuse la sarcini și viteze variabile.* Comunicările Acad. R.P.R., t. VI, nr. 11, noiembrie 1956, p. 1299.
2. — *Considerații asupra calculului lagărelor fără joc radial.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, t. V, nr. 3—4, iulie-decembrie 1954, p. 425.
3. N. Tipei. *Repartiția presiunilor în lagărele fără joc radial.* Bul. științ. Acad. R.P.R., Secția de științe tehnice și chimice, t. V, 1953, p. 13.

Page Denied

Approved For Release 2008/06/27 : CIA-RDP80T00246A005800550002-6