

PRINCIPIO DE DETERMINISMO DE SCHWINGER

L. M. GARRIDO

Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza

Trabajo publicado en la Revista
«Energía Nuclear». N.º 18. Abril-mayo-junio 1961

I.—*Dinámica relativista.*

Suponemos conocidas las características cinemáticas de la Mecánica Cuántica en su formulación covariante relativista y la forma cómo se obtiene información del sistema físico mediante un álgebra de la medida construida de acuerdo con los hechos experimentales propios del microcosmos. La cinemática está referida a una sola superficie espacial σ en el espacio de Minkowski.

Examinemos la manera cómo el sistema físico está en σ . En realidad σ es un espacio tridimensional que en el caso que la reduzcamos a $t = \text{constante}$ será el volumen V de dimensiones x_1, x_2, x_3 , con el que tan familiarizados estamos. Aunque el concepto de sistema en un instante de tiempo no es lo suficientemente general respecto a la covariancia relativista que exigimos a las leyes de la Física, usaremos esta situación particular para, ayudados por nuestra intuición, entender cómo describir el movimiento. Sin embargo, aun en el caso más general, podemos suponer que la superficie espacial σ es plana, ya que este último concepto es invariante relativista.

Consideremos el caso de un electrón en la superficie $t = \text{constante}$. A partir de su estado vector $|\varphi, t\rangle$ calcularemos la función de onda en representación de coordenadas $\varphi_t(x_1, x_2, x_3)$, la cual dará la probabilidad de que tal sistema físico esté en el punto x_1, x_2, x_3 en el instante $t = \text{constante}$. Por consiguiente, no podemos imaginar tal electrón como un cuerpo de dimensiones bien definidas —de forma tal vez esférica—, sino como “extendido” por todo el espacio tridimensional en cualquier instante de tiempo. No podemos ya más atribuirle las propiedades del cuerpo sólido, sino más bien las de un “campo” que se encuentra en todas partes, o sea, hablando relativísticamente, llenando toda la superficie espacial σ .

En la Mecánica Clásica no Relativista, donde el electrón es un cuerpo sólido, el movimiento del mismo es muy fácil de estudiar. Las ecuaciones diferenciales del movimiento dan la variación de las coordenadas de este cuerpo sólido respecto a las variaciones del parámetro tiempo t . Sus soluciones $x_1 = x_1(t); x_2 = x_2(t); x_3 = x_3(t)$, son las trayectorias del electrón. Ahora bien, desde otro punto de vista, este proceso puede ser considerado como una variación en la distribución del electrón en todo el volumen V . En un instante t , toda la masa del electrón está en $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$, y no hay masa

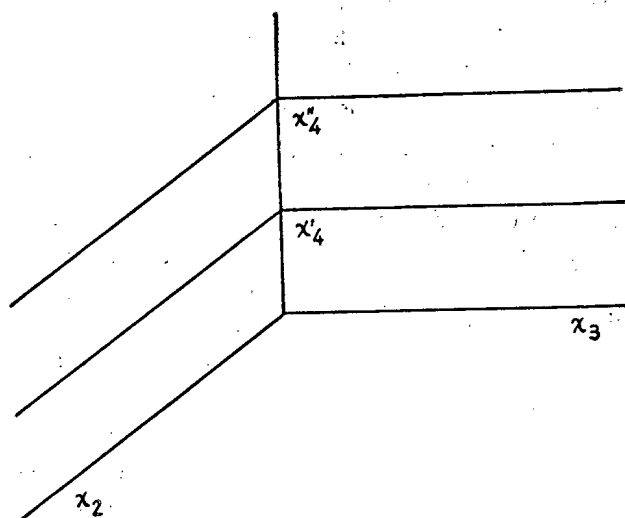
del electrón en cualquier otro punto. Un instante después, t' , la distribución anterior ha cambiado; toda la masa está en el punto $x_1(t'), x_2(t'), x_3(t')$, mientras que el resto de V está vacío.

Este último punto de vista es el más apropiado para introducir el movimiento en la Mecánica Cuántica Relativista. En todo instante el electrón tendrá una cierta probabilidad —que podrá ser nula— de estar en cualquier punto de V . El movimiento consistirá en que tal probabilidad —la distribución de la masa del electrón en todo V — vaya cambiando en el tiempo.

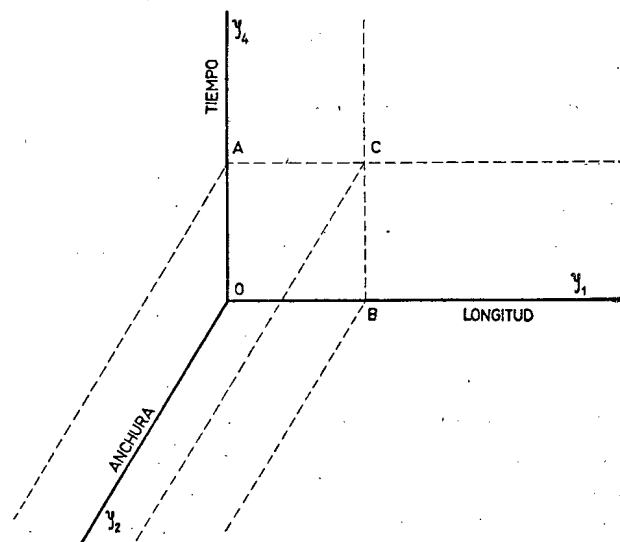
Si aplicamos esta idea de distribución, en el caso relativista hemos de considerar también otras clases de variaciones que no correspondan a cambios del valor del parámetro tiempo; es decir, tendremos que incluir variaciones respecto a cualquier de las cuatro coordenadas x_μ de un punto universo, mientras las otras tres están fijas. Al hacer esto hemos generalizado el concepto de movimiento identificándolo con la evolución del sistema cuando varía un parámetro cualquiera.

Aclaremos el significado de estas variaciones. Según la idea intuitiva del movimiento suponemos que la superficie tridimensional $V = V_4$ que corresponde a $x_4 = \text{constante}$, es decir, a cualquier valor de las coordenadas x_1, x_2, x_3 , está ocupada por una distribución de la masa del electrón. En la evolución temporal variamos x_4 , o sea, el tiempo. Pero si estas evoluciones han de tener pleno sentido relativista, ha de ser posible también considerar la superficie tridimensional $x_1 = \text{constante}$ formada por los puntos universo que tienen ese valor de x_1 y cualquier valor para las coordenadas x_2, x_3, x_4 . Ciertamente no podremos utilizar nuestra intuición para imaginarla; será el espacio formado por el plano —de dos dimensiones— cubierto por las coordenadas x_2 y x_3 en cualquier instante de tiempo x_4 . Para construirlo, veremos cómo la masa del electrón está distribuida en el plano x_2, x_3 , en el instante x'_4 , y luego en el instante x''_4 , y así para todo valor —positivo y negativo— de x_4 . Es decir, la superficie tridimensional V_1 está formada por toda la historia del plano bidimensional x_2, x_3 . Variar x_1 es pasar a otra superficie tridimensional V_1 formada por toda la historia de un plano bidimensional paralelo al que considerábamos antes.

Nos ayudará a comprender la idea relativista de la evolución del sistema reducir, aunque sólo sea



para comprender mejor el contenido físico de la dinámica relativista, las dimensiones del espacio de Minkowski a tres, que llamaremos Y_1, Y_2, Y_4 , donde Y_4 es la coordenada correspondiente al tiempo. Esto es válido para la dinámica que aparecería en caso de que los sistemas físicos tuvieran solamente dos dimensiones en lugar de tres que de hecho tienen. La dinámica no relativista consistiría en estudiar la evolución del sistema físico —que se hallaría todo él en el plano bidimensional Y_2, Y_1 (correspondiente a V_4)— cuando variamos Y_4 . Pero si quisiéramos construir la dinámica relativista de este mundo ficticio deberíamos también considerar las variaciones del plano bidimensional Y_2, Y_4 respecto a Y_1 , etc.



Sea OA la variación de Y_4 ; dinámicamente pasamos del plano Y_1, Y_2 , que pasa por O, al plano Y_1, Y_2 ,

que pasa por A. Sea OB la variación de Y_1 ; dinámicamente también pasamos del plano Y_2, Y_4 , que pasa por O, al plano Y_2, Y_4 , que pasa por B.

Consideremos de nuevo el espacio de Minkowski real, de cuatro dimensiones. El principio dinámico tiene que dar los operadores que realizan cualquiera de las cuatro traslaciones, es decir, tiene que proporcionar expresiones para los cuatro operadores momentos lineales P_μ de los sistemas físicos.

Ahora bien, la imagen anterior no es totalmente covariante relativista, pues si bien hemos considerado variaciones respecto a cualquier coordenada x_μ , las superficies tridimensionales V no son covariante-relativistas. En su lugar hay que considerar superficies espaciales σ .

Las variaciones más generales de sistema físico no son las traslaciones δx_μ respecto a una coordenada x_μ , sino que caben traslaciones $\eta_\mu \delta x_\mu$ en la dirección η_μ e incluso rotaciones totalmente arbitrarias.

Las variaciones dinámicas del sistema respecto a cualquier parámetro —y no sólo respecto a giros y traslaciones en el espacio de Minkowski— las designamos con el nombre genérico de evolución.

2.—Determinismo dinámico.

Un sistema sometido a la acción de ciertas fuerzas evoluciona de una forma perfectamente definida. La dinámica estudia la relación existente entre la acción a que sometemos el sistema y la evolución física del mismo. Por consiguiente, al comenzar el estudio de la Dinámica Cuántica hemos de introducir un nuevo operador W , al que llamaremos acción del sistema y que habrá de ser dado en cada caso particular. Para determinarlo hacemos uso del Principio de Correspondencia; pero esto en muchos casos no será suficiente, ya que el orden en que aparecen los operadores no compatibles contenidos en W no vendrá determinado por la acción de la Mecánica Clásica.

Es más práctico no utilizar el Principio de Correspondencia e introducir la acción W fenomenológicamente justificando la elección particular hecha en cada caso por el éxito en reproducir los datos experimentales. Más adelante estudiaremos algunas propiedades generales de W . El valor del concepto de acción W radica en que a partir de él podemos determinar cualquier evolución del sistema.

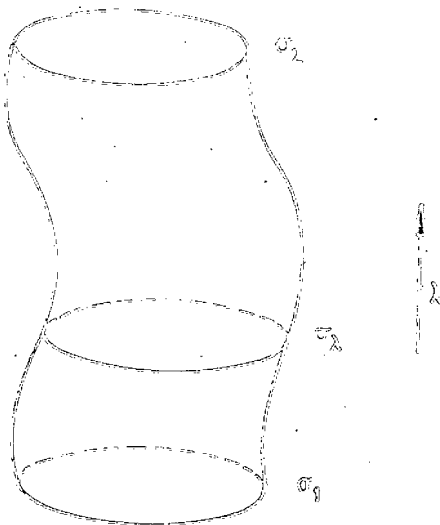
Para describir la evolución del sistema hacemos

corresponder a cada una de las situaciones un valor de un parámetro continuo λ . Así, por ejemplo, λ puede ser el tiempo t y entonces tendremos el movimiento temporal. Pero λ es cualquier parámetro que figure en la acción W . Introducimos una familia de superficies espaciales σ_λ en cada una de las cuales vamos obteniendo la máxima información posible acerca del sistema físico de acuerdo con el álgebra de la medida. Tal familia corresponde, en la aproximación no relativista, al espacio tridimensional V para los distintos valores del tiempo.

Todo el espacio de Minkowski entre una superficie inicial σ_1 , donde la evolución del sistema comienza, y otra final σ_2 , debe ser cubierto por esta familia σ_λ de superficies espaciales.

La Dinámica Relativista relaciona las propiedades del sistema físico en σ_2 con las propiedades del mismo en σ_1 , cuando la evolución tiene lugar bajo una cierta acción W .

Cuando realicemos una medición de las propiedades del sistema en σ_1 y en σ_2 éste sufre, según vimos en el Álgebra de la medida, modificaciones que no podemos conocer, pero entre las observaciones el principio de causalidad es válido, tanto en Mecánica Clásica como en Cuántica. Con esto afir-



mamos la existencia de ecuaciones que relacionan unívocamente las propiedades del sistema en dos superficies cualesquiera de la familia. Este es el principio de determinismo, el cual implica causalidad dinámica. De él deducimos también que, dada una cier-

ta acción W , nos es permitido considerar el concepto de evolución independientemente del sistema que evoluciona, es decir, la evolución estará determinada completamente por W y no condicionada por las propiedades particulares del sistema en σ_1 . Veamos ahora la forma cómo Schwinger formuló este principio de determinismo.

Designaremos la evolución que relaciona las propiedades de un sistema en $\sigma_{\lambda''}$ con las del mismo sistema en $\sigma_{\lambda'}$ mediante el símbolo $E(\lambda'', \lambda')$ símbolo al que no atribuimos significado matemático alguno, por ahora.

La propiedad fundamental de las evoluciones es la de formar un grupo continuo respecto a la operación de realización sucesiva de las mismas. Si cierta evolución, $E(\lambda'', \lambda')$ corresponde a la variación del parámetro λ desde un valor λ' a otro valor λ'' , y otra evolución, $E(\lambda''', \lambda'')$ nos lleva de la situación correspondiente al valor λ'' hasta la correspondiente a λ''' , la realización sucesiva de ambas evoluciones es otra evolución

$$E(\lambda''', \lambda'') E(\lambda'', \lambda') = E(\lambda''', \lambda') \quad (1)$$

producto que evidentemente verifica la ley asociativa. Para cada evolución del sistema existe otra evolución recíproca de la anterior

$$[E(\lambda'', \lambda')]^{-1} = E(\lambda', \lambda'') \quad (2)$$

consistente en deshacer cuanto hizo la primera.

También tenemos la evolución unidad que corresponde a no evolucionar en absoluto

$$E(\lambda', \lambda') = I \quad (3)$$

El grupo es continuo, puesto que lo es λ . Las relaciones anteriores son consecuencia directa del significado físico de evolución; pero su importancia para presentar matemáticamente la dinámica es grande. Pues de la relación (1) deducimos que podemos considerar una evolución finita cualquiera como el producto sucesivo de evoluciones infinitésimas, es decir, evoluciones en las que el parámetro λ varíe muy poco; y además afirmar que estudiando únicamente las evoluciones correspondientes $\lambda \rightarrow \lambda + \delta\lambda$ cuando $\delta\lambda \rightarrow 0$ obtenemos suficiente información para generar cualquier otra evolución. Ahora bien, el estudio de las evoluciones infinitésimas simplifica mucho los cálculos, pues

permite despreciar potencias de $\delta\lambda$ superiores a la primera.

Por consiguiente, nos limitaremos a estudiar evoluciones infinitésimas.

3.—Imágenes de la evolución dinámica.

Volvamos a exponer el contenido de principio de determinismo en mecánica. Cuando hacemos una observación, o sea cuando medimos el valor de los observables en un sistema físico, el estado del sistema cambia de una manera desconocida como consecuencia de su interacción con el aparato de medida. Pero entre observaciones, el principio de causalidad es válido, y así podemos calcular el valor esperado de un observable en cualquier superficie σ a la que, en su evolución dinámica, llega el sistema.

El valor esperado de un observable permite relacionar la teoría con el experimento. Esencialmente, el problema de la evolución del sistema en la Mecánica Cuántica quedará resuelto cuando veamos cómo cambian los valores esperados a lo largo de la evolución dinámica.

Ahora bien, en el cálculo del valor esperado de un observable A_i en un estado $|\varphi\rangle$ figuran dos clases de elementos del Algebra de la Medida: los observables y los estados. Por consiguiente, convendrá determinar qué requisitos generales habrán de satisfacer las variaciones de los mismos. Tales variaciones darán la ecuación de evolución o movimiento de los observables y de los estados, que serán válidas en tanto que el sistema físico no sea perturbado por una observación o proceso semejante.

Sea $A_i(\lambda')$ un observable de un conjunto completo de observables compatibles A que dan la máxima información posible del sistema físico que se encuentra en la situación caracterizada por el valor λ' del parámetro λ ; por ejemplo, puede hallarse en la superficie espacial $\sigma_{\lambda'}$. El observable correspondiente a otro valor de λ , $A_i(\lambda'')$, debe también formar parte de la misma representación A y además ha de ser esencialmente el mismo observable, es decir, si $A_i(\lambda')$ era, por ejemplo, el momento angular de una partícula, $A_i(\lambda'')$ debe ser también el momento angular de la misma partícula en otra situación. De aquí deducimos que $A_i(\lambda')$ y $A_i(\lambda'')$ deben ser ambos autohermíticos y poseer globalmente, *in toto*, el mismo espectro de valores propios. Por consiguiente, según sabemos, han de estar re-

lacionados por medio de una transformación unitaria

$$A_i(\lambda'') = U_o(\lambda'', \lambda') A_i(\lambda') U_o^{-1}(\lambda'', \lambda'); U_o^+ = U_o^{-1} \quad (4)$$

Los estados vectores también pueden cambiar cuando varía el valor de λ . Han de hacerlo de forma que puedan, también globalmente, ser estados propios de los observables en la nueva situación, es decir, su evolución vendrá dada por una transformación unitaria

$$|\varphi, \sigma_{\lambda''}\rangle = U_1(\lambda'', \lambda') |\varphi, \sigma_{\lambda'}\rangle; U_1^{-1} = U_1^+ \quad (5)$$

pero $U_1(\lambda'', \lambda')$ ha de ser distinta de $U_o(\lambda'', \lambda')$ en general. Aunque ni el espectro de valores propios de los observables ni las relaciones de normalización —si un estado estaba normalizado en λ' debe estarlo en λ'' — y ortogonalidad entre los estados sean modificadas durante la evolución dinámica del sistema, el valor esperado de los observables varía.

Puesto que es suficiente considerar evoluciones infinitésimas, manejaremos operadores unitarios infinitesimales, los cuales darán las ecuaciones diferenciales de la evolución.

Un observable puede variar de dos formas cuando cambia el parámetro λ . Consideremos el observable coordenada X_1 cuando λ es el tiempo: si X_1 está definido con relación al sistema de ejes en movimiento, dependerá explícitamente del tiempo y variará aunque no cambie la situación del sistema. Tal variación explícita, $\partial\lambda$, correspondiente a la derivada parcial, no será generada por el operador unitario infinitesimal de evolución. El principio dinámico se refiere a las variaciones inducidas en los observables como consecuencia de que la situación del sistema varíe bajo la acción dinámica W . Estas últimas variaciones, llamadas dinámicas, son designadas por $\delta\lambda$ de forma que la variación total del observable $d\lambda$ ligada al concepto de derivada total, es la suma de las variaciones explícita y dinámica.

$$\delta\lambda = d\lambda - \partial\lambda \quad (6)$$

Consideremos exclusivamente variaciones dinámicas de los observables y estados respecto al parámetro λ . Llamaremos imágenes de la evolución dinámica las formas equivalentes de expresarla, es decir, las distintas formas de combinar la variación dinámica de observables y estados para obtener los valores esperados correspondientes a cada valor del

parámetro λ . El valor esperado en $\lambda = \lambda''$ del observable A_i .

$$\begin{aligned} & \langle \sigma_{\lambda''}, \varphi | A_i(\lambda'') | \varphi, \sigma_{\lambda''} \rangle = \\ & = \langle \sigma_{\lambda'}, \varphi | U_1^{-1}(\lambda'', \lambda') U_0(\lambda'' \lambda') A_i(\lambda') U_0^{-1}(\lambda'', \lambda') \\ & \quad U_1(\lambda'', \lambda') | \varphi_1, \sigma_{\lambda'} \rangle \end{aligned} \quad (7)$$

puede ser calculado en función de los estados y observables en $\lambda = \lambda'$ repartiendo arbitrariamente la acción dinámica para mover los observables —es decir incluyéndola en U_0 — o para mover los estados, en U_1 .

El paso de una imagen de evolución a otra se hace mediante un operador unitario que se aplica a los estados y a los observables.

De todas las imágenes posibles, las más importantes y únicas que estudiaremos detenidamente son las que corresponden a la evolución temporal del sistema.

Ha de quedar bien establecido que la acción W puede causar únicamente las variaciones dinámicas de los observables y estados. En lo sucesivo, a ellas nos referiremos exclusivamente.

Según lo que acabamos de ver, antes de presentar las ecuaciones de la evolución hemos de fijar la imagen en que queremos expresarla. Para pasar de una imagen a otra lo hacemos mediante un operador unitario con el cual cambiamos simultáneamente los estados y los observables. Este operador unitario de cambio de imagen no debe ser confundido conceptualmente con el que nos da la evolución, el cual corresponde más bien, según veremos, al que cambia o los estados, o los observables, o ambos elementos parcialmente.

4.—Variaciones de la función de transformación.

Todos los operadores y vectores estado manejados en la Cinemática Cuántica están particularizados para una superficie espacial en la cual se realizan los procesos de medida. Introduciendo el producto escalar entre dos estados en σ , $|\varphi_1, \sigma\rangle$ y $|\varphi_2, \sigma\rangle$, obtuvimos la función de transformación $\langle \sigma, \varphi_2 | \varphi_1, \sigma \rangle$ que es el elemento de matriz del operador que nos lleva de una representación a otra. Para construirla tenemos que establecer arbitrariamente una correspondencia biunívoca entre los estados unidad de ambas representaciones.

Tal correspondencia biunívoca queda automáticamente establecida cuando intentamos representar un estado en $\sigma_{\lambda'}$, $|\varphi, \sigma_{\lambda'}\rangle$ por medio del estado $|\varphi, \sigma_{\lambda''}\rangle$, a que el estado anterior llega en su evolución dinámica. Generalizando el concepto de producto escalar para el caso en que los estados estén particularizados en distintas superficies espaciales, introducimos una función de transformación

$$\langle \sigma_{\lambda''}, \varphi | \varphi, \sigma_{\lambda'} \rangle \quad (8)$$

cuyo cálculo es equivalente a conocer los elementos de matriz del operador que nos lleva de $|\varphi, \sigma_{\lambda'}\rangle$ a $|\varphi, \sigma_{\lambda''}\rangle$, y, por consiguiente, la evolución del sistema. La función de transformación es también el elemento de matriz del operador que modifica los operadores cuando los estados queden fijos; por consiguiente, si calculamos $\langle \sigma_2, \varphi | \varphi, \sigma_1 \rangle$ tendremos la evolución del sistema en las distintas imágenes según el uso que demos a la función de transformación.

Para determinar la función de transformación que genera la evolución dinámica del sistema empleamos un principio diferencial. Definiremos la variación de la función de transformación por medio de

$$\delta \langle \sigma_2, \varphi | \varphi, \sigma_1 \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle \sigma_2, \varphi | \delta W_{21} | \varphi, \sigma_1 \rangle \quad (9)$$

donde δW_{21} es un operador infinitesimal de dimensiones de acción cuyas propiedades vamos a investigar. Por el principio de determinismo deducimos que δW_{21} es independiente del estado $|\varphi, \sigma\rangle$.

La propiedad de grupo de la función de transformación

$$\begin{aligned} & \langle \sigma_2, a^\alpha | a^\alpha, \sigma_1 \rangle = \\ & = \sum_{\beta} \langle \sigma_2, a^\alpha | a^\beta, \sigma_3 \rangle \langle \sigma_3, a^\beta | a^\alpha, \sigma_1 \rangle \end{aligned} \quad (10)$$

donde σ_3 es una superficie espacial cualquiera, implica una ley de composición aditiva para los operadores infinitesimales δW

$$\delta W_{21} = \delta W_{23} + \delta W_{31} \quad (11)$$

como puede verse fácilmente obteniendo la variación de (10)

$$\delta \langle \sigma_2, a^\alpha | a^\alpha, \sigma_1 \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle \sigma_2, a^\alpha | \delta W_{21} | a^\alpha, \sigma_1 \rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\beta} \frac{i}{\hbar} \left\{ \langle \sigma_2, a^\alpha | \delta W_{23} | a^\beta, \sigma_3 \rangle \langle \sigma_3, a^\beta | a^\alpha, \sigma_1 \rangle + \right. \\
&\quad \left. + \langle \sigma_2, a^\alpha | a^\beta, \sigma_3 \rangle \langle \sigma_3, a^\beta | \delta W_{31} | a^\alpha, \sigma_1 \rangle \right\} \\
&= \frac{i}{\hbar} \langle \sigma_2, a^\alpha | \delta W_{23} + \delta W_{31} | a^\alpha, \sigma_1 \rangle \quad (12)
\end{aligned}$$

de donde deducimos (11), expresión del carácter de grupo continuo de la evolución dinámica.

Puesto que $\langle \sigma_1, \varphi | \varphi, \sigma_1 \rangle = 1$ se ha de verificar

$$\delta W_{11} = 0 \quad (13)$$

para una superficie σ_1 cualquiera. El contenido físico de (13) es fácil de obtener; no es sino una forma de expresar que bajo una transformación infinitesimal los operadores unidad han de conservar su ortonormalidad. Consecuencia importante de (13) es

$$\delta W_{23} = -\delta W_{32} \quad (14)$$

que se obtiene utilizando la propiedad de grupo. De todo esto se deduce que mientras las funciones de transformación forman grupo respecto a la multiplicación, los operadores δW lo forman respecto a la adición.

La propiedad de realidad de la función de transformación se expresa en este caso mediante

$$(\delta \langle \sigma_2, a^\alpha | a^\alpha, \sigma_1 \rangle)^* = \delta \langle \sigma_1, a^\alpha | a^\alpha, \sigma_2 \rangle \quad (15)$$

lo cual implica que el operador δW sea hermitico

$$\delta W_{21}^+ = \delta W_{21} \quad (16)$$

Los operadores δW poseen otra propiedad aditiva relacionada con la composición de sistemas dinámicamente independientes. Y así, si llamamos I y II a tales sistemas, se verifica

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_2, \varphi_I, \varphi_{II} | \varphi_I, \varphi_{II}, \sigma_1 \rangle &= \langle \sigma_2, \varphi_I | \varphi_I, \sigma_1 \rangle \\
&\quad \langle \sigma_2, \varphi_{II} | \varphi_{II}, \sigma_1 \rangle \quad (17)
\end{aligned}$$

y si δW_{21}^I y δW_{21}^{II} son los operadores que caracterizan las variaciones infinitesimales de cada una de las funciones de transformación, los correspondientes al sistema compuesto se construyen a partir de

$$\delta W_{21} = \delta W_{21}^I + \delta W_{21}^{II} \quad (18)$$

entendida como suma directa, según se explicó en el capítulo anterior.

Cabe todavía presentar una función de transformación aún más general que simultáneamente dé la evolución del sistema y un cambio en la representación del mismo. Tales funciones de transformación $\langle \sigma_2, b^\alpha | a^\alpha, \sigma_1 \rangle$ pueden ser también caracterizadas por sus variaciones infinitesimales de la forma (9). Los operadores δW correspondientes satisfacen también (11), (13) y (16).

Observemos que hasta ahora δW son operadores infinitesimales, lo cual no implica que sean variaciones de un solo operador, aunque, evidentemente, la notación puede hacernos creer esto último.

5.—Principio de determinismo de Schwinger.

El principio dinámico fundamental dado por Schwinger está contenido en un postulado que da los operadores δW_{21} como ciertas variaciones de un solo operador W_{21} el cual coincide con la acción del sistema entre las superficies σ_1 y σ_2 . El principio de determinismo de Schwinger se expone así:

$$\delta W_{21} = \delta (W_{21}) \quad (19)$$

donde W_{21} es el operador acción entre σ_1 y σ_2 .

Las propiedades de grupo de la evolución del sistema están incluidas en el hecho de que haya que definir la acción por medio de una integral de un operador $\mathcal{L}(x)$, al que llamaremos densidad lagrangiana, extendida a todo el volumen entre las superficies espaciales, cuya función de transformación estudiamos.

$$W_{21} \equiv \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} (d^4x) \mathcal{L}(x) \quad \mathcal{L}(x) \equiv \mathcal{L}(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad (20)$$

El requisito de hermeticidad de δW_{21} está satisfecho si W_{21} es hermitico, lo cual implica la misma propiedad para el operador $\mathcal{L}(x)$. Para que las relaciones entre los estados en σ_1 y en σ_2 estén caracterizadas de una forma invariante, es decir, para poder hablar de estados inicial y final, la densidad lagrangiana ha de ser un escalar respecto a las transformaciones propias de Lorentz, que preservan la ordenación temporal de σ_1 , inicial, y σ_2 , final.

En el caso más general $\mathcal{L}(x)$ se escribe por medio de operadores de creación y de aniquilación en el espacio de Fok. Tal densidad lagrangiana determina

las condiciones dinámicas del sistema en cada uno de los puntos universo (x) entre las superficies espaciales σ_1 y σ_2 , y depende explícitamente no solamente de las coordenadas del punto, sino también de otros parámetros necesarios para determinar completamente estas condiciones dinámicas. Por ejemplo $\mathcal{L}(x)$ puede ser una suma

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_0(x) + g\mathcal{L}_1(x) \quad (21)$$

de dos densidades lagrangianas acopladas por medio de un parámetro g .

El principio dinámico de Schwinger (1) se escribe así:

$$\begin{aligned} & \delta \langle \sigma_2, \varphi | \varphi, \sigma_1 \rangle = \\ & = \frac{-i}{\hbar} \langle \sigma_2, \varphi | \delta \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d^4x \mathcal{L}(x) | \varphi, \sigma_1 \rangle \end{aligned} \quad (22)$$

Tal principio da ecuaciones covariantes relativistas cuando calculemos variaciones respecto a parámetros cuyas propiedades en relación con las transformaciones de Lorentz estén perfectamente definidas, es decir, que sean escalares, vectores... universo.

Para obtener la variación dinámica de la función de transformación $\delta \langle \sigma, \varphi | \varphi, \sigma \rangle$ según (22), hemos de definir la clase de variaciones a las que se refiere el postulado fundamental (19). La integral (20) se extiende a todo el espacio de Minkowski entre las superficies inicial σ_1 y final σ_2 . Tal volumen tetra-dimensional está limitado por un cilindro de bases σ_1 y σ_2 y tiene una superficie lateral Σ en el infinito.

Las variaciones con relación a un parámetro de la acción W_{12} han de calcularse con respecto a "toda" aparición del parámetro en la definición de la misma (20). Así, por ejemplo, si el parámetro g entra únicamente como parámetro de acoplamiento en la forma (21), es decir, si \mathcal{L}_0 y \mathcal{L}_1 no contienen g , deberemos escribir (22) así

$$\begin{aligned} & \frac{\delta}{\delta g} \langle \sigma_2, \varphi | \varphi, \sigma_1 \rangle = \\ & \frac{-i}{\hbar} \langle \sigma_2, \varphi | \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d^4x \mathcal{L}_1(x) | \varphi, \sigma_1 \rangle \end{aligned} \quad (23)$$

expresión que da la derivada dinámica de la función de transformación respecto al parámetro de

acoplamiento. El operador acción W_{12} debe ser considerado funcional —y no función— de los parámetros que contiene.

La coordenada x_μ del punto universo x figura en (20) en la ecuación de las superficies espaciales σ_1 y σ_2 . La densidad lagrangiana $\mathcal{L}(x)$ contiene operadores —a los que llamaremos campos cuánticos—; y sus derivadas, todos formados a partir de los de creación y aniquilación. En general, deberemos variar infinitesimalmente las superficies inicial y final de forma que la acción no se calcula en la misma parte del espacio de Minkowski, sino en una región ligeramente modificada limitada por $\sigma_1 + \delta\sigma_1$ y por $\sigma_2 + \delta\sigma_2$. Esto corresponde a una traslación o rotación rígida de la región donde se calcula la integral en (20). Simultáneamente debemos también modificar los operadores de campo. El procedimiento es igual al que se sigue en la Mecánica Clásica.

Para el caso en que sólo varíemos las superficies σ_1 y σ_2 respecto a una coordenada x_μ se obtiene una expresión de esta forma:

$$\delta_{x_\mu} W_{21} = P_\mu^{(2)} \delta x_\mu^{(2)} - P_\mu^{(1)} \delta x_\mu^{(1)} \quad (24)$$

donde $P_\mu^{(1)}$ es el momento canónico conjugado de x_μ en la superficie σ_1 .

Esto puede servir para definir operadores canónicos conjugados. Pues si sólo modificamos la superficie σ_2 se tiene

$$\delta_{x_\mu} W_{21} = P_\mu^{(2)} \delta x_\mu^{(2)} \quad (25)$$

cuando δx_μ en σ_1 es nula. Esta definición es completamente general.

Obsérvese que al estudiar las relaciones de incertidumbre no pudimos dar una estructura dinámica a P_μ ni a X_μ . Ahora definimos P_μ por medio de las variaciones de la acción del sistema, lo cual le hace peculiar de cada sistema físico. P_μ aparecerá así escrito en función de los operadores de creación y aniquilación. En cambio, no podemos dar la estructura de X_μ ; y esto es así por haber definido la acción (20) en el espacio de Minkowski por medio del soporte continuo de espacio-tiempo.

No queremos profundizar más en estas materias sobre las que volveremos al estudiar la formulación relativista de la Dinámica Cuántica. En los apartados siguientes estudiaremos la aproximación no relativista en la que el tiempo y su variable canónica

(1) J. Schwinger.—*Phys. Rev.*, 82, 914, 1951.

conjugada, el hamiltoniano, entran de manera preponderante.

A fin de aclarar las ideas anteriores vamos a aplicar el principio dinámico de Schwinger a una partícula material de masa en reposo m_0 no sometida a la influencia de fuerza externa alguna, es decir, para un sistema formado por una sola partícula material libre. Evidentemente, nunca podremos tener un sistema relativista con una sola partícula, pues eliminamos así la posibilidad esencial para los fenómenos de altas energías de creación y aniquilación de partículas. Este ejemplo, pues, representará la realidad física cuando estos últimos fenómenos sean despreciables.

Puesto que W_{21} ha de ser un escalar y el único escalar que podemos constituir en este caso es el intervalo ds dada la propiedad de grupo (11) de la acción deducimos que

$$W_{21} = + m_0 c \int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} ds \quad ds = \sqrt{+ (dx_\mu)^2} \quad (26)$$

integral a lo largo de la línea universo de la partícula. Se introduce la velocidad de la luz para que W_{21} tenga las dimensiones de la acción. La integral se extiende desde un punto universo inicial $x^{(1)}$ hasta un punto universo final $x^{(2)}$.

Consideremos el cambio rígido en la región de integración; el nuevo dominio de integración se extenderá desde $x^{(1)} + \delta x^{(1)}$ hasta $x^{(2)} + \delta x^{(2)}$. Por consiguiente

$$\begin{aligned} \delta W_{21} &= + m_0 c \int_{x^{(1)} + \delta x^{(1)}}^{x^{(2)} + \delta x^{(2)}} ds - m_0 c \int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} ds = \\ &= + m_0 c \int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} \delta \sqrt{+ dx_\mu^2} = \\ &= + m_0 c \int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} \frac{+ dx_\mu \cdot \delta dx_\mu}{\sqrt{+ dx_\mu^2}} = m_0 c \int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} u_\mu \delta dx_\mu \end{aligned} \quad (27)$$

puesto que $\frac{dx_\mu}{ds} = u_\mu$ son los componentes de la

velocidad universo. Integrando por partes iguales se tiene

$$\begin{aligned} \delta W_{21} &= m_0 c u_\mu \delta x_\mu \left| \frac{x^{(2)}}{x^{(1)}} - m_0 c \int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} \frac{\delta x_\mu}{x^{(1)}} du_\mu = \right. \\ &= m_0 c u_\mu \delta x_\mu \left| \frac{x^{(2)}}{x^{(1)}} - m_0 c \int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} \frac{\delta x_\mu}{x^{(1)}} \omega_\mu ds \right. \end{aligned} \quad (28)$$

donde hemos utilizado la definición de la aceleración universo $\omega_\mu = \frac{du_\mu}{ds}$. El principio de determinismo requiere que todas las propiedades dinámicas de la partícula en un punto universo cualquiera estén determinadas por cantidades que sólo dependen de las coordenadas de ese punto. Por consiguiente, la integral en (28) ha de ser nula, de donde deducimos que $\omega_\mu = 0$ para toda partícula libre. Entonces (28) se convierte en

$$\delta W_{21} = m c u_\mu^{(2)} \delta x_\mu^{(2)} - m c u_\mu^{(1)} \delta x_\mu^{(1)} \quad (29)$$

de donde deducimos que el vector universo de una partícula de masa en reposo m_0 es $P_\mu = m_0 c u_\mu$ expresión bien conocida.

La ecuación (25) da la estructura dinámica de los operadores P_μ que mueven el sistema en la dirección X_μ . Para obtenerlos hemos producido una traslación rígida de la acción del sistema; si hubiéramos realizado una rotación rígida de la acción, hubiéramos obtenido los operadores —momento angular— que generan las rotaciones.

Es conveniente aclarar el nuevo aspecto de las variables canónicas conjugadas definidas por medio de las variaciones de la acción, como consecuencia de las relaciones de conmutación (20) que han de satisfacer. A fin de incluir en la Mecánica Cuántica un hecho experimental, vimos que, por ejemplo, P_μ podía realizar traslaciones, no del sistema, sino de los ejes $|x\rangle$ en los cuales representamos el estado del sistema. Pero al obtener la estructura dinámica de P_μ como consecuencia del principio de acción, es decir, al escribir P_μ en función de otros operadores tales como los de creación y aniquilación directamente ligados a la forma particular como hemos definido la acción de un sistema determinado, el operador P_μ genera traslaciones dinámicas del sistema físico y no de los ejes. Es decir, si $|\varphi, \sigma\rangle$

es el estado del sistema en la superficie espacial σ , el vector $\left(1 + \frac{i}{\hbar} P_\mu \delta x_\mu\right) |\varphi, \sigma\rangle$ es el estado del mismo sistema en una superficie infinitamente próxima obtenida de la anterior por medio de la traslación δx_μ en la evolución dinámica causada por la acción de donde hemos obtenido los operadores P_μ .

Los operadores P_μ no son independientes; entre ellos existe una relación como consecuencia de que se definen como variaciones de un mismo operador, la acción.

Para introducir la dinámica manejamos el espacio de Minkowski y una familia dada σ_λ de superficies espaciales del mismo. Al hacer esto damos a las coordenadas distinto cometido dinámico que a los momentos P_μ , a pesar de que cinemáticamente la tienen igual. Lo cual hace que no podamos dar una estructura dinámica del espacio, es decir, no podemos escribir el operador X_μ por medio de otros operadores más elementales; las coordenadas sólo adquieren sentido a través de su soporte.

Pero las cuatro coordenadas x_μ tampoco son independientes; pues conocidas tres de ellas y la superficie espacial en que realizamos las medidas, la cuarta está determinada. De todo lo anterior se desprende que las cuatro cantidades X_μ son cinemáticamente dependientes, mientras que los cuatro momentos P_μ son dinámicamente dependientes.

Si P_μ son los generadores de los movimientos de traslación del sistema, se ha de verificar

$$P_\mu |O\rangle = 0 \quad (30)$$

puesto que el vacío no puede depender de la superficie espacial.

6.—Evolución temporal.

Al no exigir la condición de covariancia relativista para la Mecánica Cuántica, es decir, al restringir la aplicación de esta mecánica a sistemas físicos en que las partículas se muevan a velocidades mucho menores que las de la luz, podemos limitarnos a estudiar la evolución temporal del sistema, idea que coincide con la que ordinariamente llamamos movimiento.

Queremos ver cómo un sistema evoluciona en el tiempo. Para ello orientamos los procesos de medida describiendo los que son "anteriores" o "posteriores", mediante un parámetro t que nos permite distinguir entre estos conceptos de una forma cuan-

titativa. De hecho, puesto que tales mediciones siempre tienen lugar en un intervalo finito de tiempo, no es razonable físicamente decir que tales procesos son realizados en un instante t , pero, como en Mecánica Clásica, ésta es una idealización conveniente. Sin embargo, tal idealización puede, al menos aparentemente, estar en contradicción con el principio de indeterminación de Heisenberg

$$\Delta t \cdot \Delta E \geq \frac{1}{2} \hbar \quad (31)$$

que exigiría en este caso una incertidumbre infinita en el conocimiento del valor de la energía.

Las superficies que en la aproximación no relativista corresponden a la familia σ_λ , son las $t = \lambda = \frac{1}{c} x_4$. En este caso consideramos las tres variables x_1, x_2, x_3 como arbitrarias, mientras que la cuarta x_4 está fijada por la familia de superficie $t = \text{constante}$.

Para estudiar la evolución temporal será suficiente presentar la acción de la siguiente forma:

$$W_{21} = \int_{t_1}^{t_2} dt L(t) \quad (32)$$

donde

$$L(t) \equiv \int_V d^3x \mathcal{L}(x) \quad , \quad d^3x \equiv dx_1 dx_2 dx_3 \quad (33)$$

integral extendida a todo el volumen V tridimensional en que se halla el sistema. El operador $L(t)$ se llama lagrangiano.

La definición (32) de la acción para los sistemas no relativistas permite calcular la estructura dinámica de P_4 , pero no de P_1, P_2, P_3 .

La dinámica del sistema estará expresada en la relación

$$P_4 = P_4(P_1, P_2, P_3) \quad (34)$$

entre el operador P_4 y los otros tres cuya estructura desconocemos; esta relación será precisamente la estructura de P_4 .

Así como hemos elegido la coordenada tiempo t en lugar de la x_4 en la Mecánica Cuántica no relativista utilizaremos el hamiltoniano H , operador correspon-

diente a la energía del sistema cuya relación con P_4 es

$$P_4 = i \frac{H}{c}$$

Por consiguiente, el tiempo es la variable canónica conjugada de $-H$.

En la Mecánica Cuántica no relativista no es preciso conocer la densidad lagrangiana; generalmente se nos da el lagrangiano, del cual construimos el hamiltoniano mediante la relación

$$\frac{\delta W}{\delta t} = -H \quad (35)$$

según (25). Pero en muchos casos es suficiente escribir directamente el hamiltoniano como la energía del sistema. Así, para una partícula de masa m y moviéndose en un potencial $V(x)$, el hamiltoniano es

$$H = \frac{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2}{2m} + V(X) \quad (36)$$

suma de las energías cinética y potencial.

En la aproximación no relativista pueden no existir los fenómenos de creación-aniquilación de partículas, por lo que en algunos casos el lagrangiano no contendrá operadores de creación y aniquilación; entonces el número de componentes del sistema es constante en el movimiento.

El principio de acción en este caso es

$$\delta \langle t_2, \varphi | \varphi, t_1 \rangle = \frac{-i}{\hbar} \langle t_2, \varphi | \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(t) | \varphi, t_1 \rangle \quad (37)$$

principio dinámico diferencial que caracteriza la evolución temporal del sistema.

Advirtamos que H en (35) puede depender explícitamente del tiempo; en tal caso nos hallamos ante un sistema no conservativo.

7.—Imágenes de la evolución temporal.

Llamábamos imágenes de la evolución dinámica de un sistema físico respecto a un parámetro λ a las distintas formas equivalentes de presentar tal evolución. La equivalencia entre las imágenes es debida al hecho de que los valores esperados de un observable son las cantidades que tienen sentido físico;

ahora bien, para calcular tales valores manejamos los conceptos de vector estado y operador observable; y, por consiguiente, se puede distribuir la acción dinámica de una forma arbitraria entre los estados y los observables si, al hacer esta distribución arbitraria, mantenemos constante el valor esperado.

Las imágenes temporales del movimiento surgen al considerar la evolución temporal del sistema. En particular, llamamos imagen de Schrödinger aquella en que toda la acción dinámica del sistema actúa sobre los estados mientras que los observables permanecen dinámicamente constantes. En la imagen de Heisenberg son los observables los que varían dinámicamente en el tiempo mientras que los estados permanecen constantes. Intermedia entre las dos anteriores es la imagen de Tomonaga (1), que distribuye la acción dinámica entre los observables y los estados; los observables son movidos por parte de la acción; los estados, por el resto. La imagen de Tomonaga es la que más aplicaciones tiene; incluso ha sido posible introducirla en la Mecánica Clásica (2).

Es conveniente adquirir una idea clara del significado físico de cada una de estas imágenes. Supongamos que tratamos de representar el movimiento de una partícula en Mecánica Clásica respecto a tres ejes de coordenadas cartesianas. El observador, que mide las distancias de los ejes a la partícula durante el movimiento, permanece inmóvil. A fin de traducir este ejemplo al lenguaje de la Mecánica Cuántica supondremos que la posición de la partícula respecto al observador corresponde a los observables, mientras que los ejes de coordenadas representan los estados. El observador obtendrá el mismo movimiento de la partícula respecto a los ejes: *a*) cuando sea la partícula la que se mueve —respecto al observador—, mientras que los ejes permanecen fijos (imagen de Heisenberg); *b*) cuando sean los ejes los que se mueven —respecto al observador, pero en sentido contrario al movimiento de la partícula en el caso anterior—, mientras que la posición de la partícula es constante (imagen de Schrödinger); *c*) cuando los ejes y la partícula se muevan respecto del observador en sentido contrario, aunque con menos energía que en los casos anteriores (imagen de Tomonaga).

Pasemos ahora a describir matemáticamente estas tres imágenes del movimiento. Partiremos, desde luego, del principio variacional de acción dado por

(1) S. TOMONAGA: *Prog. Theor. Phys.*, vol. I, 1946.

(2) L. M. GARRIDO: *Perturbations in Classical Mechanics*, *Proc. Phys. Soc.*, A, 76, 33 (1960).

Schwinger (22). Sea A_i un observable cualquiera; escribamos $A_i \equiv A_i(t)$ para indicar que vamos a considerar la evolución temporal del mismo. Sea $|\varphi\rangle \equiv |\varphi, t\rangle$ un estado en el que también hacemos patente su posible dependencia dinámica del tiempo. El valor esperado del observable es

$$\langle A_i \rangle_\varphi = \langle t, \varphi | A_i(t) | \varphi, t \rangle \quad (38)$$

el cual irá variando conforme la evolución temporal del sistema tenga lugar. Obtendremos las imágenes del movimiento al atribuir la variación temporal de (38), bien sobre los estados, bien sobre los observables; observemos que aunque hemos escrito explícitamente en (39) la posible dependencia dinámica de A_i y de $|\varphi\rangle$ de la variable tiempo t , tal dependencia existirá según la imagen del movimiento que elijamos.

En el ejemplo presentado para ilustrar gráficamente el significado físico de imagen del movimiento estudiamos el movimiento de una partícula respecto a unos ejes coordenados; pero el único que podría darse cuenta de la posibilidad de describir este movimiento de las distintas formas que llamamos imágenes era el observador, al cual suponíamos inmóvil. Un observador rígidamente unido a la partícula o a los ejes coordenados es incapaz de apreciar las imágenes del movimiento.

También ahora necesitamos introducir un observador inmóvil respecto al movimiento cuyas imágenes tratamos de describir. El observador dispondrá de aparatos de medida con los que podrá apreciar cuanto ocurra en su derredor. Tales aparatos medirán los valores de un conjunto completo de observables B , y, por consiguiente, el observador podrá representar el movimiento mediante los vectores unidad $|b^\alpha, t_0\rangle$ inmóviles, como él, en el tiempo. Es decir, t_0 será fijo. El observador calculará el valor esperado de A_i en el estado $|\varphi\rangle$ con el uso de sus aparatos de la siguiente forma

$$\langle A_i \rangle_\varphi = \sum_{\alpha, \beta} \langle t, \varphi | b^\alpha, t_0 \rangle \langle t_0, b^\beta | A_i(t) | b^\beta, t_0 \rangle \langle t_0, b^\beta | \varphi, t \rangle \quad (39)$$

donde hicimos uso de la relación de totalidad. Al escribir $|b^\alpha, t_0\rangle$ suponemos que t_0 no puede variar, pues el observador dispone de los mismos estados unidad en cualquier instante de tiempo.

Veamos ahora cuál es la variación de $\langle A_i \rangle_\varphi$ ob-

tenida a partir del principio dinámico de Schwinger.

$$\begin{aligned} \delta \langle A_i \rangle_\varphi &= \sum_{\alpha, \beta} (\delta \langle t, \varphi | b^\alpha, t_0 \rangle) \\ &\langle t_0, b^\alpha | A_i(t) | b^\beta, t_0 \rangle \langle t_0, b^\beta | \varphi, t \rangle + \\ &+ \sum_{\alpha, \beta} \langle t, \varphi | b^\alpha, t_0 \rangle \\ &\langle t_0, b^\alpha | A_i(t) | b^\beta, t_0 \rangle (\delta \langle t_0, b^\beta | \varphi, t \rangle) \quad (40) \end{aligned}$$

Al calcular $\delta \langle t, \varphi | b^\alpha, t_0 \rangle$ para variaciones del tiempo obtenemos

$$\begin{aligned} \delta \langle t_0, b^\beta | \varphi, t \rangle &= -\delta t \frac{i}{\hbar} \langle t_0, b^\beta | H(t) | \varphi, t \rangle \\ \delta \langle t, \varphi | b^\alpha, t_0 \rangle &= \delta t \frac{i}{\hbar} \langle t, \varphi | H(t) | b^\alpha, t_0 \rangle \quad (41) \end{aligned}$$

puesto que $|b^\alpha, t_0\rangle$ ha de permanecer constante en el tiempo. Antes de pasar adelante queremos aclarar la diferencia que existe entre los conceptos implicados en la notación $H(t)$, donde el parámetro t se refiere a la posible dependencia *explícita* en el tiempo del hamiltoniano, y la notación $A_i(t)$, en que el mismo parámetro exprese en este caso la posible dependencia *total* —dinámica y explícita— del operador A_i respecto al tiempo.

Sustituyendo (41) en la relación (40) tendremos la expresión para $\delta \langle A_i \rangle_\varphi$, que medirá el observador que estudia el movimiento del sistema físico. A partir de esta expresión para la variación del valor esperado obtendrá el observador las imágenes del movimiento

$$\begin{aligned} \delta \langle A_i \rangle_\varphi &= \sum_{\alpha, \beta} \frac{i}{\hbar} \delta t \\ &\left\{ \langle t, \varphi | H(t) A_i(t) | \varphi, t \rangle - \langle t, \varphi | A_i(t) H(t) | \varphi, t \rangle \right\} \quad (42) \end{aligned}$$

La imagen de Schrödinger aparecerá al considerar que (42) es generada por la variación dinámica de los estados mientras que los observadores satisfacen

$$\frac{\partial}{\partial t} A_i(t) = 0 \quad (43)$$

ecuación que llamaremos de Heisenberg en la imagen de Schrödinger. En este caso hemos de interpretar (40) de la siguiente forma

$$\delta \langle A_i \rangle_\varphi = \langle A_i \rangle_\varphi - \langle A_i \rangle_\varphi + \delta \varphi \quad (44)$$

lo cual equivale a escribir

$$\delta \langle t_0, b^\beta | \varphi, t \rangle = \langle t_0, b^\beta | (\delta | \varphi, t \rangle) \quad (45)$$

y, por consiguiente, considerando que $\langle t_0, b^\beta |$ es un estado unidad cualquiera, ya que nuestra teoría es independiente de los estados unidad utilizados por el observador para representar sus mediciones, aparece la ecuación llamada de Schrödinger en imagen de Schrödinger, a saber:

$$i\hbar \frac{\delta}{\delta t} | \varphi, t \rangle = H(t) | \varphi, t \rangle \quad (46)$$

Generalmente, los estados $| \varphi, t \rangle$ no contienen dependencia explícita en el tiempo. A partir de ahora consideraremos que así ocurre siempre.

Para obtener la imagen de Heisenberg, el observador deberá considerar que (42) es producida en su totalidad por la variación de los observables. En primer lugar establecerá la ecuación de Schrödinger en imagen de Heisenberg.

$$\frac{\delta}{\delta t} | \varphi, t \rangle = 0 \quad (47)$$

En la imagen de Heisenberg los estados son constantes. Para obtener la ecuación del movimiento de los observables escribiremos

$$\delta \langle A_i \rangle_\varphi = \langle \delta A_i \rangle_\varphi$$

lo cual nos da

$$\frac{\delta}{\delta t} A_i(t) = \frac{i}{\hbar} \left[H(t), A_i(t) \right] \quad (48)$$

que frecuentemente es presentada de la siguiente forma:

$$\frac{d A_i(t)}{dt} = \frac{\delta A_i(t)}{\delta t} + \frac{i}{\hbar} \left[H(t), A_i(t) \right] \quad (49)$$

Esta es la ecuación de Heisenberg en la imagen de Heisenberg. Ecuación (49) no introduce dependencia dinámica en $H(t)$

$$\frac{\delta}{\delta t} H(t) = \frac{i}{\hbar} \left[H(t), H(t) \right] = 0$$

Por eso, si el hamiltoniano depende del tiempo lo hace explícitamente.

La imagen del movimiento que tiene mayor número de aplicaciones es la de Tomonaga, la cual distribuye la acción dinámica sobre los estados y sobre los observables de una manera arbitraria. Dividamos en dos partes W^0 y W^1 el operador acción W

$$W = W^0 + W^1 \quad (50)$$

Una separación semejante tendrá lugar en los operadores lagrangiano y hamiltoniano

$$\begin{aligned} L &= L_0 + L_1 \\ H &= H_0 + H_1 \end{aligned} \quad (51)$$

Aunque esta división de la acción puede ser totalmente arbitraria, generalmente suele hacerse de forma que H_0 genera la evolución temporal de un movimiento perfectamente conocido, y H_1 es considerada entonces como una perturbación.

Los observables en este caso son movidos por H_0 y los estados por H_1 . De (42) deduciremos en este caso las siguientes ecuaciones

$$i\hbar \frac{\delta}{\delta t} | \varphi, t \rangle = H_1[t] | \varphi, t \rangle \quad (52)$$

$$\frac{\delta}{\delta t} A_i[t] = \frac{i}{\hbar} \left[H_0[t], A_i[t] \right] \quad (53)$$

donde ponemos paréntesis cuadrados para indicar que los hamiltonianos $H_1[t]$ y $H_0[t]$, además de contener la dependencia explícita en el tiempo, pueden también tener una dependencia dinámica, ya que estos hamiltonianos, por ser operadores, también han de satisfacer la ecuación (53).

De hecho, $H_0[t] = H_0(t)$, ya que la ecuación de Heisenberg en la imagen de Tomonaga no genera variación temporal dinámica para $H_0[t]$, puesto que

$$\frac{\delta}{\delta t} H_0[t] = \frac{i}{\hbar} \left[H_0[t], H_0[t] \right] = 0 \quad (54)$$

En la imagen de Heisenberg el estado es constante, no depende dinámicamente del tiempo, cuando la interacción $H_1[t]$ es nula.